

4-5722  
130  
ESTUDIOS CRÍTICOS

SOBRE LA

# GENERACIÓN DE LOS CONCEPTOS MATEMÁTICOS

POR

D. ZOEL GARCÍA DE GALDEANO

CATEDRÁTICO DE LA UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

Cuaderno 1.º

Resumen histórico de la evolución de los conceptos matemáticos



MADRID

IMPRENTA DE FORTANET

CALLE DE LA LIBERTAD, NÚM. 29

—  
1890

MDS 9209

FEB 14 1980

NO SE PRESTA

BIBLIOTECA CENTRAL DE LA RIOJA



10000208433

MDS 009304

C. 208.433

105  
22-7

ESTUDIOS CRÍTICOS  
SOBRE LA  
GENERACIÓN DE LOS CONCEPTOS MATEMÁTICOS

POR  
D. ZOEL GARCÍA DE GALDEANO  
CATEDRÁTICO DE LA UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

Cuaderno 1.º

Resumen histórico de la evolución de los conceptos matemáticos

*Regalada a esta Biblioteca  
por D. Amós Galvador.*

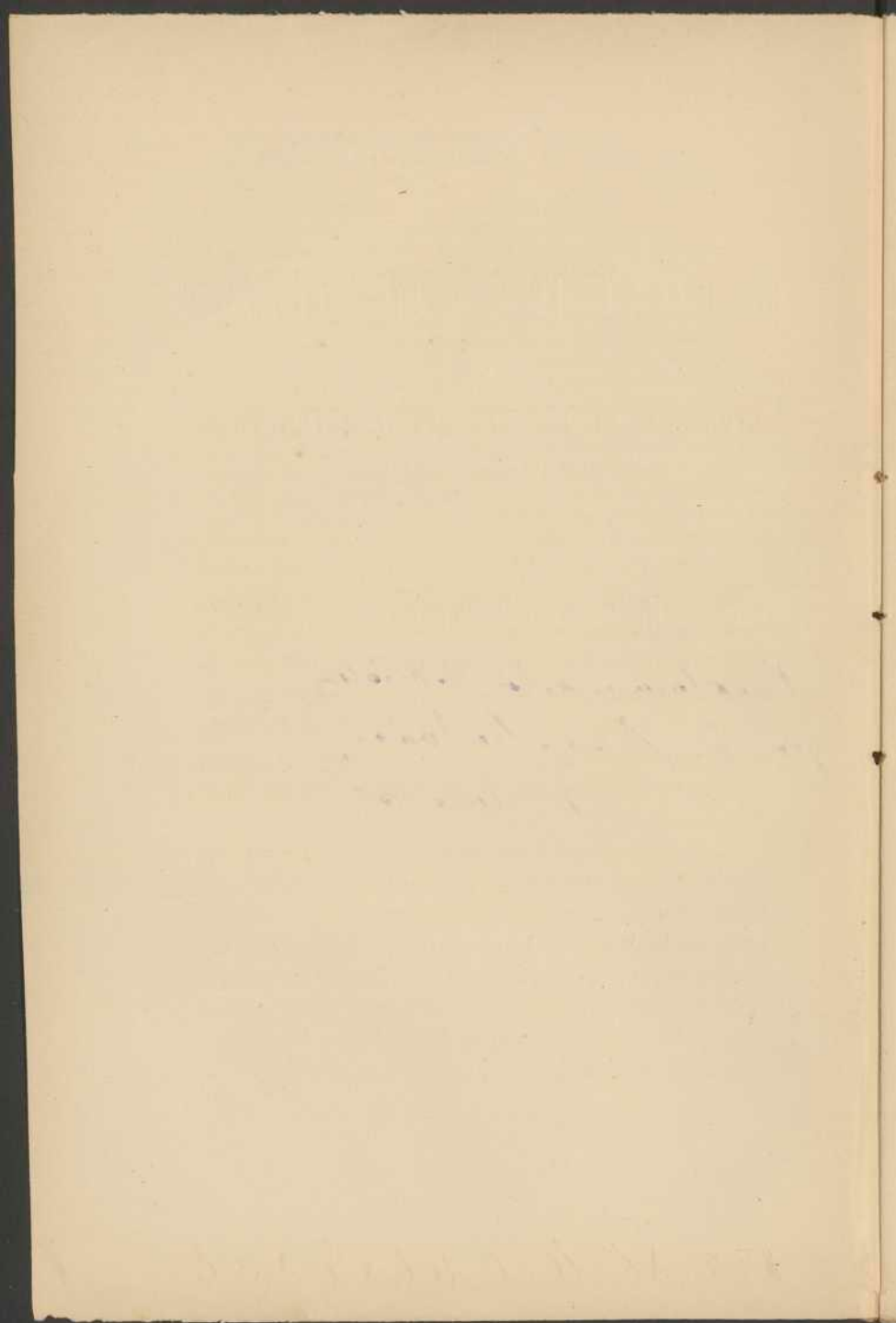
*16 de Mayo de 1895*



*2.87.505*

MADRID  
IMPRENTA DE FORTANET  
CALLE DE LA LIBERTAD, NÚM. 29

—  
1890



## RESUMEN HISTÓRICO

DE LA

### EVOLUCIÓN DE LOS CONCEPTOS MATEMÁTICOS

---

En el desenvolvimiento de la ciencia humana descuella la Matemática por el prodigioso desarrollo á que han llegado sus diversas teorías, mediante la agregación incesante de los nuevos conceptos que se unen á los antiguos para engrandecer el sólido edificio á cuya elevación han concurrido todos los siglos; pero en verdad ninguno con el vigoroso impulso que el presente.

La Metafísica, las Ciencias sociales, la Literatura, moviéndose en el círculo de la realidad externa ó de la realidad de nuestro sér, se limitan á cuanto se halla en la esfera de las existencias; la Matemática, ciencia de las más ideales, se funda en puros conceptos de la razón que admiten una combinación indefinida en la región, no solo de lo existente sino también de lo posible.

Por esto se comprende que las primeras vacíen sus ideales en idénticos moldes, pues siempre los mismos problemas, en rigor, surgen del fondo común en que se desenvuelven las ciencias cosmogónicas, antropológicas y teológicas, que á los puros conceptos de nuestra razón unen materiales constituídos dependientes de la actividad y de los sentimientos, factores que integran con aquélla las facultades del sér humano.

La Matemática tiene más libertad de acción aunque se funda tan solo en los conceptos de espacio, número y tiempo. Y si las demás ciencias parece que se mueven en espacios circulares ó esféricos, es decir, en espacios cerrados, en que el progreso se verifica por intus-suscepción, ó mejor, por un perfeccionamiento intensivo ocasionándose cada evolución en los mismos asuntos que las evoluciones anteriores, la Matemática avanza en serie indefinida por combinaciones de sus elementos primitivos que extienden sin cesar el campo de sus investigaciones.

El gran reformador de la ciencia y de la filosofía, Descartes, reduce la Filosofía natural á la Matemática; la Mecánica y la Física se hallan referidas en su sistema á consideraciones de la extensión figurada y móvil, pues la Mecánica presupone la Geometría en cuanto concierne á las figuras, y los problemas de las fuerzas y los movimientos son cuestiones algébricas, como lo son las de la Física en cuanto llega á ser ciencia aplicada.

Al encerrarse en la duda hipotética el fundador de la ciencia moderna, le lleva la consideración de la solidez de la Matemática á afirmar la existencia de un método fundamental de que esta es la envolvente.

Al reemplazar la extensión real, línea, punto ó superficie, por un concepto del espíritu, es decir, al definir el objeto del conocimiento, tal cual se le quiere considerar, presenta Descartes los fundamentos de la certeza geométrica. Además observa que las ciencias matemáticas, cuyos objetos son tan diferentes, concuerdan entre sí por el hecho de no considerar en estos más que sus relaciones, hasta el punto de que basta considerar estas mismas relaciones en los números que las representan de una manera abstracta y general. Y así, al manifestar que todas las ciencias cuyo objeto es la investigación del orden y de la medida se refieren á las matemáticas, sin importar que esto suceda en los números, las figuras, los astros, los sonidos ú otro objeto cuya medida se busca, llega á afirmar que debe existir una ciencia general que explique lo que es posible investigar sobre el orden y la medida (*Recherche de la vérité*, edit. Cousin t. xi p. 213) y deja, en fin, establecido el examen del Álgebra, la Geometría y la Mecánica desde un solo punto de vista.

Continuando el desarrollo de los principios de la filosofía cartesiana aunque llevados en sus consecuencias á un exagerado misticismo, Malebranche coloca en lugar preeminente la Aritmética, el Álgebra y la

Geometría: á esta es cierto que la considera de inferior condición, pues aunque la encuentra útil para fijar la atención en las cosas cuyas relaciones se buscan y ayuda á la imaginación con sus líneas y figuras para sus representaciones, no perfecciona tanto como las otras el espíritu, y aun observa que el Álgebra llega más brevemente á los resultados que la Aritmética, porque cuando una operación de la Aritmética descubre una verdad, una operación semejante del Álgebra descubre una infinidad, formando ambas ciencias, en su sentir, la verdadera lógica que sirve para descubrir la verdad, y son las solas que dan al espíritu toda la extensión de que es capaz.

Esta subjetividad de la Matemática también resulta de una manera visible en la doctrina que el filósofo Arnaldo expone en la célebre lógica de Port-Royal y Vico en su criterio. El primero distingue las cuestiones en problemas de nombres ó de cosas, y considera el método de los geómetras como el más propio para persuadir y convencer completamente al espíritu, pues además de *no establecer sus razonamientos más que sobre principios claros y evidentes y de probar demostrativamente todas las conclusiones que enuncian, no dejan ninguna ambigüedad en los términos* que están dados por definiciones de nombres, es decir, por definiciones en las que la palabra definida se considera como un sonido que se determina en seguida, de modo que sea signo de una idea designada por otras palabras, y así definen los geómetras la circun-

ferencia, el paralelógramo, etc., definiciones que son incontestables y que pueden servir de verdaderos principios en el encadenamiento científico.

Más terminantemente y de un modo más explícito, si cabe, se expresa el subjetivismo matemático en la doctrina del filósofo Vico que hace consistir el criterio de la verdad en que esta haya sido hecha, por lo cual nuestros conocimientos son completamente ciertos, cuando se verifica dicha circunstancia y van perdiendo su certeza á proporción que el entendimiento pierde su carácter de causa respecto á los objetos. Así como las palabras son los signos de las ideas, estas son los signos ó representaciones de las cosas, y á la manera que el leer (*legere*) consiste en reunir los elementos de la escritura con los que se forman las palabras, el conocer (*intelligere*) consiste en reunir todos los elementos de una cosa, de lo que resulta la idea perfecta. Y de que lo verdadero es lo hecho, Vico deduce que las matemáticas son las más ciertas porque son una especie de creación del entendimiento, que partiendo de la unidad y el punto, construye un mundo de formas y de números por combinaciones indefinidas.

Hecha esta breve reseña, que expresa el carácter subjetivo de la Matemática, apoyada en el testimonio de los filósofos que más han insistido en esta rama de los conocimientos humanos, seguiremos adelante, y desde el fundamento de la Matemática moderna, que como hemos visto, realizó Descartes al fundar una Geometría general apoyada en reglas invariables, que

le permiten representar los lugares geométricos por ecuaciones, refiriéndolos á un sistema de coordenadas, pasaremos, á consignar las investigaciones de Fermat, que son los cimientos sobre los cuales más tarde queda organizada la teoría de los números, ese amplio desarrollo que la ciencia adquiere con el método de las fluxiones de Newton y el de los infinitamente pequeños de Leibnitz, la transcendental invención de Neper, los trabajos de La Hire, fiel todavía al método de los geómetras antiguos, primer iniciador de los métodos de *transformación de las figuras*, las investigaciones de Pascal y Desargues sobre las cónicas, los trabajos de Mac Laurin y Clairaut sobre las curvas, todo lo cual, así como otros importantes descubrimientos, vamos á ver de qué manera nos permite llegar á la época presente, cuyo aspecto general en sus diversas manifestaciones es el objeto capital de este trabajo.

Ya no ocurre, como en las épocas de la civilización greco-romana, que un reducido número de talentos culminantes, como Euclides, Arquímedes y Apolonio, resuman el total progreso científico de su época, ni se asiste á aquellas contiendas que desde la época de Tartalea y Cardano se continuaran sobre puntos diversos; ya entre Descartes, Roberval, Pascal y Fermat; ya después, entre Newton y Leibnitz, sobre los fundamentos del cálculo de los infinitos; ya, en fin, casi en nuestros tiempos, entre Euler y D'Alembert, acerca de los logaritmos, hechos todos que manifiestan cómo el saber y el progreso científico se hallara

vinculado en un corto número de nombres que lo representan.

El siglo xix se distingue por la universalidad de los descubrimientos, no limitada á determinados individuos ó naciones. Todos trabajan en la obra común; la ciencia no se resume en un nombre propio, así como la civilización no es la de un pueblo especial, sino que el desenvolvimiento tiende á ser el de la humanidad.

Cada nación ha tenido y tiene sus representantes en los talentos que más se han distinguido por los amplios desarrollos de doctrina ó por las nuevas fases según las que estos se han verificado; pero todas las direcciones parece que convergen en un mismo foco, y no se trata ya de un progreso parcial de ramas determinadas, sino de una evolución en todos sentidos, que hacen cada vez más frondoso el árbol de la ciencia humana bajo la acción de múltiples y variadas influencias.

Por efecto del siempre creciente impulso de la ciencia, esta se ha dividido naturalmente formando regiones varias, en las que con cierta independencia relativa se agitan las inteligencias. Los metafísicos, los químicos, los físicos, forman agrupaciones separadas, que en distintos horizontes tienden á la unidad de todas las ramas en el tronco común.

En la Matemática tiene Francia en primera línea á Lagrange y Cauchy como los representantes más caracterizados de su desenvolvimiento general, y espe-

cialmente en los progresos del Análisis, que el último llevó á su estado de máximo desarrollo durante cerca de medio siglo, llenando constantemente las páginas de los *Comptes rendus* de la Academia de Ciencias de París y publicando obras cuya simple enumeración ocuparía muchos renglones.

En Alemania, Gauss es el digno émulo de Cauchy por el vasto alcance de sus descubrimientos, unido á su precisión é importancia, y sería una grave omisión la de no citar á su lado los nombres de Jacobi y el matemático noruego Abel, que desenvolviendo los principios de la teoría de las funciones elípticas, expuestos por Legendre, han ofrecido el núcleo más importante de verdades que con mayor insistencia han profundizado los matemáticos contemporáneos.

La teoría de la continuidad, hoy tan admirablemente expuesta y conocida con tanta riqueza de detalles, tiene su amplia y consistente base en los descubrimientos de Cauchy, entre los que nos ceñiremos á citar la Memoria acerca de las integrales definidas que en el año 1814 le permitió darse á conocer como analista de alto vuelo, donde se halla establecido el tránsito de lo real á lo imaginario y se expone la nueva é importante teoría de las *integrales singulares*, que le condujo al *cálculo de los residuos* de tantas aplicaciones en el Análisis superior.

A estos descubrimientos, entre los muchos que encierran las obras de Cauchy y que ahora no procede enunciar, es preciso añadir actualmente el que com-

pleta el célebre teorema de Sturm, al extender la determinación del número de raíces reales de una ecuación comprendidas entre dos límites, al caso en que se consideren también las imaginarias. Esta extensión del teorema de Sturm se halla en la Memoria que Cauchy presentó á la Academia de Turín el año 1831 y en el cuaderno xxv del *Journal de l'École Polytechnique*, donde publicó su Memoria sobre el cálculo de los índices de las funciones, los cuales le sirven para hallar directamente, sin intervención del cálculo integral, el teorema conocido hoy con su nombre en la enseñanza clásica, que utiliza también las simplificaciones que ofrecen las demostraciones publicadas después por Sturm y el abate Moigno en el tomo I del *Journal de Liouville*.

Los descubrimientos citados, unidos á los que contienen las varias Memorias lanzadas á la publicidad por tan prodigioso talento matemático, relativas á la teoría de las cantidades geométricas (*Nouv. Exerc.*, tomo iv), fundada sobre la representación geométrica que al mismo tiempo en Francia é Inglaterra dieron á conocer Argand y Bouée, y que contribuyeron á perfeccionar François, Mourey, Warren, Vallés y otros; sirviendo de base á Cauchy para amplificar el nuevo concepto y fundar la teoría de las funciones de las variables complejas á cuyo desarrollo en Francia contribuyeron Puisseux, Liouville y Hermite, y cuya exposición en forma de cuerpo de doctrina adaptada á los fines de la enseñanza hicieron los matemáticos

Briot y Bouquet en su *Théorie des fonctions elliptiques*, obra á que han seguido otras muchas con el mismo objeto.

En Alemania, el célebre matemático Riemann, arrebatado prematuramente á la ciencia, pero no tanto que no le fuera permitido dejar honda huella de su rápido paso por la vida, introdujo importantes modificaciones á la doctrina de Cauchy con la concepción de la superficie que se conoce con su nombre, y que hace derivar de la idea de una superficie helicoidal que se deforma hasta constituir un plano de  $n$  hojas, con su teoría de las *conexiones*, y con otros modos de ver no menos originales, todo lo que ha servido de punto de partida á eminentes geómetras alemanes, que en este sentido han expuesto la teoría de las funciones y la siguen exponiendo en el avance tan universal que hoy se advierte en la ciencia germánica.

Otra de las ramas que parten del común tronco, desde donde se extiende con rápido proceso la ciencia matemática, es la que en este siglo tiene por origen la vasta síntesis que Gauss realizó en la teoría de los números, y en que colaboró con elegancia suma Poinset, que además de interesantes Memorias donde las ideas de orden y combinación tienen una importancia capital, resumió sus elevados puntos de vista en su obra *Reflexions sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres*. Y, en fin, los descubrimientos de Lejeune Dirichlet, Kummer, Kronecker y Dedekind, constituyen con los anteriores el fondo de cuan-

to hoy surge con el fin de realizar nuevos desarrollos ó de presentarlos dispuestos á la enseñanza de la juventud.

Si nos fuera posible fijar exactamente la verdadera importancia que la idea de cada rama de la Matemática tiene dentro del conjunto que integran, diríamos que entre esa rama del Análisis cuyo origen se halla en Newton y Leibnitz, y después, según hemos indicado, desarrolló Cauchy, y entre la que acabamos de examinar como uno de los asuntos en que principalmente se ejerció el talento de Gauss, debe colocarse el Álgebra, que comprende un género de ideas cuyo valor y extensión difícilmente se puede determinar con respecto á las que expresan dichos dos desenvolvimientos de la idea de la cantidad.

La Aritmética de Diofanto, que tan tímidamente resuelve los problemas de la determinación del número, apoyado por entonces continuamente en representaciones lineales, superficiales y de volumen, que también los matemáticos árabes creyeron indispensables para dar realidad á los resultados hasta el punto de que, aun el número fraccionario sea tratado con ciertas reservas y se hallen completamente excluidos los inconmensurables, perteneciendo lo negativo y lo imaginario á la región de lo inconcebible hasta la época de Cardano, que halló por primera vez el *caso irreducible* en las ecuaciones de tercer grado; de Bombelli que con superior sagacidad estableció definitivamente la correspondencia de la forma imaginaria de

las tres raíces con el caso de ser estas reales; y sobre todo de Vieta, que forma época en la ciencia al fundar el Álgebra, siendo preciso, sin embargo, que el genio de Descartes, al no concebir en los objetos de las ciencias matemáticas más que las relaciones, cuyos representantes de un modo abstracto y general fueran los números, generalizara desde luego la idea de potencia, solo considerada por entonces hasta el grado tercero correspondiente á los números sólidos; y, en fin, que este genio excepcional llegara á la constitución puramente intelectual y simbólica de la Ciencia, dando cabida en ella á las cantidades negativas, hasta entonces relegadas al dominio de lo no existente y que desde este momento han tenido una significación geométrica, en la obra que realizó al fundir entre sí los conceptos de número y extensión cuando tradujo las figuras en ecuaciones.

Los descubrimientos de Descartes parecen la preparación natural de los que á continuación se verifican en la teoría de las magnitudes. Newton y Leibnitz son los herederos que aumentan el legado de su glorioso antecesor con el nuevo cálculo. La teoría de la continuidad aparece en la doctrina de Leibnitz como un nuevo objetivo, que atrayendo la atención de los espíritus matemáticos había de ser manantial de donde tantas ideas surgieran sucesivamente para formar los elementos de la organización naciente de la Matemática.

Los principales descubrimientos realizados en el

siglo xvii se refieren á la idea de continuidad, fundamental en los diversos modos de generación de las cantidades. Basta citar á Brounker, que dió á conocer las fracciones continuas; á Mercator, que obtuvo series notables que le permitieron determinar el área de la hipérbola comprendida entre las asíntotas; á Wallis, cuyo método de los infinitos, expuesto en su *Aritmética infinitorum*, es una aplicación del análisis cartesiano al método de los indivisibles de Cavalieri. Y si en el siglo xvii el nuevo cálculo absorbía casi por completo la atención y ejercitaba la actividad de los geómetras, dificultando en cambio el desarrollo de otras ramas de la Ciencia, en el siglo xviii tiene lugar una insistente inclinación de los matemáticos hacia el perfeccionamiento de la teoría de las ecuaciones que se hallaba casi en el estado en que la dejó Descartes.

Pero el Álgebra necesitaba para su desenvolvimiento, además del concepto de magnitud, el de combinación. Este último es sin duda el que le imprime carácter y permite distinguir dicha rama de las demás de la ciencia matemática.

En verdad que el concepto de orden combinatorio domina toda la Matemática, lo mismo en la Geometría que en la Algoritmia; pues si en esta se combinan números ó cantidades reducibles en último término á números, la combinatoria predomina en la formación de las cantidades geométricas. Y si una ecuación expresa correlaciones numéricas, una forma

geométrica expresa correlaciones de puntos, líneas ó superficies, pudiéndose referir una de estas clases de correlaciones á la otra; y esta referencia nos conduce á la Geometría analítica, donde las varias formas de correlación entre el número y la posición se hallan expresadas por símbolos como lo imaginario, el infinito y lo indeterminado, que son verdaderos signos del modo de correlación impuesto ó establecido *à priori* por nosotros.

Limitándonos al orden combinatorio en sus aplicaciones al Álgebra, nos vemos en el caso de citar desde luego la obra *Analyse des lignes courbes* en que Cramer expuso la regla hoy conocida con su nombre y que es el origen de la teoría de las determinantes. También es preciso citar á continuación los nombres de Waring y Vandermonde que van unidos á la idea de las funciones simétricas, así como los de Binet y Cauchy. En cuanto hace referencia á la teoría de la eliminación, necesariamente se impone el recuerdo de los importantes resultados que la ciencia debe á Euler y Bezout, y si se trata de la resultante y de la determinante, se ve que Gauss con sus determinantes adjuntas, Cauchy con sus funciones alternadas, Jacobi con sus numerosos é importantes descubrimientos, Baltzer, Brioschi, Truddi, y otros que se pudiera citar como expositores de esta rama del Álgebra, resumen la historia de una teoría hoy tan importante y tan universal y comunmente empleada en toda cuestión del dominio del análisis hasta el punto de que

en este tiene actualmente tan natural empleo como el número en los problemas aritméticos.

Existe, sin embargo, otro concepto de tanta importancia en el Álgebra como los de la determinante y resultante, á saber, el de la sustitución. Aquellos predominan en cuanto se trata de sistemas de ecuaciones, la substitución es un elemento necesario en la teoría de la resolución de las ecuaciones, ó sea principalmente cuando se trata de una sola ecuación.

Vandermonde en sus escritos sobre la resolución de las ecuaciones (*Mém. de l'Acad. des Sciences*, 1771), reduce el arte de la resolución general á obtener una forma particular de funciones de la suma de las raíces de la ecuación propuesta, y de tal modo constituidas, que representen indiferentemente una de las raíces, llegando con su método á hacer depender la ecuación de quinto grado de otra de sexto.

Pero donde hallamos expuesta con gran riqueza de desarrollos y profundidad de juicio, esta doctrina que estriba en la relación que existe entre los coeficientes de una ecuación y las funciones simétricas de sus raíces, para cuya resolución ya Newton nos dió un método notable como todo cuanto se debe á este genio excepcional, es en la célebre memoria de Lagrange *Réflexions sur la résolution algébrique des équations* en la que, además de analizar especialmente y con relación á los demás los varios métodos conocidos para resolver las ecuaciones de tercero y cuarto grado, presenta su método que estriba en la formación

de la ecuación cuyas raíces son funciones racionales no simétricas de las de la ecuación propuesta, y llega á resolver las de tercero y cuarto grado, determinando los valores de una función lineal de las raíces que pueden obtenerse por las permutaciones de estas, determinando la ecuación de que dicha función depende, fundándose en la relación arriba citada, existente entre los coeficientes de una ecuación y las funciones simétricas de sus raíces; pero al aplicar su método á la ecuación general cuyo grado es un número primo  $n$  llega tan solo á concluir que la ecuación por resolver depende de otra de grado  $n - 1$  cuyos coeficientes dependen de una de grado  $1. 2... (n - 2)$ , y cuando el grado es un número compuesto  $m = np$ , siendo  $n$  número primo, la ecuación puede descomponerse en  $n$  ecuaciones del grado  $p$ , y así se llega á determinar el grado de la ecuación de que depende la resolución del problema.

En resumen, la función resolvente de Lagrange da la resolución de las ecuaciones de tercero y cuarto grado; pero no la de las ecuaciones generales de grados superiores. Y esta duda sobre la resolubilidad del problema, en que se detuvo Lagrange, fué disipada por Abel, que demostró la imposibilidad para el caso general; pero determinó una clase de ecuaciones, hoy conocidas con el nombre de este insigne matemático, que son resolubles.

La consideración de las funciones *semejantes* definidas en la memoria de Lagrange como funciones

que varían al mismo tiempo ó permanecen constantes cuando se hacen las mismas permutaciones entre las cantidades de que se hallan compuestas, conduce á demostrar que: *Cuando se ha obtenido el valor de una función dada de las raíces  $x'$ ,  $x''$ , ... ya por la resolución de una ecuación ó por otro medio, se podrá obtener también el valor de otra función racional cualquiera de las mismas raíces, y esto en general, por medio de una ecuación simplemente lineal, á excepción de algunos casos que exigen una ecuación de segundo ó de tercer grado, etc.*

Por fin, el teorema no menos importante que expresa la dependencia racional entre dos funciones tales, que todas las permutaciones que hacen variar á la una hacen variar á la otra, debe ser agregado á los anteriores, para con ellos mostrar la importancia que tiene en la resolución algébrica de las ecuaciones la teoría de las substituciones cuyos principios estableció Cauchy en el tomo III de sus *Nouveaux exercices de Mathématiques*, donde fundándose en el nuevo concepto de las funciones *transitivas é intransitivas*, hizo una aplicación de las substituciones á la determinación del número de valores distintos que puede adquirir una función de  $n$  letras cuando se permutan estas de todas las maneras posibles, problema que completaron Bertrand y Serret con sus importantes teoremas relativos á dicha determinación.

Tantos descubrimientos como los que ligeramente acabamos de exponer tienen complemento natural en

las investigaciones últimamente llevadas á feliz término por los matemáticos Kronecker, Hermite, Jordan y ante todos ellos por Galois, notable este por su memoria *Sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux* (*Jour. de Math.* t. xi), donde se halla la original idea de la *adjunción* de ciertas cantidades á una ecuación, medio que permite ir rebajando sucesivamente el orden del sistema conjugado de substituciones propio de una ecuación, hasta que este llegue á la unidad, siendo la ecuación resoluble en el caso de ser esto posible.

También son en alto grado importantes las investigaciones de Kronecker acerca de los caracteres de las ecuaciones resolubles, las de Hermite y sobre todo las de Jordan que fundándose en la idea del *grupo propio* de Galois, el cual permite conocer las leyes de las substituciones que dejan invariables las funciones de las raíces racionalmente expresables por los coeficientes, llegó al teorema siguiente: *La relación algébrica más general que puede existir entre las raíces de dos ecuaciones irreducibles con coeficientes racionales consiste en la igualdad de dos funciones racionales formadas respectivamente con las raíces de estas ecuaciones.*

A esto, por último, conviene añadir para completar la enumeración de las ideas capitales en la teoría de las ecuaciones, la importante determinación á que llegó Jordan, de los tipos de ecuaciones resolubles por radicales, cuya exposición se encuentra en su notable

*Traité des substitutions*, obra á la que ha seguido recientemente con nueva amplitud de ideas y de fines, la *Theorie der Transformationsgruppen* del matemático alemán Sophus Lie bien conocido entre los cultivadores del análisis superior.

Además de las teorías que acabamos de citar, relativas á las ideas de orden y de combinación, que conciernen á la resolución de las ecuaciones algébricas, se presentan en la evolución moderna de la ciencia, los nuevos desarrollos que parten de la célebre memoria del matemático inglés Boole (*Mathem. Journ.* Cambridg. 1841), donde se halla el fundamento de una nueva rama del análisis conocida con el nombre de *Álgebra, ó teoría, de las formas*, cuyo desarrollo se debe principalmente á los géómetras Cayley y Sylvester, sobre todo al primero que ha tratado este asunto en varios tomos de las *Philosophical Transactions*.

La propiedad de *invariación* que Boole descubrió para la discriminante por efecto de una substitución lineal, fué extendida por Cayley á otras funciones que determinó *à priori* estableciendo la teoría de las *invariantes* y *covariantes*. Y además de Sylvester y Salmon, en Inglaterra, en Alemania colaboraron en la obra de desarrollar esta nueva teoría principalmente Aronhold, Clebsch y Borchardt, en Francia, Hermite y Jordan, y en Italia, Brioschi, Cremona, Battaglini y Betti.

Las diversas especies de covariantes, las llamadas

emanantes, la cataleticante de Sylvester, las intermutantes de Faa de Bruno, las covariantes asociadas de Hermite, el cálculo simbólico de Aronhold, expresan detalles que enriquecen el conjunto de la teoría que en pocos años ha llegado á ser uno de los asuntos predominantes del análisis y de no poca importancia en sus aplicaciones á la Geometría.

Hemos visto cómo el concepto de magnitud va modificándose, amplificándose y dando lugar á vastas ramas que se enlazan y complementan en la ciencia. El mismo fenómeno observamos en la evolución de la Geometría.

Los descubrimientos de la Geometría antigua sintetizados en los tres nombres de Euclides, Arquímedes y Apolonio, se reproducen en todos los períodos siguientes con nuevos caracteres y según las más diversas direcciones, unas veces independientemente del análisis, otras fundiéndose con este y produciendo un desarrollo paralelo en las dos ramas de la ciencia matemática.

Euclides, Arquímedes y Apolonio en la Geometría, como Aristóteles y Platón en las escuelas filosóficas, imprimen carácter á la ciencia en sus fases sucesivas, y aun á través de las modificaciones más transcendentales, mucho queda en el fondo que evoca el recuerdo de tan eximios talentos.

Los árabes, al mismo tiempo que comentan y siguen á Aristóteles, conservan el monumento de la Geometría antigua, aunque sin hacer progresos dignos de

mencionarse. Pero en Europa, cuando el renacimiento científico se aproxima, la Geometría toma poderoso impulso, cuyo punto de partida podemos considerar en Desargues y Pascal.

Algo vemos de reminiscencia de lo antiguo combinado con novedades de ideas é inventos; pues la ciencia humana avanza siempre cimentándose en las conquistas de las épocas pasadas, hallándose cada nuevo descubrimiento preparado por otros descubrimientos anteriores.

Unos geómetras continuán cultivando el método de los geómetras griegos, otros desde el momento en que el método cartesiano se impone como instrumento de gran eficacia por sus aplicaciones en el progreso científico, se encaminan por nuevos derroteros hacia un especial estado de grandeza y generalización de la Geometría.

Los nombres de Pascal, Desargues, Fermat y Descartes simbolizan el estado de la Geometría durante la primera mitad del siglo xvii.

Desargues y Pascal son, á la par que los continuadores de Euclides y Apolonio, los fundadores de esta Geometría moderna, que da una preferencia señalada á la idea de posición, así como tiende á eliminar la intervención de la de cantidad. Descartes, por el contrario, fundando su Geometría en el análisis, prepara los inventos de Newton y de Leibnitz.

Los métodos de Pascal y de Desargues se fundan en los principios de la perspectiva, y tanto el uno

como el otro han legado á la Geometría moderna dos teoremas que conservan sus nombres.

El admirable teorema de Pascal, acerca del exágono, es una proposición fundamental en la teoría de las cónicas, pues expresa una relación entre un sexto punto y los cinco que determinan una cónica. Desarques, además de crear la teoría de la involución é introducir en la Geometría una generalización conforme con el espíritu de la Matemática, aplicó la perspectiva á la teoría de las cónicas, llegando al fundamento de las figuras, hoy llamadas homológicas en su teorema, que se refiere al caso de dos triángulos situados en perspectiva. En fin, el considerar las diversas secciones del cono, el círculo, la elipse, la hipérbola y el sistema de dos rectas, como variedades de una misma curva, era ciertamente dar un paso importante hacia las generalizaciones de la Geometría moderna.

Esta ciencia progresaba, pero según las leyes permanentes del desenvolvimiento de las ideas, dirigiendo una mirada retrospectiva que permitiera á los nuevos descubrimientos cimentarse en los del pasado, enlazando unos con otros en la síntesis propia de cada período. Por esto vemos que Fermat se dedicó á la adivinación de los porismas de Euclides, fundándose en los datos suministrados por los escritos de Pappus, empresa que continuó el geómetra inglés Simson, y que ya en nuestros tiempos llegó á sus últimos resultados en los trabajos de Chasles, donde se establece la conexión entre la Geometría antigua y la moderna.

Para formarnos una idea clara y exacta de lo que fué la ciencia geométrica durante el siglo xvii, de cómo avanzaba hacia su actual constitución, nos basta con citar: El método de deformación de las figuras que surge de las investigaciones de La Hire y de Newton; los modos de generación de las figuras empleadas por Stevin y Mydorge, que consisten en hacer aumentar las ordenadas de una curva en una relación constante, ó el que se reducía á hacer girar estas alrededor de sus pies en una misma cantidad que lo empleó Gregorio de Saint Vincent, para transformar el círculo en elipse; la descripción de curvas planas por un movimiento continuo debida á Schooten; la de las secciones cónicas que De Witt efectuó por intersecciones de líneas rectas, las cuales eran, generalmente, lados de ángulos móviles, método que en verdad tiene su origen en la Geometría de Cavalieri; las propiedades fundamentales del polo y de la polar descubiertas por La Hire y expuestas según el estilo de los antiguos geómetras, aunque empleando una marcha de demostración fácil y elegante, dando resultados tan importantes como la teoría de las *planicónicas*, primer método general de *transformación de las figuras en otras del mismo género*, que La Hire funda en la consideración de un punto llamado *polo* y de dos rectas paralelas que denomina *formatriz* y *directriz*.

Muchas ideas interesantes tendríamos que añadir á las expuestas si se tratara, principalmente, de seguir paso á paso el encadenamiento de métodos que se han

sucedido hasta conducirnos á la época moderna, para lo cual nos sería preciso agregar nuevos nombres á los que ya hemos citado; pero nos será suficiente citar á Newton, que además de llevar á un grado superior los resultados de La Hire, legó á la posteridad su célebre *Enumeratio linearum tertii ordinis*, cuyo objeto principal es la enumeración en cinco clases principales de las curvas comprendidas en la ecuación de tercer grado con dos variables.

Diseñada la evolución de la Geometría, que desde los tiempos de Descartes se nos muestra según dos direcciones aparentemente antagónicas, llegamos á la época presente, en que vemos verificarse una radical transformación, pues, en efecto, ya la ciencia pierde el carácter de individualidad y exclusivismo predominante en aquellas épocas, caracterizadas por cierto monopolio que un reducido número de talentos excepcionales de ella hicieran. Hoy las condiciones del progreso científico han cambiado. Las facilidades de la propaganda, la emulación que produce el espíritu de nacionalidad, la influencia mutua de unas ciencias en otras, nos obligan á notar una diferencia radical.

La fundación de las Academias en las naciones cultas, publicaciones como las de las Academias de París, Berlín, San Petersburgo, etc. Las *Philosophical transactions*, los *Proceedings of the London Mathematical Society*, y, entre otras publicaciones que pudieran agregarse á estas, el notable *Quarterly Journal of Ma-*

*thematics*, el *Journal de Crelle*, el de *Borchardt*, los *Mathematische Annalen*, el *Journal de mathématiques pures et appliquées*, fundado en Francia por Liouville, los *Annali di Matematica* y *Giornale di Matematiche*, dirigidos en Italia por Brioschi y Battaglini, etc., revelan la actividad intelectual de este siglo, y expresan un movimiento común donde se confunde el trabajo de todas las capacidades y de todas las tendencias en una misma obra, que ha adquirido así el carácter de la universalidad, pues el espíritu de la misma parece que en todas partes se halla.

Es cierto que en este siglo cada una de las naciones entre las que se halla monopolizado el progreso tiene su parte en dicho desenvolvimiento. Francia, Inglaterra y Alemania que en la tradición filosófica han expresado el espiritualismo, el positivismo y el racionalismo, en la evolución matemática parece que han impreso el sello de su carácter especial.

Francia entre el pasado siglo y el actual ha reunido el conjunto más brillante de talentos matemáticos, como son los Lagrange, Laplace y después Cauchy, que ha llenado la primera mitad de este siglo con sus descubrimientos, aparte de otros que, como Legendre, Monge, Poincot, Poncelet, Chasles, etc., se han distinguido notablemente en ciencia tan vasta, manifestando todo un progreso armónico en todas las ramas de las matemáticas.

Inglaterra parece que ha impreso su carácter positivista en los métodos de Boole y Cayley, que cons-

tituyen la teoría de las formas, y que han dado al análisis geométrico una sencillez y sobriedad que lo hace fácilmente manejable y le permite llegar con elegante concisión á la resolución de los más complicados problemas. Y este formalismo que los descubrimientos de los matemáticos ingleses han comunicado al análisis, y esta aspiración á encerrar la idea en ciertos moldes, se hallan incrustados en la lógica algébrica de Boole y de Jevons; y, en fin, el originalísimo método de los cuaternios de Hamilton, que constituye una nueva Geometría analítica, es otra manifestación de ese espíritu de brevedad y de concisión que caracteriza el genio inglés.

Alemania, que en los tiempos modernos tiene á Gauss, Jacobi y Riemann entre sus talentos matemáticos, también ha realizado un progreso, que si fué lento al principio, hoy revela una actividad prodigiosa en todos sentidos, envolviendo un acentuado carácter filosófico el procedimiento con que camina hacia la organización de la Matemática desde puntos de vista completamente nuevos hasta hace pocos años.

Para justificar nuestro aserto bastará agregar á cuanto hemos manifestado respecto á los nuevos desarrollos, que ideas de otras épocas han alcanzado en la actual lo que hay de característico en esta, y que se asimila con todo lo demás para formar un abundantísimo conjunto de conceptos, cada vez más puestos en condiciones de constituir un todo con una or-

ganización superior respecto á lo hasta ahora establecido.

En la Geometría se puede afirmar que todas las ideas fundamentales han sido transmitidas por los geómetras de la antigüedad. Basta para ello examinar los lemas de Pappus para encontrar las ideas en que hoy se apoyan los tratados en que se expone dicha ciencia, lo cual, de una manera magistral, realizó Chasles en su obra de los porismas de Euclides; pero hay una diferencia esencial entre la Geometría antigua y la moderna. En aquella se atiende exclusivamente al riguroso enlace de las proposiciones, y predomina la individualidad, procediéndose á la demostración aislada de cada verdad como si fuera independiente de las demás; y tanto domina el espíritu de detalle, que están las figuras materialmente sembradas de letras colocadas en orden cualquiera, que ofrecen dificultades para la clara comprensión de las relaciones que ligan unos elementos con otros. Las verdades aquí y allá dispersas son las piedras fundamentales del edificio científico; pero este dista mucho de hallarse construido. En la Geometría moderna, al contrario, la idea de generalización predomina al mismo tiempo que aspira á realizar la *elegancia* en los procedimientos, la cual se halla caracterizada por unir la brevedad y sencillez á la claridad. Y esta elegancia en el detalle se conserva también en el conjunto mediante la generalidad de los métodos, que tienden cada vez más á incluir la mayor variedad de detalles en el menor número de ideas.

Un paso gigantesco fué dado por Descartes, desde el punto de vista de la generalización que caracteriza á la Geometría analítica; pero también es cierto que fundiéndose la idea de extensión con la de número, aquella quedó oculta bajo las formas de este y subordinada á las mismas, produciéndose el inconveniente de hacer desaparecer la idea predominante bajo las intrincadas transformaciones del análisis, inconveniente que privaba á la ciencia de la extensión de su autonomía y elegancia.

Quien realizó la obra de fundar una Geometría general é independiente de toda idea extraña fué Monge, cuya Geometría descriptiva es un sistema de relaciones entre entidades externas que se establecen con amplia libertad y nos conducen de las unas á las otras sin trabas ni restricciones, creando con esto, como dice Hankel, la *generalidad* y la *elegancia* geométricas.

El método por el que Monge transformó las figuras del espacio en figuras planas, valiéndose de las proyecciones ortogonales sobre dos planos rectangulares, y que Chasles llama método de transmutación de las figuras, ofrece medios de variar indefinidamente las transformaciones á que llegaron La Hire y Newton, además de constituir un recurso poderoso para demostrar multitud de teoremas relativos á figuras en el espacio. Dicho método también permitió á Monge explicar lo imaginario en Geometría de una manera concluyente, que forma la base de cuanto hoy se ha

concluido en este punto de la ciencia. La distinción entre las propiedades permanentes de las figuras y las propiedades accidentales ó contingentes, es decir, las que no varían ó las que varían para ciertos estados ó casos en que pueden hallarse las figuras, explican lo imaginario como un sér de razón sin existencia, al que deben, sin embargo, suponerse ciertas propiedades á que se aplican los mismos razonamientos que en el caso de tratarse de un objeto real y palpable.

En esta tendencia de la Geometría á aislarse de las consideraciones métricas, ha alcanzado el último grado en nuestros tiempos el geómetra Staudt, que puede considerarse como el continuador más caracterizado de las ideas de Monge. La *Geometrie der Lage*, de Staudt, es un modelo perfecto de armonía, rigor y unidad de método. Sin presuponer ninguna noción geométrica en el lector, y partiendo de los más elementales conceptos geométricos, establece la Geometría proyectiva sobre la base de la forma armónica.

Pero si la Geometría descriptiva es para Monge y sus discípulos una especie de arte, una lengua imitativa que, como dice Dupin, tiene la doble ventaja de pintar y hablar á la vista, y si, como pensó Staudt, la idea de posición puede tener una existencia independiente de la idea de magnitud, y así lo demostró en su Geometría, también es cierto que un desarrollo exclusivo de este concepto, prescindiendo del de magnitud, no puede conducir á la generalidad á que la

ciencia aspira, encerrada como quedaría en un limitado círculo.

Las verdades de la ciencia engranan unas con otras, prestándose mutuo apoyo y encadénanse fuertemente en la trama que esta forma. Y esta solidaridad en los principios, y esta riqueza y abundancia en los detalles, se hallan de manifiesto en la diversidad de métodos que han sucedido al de Monge, y que contribuyen á levantar el edificio sobre una amplísima base.

Después de Monge aparece Poncelet como el creador en los tiempos modernos de la Geometría proyectiva. Es el continuador más caracterizado de la obra de Pascal y Desargues; pero amplificada y enriquecida con multitud de nuevos conceptos y métodos de suma transcendencia.

Bajo la influencia de las ideas de Monge, acerca del método que llama Chasles de transmutación de las figuras, y de las investigaciones que Carnot hizo para obtener una correlación entre las figuras geométricas y las expresiones analíticas, llega Poncelet á establecer su *principio de continuidad*, sobre el que se le ve insistir en sus trabajos, desenvuelve la original teoría de las cónicas suplementarias que le permiten presentar un ejemplo de correlación entre lo imaginario y lo real á que corresponden las figuras geométricas, y llevado por su espíritu generalizador, al paso que estableció la admirable teoría de las propiedades proyectivas, llegó á descubrir la teoría de las figuras que llamó *homológicas*, así como el método de transfor-

mación de las figuras *polares reciprocas* que dió origen al *principio de dualidad*, según la expresión de Gergonne, y al concepto de la *clase* de una curva, según la denominación de este mismo, concepto desarrollado por Plucker en su sistema de Geometría analítica.

Pero al llegar á este momento histórico, que es el principio de una época brillante para la Geometría, no basta que nos ciñamos á expresar la evolución sucesiva de una idea, como hasta ahora hemos hecho, porque la Geometría en particular y la Matemática en general, adquieren una nueva forma en su movimiento progresivo. Ya no es un talento, sea Arquímedes, Descartes ó Newton, surgido en tal ó cual período de civilización de un pueblo privilegiado, lo que se ofrece exclusivamente á nuestra consideración, es el movimiento general que impulsa á las inteligencias más diversas de todas las naciones á realizar una obra común, á asimilar unas ideas á otras, antes encauzadas por caminos distintos y hoy convergentes en un foco. Y á tal extremo llega esta aproximación, que cuesta no poco trabajo el disgregar algunas de ellas de los dominios en que se hallan combinadas con otras.

La ciencia parece desbordarse en todas direcciones á la par que coincidir en un corto número de ideas comunes. Los trabajos de Cauchy, Abel y Jacobi en el análisis, son los fundamentos de lo que se avanza en el concepto de las funciones de variables complejas, como si el dominio de las funciones de variables

reales no llenara ya las aspiraciones del espíritu, y se llega á cierta correlación entre las funciones y sus representaciones gráficas.

La idea de cálculo numérico no basta á la actividad combinatoria de los espíritus matemáticos, y se lanzan en diversos países, y según tendencias varias, á dilatar las esferas de la ciencia del número. Grassmann en Alemania escribe su tratado de la extensión (*Ausdehnungslehre*), y desenvuelve ante todo un cálculo general en que se prescinde de la naturaleza del objeto, y después lo aplica á las magnitudes extensas. A este género de investigaciones se han dedicado también Hankel, así como los geómetras Schlegel y Schroöder, que han contribuído á esclarecer estos nuevos elementos científicos, cuya completa síntesis ha realizado en su Aritmética general hace muy poco el Dr. Otto Stolz, resumiendo en su libro cuanto se ha pensado sobre esta materia.

Tal desenvolvimiento, que también se relaciona con el cálculo baricéntrico de Moebius, en Inglaterra se efectuó, según otros ideales, por el filósofo matemático Boole, que pretendió subordinar las leyes de la lógica á las del cálculo, lo que modificó su discípulo Jevons invirtiendo los términos de tal dependencia, y tanto el uno como el otro orden de investigaciones no se ha perdido en el desarrollo de las teorías matemáticas, antes por el contrario, se ha enlazado fuertemente, no solo con las doctrinas de Gauss, Dirichlet, Kummer y Dedekind, sino que también al cálculo ba-

ricéntrico de Moebius, á la teoría de las equipolencias de Bellavitis y á los cuaternios de Hamilton, nuevos sistemas de Geometría analítica que expresan la inagotable fecundidad de este siglo en originales conceptos, que han dado á la Matemática una universalidad no sospechada siquiera en épocas anteriores.

Estos considerables progresos parece que debieran haber agotado el espíritu de inventiva revelado en tantos descubrimientos como acabamos de citar, y, sin embargo, aún no integran la totalidad de direcciones que se siguen. El análisis desarrollado por Cauchy y referido á representaciones geométricas, la teoría de las formas de Boole y Cayley presentando bajo nueva faz la Geometría analítica, los nuevos sistemas de coordenadas trilineales y tangenciales de Bobillier y Plücker que han servido de instrumento de alta valía al fructífero concepto de la dualidad, los desarrollos sobre la periodicidad de las funciones que ha permitido un procedimiento correlativo en las teorías superiores de la Geometría; todo esto parece que no llega hoy á los confines del dominio matemático. Pues sobre todo esto una nueva evolución propia del actual siglo da un carácter especial á la ciencia de la cantidad.

Prescindiendo de especiales direcciones que han seguido talentos eminentemente sintéticos y no exclusivamente matemáticos que, como Ampère, han pretendido fijar el sitio y la jerarquía de las ciencias matemáticas dentro del cuadro de la ciencia humana, aspiración que también vemos realizarse en el *Cours de*

*philosophie positive* de Augusto Comte; sin detenernos, como lo haríamos si no se tratara de una excursión meramente superficial que nos impide profundizar por ahora en ninguna región de los dominios de dichas ciencias, en la grandiosa síntesis que constituyen las obras del filósofo matemático Wronski, hoy todavía no comprendidas ni apreciadas en toda su extensión ni transcendencia; sin examinar trabajos importantes que en pos de esta tendencia generalizadora, y guiados por un espíritu filosófico han realizado entre otros muchos el profesor belga Delboeuf, cuyos prolegómenos filosóficos de la Geometría y cuya lógica algorítmica muy afine con las ideas de Boole, le hacen digno de aprecio por los que cultivan la Matemática desde el punto de vista puramente especulativo; y sin más que citar al Dr. Ueberweg conocido por su exposición científica de los principios de la Geometría, vamos á ocuparnos, aunque brevemente, para terminar esta reseña del contenido de la Matemática contemporánea, en otra tendencia importantísima por los ulteriores desenvolvimientos que ha motivado en el dominio de la Geometría y que trasciende al de la Filosofía, desenvolvimientos que aparecen como preludios de otros progresos no fáciles de apreciar en todo su alcance, pero que sí auguran un brillante porvenir reservado á la antes circunscrita ciencia de la cantidad y hoy difundida mediante su influencia y aplicaciones por las regiones más diversas del pensamiento.

La tendencia á que nos referimos se halla expresada en la nueva Geometría de Lobatschewsky y de Bolyai, que, llamada primero imaginaria ó absoluta, hoy se conoce generalmente con el nombre de *Geometría no Euclídea* y que constituye un riguroso encadenamiento de verdades geométricas que existen independientemente de la admisión del postulado de Euclides.

Esta evolución de la Geometría que el matemático inglés Clifford, muy afine con tales modernas lucubraciones de carácter filosófico-matemático, compara á la evolución que el sistema de Copérnico realizó en Astronomía respecto al de Tolomeo, ha tenido gran resonancia hasta el punto de ser muchas é importantes las investigaciones hechas en este sentido por notables geómetras entre los que se pueden citar principalmente á Riemann, Helmholtz y Beltrami, dando origen á la doctrina, hoy algún tanto divulgada entre los que se dedican á este género de estudios, del hiper-espacio ó espacio de  $n$  dimensiones. Así, Riemann, explicando cómo pueden expresarse analíticamente las propiedades generales del espacio, su continuidad y la multiplicidad de sus dimensiones, llega al concepto de una variedad extensa en  $n$  sentidos, reduciendo la determinación de cada unidad particular á la diversidad ó variedad (*Mannigfaltigkeit*) que le constituye, es decir, la determinación de cada punto á la medida de  $n$  magnitudes que son sus coordenadas, variables de una manera continua é independientes las unas de las otras.

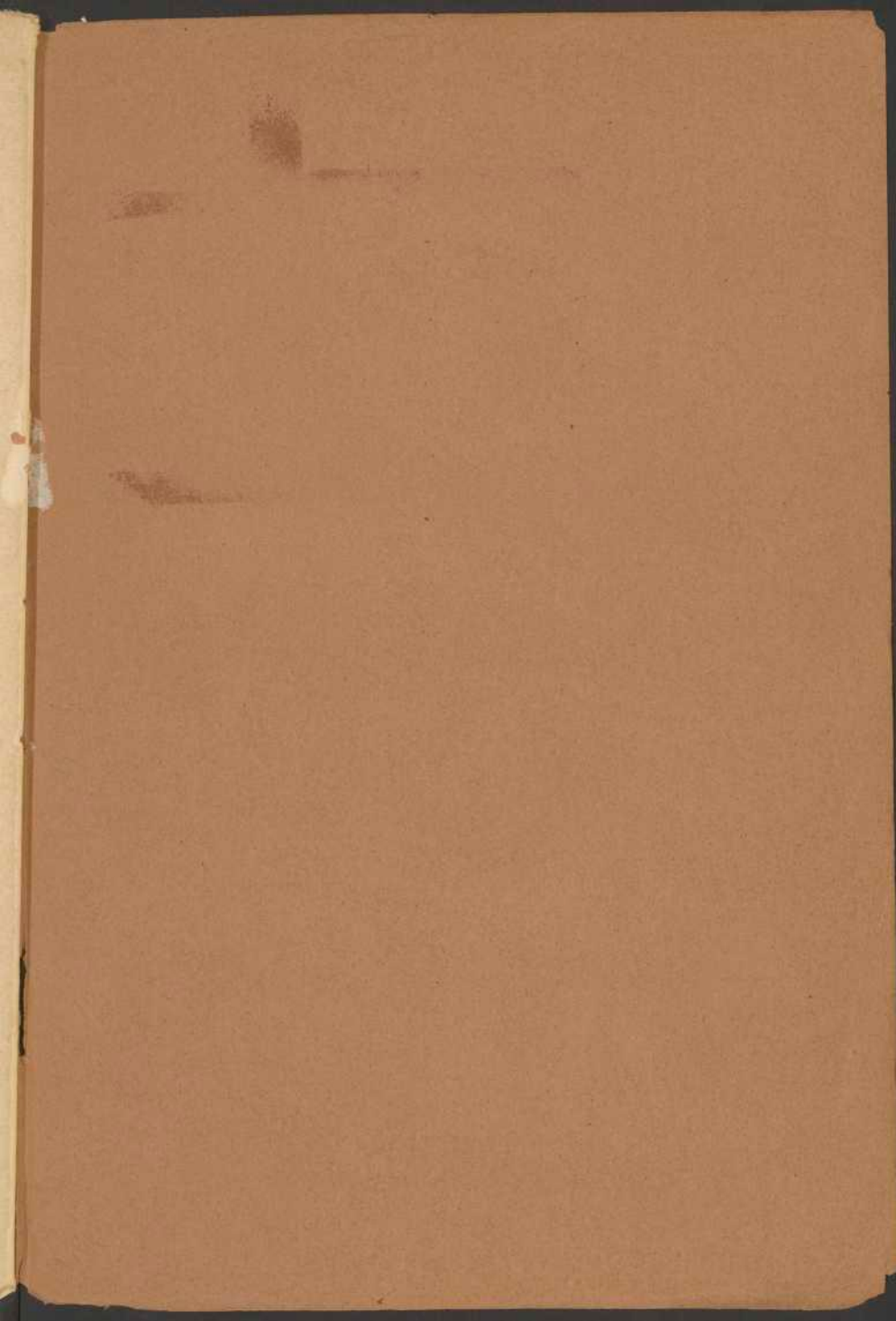
Las investigaciones de Riemann se enlazan con las de Gauss, relativas á la curvatura de las superficies, que le conducen al espacio llamado de curvatura constante positiva, el cual es el espacio plano cuando la curvatura es nula; y estas conclusiones, á cuyo esclarecimiento ha concurrido el célebre físico y matemático Helmholtz, condujeron al italiano Beltrami á un género de espacio que llamó pseudo-esférico, de curvatura constante negativa, al que son aplicables los teoremas de la planimetría no-euclídea, pues existiendo excepciones en las analogías del plano con la superficie esférica, como es la de no determinar dos puntos diametralmente opuestos una circunferencia máxima, línea que corresponde á la recta en el plano, y como es la de no ser válido en la geometría de la esfera el teorema: *Dos perpendiculares á una recta no pueden encontrarse*, Beltrami se propuso decidir si estas excepciones subsisten en las superficies de curvatura constante negativa, y sus investigaciones sobre esta cuestión le permiten establecer sobre tales superficies una geometría conforme con la planimetría de Lobatschewsky y de Bolyai en la que las líneas geodésicas reemplazan á la línea recta.

Esta generalización de los conceptos geométricos que hace manifiesto el progreso realizado durante el siglo actual en los dominios de la crítica científica, es de análoga importancia á la que se ha efectuado respecto al concepto de la cantidad, no limitado ya al de las cantidades imaginarias, como se expusieron, por

ejemplo, en las obras de Cauchy, es decir, bajo la forma binomia, pues los trabajos de Kummer, Dedekind, Weierstrass, Lipschitz, Cayley y otros en estos últimos años se extienden á la consideración de cantidades dependientes de un número  $n$  de símbolos abstractos, siendo muy de notar entre tales desarrollos el singular sistema de ideas expuestas por el matemático norte-americano Peirce en su Álgebra lineal asociativa, donde trata de los símbolos ó unidades independientes y de las leyes de combinación de los mismos que constituyen el lenguaje de cada especie de álgebra.

Basta la enumeración hecha de los muchos y variados puntos de vista desde los cuales se han desenvuelto los conceptos de la extensión, del número, del orden y de la combinación, ya en su modo de ser individual, ya enlazados ó coordinados entre sí, para formarse una idea del grandioso conjunto que constituye actualmente la ciencia matemática, y para tener un conocimiento, si bien somero, de los ensayos y tentativas que hoy con insistencia se encaminan á convertir en un sistema general todos los métodos y direcciones particulares, donde las verdades se encadenan de modo tal, que permitan á las inteligencias abarcarlas como conjuntos armónicos, lo cual solo es posible actualmente si acompaña un perfeccionamiento de los métodos de exposición didáctica, y lo será aún más cuando se reforme la clasificación de las principales ramas de la Matemática en conformidad con la amplitud de los nuevos ideales.





FAN  
8980

BIBLIOTECA CENTRAL DE LA RIOJA



10000208433

MDS 009304

Precio, 1 peseta

