

N.º 129.

INVESTIGACIONES GEOMETRICAS

POR

FABRICIANO SANTOS GONZALEZ



R
691

EL ARAY (Logroño)
Imp. de F. S. G.
1911

THE UNIVERSITY OF CHICAGO



1. Geometría - Estudios, ensayos, conferencias, etc.
515(04) C. 39059

INVESTIGACIONES GEOMETRICAS

POR

FABRICIANO SANTOS GONZALEZ

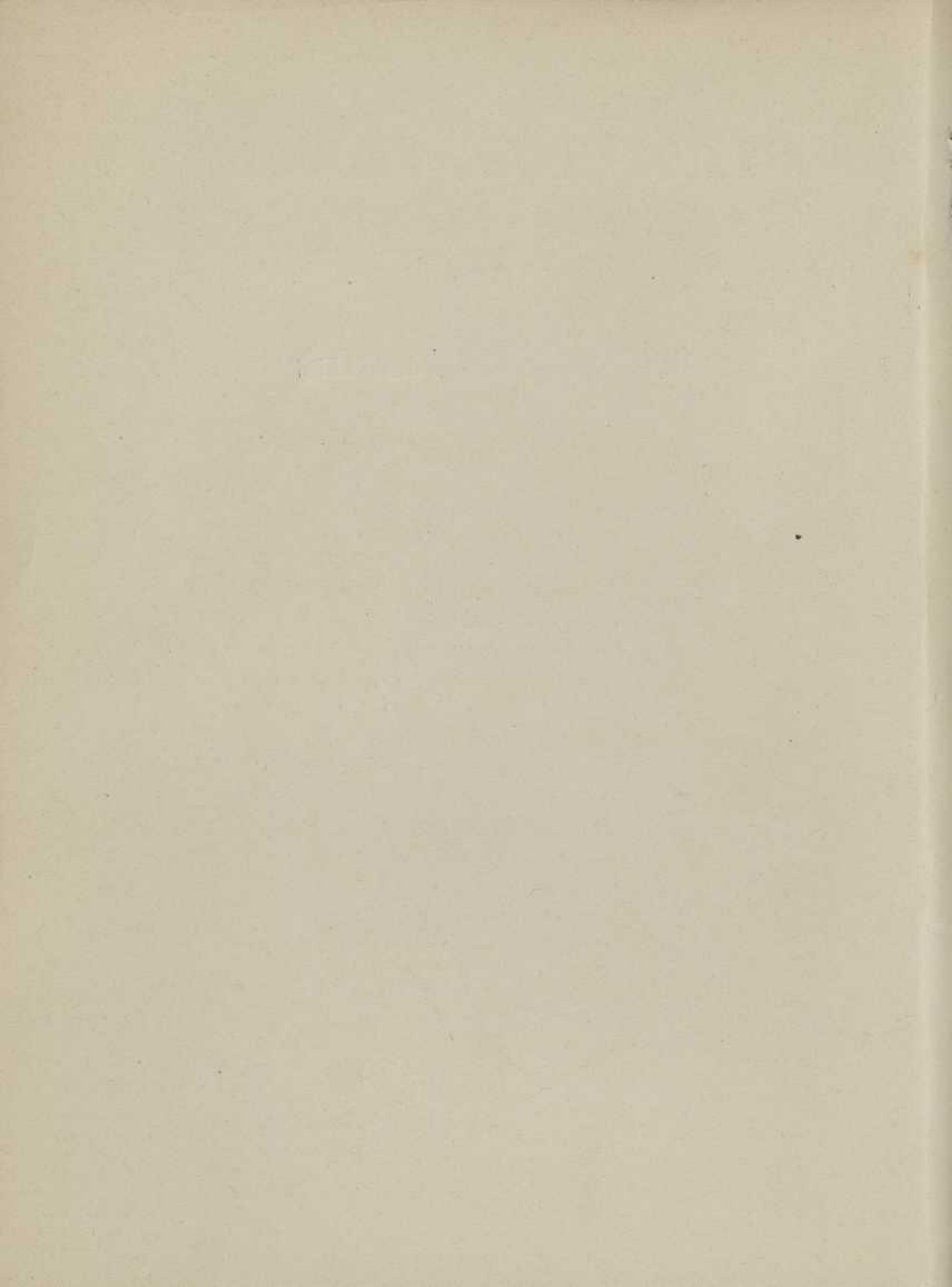


Fabriciano Santos Gonzalez

EZCARAY (Logroño)
Imp. de F. S. G.
1911



* 20-825



INVESTIGACIONES GEOMETRICAS

CAPITULO I

ANGULOS CORTADOS POR UNA RECTA

1. La magnitud de un ángulo depende, como muy bien se sabe, de la mayor ó menor abertura de sus lados, y para compararle con otro, es imprescindible valerse de sus correspondientes arcos trazados con el mismo radio.

Sin embargo, vamos á estudiar los ángulos con relacion á una recta que corte sus lados en diferentes posiciones, y con relación tambien, de la distancia de dicha recta al vértice.

2. Empecémos por considerar el caso mas sencillo en que la recta que corta á el ángulo sea cuerda de un arco correspondiente á dicho ángulo.

Siendo (fig. 1) el ángulo MON y la recta MN , no hay necesidad de demostrar, que cuanto mayor sea MN por ejemplo cuando tenga la magnitud $M'N'$ mayor será el ángulo MON' correspondiente á dicha recta $M'N'$ y cuanto más distante del vértice O , se encuentre la recta MN , por ejemplo en la posición $M''N''$ el ángulo $M''ON''$ correspondiente á $M''N''$ será menor.

3. Consideremos ahora, una recta cualquiera que para mayor claridad la suponemos con un punto común con la MN por ejemplo la recta MB y todas las que parten del punto M . como la MD ,..... en la dirección de la abertura del ángulo, que son cada vez mayores por oblicuas que se separan más de la per—

Fig. 1^a

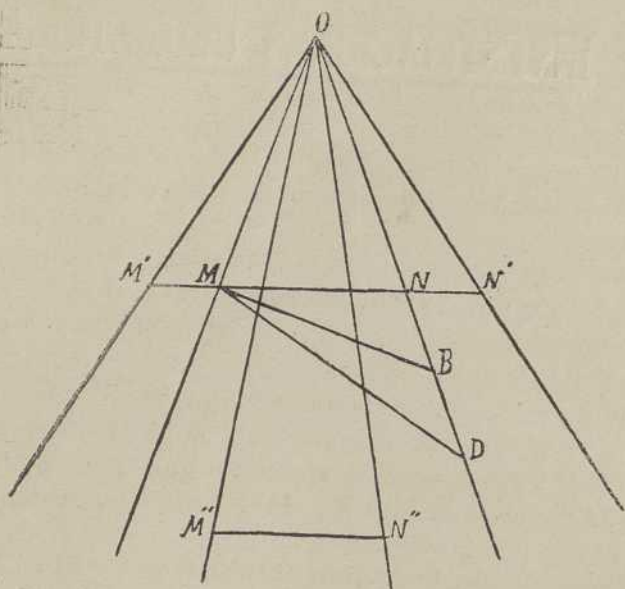
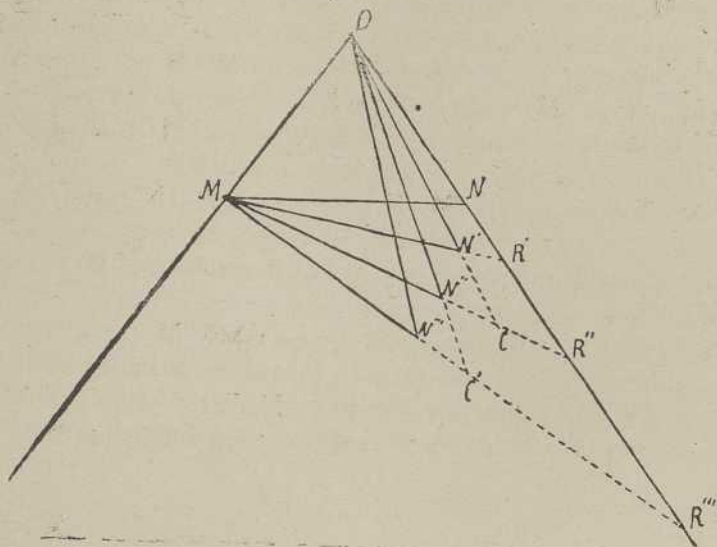


Fig. 2^a

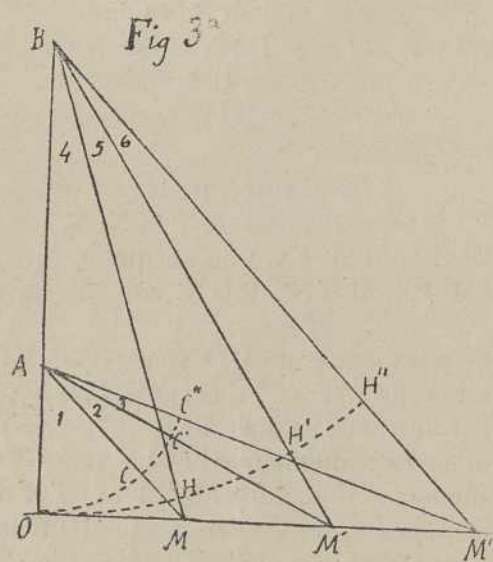


pendicular bajarla desde el punto M á la recta ON , y que necesariamente cae al otro lado de MN , y sirva siendo de diferente magnitud, para medir un mismo ángulo MON , deduciéndose fácilmente, que según que las rectas $MB, MD, \dots$ formen con los lados del ángulo MON ángulos más desiguales entre sí, tanto mayores tendrán que ser dichas rectas, es decir, que siendo los ángulos formados con un lado OM , cada vez más obtusos y los formados con el otro lado ON , cada vez más agudos, las rectas $MB, MD, \dots$ son oblicuas que se alejan cada vez más de la perpendicular y por consiguiente, de mayor longitud.

4. De lo expuesto se deduce, figura 2^a, que para una misma recta MN que toma las posiciones MN', MN'', MN''' en la dirección de la abertura del ángulo MON , y en los que el punto M permanece fijo, los ángulos MON, MON', MON'' son sucesivamente más pequeños.

En efecto, para el ángulo MON las rectas MR', MR'', MR''' etc. que resultan de la prolongación de las MN', MN'', MN''' son oblicuas que se separan cada vez más de la perpendicular, ó que sus ángulos en M son sucesivamente mayores, y los $MNO, MR'O, MR''O$ sucesivamente menores, y tenemos que siendo MN' menor que MR' la recta ON' tiene que caer dentro del ángulo $MO R'$ por consiguiente MON' es menor que $MO R'$; para la MN'' mayor que MC la recta ON'' tiene que caer dentro del ángulo $MO C$, y por tanto MON'' es menor que $MO C$, y así puede demostrarse de los demás ángulos; de manera que el ángulo MON es mayor que MON' y este que el MON'' quedando demostrado que para una misma recta que corta los lados de un ángulo es este tanto menor, cuanto mayor es la diferencia que forma la secante con los lados del ángulo.

5. Si tenemos (figura 3^a) dos rectas $OMM'M''$ y OAB perpendiculares entre sí, y desde un punto cualquiera de la segunda OAB trazamos rectas que pasen por los puntos M, M', M'' de división de la primera dividida previamente en partes iguales, tendremos:



1° Que los ángulos que entre si forman la perpendicular OAB y las demás rectas que á partir desde un mismo punto terminan en los puntos de division de la $OMM'M''$, son más pequeños cuánto más se alejan de la perpendicular, para cualquiera que sea la posición del punto desde donde parten las rectas.

2° Que á medida que el punto desde donde parten las rectas se aleja del pie de la perpendicular, los ángulos que entre si forman las rectas que parten del punto referido aunque no llegan á serlo tienden á hacerse iguales.

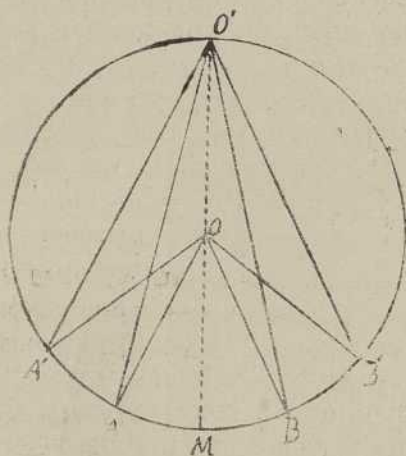
En efecto, sean (figura 3^a) la recta $OMM'M''$ dividida en las partes iguales $OM, MM', M'M''$, y la OAB , perpendicular á la $OMM'M''$ en el punto O ; si desde el punto A trazamos las rectas AM, AM', AM'' el ángulo OAM será mayor que el MAM' y este, que el $M'AM''$ por lo supuesto anteriormente en (1) que para una misma recta ó rectas iguales, es tanto menor el ángulo opuesto á dicha recta, cuanto mayor es la diferencia de los ángulos $AMM', AM'M''$ que dicha recta forma con los la los del ángulo, y ademas, segun se ha probado en (2) que para una misma recta cuanto más diste del vértice tanto menor es el ángulo, circunstancias amdas, que concurren en los ángulos $OAM, MAM', \dots$

Para los ángulos que parten de otro punto cualquiera, por ejemplo, B se puede repetir la misma demostracion.

Cuando el punto se aleja de O en la figura cuando se encuentra en B , los ángulos 4, 5 y 6 tenderán á hacerse iguales, ó en otros términos, se diferencian entre si menos que los 1, 2 y 3.

En efecto, las rectas BM, BM', BM'' forman con las $OM, MM', M'M''$ ángulos cuya desigualdad es mucho menor que la formada con las AM, AM', AM'' , y ademas, la distancia de las rectas $OM, MM', M'M''$ al vértice B es entre si proporcionalmente mucho menor que la de las mismas rectas al vértice A , y si trazamos los arcos OE, EC'' y $OH, H'H''$ tenemos que las partes $OH, HH', H'H''$, se aproximan más á las rectas iguales $OM, MM', M'M''$ que son su limite cuando el punto se

Fig 4.^a



encuentra en el infinito que las $OC\ CC'\ C''C'''$ y cuanto más distante se encuentre el punto B tanto más se aproximarán dichos arcos de modo que cuando el punto se encuentre en el infinito los arcos $OH\ HH'$ etc. se confunden con $OM\ MM'$ etc. y las $OB\ BM\ BM'$ se convierten en paralelas que pasan por los puntos O, M, M' y M''.

CAPITULO II

ANGULOS CON RELACION A UNA CIRCUNFERENCIA

6. Un ángulo cuyo vértice está en el centro de un círculo, tiene por medida el arco comprendido entre sus lados, y para estudiar los ángulos que tienen el vértice fuera del centro del círculo, les compararemos con los centrales.

Consideremos, figura 1^a, en primer lugar el ángulo en el centro AOB que tiene por bisectriz el diámetro MO' , si hacemos correr el vértice O á lo largo del diámetro permaneciendo constante el arco AB, es evidente, que el ángulo AOB disminuirá hasta llegar á O' en que se hace la mitad, ó si por el contrario, el ángulo AOB permanece constante, el arco AMB aumenta, y cuando el vértice O está situado en O el arco AMB' es el duplo de AB, de modo, que corriendo el punto O hásta O el ángulo disminuye si el arco permanece constante, ó por el contrario, aumenta el arco si el ángulo permanece constante; á esta clase de ángulos les llamaremos normales con relacion al arco y cuerda que subtienden, con la que forman dos ángulos iguales entre si; y á los demás ángulos, que con su cuerda correspondiente forman dos ángulos desiguales les llamaremos anormales, y

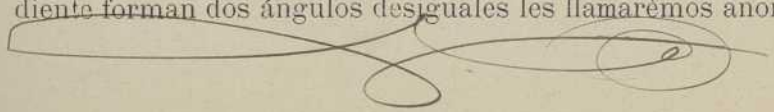
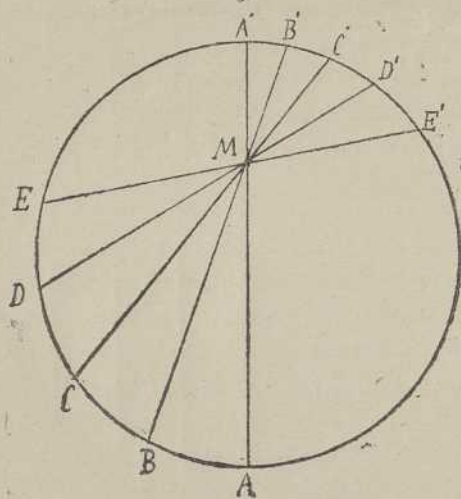


Fig 5.^a



les aplicaremos por tal motivo, con relación á sus cuerdas las reglas del capítulo primero.

De lo expuesto, se deduce que en los ángulos normales para un mismo ángulo, el arco que abrazan y su cuerda son tanto mayores, cuanto más disten del vértice; y para un mismo arco y cuerda, son tanto menores dichos ángulos, cuanto más disten del vértice; y en los anormales, considerando las cuerdas como secantes de los lados del ángulo, cuanto mayor sea la diferencia entre los ángulos que la cuerda forma con los lados del ángulo, mayor será la cuerda y su arco y menor el ángulo; ó expresado en otros términos, para un mismo ángulo cuanto más anormal sea á su cuerda y arco correspondiente, mayores serán el arco y cuerda, y para un mismo arco y cuerda cuanto más anormales sean á los lados del ángulo, menor será el ángulo.

7. Hemos estudiado el ángulo en función de la distancia del vértice al arco ó cuerda, y de su normalidad separadamente; y ahora, lo estudiaremos atendiendo simultáneamente á ambas circunstancias.

Supongamos (figura 5) los ángulos consecutivos iguales cuyo vértice M está entre el centro y la circunferencia, y que subtienden por un lado los arcos AB, BC, CD, á los que nos referiremos, y por el opuesto, los $A'B' < B'C' < C'D'$, que como corresponden á ángulos iguales, subtienden mayor arco los que más distante le tienen del vértice, y son además más anormales, por lo tanto, si la semisuma de los arcos correspondientes á los ángulos cuyo vértice es M, y que estan contruidos iguales ha de ser igual, se tiene que verificar que $AB > BC > CD$ de manera, que refiriendonos á los arcos AB, BC y CD, para ángulos iguales, subtienden mayor arco, los que más se acercan al diámetro que pasa por el vértice común, y para arcos iguales, son menores los ángulos que tambien más se aproximan al diámetro.

Se puede observar en estos ángulos, que aun cuando la distan—

Fig 6.^a

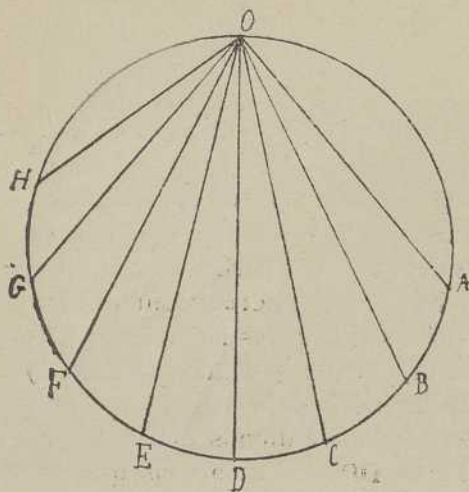
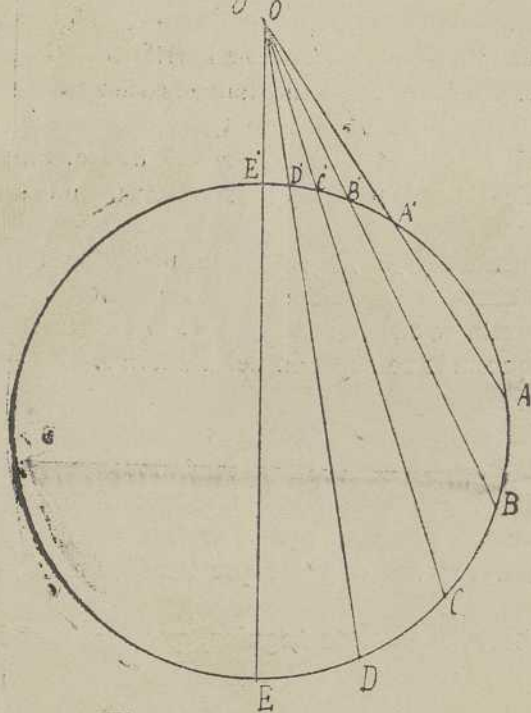


Fig 7.^a



cia del vértice al arco, está contrarrestada por la mayor anormalidad de los que más se apartan del diámetro, incluye más que la anormalidad, y son mayores los arcos que más distan de su vértice.

8. Cuando el vértice común (figura 6^a) se encuentra en la circunferencia, la mayor distancia del vértice al arco y su cuerda, está exactamente compensada con la mayor anormalidad, es decir, que para un mismo ángulo, cuanto más anormal sea más arco abrazan sus lados, y cuanto mayor sea su distancia del vértice al arco, mayor arco abraza también, y en el presente caso en que los ángulos son inscritos, y que tienen todos la misma medida, el más anormal es igual al más normal, pero que en cambio dista su arco más del vértice.

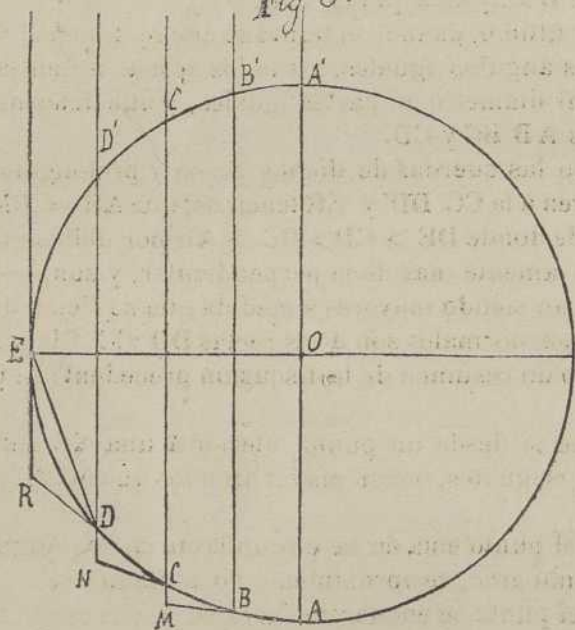
9. Cuando el punto se encuentra fuera de la circunferencia (figura 7^a) la condición de normalidad al contrario de cuando el vértice se encuentra dentro, supera á la relativa de la distancia del vértice al arco, es decir, que para ángulos iguales, los arcos son tanto mayores cuanto más anormales son los ángulos, ó lo que es lo mismo; para arcos iguales, los ángulos son tanto más pequeños, cuanto más anormales son ó más se separan del diámetro.

Los arcos que consideramos en este caso, lo mismo que en el primero, son los mayores para cada ángulo.

Se comprende fácilmente que la condición de normalidad disminuye sensiblemente, á medida que el vértice se va alejando; y la distancia relativa del vértice al arco, entre dos ángulos cualesquiera es comparativamente menor, por la mayor longitud de sus lados, y reduciéndonos á la (fig. 7^a) en la que los arcos AB , BC y CD se han construido iguales, los ángulos dependerán de la magnitud de los arcos $AB > BC > CD$; porque concurren las dos circunstancias de anormalidad y mayor distancia del vértice al arco, luego $AOB < BOC < COD$.

Supongamos sin embargo, que AOB no es menor que BOC y este que COD ; entonces serán iguales ó mayores. En el primer caso,

Fig 8^a



el arco AB será mayor que BC y este que CD y por razón de la semidiferencia de los arcos, el ángulo AOB tendrá que ser menor que BOC y este que COD . Si son mayores, entonces con mayor razón la semidiferencia de los arcos, nos da que el ángulo AOB es menor que el BOC y este que el COD .

10. Por último, cuando el punto se encuentra en el infinito, suponiendo los ángulos iguales, los lados se convierten en paralelas que cortan al diámetro en partes iguales, y que determinan (fig. 8^a) los arcos AB BC y CD ...

Trazando las cuerdas de dichos arcos y prolongandolas hasta que encuentren á la CC' DD' y ER tenemos; que $AB = BM$; $BC = CN$, y $CD = DR$ de donde $DE > CD > BC > AB$ por oblicuas que se separan sucesivamente más de la perpendicular, y sus arcos correspondientes, van siendo mayores á medida que se alejan del diámetro ó cuanto menos normales son á las rectas DD' CC' BB' y AA' .

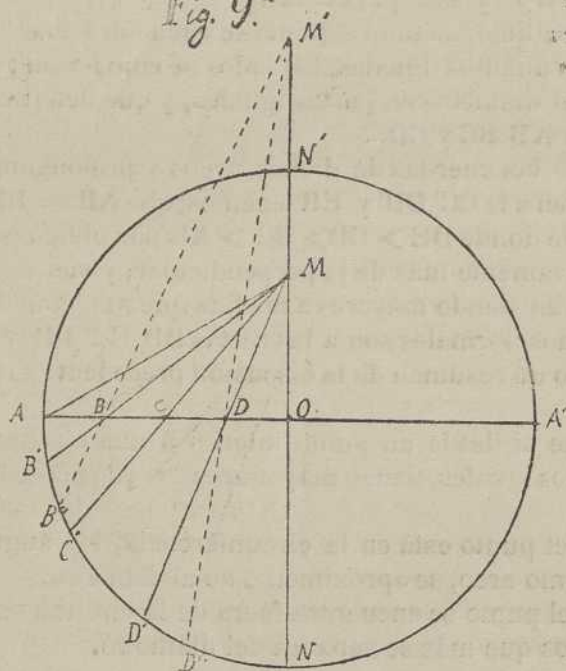
Haciendo un resumen de la discusión precedente se puede establecer:

1º. Que si desde un punto interior á una circunferencia, se trazan ángulos iguales, tienen mayor arco los que más se aproximan al diámetro.

2º. Si el punto está en la circunferencia, los ángulos iguales tienen el mismo arco, se aproximen ó no al diámetro.

3º. Si el punto se encuentra fuera de la circunferencia, tienen mayor arco los que más se separan del diámetro.

Fig. 9.^a



CAPITULO III

ÁNGULOS CON RELACIÓN Á LA CIRCUNFERENCIA Y AL DIÁMETRO.

11. Teorema. Si tenemos dos diámetros perpendiculares entre si, y desde un punto tomado en uno de ellos, se trazan rectas que pasen por los puntos de división del otro diámetro dividido previamente en partes iguales, se verifica;

1º. Que cuando el punto es interior al círculo, los arcos que determinan dichas rectas son menores á medida que se separan del diámetro.

2º. Que segun se va alejando el punto del centro de la circunferencia, los arcos tienden á hacerse iguales.

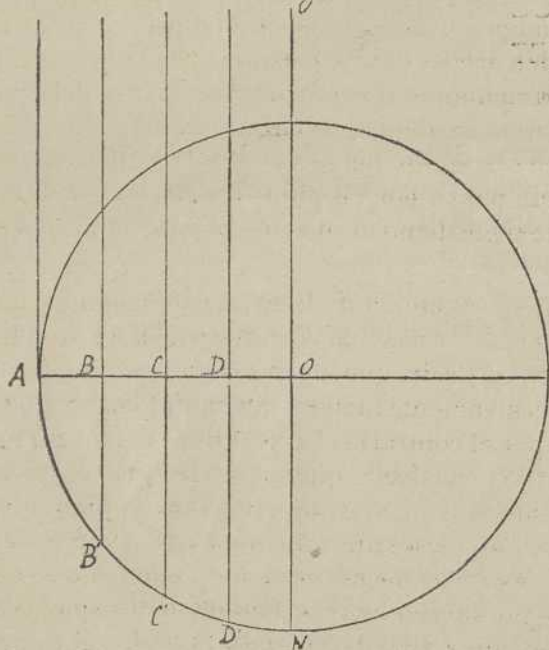
3º. Que existe un punto fuera de la circunferencia, en el que los arcos determinados por las rectas que pasan por los puntos de división del diámetro, son iguales y pasado dicho punto son mayores los que más se separan del diámetro.

Sea (figura 9ª) el punto M situado en el diámetro NN' perpendicular á AA', y dividido en n partes iguales que en la figura supondremos dividido en ocho, omitiendo las cuatro correspondientes á OA' por la simetria de la figura, vamos á probar que $AB' < B'C' < C'D' < D'N$. En efecto, tenemos demostrado que para un punto interior á un círculo, y ángulos iguales, los arcos que más se separan del diámetro que pasa por el punto son sucesivamente menores; en el caso presente, lo serán con tanta más razo, cuanto que los ángulos son sucesivamente menores por lo expuesto en (5).

Cuando el punto se encuentra en N', si los ángulos fueran igua-



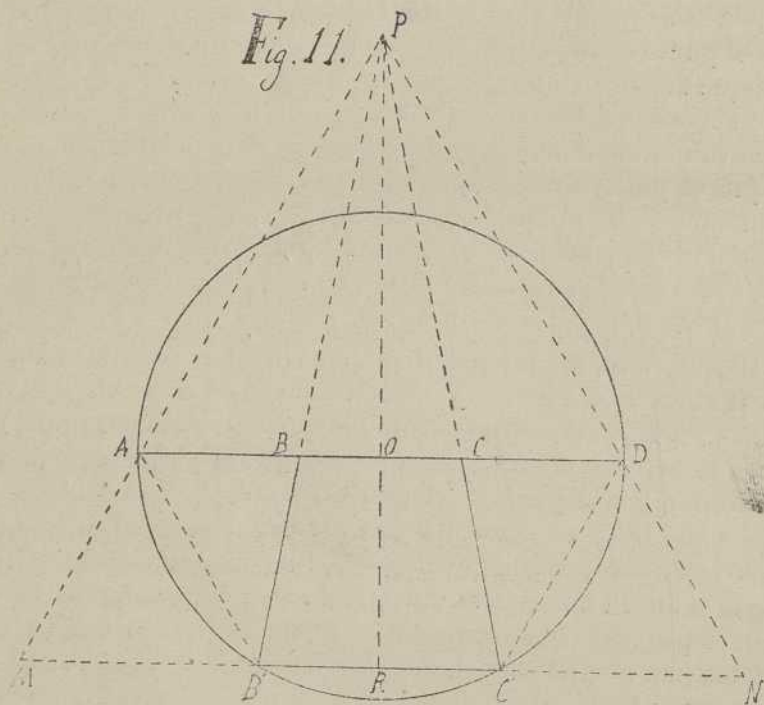
Fig. 10.



los, tambien lo serian sus arcos correspondientes, pero aun cuando tienden á aproximarse, siempre son sucesivamente mayores los ángulos más cercanos al diámetro por más próximos á la perpendicular, y por consiguiente lo mismo sucede con los arcos correspondientes. Si el punto se aleja cada vez más de la circunferencia, los ángulos aunque tienden á hacerse iguales, siempre son mayores unos que otros en el orden arriba dicho, pero no sucede lo mismo con los arcos que van aumentando los que más se separan del diámetro á medida que el punto se aleja de la circunferencia. Cuando el punto M se encuentra en el infinito, las rectas MA, MB, MC y MD se convierten en paralelas que pasan por los puntos A, B, C y D; y entonces, determinan como se tiene demostrado en (10) que el arco $AB' > B'C' > C'D' > D'N$.

Haciendo un resumen de lo expuesto, tenemos; que cuando el punto M es interior ó está en la circunferencia, el arco $AB' < B'C' < C'D' < D'N$, es decir, que los arcos que más se separan del diámetro, son sucesivamente menores, y cuando el punto se encuentra en el infinito, por el contrario el arco AB' es mayor que $B'C'$ este que $C'D'$ este que $D'N$; es decir, que los arcos que más se separan del diámetro son sucesivamente mayores, luego indudablemente antes de llegar al infinito, existe un punto fuera de la circunferencia y solo uno, en el que los arcos necesariamente tienen que ser iguales; supongamos pue no suceda así; indudablemente cada arco con el que le sigue pasa por un estado de magnitud igual, y si dividimos el diámetro AA' ó más bien el radio AO en partes dos tres, etc, veces mayores ó menores tienen lo presente que los razonamientos anteriores son extensivos á cualquiera numero de partes, cada arco como hemos dicho con el que le sigue, pasa por un estado de magnitud igual, y mal puede por ejemplo una division doble de otra ó que consta de dos partes iguales en lo que se refiere al diámetro, pasar por un estado de magnitud igual á la parte que le es adyacente, si simultaneamente no pasan por un estado de magnitud igual las dos par-

Fig. 11.



tes de que se componen cada una de las dos divisiones dobles de que se trata; y así sucesivamente se puede ir demostrando de cada dos partes consecutivas, luego existe un punto fuera de la circunferencia desde el que trazando rectas que pasan por los puntos de division de un diámetro previamente dividido en partes iguales, determinan en la semicircunferencia opuesta, arcos tambien iguales, ó en otros terminos, existe un punto fuera de la circunferencia, que trazando rectas que corten al diámetro y á la semicircunferencia opuesta, lo hacen en partes proporcionales á los dos.

El punto referido como hemos dicho es unico, pues si dividimos el radio AO respectivamente en $2m$ y $2n$ partes iguales es evidente que á las m y n partes, corresponde la mitad de AO y un mismo punto para las dos partes iguales en que queda dividido el radio AO que no podrán ser iguales si no lo son simultáneamente las m y n anteriores y posteriores del punto medio de AO .

Todos los razonamientos precedentes, pueden repetirse y aplicarse á cualquiera cuerda respecto del arco mayor que subtiende y el punto se halla tanto mas cerca de la circunferencia cuanto más pequeña sea la cuerda.

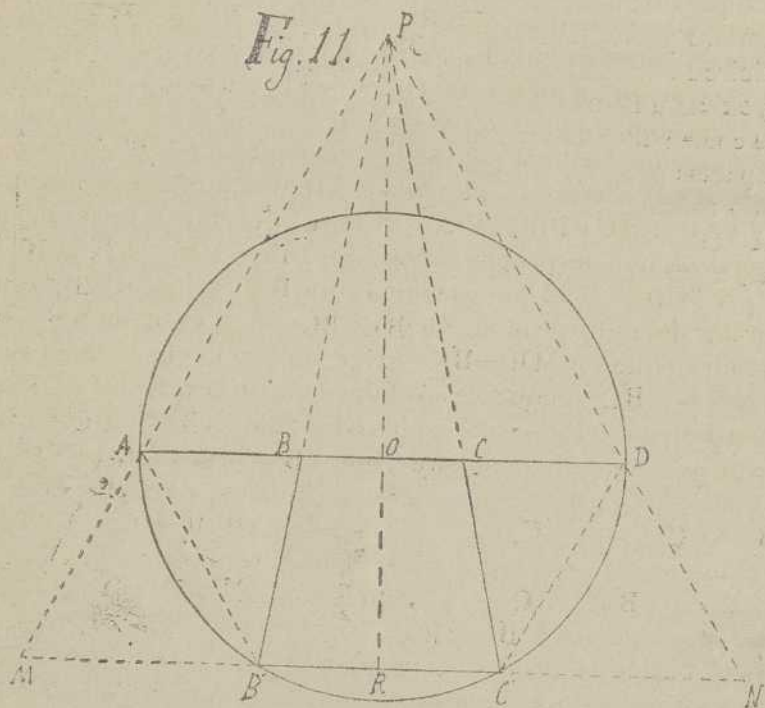
12. Teorema. Si dividimos un diámetro en tres partes iguales, y desde los extremos del mismo, con un radio igual á referido diámetro, trazamos dos arcos que se cortan en un punto tenemos:

1°. Que trazando rectas desde el dicho punto que pasen por los de division del diámetro determinan en la semicircunferencia opuesta, tres arcos tambien iguales.

2°. Que prolongando la cuerda correspondiente á la parte media que es paralela al diámetro, y las rectas trazadas desde el punto referido, y que pasan por los extremos del diámetro, determinan una recta igual á tres veces la cuerda correspondiente á la tercera parte de la semicircunferencia dividida en tres partes iguales.

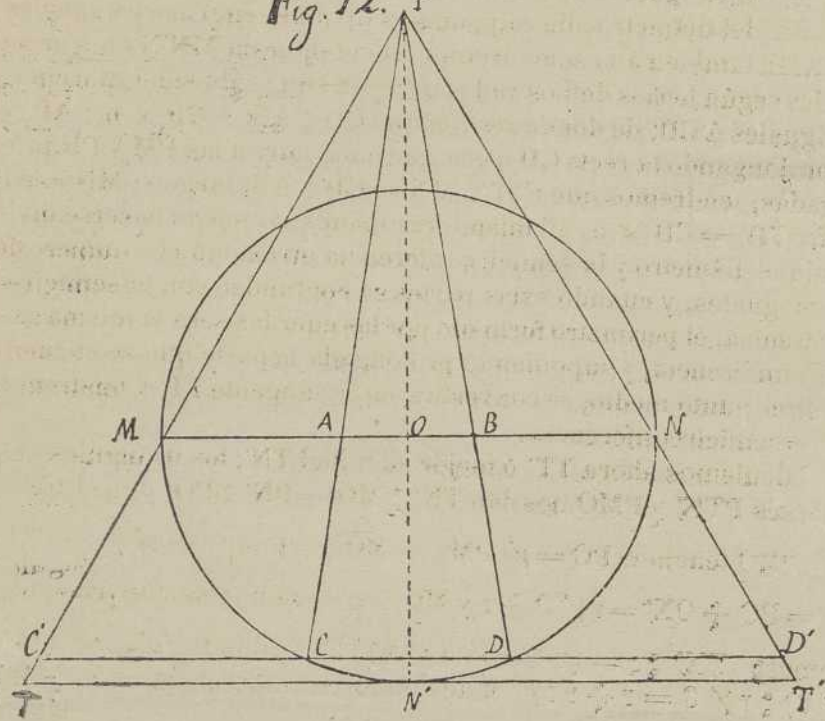
Sea (figura 11) el diámetro AD dividido en las tres partes iguales AB , BC y CD y la semicircunferencia $ABCD$ que previamente la

Fig. 11.



hemos dividido en tres partes tambien iguales AB, B'C, C'D y trazando el diámetro perpendicular al AD tenemos; que uniendo los puntos B y B', C y C', las rectas BB' y CC' se encontrarán en el diámetro, por oblicuas que se separan igualmente de la perpendicular PR; considerando además, que B'C' = radio y BC = dos tercios del radio, sus mitades se hallarán en la misma relación, y BB' y CC' se encontrarán en un punto P situado en la parte superior del diámetro AD; prolongando ahora la recta B'C' y trazando las rectas PA y PD prolongadas hasta M y N en que enenentrau a la B'C' prolongada tenemos; por ser la MN paralela a AD los triángulos semejantes PMB' y PAB, PB'C y PBC, PC'N y PCD que tienen la misma relación de semejanza, dan las proporciones siguientes, MB' : AB = B'C' : BC = C'N : CD = 3 : 2 pues tenemos que B'C' = radio y BC igual á dos tercios del radio de modo que B'C' : BC = 3 : 2 y por ser AB = BC = CD tendrán que ser MB' = B'C' = C'N con lo que queda demostrado que MN = 3 B'C'; solamente nos falta demostrar que AP y DP son iguales al diámetro. En efecto, en los triángulos AB'M y DC'N tenemos segun acabamos de demostrar, que AB' = MB' y DC' = NC' por consiguiente, los ángulos opuestos serán iguales, y MAB' será igual á AMB' y NDC' igual á NCD pero los ángulos AB'M y DC'N van en 60° por externos del exagono regular inscripto, luego los tres ángulos de los triángulos AB'M y DC'N y sus lados son iguales y estos al radio; por otro lado, tenemos MB' : AB = PM : PA = 3 : 2 y NC' : DC = PN : PD = 3 : 2 de donde facilmente se deduce que si PM y PN tienen tres partes y PA y PD tienen dos sus diferencias que lo son AM y DN tendrán una parte que es igual al radio; luego PA y PD son iguales al diámetro, con lo que quedan demostradas las dos partes del teorema. De lo expuesto, y dada la proporcionalidad que determinan las rectas que parten del punto P entre el diámetro AD y la semicircunferencia opuesta á dicho punto, se deduce facilmente la regla para dividir la cirunferencia y un arco cualquiera en el número posible de partes iguales que se desee.

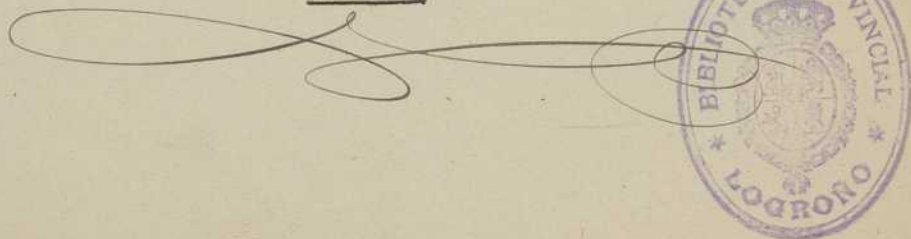
Fig. 12. P



13. Corolario. Una vez determinado el punto, vamos á suponer dividido el diámetro en cualquiera número de partes iguales, en n , por ejemplo (figura 12) y suponiendo que una de ellas lo sea AB dividida por el diámetro PN' en dos partes iguales, si desde el punto P en que PM es igual á dos radios, trazamos rectas por los puntos de división del diámetro que suponemos dividido en n partes iguales, dividirán también á la semicircunferencia opuesta MNN en n arcos iguales según hemos demostrado en (11 y 12) que subtenderán n cuerdas iguales á CD ; de donde resulta que $CD : AB = CD \times n : AB \times n$ y prolongando la recta CD hasta que encuentre á las PM y PN prolongadas, tendremos que $C'D' : MN = CD : AB$; luego si $MN = AB \times n$, $C'D' = CD \times n$. El mismo razonamiento puede hacerse dividiendo el diámetro y la semicircunferencia en cualquiera número de partes iguales, y cuando estas partes se confunden con la semicircunferencia, el perímetro formado por las cuerdas será la misma semicircunferencia, y suponiendo prolongada la parte que se encuentra en el punto medio, se convertirá en la tangente TT' y tendremos $TT' = \text{semicircunferencia}$.

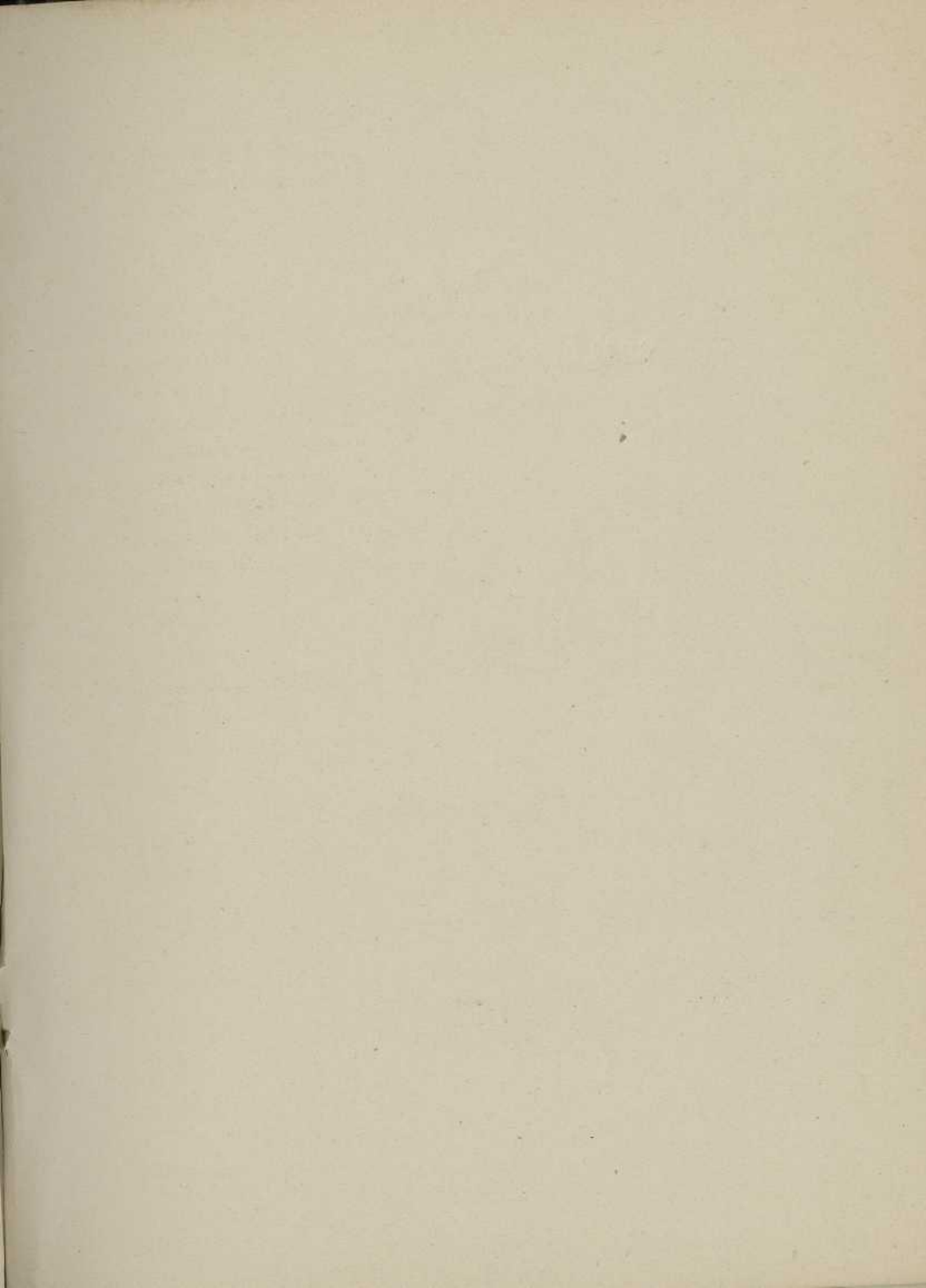
Calculemos ahora TT' ó mejor su mitad TN' ; los triángulos semejantes PTN' y PMO nos dan $TN' : MO = PN' : PO$; y en el triángulo PMO tenemos $PO = \sqrt{PM^2 - MO^2} = \sqrt{4r^2 - r^2} = r\sqrt{3}$; y $PN' = PO + ON' = r\sqrt{3} + r$ y $MO = r = \text{radio}$ y sustituyendo tendremos; $TN' : r = (r + r\sqrt{3}) : r\sqrt{3}$; de donde $TN' = r(r + r\sqrt{3}) : r\sqrt{3} = r + r\sqrt{3}$; de donde circunferencia $= 4r + 4r\sqrt{3}$.

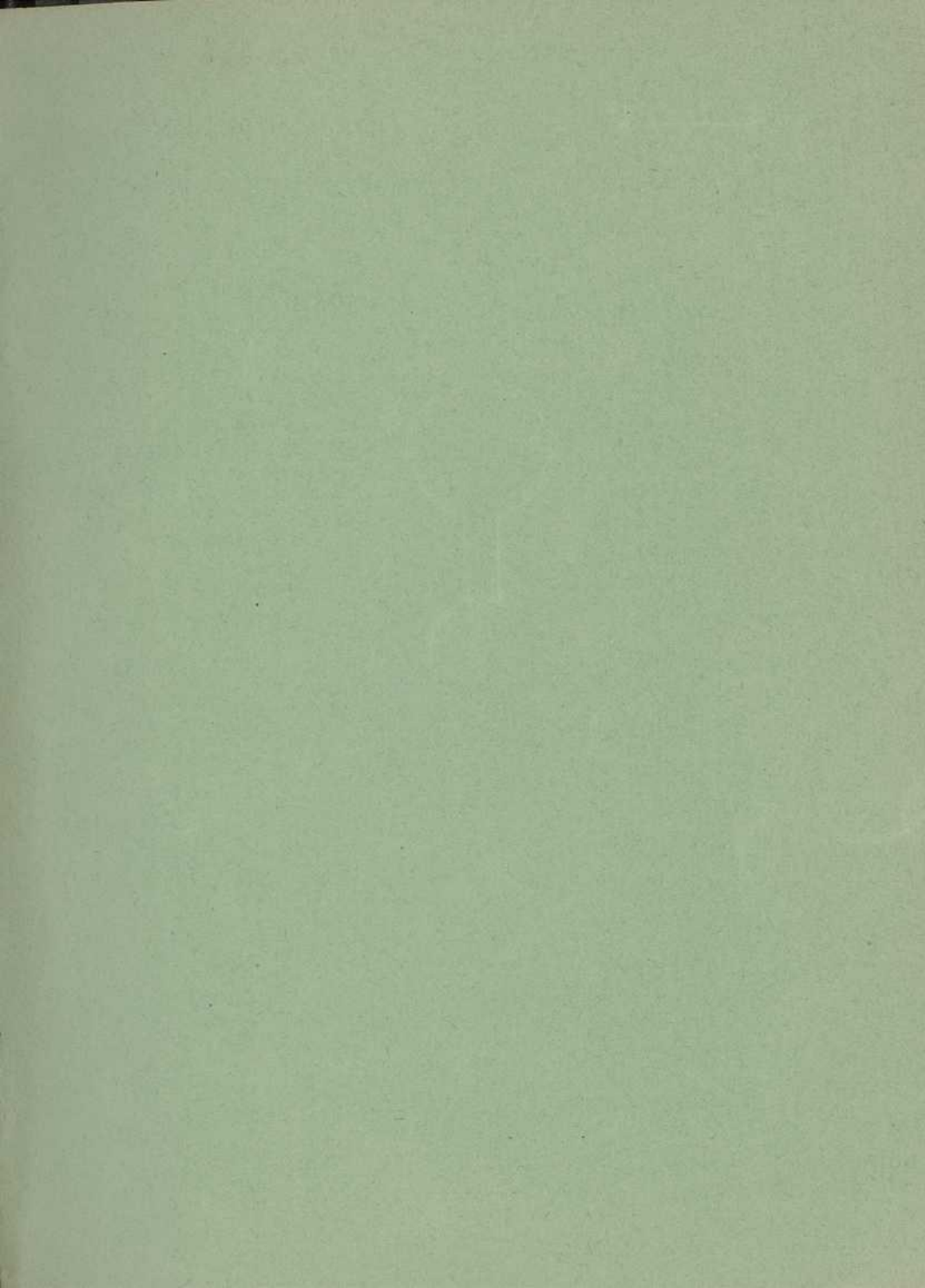
FIN



6640

6914





Cuaderno 1º

