ESTUDIOS CRÍTICOS

SOBRE LA

GENERACIÓN DE LOS CONCEPTOS MATEMÁTICOS

POR

D. ZOEL GARCÍA DE GALDEANO

CATEDRÁTICO DE LA UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

Cuaderno 2.°

La evolución de la Geometría euclidiana hasta los tiempos modernos.

MADRID

IMPRENTA DE FORTANET

CALLE DE LA LIBERTAD, NÚM. 29

1890

ESTUDIOS CRÍTICOS

SOBRE LA

GENERACIÓN DE LOS CONCEPTOS MATEMÁTICOS

POR

D. ZOEL GARCÍA DE GALDEANO

CATEDRÁTICO DE LA UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

Cuaderno 2.°

La evolución de la Geometría euclidiana hasta los tiempos modernos.

MADRID

IMPRENTA DE FORTANET

CALLE DE LA LIBERTAD, NÚM. 29

1890

LA EVOLUCIÓN DE LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA

HASTA LOS TIEMPOS MODERNOS.

Es cuestión de la mayor importancia para los que se dedican á la ciencia, penetrar en lo esencial que el espíritu descubre en las ideas, pues es indudable que el establecer puntos de vista generales permite contemplarlas en conjunto y coordinarlas, según su prioridad ó importancia, y evocar las unas por medio de las otras. Estriban en esto las ventajas que ofrece cada teoría y los recursos ilimitados que enaltecen la ciencia y la colocan muy por encima de los conocimientos aislados debidos á los procedimientos empíricos, ó á tal ó cual afortunada inspiración que pueda llegar al descubrimiento de algunas verdades, las cuales, mientras no se hallen asociadas con ciertas conexiones lógicas, carecen de fecundidad y eficacia, no solo para los fines especulativos, sino también para las aplicaciones prácticas. La ciencia, encadenando las verdades entre sí, afianza las ideas adquiridas, y por cierta especie de atracción mutua facilita la adquisición de otras nuevas.

No es raro que talentos matemáticos se dediquen á estos puntos culminantes y generales que dominan en el campo de la matemática. Muchas veces en obras especiales hallamos profundos conocimientos filosóficos encaminados á fundar las verdades y formar organismos cada vez más perfectos. Y entre ellos encontramos á Carnot, que en su *Géométrie de position* y en sus *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*, además de buscar una correlación entre las variaciones de los signos de las expresiones que designan las cualidades geométricas y las variaciones de estas cuando se deforman de una manera continua las figuras de que forman parte, establece el criterio de los infinitos. También Poncelet es uno de los matemáticos filósofos, lo mismo en sus *Applications d'Analyse et de Géométrie* que en su célebre *Traité des propriétés projectives des figures.*

Lacroix se ocupó filosóficamente en la enseñanza de las matemáticas; Cournot en diversas obras trata de los conceptos superiores de la matemática y especialmente del origen y desarrollo de los geométricos en sus relaciones con el álgebra; Duhamel, además de sus obras tan conocidas y estudiadas en los centros de enseñanza, hace una excursión en que predomina la crítica filosófica en su obra *Des Méthodes dans les sciences de raisonnement*, y sin mencionar el considerable número de obras de carácter filosófico que pudieran citarse, bastará consignar el espíritu filosófico que predomina en las obras de Grassmann, Hankel, Cantor, Bois-Reymond y otros geómetras alemanes, que ya dentro de la región de los conceptos matemáticos, ya transcendiendo á la de los metafísicos, han contribuído á la obra de organización que prosigue la actual generación de talentos científicos.

Algunos espíritus, que ciertamente no deben calificarse como matemáticos, han criticado esta aspiración de los propagandistas y organizadores del saber, sin fijarse en que para conocer una ciencia es necesario remontarse hacia las ideas primordiales de la misma. Es cierto que á tales alturas desaparece algunas veces la claridad que domina en las demás regiones de los conceptos secundarios ó derivados; pero con todo, esta penosa excursión favorece el afianzamiento y la posesión de las ideas.

Actualmente vamos á evitar, sin embargo, en cuanto nos sea posible, el internarnos demasiado en un terreno que no pertenece exclusivamente á la matemática; pero algunas veces se impondrá la necesidad de adoptar ciertos puntos de partida, cuando pretendamos dar unidad á nuestros ulteriores desarrollos acerca de la Geometría.

Ciñéndonos á esta, observaremos desde luego que pocas obras han tenido más comentaristas que los *Elementos* de Euclides, y pocas proposiciones han dado tanto que pensar á los talentos matemáticos de los tiempos modernos como su postulado ó el axioma 11 de dicha obra.

Los *Elementos* de Euclides, que llegaron hasta el siglo actual íntegros, salvo algunas anotaciones secundarias hechas por los traductores, y que aún se adoptan actualmente también con ligeras modificaciones en varios centros de enseñanza de Italia y de Inglaterra, la menos innovadora en este punto, recibieron la primera alteración importante en la *Geometría* de Legendre. Este geómetra creyó necesario modificar en la forma la obra del geómetra griego, no exenta de algunos defectos aunque secundarios: porque en efecto, la obra de Euclides es un modelo acabado de lógica; el encadenamiento de las verdades geométricas es admirable, y hasta se nota un excesivo rigorismo debido á que por entonces era preciso dejar todas las conclusiones á salvo de las argumentaciones sofísticas, tan frecuentes en aquel período decadente de la civilización griega. Por esto se ve que prefiere Euclides demostrar que *una cosa no puede ser* á demostrar que *es*. Además, la forma dogmática predominante le lleva á prescindir de la naturaleza de las cuestiones en el orden que sigue, guiado siempre por el exclusivo propósito de *convencer;* y ciertamente que este orden no es completamente satisfactorio, pareciendo que el único criterio seguido era el de apoyar cada proposición en la que le precede.

Vemos por esto que, después de establecer algunas proposiciones relativas á los triángulos, las proposiciones 9 y 10 se reducen á los problemas de dividir un ángulo y una recta en dos partes iguales, que Euclides resuelve empleando el triángulo equilátero, cuya construcción es el objeto de la proposición 1. De la división de un ángulo y de una recta en dos partes iguales pasa á trazar por un punto una perpendicular á una recta en las proposiciones 11 y 12, fundándose también en la construcción del triángulo equilátero y en las proposiciones 4 y 8 relativas á la igualdad de triángulos. Separadas las propiedades de los triángulos por estos problemas y por los teoremas relativos á los ángulos adyacentes, que son las proposiciones 14 y 15, hace preceder el teorema relativo á la suma de los ángulos de un triángulo por la proposición 17, en la que demuestra que *la suma de dos ángulos cualesquiera de un triángulo es menor que dos ángulos rectos.*

Estas indicaciones son suficientes para hacer comprender la necesidad de la reforma que llevó á cabo Legendre, presentando una nueva exposición de la Geometría, por más que una autoridad tan respetable como Montucla no se mostrara muy favorable al orden seguido en los tratados modernos, por creerlo incompatible, sin legítimo fundamento, con el rigor de la demostración; y más bien puede considerarse como un hecho sorprendente que hasta el siglo actual no se haya intentado modificar en lo más mínimo el monumento geométrico transmitido á nosotros en toda su integridad, á través de las civilizaciones árabe y cristiana, desde la época de la civilización helénica. Y en verdad que tal innovación es más propia de una época de crítica semejante á la actual, y no de una época de generación y engrandecimiento como la que á esta ha precedido. El rigor es compatible con el orden, como dice Delbœuf en sus *Prolégomènes philosophiques de la Géométrie*, y como manifiesta hoy, no solo la abundante variedad de materiales y recursos de que dispone la matemática, sino la flexibilidad que en todas sus ramas posee y la hace susceptible de variación indefinida en el modo de ser expuesta.

Aplicar este espíritu de crítica es lo que ahora nos proponemos con el fin de mostrar cómo la exposición de la Geometría puede hacerse en conformidad con los modernos adelantos del criterio científico, y de qué manera cada elemento científico entra en la constitución del organismo total.

Aunque pretendamos reducirnos á los dominios matemáticos, evitando transcender al campo de la filosofía, solo es posible en cierto grado realizar este propósito. En los límites del dominio matemático se hallan los umbrales del segundo, y en estos ya la matemática pierde su autonomía para someterse al criterio de escuela.

Que los conceptos matemáticos sean generalizaciones de los hechos experimentales, como pretende la escuela positivista, ó sean conceptos *à priori* de nuestro entendimiento, como asienta la escuela idealista, esto no compete al matemático que, partiendo de los primeros principios, sigue con un rigor inquebrantable y con una perfecta evidencia la trama de las verdades. Pero si esto último es lo que esencialmente ocupa al matemático, no por ello queda exento de fijar su atención en el punto de partida; y que ha cumplido con este precepto lo demuestran las muchas obras en que de los fundamentos de los conceptos matemáticos se trata, debidas á escritores consagrados casi exclusivamente á la ciencia de la cantidad.

Para seguir fielmente el desarrollo de la Geometría euclidiana en los límites que comprenden la extensión de los *Elementos*, nos es preciso comenzar por los conceptos fundamentales, aunque por un momento no penetremos de lleno en el campo de la ciencia.

No es hoy la Geometría ciencia como la Aritmética y el Álgebra, á las que basta la acción de pensar reducidas á una sucesión de estados interiores dados en la conciencia. La Geometría necesita una materia exterior al agente que la produce en el fondo de nuestro espíritu, y esta materia es el espacio indefinido, homogéneo é indiferente á todas las determinaciones, pero susceptible de recibirlas todas. Y una prueba de la profundidad de pensamiento según la que fueron escritos los *Elementos geométricos* de Euclides, es que sus tres primeros postulados equivalen á exigir estas tres condiciones en la materia, con la cual modeló tan perfectamente el organismo de la Geometría. «Se pide que se pueda: 1.º Trazar una recta desde un punto cualquiera á otro punto cualquiera. 2.º Prolongar indefinidamente, según una dirección cualquiera, una recta finita. 3.° Describir una circunferencia desde un punto cualquiera como centro, y con un radio cualquiera.» Y esto equivale á exigir las tres condiciones precitadas del espacio, como fundamento sobre el que desde luego ha de ser lícito establecer toda la Geometría.

Pero no basta la causa activa, el espíritu, ni la materia pasiva, el espacio, para que surja el edificio geométrico con su vasta organización, donde aparezcan armonizadas las múltiples propiedades de la extensión; preciso es un intermediario, el movimiento, que aplique la unidad del concepto á la multiplicidad de los puntos del espacio. Y esto nos conduce á examinar la definición geométrica que expresa la ley de construcción de cada figura, según el enunciado de la misma.

Considerando una noción geométrica, encontramos en ella dos elementos: un contenido, el espacio, y una forma que limita este espacio, siendo esta la que constituye la esencia de la noción, y lo accidental la magnitud, que puede variar sin que se altere la esencia de la figura. El espíritu hace mover un punto según condiciones indefinidamente variables, y cada uno de estos movimientos engendra una figura particular de forma inmutable. Las leyes que formula el espíritu producen sucesivamente, como sus traducciones inmediatas, la circunferencia, la elipse, la hipérbola, etc., las superficies cónica, cilíndrica, de revolución, regladas, etc. Las entidades de este mundo, de carácter esencialmente subjetivo, pasan de la virtualidad al acto, en cuanto la inteligencia ha procedido como causa aplicando su actividad á la materia sobre que actúa, ó sea al espacio.

Hay que establecer una distinción entre lo que pasa en los dominios de la Geometría y lo que pasa en los dominios de la naturaleza, y esto permite esclarecer y fijar el concepto de la definición geométrica.

La esencia en las nociones geométricas es distinta de la esencia de las nociones empíricas. Los caracteres de un sér de la naturaleza se hallan unidos por un lazo de subordinación que se expresa por las divisiones en grupos, clases, órdenes, familias, etc.; y un sér perteneciente á tal ó cual especie lleva consigo los caracteres que implican los grupos superiores. A esta subordinación no se someten las figuras geométricas, lo que establece una línea divisoria entre los juicios que formulan las ciencias matemáticas y las ciencias naturales. En estas, un sujeto se hace entrar en la circunscripción de un atributo, como cuando decimos que el hierro es mineral, incluyendo en la idea de mineral la de hierro, y razonamos por inclusiones sucesivas partiendo desde un individuo y expresando la especie, el género, la familia que lo comprenden y hasta inversamente podemos describir un grupo enumerando la totalidad de los que le están subordinados. En las ciencias matemáticas no se procede de igual manera. Las ciencias naturales estudian las cualidades, la Geometría, cantidades susceptibles de recibir límites variables. En las primeras, la definición se efectúa expresando el género á que pertenece la noción definida y la diferencia que la distingue de las especies con ella incluídas en aquél, y varían según los perfeccionamientos de la taxonomía; las definiciones geométricas que enuncian el modo de generación propio de cada figura, son *à priori* absolutas é invariables. Las definiciones geométricas son *nominales*, es decir, imposiciones de nombres á ideas que resultan de reglas de construcción impuestas con toda libertad por nuestra inteligencia, mientras que en las ciencias empíricas se define lo que es independiente de nuestro espíritu, y que se le impone, puesto que preexiste al mismo. En fin, la lógica, al emplearse en ambos desarrollos científicos, aplica al uno los silogismos, y al otro las ecuaciones, y estos dos procedimientos implican el uso respectivo de juicios analíticos en el uno y sintéticos en el otro, en la acepción de Kant.

Aunque las anteriores consideraciones se apartan del orden de ideas puramente matemáticas, hemos creído esencial presentarlas con la mayor brevedad posible, por ser antecedentes necesarios de cuanto hay que exponer respecto al plan de ideas que corresponde al sistema de Geometría euclidiano, en el cual más que en ninguno otro interviene la cuestión de principios ampliamente debatida por filósofos y matemáticos.

La cuestión de las definiciones, de los postulados y de los axiomas, la de los métodos generales y particulares, la del encadenamiento, coordinación y subordinación de las ideas, la de los diversos planes de exposición con que se aspiró á suplir las deficiencias que se han señalado á los *Elementos* de Euclides, exigen y han exigido muchas veces elevarse á las consideraciones más abstractas, extrañas á los dominios en que la ciencia se desenvuelve, pero para cuyo desenvolvimiento aquellas sirven de criterio y fijan el punto de partida.

Todos estos asuntos han sido muy debatidos entre los matemáticos de diversos países, sobre todo desde que Legendre intentó sustituir al molde antiguo otro nuevo, y cuando la Geometría de Lobatschewsky y de Bolyai presentó la cuestión bajo una nueva fase; y, en fin, cuando la Geometría proyectiva, ya desembarazada de las trabas que le impuso la intervención del número al libre desarrollo de los conceptos de extensión y de forma, han dado motivos para poner en discusión el problema de la enseñanza de la Geometria, especialmente en Inglaterra é Italia, donde se ha pretendido suplir las deficiencias de los textos seguidos, al mismo tiempo que evitar el espíritu sobremanera restrictivo é impropio para el progreso, característico de los *Elementos* de Euclides.

En Francia, donde mayor libertad ha tenido la exposición de la Geometría, que además del tratado de Legendre, ha visto sucederse los de Lacroix, Vincent y Cirodde de análoga contextura, críticos matemáticos como Hoüel y Duhamel, aun reconociendo gran-des excelencias en la obra de Euclides, la han creído susceptible de mejoras y simplificaciones. En Italia, donde el Gobierno tuvo que exigir la adopción de los *Elementos* de Euclides para evitar la excesiva arbitrariedad de los muchos tratados que aparecieron, se llegó á adoptar la notable obra del alemán Baltzer, que como todas las de este autor, hermanan lo antiguo con lo moderno, expresando una tendencia progresiva. En Inglaterra, la *Association for the improvement of Geometrical Teaching*, entre otras varias entidades análogas, trabajó por alejarse de la línea reducida que trazan en el progreso geométrico los *Elementos* de Euclides, aspirando dar á la materia una vida que creyeron los promovedores de esta idea, solo poderse alcanzar alejándose de aquellos.

La cuestión dominante en la Geometría ha sido el postulado ó axioma 11 de Euclides, así como han tenido también capital importancia las definiciones primitivas como la de la recta, el plano y el ángulo que han obligado á los autores á moverse en un círculo estrecho cuya circunferencia les ha sido imposible salvar.

En cuanto á la definición de una ciencia puede afirmarse que siempre es difícil, porque, ó no determina bien el objeto definido, ó los términos que definen exigen á su vez explicación. Esto sucede con la definición de Legendre, que reduce la Geometría á la ciencia que tiene por objeto la *medida de la extensión*, la cual adoptó Comte explicando que esta es una medida *in-*

directa de unas magnitudes por medio de otras. Esto da á la Geometría un carácter práctico que esencialmente no posee, por lo cual Chasles amplificó la definición diciendo que la Geometría tiene por objeto la *medida y las propiedades de la extensión figurada*, y en fin, el profesor belga Delboeuf, concibiendo que existe una doble Geometría; una tal, que dada una forma se esfuerza por reducirla á una figura ideal, de que se ofrecen ejemplos en la cristalografía, y en las operaciones de Kepler para determinar la naturaleza de la órbita de Marte; la otra, la Geometría teórica, que sigue una marcha inversa, y partiendo de principios ideales, crea formas indeterminadas, trata de hacerlas coincidir con las figuras reales, y llega á definir la Geometría como la ciencia que tiene por objeto *las determinaciones ó figuras ideales del espacio*.

En los orígenes de una ciencia, las definiciones se confunden frecuentemente con los axiomas y hasta se sustituyen entre sí, de manera que lo que es definición para unos, es axioma para otros.

De este hecho han procurado dar una explicación los filósofos. Entre ellos Frantz, de la escuela hegeliana, en su obra *Die Philosophie der Mathematik*, observa que en realidad los objetos de la Matemática, aunque determinados por las categorías más simples, contienen una pluralidad de determinaciones, de lo que resulta incertidumbre en saber qué carácter debe servir para la definición; y cómo la definición, al contrario del concepto, no da todo el contenido de un objeto, cuando por medio de la definición se pretende ir más lejos, todos los momentos de la evolución de la idea son necesarios y en esto se halla el origen de los axiomas.

Considerando el axioma: *la línea recta es el camino más corto entre dos puntos,* se expresa de la manera siguiente: La línea recta está determinada cualitativamente *(recta)*, y al mismo tiempo es una magnitud, una *longitud*. Como el espacio es magnitud, sus propiedades cualitativas son simplemente de magnitud. La línea recta es, pues, al mismo tiempo magnitud y cualidad. Este *al mismo tiempo*, no puede ser abarcado por el entendimiento, y deja la una fuera de la otra. Por la definición, la línea recta solo puede darse según *una* de sus determinaciones; por esto la segunda debe presentarse como proposición fundamental. En la definición de Euclides: línea recta es *la que se halla situada semejantemente entre sus puntos*, solamente se contiene el momento cualitativo, y entonces el axioma debe expresar, que *es la distancia más corta*, ó sea la definición de Legendre.

En fin, Hegel hace observar que la línea recta es en virtud de su esencia, hasta ahora desconocida, á la vez el más corto camino, es decir, una medida para la distancia; *una línea de dirección constante,* ó una medida para la dirección; *una línea determinada por dos de sus puntos,* ó que no sale de sí por la rotación entre dos de sus extremos; *una línea cuyos puntos se hallan semejantemente colocados.* Pero esta esencia es la razón última del conjunto de estas propiedades, siendo imposible pasar de una de estas á la otra por medio de razonamientos, porque están coordinadas y no subordinadas entre sí. De manera que al admitir como definición cualquiera de ellas, forzoso es aceptar las demás, explícita ó implícitamente, como axiomas ó postulados.

Estos razonamientos bastan, sin citar otros de la misma ó distinta escuela filosófica, para demostrar lo difícil que es fijar en los orígenes de cada ciencia el carácter de las diversas proposiciones, como definiciones, axiomas ó postulados, y esto explica la multiplicidad de direcciones que se siguen en el punto de partida, por más que haya conformidad en todo el resto.

Suficientemente tratada la cuestión de principios, que obliga á salir de los dominios de cada ciencia para buscar, en esa aspiración universal á conocer que representa la filosofía, las últimas razones de las cosas, ó sea sus primeros principios, vamos ahora á exponer de un modo compendioso la Geometría, según el plan que trazó Euclides en sus *Elementos* para después juzgar acerca de las alteraciones más importantes que han introducido los autores modernos, y por último, en conformidad con las consecuencias de todo esto emanadas, poder llegar á resultados generales sobre un plan que comprenda todos los perfeccionamientos parciales en los anteriormente señalados. Pero también debe observarse que la Geometría no se halla expuesta en los *Elementos* más que en su primer desarrollo, y para abarcarla en la totalidad de este, es necesario acudir á otros resultados superiores á que llegó Euclides en su obra de los porismas, restablecida por Chasles y que tanto ha preocupado á los talentos matemáticos, empeñados, desde el renacimiento científico hasta la actualidad, en descifrar este enigma para cuya solución solo se contaba con algunos fragmentos expuestos en las obras de Pappus y los 38 lemas de este geómetra. Así, en el plan de exposición que vamos á indicar como síntesis del progreso geométrico actual, en cuanto se refiere al desenvolvimiento que parte de la obra de Euclides, sin abandonar su método ni su carácter, de igual modo tendrán cabida las teorías pertenecientes á los *Elementos* que las propias de esta nueva colección de proposiciones de una concepción ingeniosa y de útil empleo para la resolución de los problemas más difíciles, según manifiesta Pappus, y que en los tiempos modernos constituye la rama superior de la Geometría.

Comenzando, pues, por dar una idea sucinta de los *Elementos* de Euclides, vamos á ver cómo son un modelo de rigor lógico, y para ello basta ir citando en su orden algunas de las proposiciones y el modo de razonamiento seguido en cada una.

El espíritu que caracteriza los *Elementos geométricos*, difiere del que distingue las obras modernas.

En estas se busca la brevedad y la elegancia en la forma, y se huye del predominio del detalle, lo cual se explica fácilmente por la diversidad de tendencias propias de cada época. En Euclides domina la idea de encadenamiento sucesivo, no la coordinación que obedece á disposiciones simétricas de las verdades en las diversas ramas convergentes hacia el tronco. Basta citar el asunto de cada libro para convencerse de ello. En el primero se establecen las proposiciones concernientes á los ángulos y á los triángulos. En el segundo, las relaciones de magnitud de las rectas ó segmentos que forman ciertas figuras rectilíneas. El tercero trata de la circunferencia. El cuarto, de las figuras inscritas ó circunscritas. El quinto, de las magnitudes proporcionales. En el sexto se aplican los principios de la proporcionalidad á las figuras, y especialmente á las semejantes. En el undécimo y duodécimo se habla, en fin, de los sólidos.

Una breve indicación del orden seguido en el encadenamiento de las verdades y de la manera de razonar empleada en cada caso, podrá servir para comprender lo que es la obra en su conjunto, que tiene la inapreciable ventaja de conservar el mismo carácter en cualquiera de sus partes ó en cualquiera de sus proposiciones.

No vamos á discutir las definiciones fundamentales, que si pueden ofrecer motivo de objeción y de controversia en los dominios de la filosofía, no han podido ser reemplazadas por otras absolutamente perfectas, ni exentas de censuras acaso mayores.

Las ideas fundamentales de la ciencia se emancipan de las leyes del razonamiento, porque subsisten sobre ellas. Solo se relacionan con las verdades que les están subordinadas; son los primeros eslabones de la cadena más allá de los cuales el espíritu nada de cierto puede vislumbrar.

Es lógico que preceda á un sistema de verdades sobre un objeto la descripción de este, y además los medios de que disponemos para establecer dicho sistema. Esto se verifica en la obra que analizamos. El objeto ó el material se da por la serie de definiciones que lo hacen conocer en su variedad. Los postulados expresan lo que nos autoriza á practicar siempre la naturaleza del medio en que se van á desenvolver las relaciones que han de establecerse en los teoremas. Los axiomas son los puntos fijos que enlazan los conceptos en los razonamientos. Y como complemento á este preliminar necesario, que ha de permitir dar un carácter de realidad á las verdades que se han de enunciar bajo la forma de teoremas, Euclides comienza la serie de sus proposiciones por los problemas que enseñan á construir un triángulo equilátero, á trazar desde un punto una recta igual á una recta dada, y á tomar en una recta una parte igual á otra dada, procedimientos generales que se han de aplicar en los razonamientos para obtener los enlaces de entidades geométricas que expresan, ya los teoremas por demostrar, ya los empleados en cada caso como auxiliares.

Sabiendo practicar las citadas construcciones, y demostrado el teorema fundamental que establece la igualdad de dos triángulos cuando tienen iguales dos lados y el ángulo comprendido, ya es posible demostrar que en un triángulo, cuando son iguales dos lados, también son iguales los ángulos opuestos á los mismos, así como los formados por la base con las prolongaciones de dichos lados, y todo resulta de tomar dos segmentos iguales en estas prolongaciones, de trazar, desde sus extremos, rectas á los vértices que la base determina con cada lado opuesto, formándose dos pares de triángulos iguales, los totales y los parciales, situados debajo de la base. Esta primera demostración de la proposición 5.ª de Euclides, es el primer ejemplo de un procedimiento general seguido en la Geometría para deducir la igualdad de dos rectas ó de dos ángulos, y que consiste en formar triángulos cuya igualdad resulte de la de los elementos supuestos iguales y de los elementos introducidos en las construcciones auxiliares. Pero si la igualdad de los ángulos se verifica cuando se supone la de los lados opuestos, también se verifica lo que hoy llamamos la recíproca, que Euclides enuncia en la proposición 6.ª, y demuestra haciendo ver que, si al ser iguales dos ángulos, uno de los lados fuese mayor que el otro, resultarían dos triángulos iguales, por satisfacer al caso de igualdad que expresa la proposición 4.ª, estando al mismo tiempo el uno contenido en el otro, lo cual es absurdo. Además de esto, desde los extremos de una recta no se pueden trazar á dos puntos situados á un mismo lado de esta dos pares de rectas respectivamente iguales (es decir, formar sobre una misma base y á un lado de esta dos triángulos, cuyos tres lados sean respectivamente iguales), porque aplicando la proposición anterior resultaría que dos ángulos debían ser iguales, siendo el uno parte del otro; y es claro que, demostrado esto, ó sea la proposición 7.ª, dos triángulos de iguales bases, y cuyos otros lados son también respectivamente iguales, serán también iguales, porque si no lo fueran, al colocarlos de manera que confundiéndose las dos bases se hallasen situados al mismo lado de la base que ahora es común, resultarían dos pares de rectas respectivamente iguales (por hipótesi), que tendrían que ser al mismo tiempo desiguales, según la proposición anterior.

Hay proposiciones en la obra de Euclides, que en los tratados modernos parecerían supérfluas. En este caso se hallan las siguientes, que son las proposiciones 16 y 17: *En cualquier triángulo el ángulo externo es mayor que cualquiera de los internos opuestos; en todo triángulo dos ángulos cualesquiera sumados, valen menos que dos rectos;* y es claro que las dos se hallan incluídas en la 32, cuyo enunciado es: *El ángulo externo de un triángulo es igual á la suma de los dos internos opuestos, y los tres ángulos internos sumados valen dos rectos.*

Pero la proposición 17 es la recíproca del axioma 11, es decir, del célebre postulado. De manera que: *Si dos rectas forman con otra ángulos internos cuya suma es menor que dos rectos, se encuentran:* y recíprocamente; *si estas se encuentran* (es decir, forman un triángulo con la secante), *la suma de los ángulos que forman con la secante vale menos que dos ángulos rectos.*

En cuanto á la proposición 16, tiene este otro significado importantísimo: *Desde un punto no pueden trazarse dos rectas que formen ángulos iguales con otra* (entendiéndose tomados en el mismo sentido ó con igual orientación en el plano), proposición suficiente por sí sola para demostrar otras muchas relativas á la desigualdad angular, como la 18: *En cualquier triángulo á mayor lado se opone mayor ángulo.* La proposición 19 se halla implícita en ésta y la 5.ª unidas, pues claro es que de ambas se deduce *ad absurdum* que: *A mayor ángulo se opone mayor lado en un triángulo*, y también se deduce la 20, es decir, que: *La suma de dos lados de un triángulo es mayor que el tercero*, teorema que se encuentran demostrado los autores que definen la recta como *la distancia más corta entre dos puntos.* Además, la proposición 17 al expresar que *el ángulo exterior de un triángulo es mayor que cualquiera de los dos internos no adyacentes*, lleva implícitamente como corolario, que: *Por un punto solo puede trazarse á una recta una perpendicular*, según manifiesta el P. Kresa, que tradujo en el año 1689 al castellano la obra de Euclides, con algunas adiciones y con alteración á veces del procedimiento demostrativo.

Aunque perjudicando aparentemente á la uniformidad que debe ofrecer una teoría, cuya proposición adecuada es el teorema, obligaban las circunstancias de la época á Euclides, para que la realidad de las diversas entidades quedase establecida en el acto de ser consideradas, á intercalar convenientemente los problemas que las determinan. Así, pues, necesitó demostrar la *existencia* de la recta perpendicular á otra, y su demostración se redujo á resolver los problemas: *Por un punto de una recta* (pr. 11) *ó fuera de ella* (pr. 12), *trazarla una perpendicular;* que dependen de la construcción del triángulo equilátero y de la división de un ángulo y una recta en dos partes iguales, que son las proposiciones 9 y 10.

De análoga manera la obtención de un ángulo igual á otro dado depende de la construcción de un triángulo con tres rectas dadas, de modo que dos cualesquiera sumadas sean mayores que la tercera, pues evidentemente, si dado un ángulo, se completa el triángulo con una recta cualquiera, al reproducirse este sobre otra recta dada, se obtendrá el ángulo igual al primero.

Persistiendo en su procedimiento uniforme de probar los teoremas prefiriendo la demostración *ad absurdum*, el teorema hoy demostrado generalmente por superposición relativo á la igualdad de dos triángulos que tienen *iguales un ángulo y los lados adya-*

centes, que en el enunciado de Euclides comprende también el caso de que el lado sea opuesto á uno de los ángulos, se demuestra en el texto griego haciendo ver que al superponerse el triángulo DEF sobre el ABC, si el lado DE fuese menor que el AB, se formaría en el triángulo ABC otro BGC en los que las bases CG y CA serían iguales, y también los ángulos GCB y ACB, de los que el primero es una parte y el segundo el todo, lo que es absurdo; y si los lados iguales fuesen los AB y DE opuestos á los ángulos ACB y DFE, entonces, tomando en el lado EF del triángulo DEF una parte $EG = BC$, se obtendría un triángulo DEG igual al triángulo DEF, resultando el ángulo exterior DGE del triángulo DGF igual al interior DFG, lo que es absurdo; y con esto se prueba una vez más el uso importante de la proposición 16 relativa al ángulo externo de un triángulo, proposición que también sirve para demostrar en la 27 que si una recta cayendo sobre otras dos forma ángulos alternos iguales, estas serán paralelas, pues si esto no sucediera, al encontrarse formarían un triángulo en el que el ángulo externo sería igual á uno de los interiores no adyacentes. Y después de la proposición 28, destinada á reemplazar los ángulos alternos por los que hoy llamamos correspondientes y por los internos á un mismo lado de la secante, á continuación de esta serie de 28 proposiciones independientes del postulado, para la proposición 29 ó teorema 20: *Si una recta cae sobre dos rectas paralelas, formará* *ángulos alternos iguales entre sí, y el externo igual á su interno opuesto y del mismo lado* (correspondientes), *y los dos interiores del mismo lado sumados son iguales á dos ángulos rectos*, necesita de la consideración del postulado ó axioma 11 (del cual es la proposición recíproco-contraria); porque si, por ejemplo, los ángulos alternos no fuesen iguales, al otro lado del que fuese mayor se formarían dos ángulos internos cuya suma sería menor que dos ángulos rectos, y según dicho axioma, se tendrían que encontrar las rectas supuestas paralelas.

Consecuente con su plan de fundar las relaciones de los conceptos sobre construcciones reales, en la proposición 31 enuncia y resuelve el problema relativo á la construcción de la paralela á una recta, que necesita para fundar el teorema que expresa el valor de la suma de los ángulos de un triángulo en el trazado de los tres ángulos iguales á estos, y que sumados valen lo que el externo y su interno adyacentes.

En fin, la proposición 33: *Líneas rectas que unen los extremos de dos rectas iguales y paralelas hacia el mismo lado, son iguales y paralelas*, establece la existencia del paralelógramo, cuyas propiedades de tener ángulos opuestos iguales y de componerse de dos triángulos iguales son el objeto de la proposición 34; y después, las proposiciones relativas á los paralelógramos situados sobre la misma base ó sobre bases iguales y entre las mismas paralelas, así como las en que se trata de triángulos, le permiten exponer sencillamente la teoría de las figuras que Legendre denominó equivalentes para distinguirlas de las que son iguales, ó mejor, idénticas, siendo las últimas proposiciones del libro primero el célebre teorema de Pitágoras, y otra proposición de uso continuo en los elementos; á saber, que: *Si el cuadrado descrito sobre uno de los lados de un triángulo es igual á la suma de los cuadrados descritos sobre los otros dos, el ángulo que estos comprenden es recto.*

No seguiremos con detalle el desarrollo de la Geometría en la obra de Euclides, porque esto, además de ser tarea de considerable extensión, nos desviaría de nuestro principal objeto; pero hallándose basado mucho de lo que vamos á exponer en esta primera síntesis de la ciencia de la extensión, es preciso hacer todavía algunas indicaciones de lo contenido en obra tan fundamental.

El libro 2.º es un modelo de razonamiento característico de aquella época, en que desconociéndose la generalización dada más tarde á la Geometría por el talento sintético de Descartes, no era posible sustituir á las construcciones gráficas el empleo de las relaciones numéricas.

Las proposiciones contenidas en el libro 2.º, se reducen á expresar relaciones de superficies construídas sobre rectas cuyos segmentos se hallan en relaciones dadas. Por ejemplo: si dadas dos rectas, una de ellas se divide en dos partes cualesquiera, el rectángulo formado por las dos es igual á la suma de los rectángulos contenidos en la total y en cada una de las partes de la otra. Si una recta se corta como quiera, los rectángulos contenidos en la total y en cada una de las partes sumadas son iguales al cuadrado de la línea total. Si una recta está dividida en dos partes cualesquiera, el cuadrado de la línea total es igual á los cuadrados de las dos partes sumadas con el doble del rectángulo contenido en las dos partes.

Fácilmente podemos dar idea de los razonamientos empleados para demostrar las importantes proposiciones 5.ª y 6.ª, que en el libro 3.º aplica á la demostración de las relaciones existentes entre segmentos rectilíneos en el círculo, y cuyos enunciados son los siguientes: *Si una recta está dividida en dos partes iguales y también en otras dos desiguales, el rectángulo contenido en las partes desiguales juntamente con el cuadrado de la recta comprendida entre los dos puntos de división es igual al cuadrado de la mitad de la recta. Si una recta está dividida en dos partes iguales, y se le añade otra recta cualquiera, el rectángulo formado con toda la recta y con la añadida junto con el cuadrado que se forma sobre la mitad de la recta es igual al cuadrado sobre dicha mitad aumentada con la prolongación como lado.* Siendo en el primer caso la recta AB la que está dividida por el punto C en dos partes iguales y por otro punto D (comprendido por ejemplo entre C y B) en dos partes desiguales, si se construye sobre CB un cuadrado, y sobre AB como base un rectángulo con una altura $AK = DB$, se ve que el rectángulo sobrante de altura AK y base AC, juntamente con el contiguo de la misma altura y base CD, es igual al gnomon que contiene el cuadrado cuya base es DB (gnomon es la parte del cuadrado total que resulta de suprimir uno de los dos cuadrados parciales), y añadiendo á ambas partes el otro cuadrado, resulta probada la verdad del enunciado, que Playfair en sus *Elements of Geometry* expresa por la relación $AD.BD + CD^2 = BC^2$. Lo mismo se repite para demostrar el otro enunciado, con la diferencia de ser el cuadrado el construído sobre la mitad CB aumentada en el segmento BD, y que el mismo autor expresa así: $AD.DB + CB^2 = CD^2$.

Estas y otras proposiciones tan importantes como las relativas á las expresiones de los cuadrados construidos sobre el lado opuesto á un ángulo obtuso ó agudo de un triángulo, la construcción de un cuadrado igual (hoy equivalente) á una figura rectilínea conocida, dan idea del contenido del libro 2.° de los *Elementos*.

El libro 3.° está destinado al círculo. En él se encuentran detalles de que se ha prescindido en los tratados modernos, y se observa como en toda la obra el predominio del método *ad absurdum*.

Al hallar el centro de la circunferencia en la proposición 1.ª, después de trazar una cuerda AC, y por su punto medio B el diámetro DE perpendicular, dice que el centro buscado no puede ser otro más que el punto F medio de este, porque si estuviese el centro fuera de dicha línea, por ejemplo, en un punto G, trazándose las rectas GA, GB, GC en los triángulos ABG y CBG, los dos lados AB y BG del uno son iguales á los dos lados BC y BG del otro, siendo también GA igual á GC como radios; luego los ángulos ABG y CBG son iguales entre sí; luego son rectos; pero DBC también lo es; luego la parte es igual al todo, lo que no puede ser; luego el centro es el punto medio F del diámetro perpendicular en B á la cuerda AC.

Para demostrar que *la recta que une dos puntos cualesquiera AB de una circunferencia cae dentro de esta,* supone que caiga fuera, y trazando á la recta supuesta exterior desde el centro D una recta DE que cortará á la circunferencia en un punto F, de la consideración del triángulo isósceles DAB y de que el ángulo AED externo en el triángulo EDB es mayor que el ángulo EBD, y por consiguiente que su igual EAD, deduce que AD ó su igual DF es mayor que ED, es decir, la parte mayor que el todo; luego AEB no puede ser exterior á la circunferencia.

Que *una recta trazada por el centro al punto medio de una cuerda le es perpendicular*, y que *si es perpendicular á esta*, *la divide en dos partes iguales*, lo demuestra directamente en virtud de la igualdad de triángulos; pero que *si dos rectas AC y BD no trazadas por el centro se cortan en un punto E*, *no se cortan* *en partes iguales*, lo demuestra *ad absurdum*, pues si se supone $AE = EC$ y $BE = DE$, y se traza por el centro F la recta FE, según el teorema anterior los ángulos FEC y FED serán rectos, y por consiguiente iguales, es decir, la parte igual al todo. Que *si dos circunferencias se cortan en un punto B, no tendrán el mismo centro*, se demuestra también suponiendo que C sea el centro común, pues trazando la recta CEA que los corta respectivamente en E y en A, se tendrá: $CE = CB$, es decir, $CE = CA$ ó la parte igual al todo. Y demuestra con igual razonamiento que *si dos círculos se tocan interiormente, no tendrán el mismo centro.*

Una consideración nueva nos ofrece el razonamiento empleado para demostrar la proposición 14: *En un círculo cuerdas iguales equidistan del centro* y su recíproco, pues trazándose por el centro E las perpendiculares EF y EG á las cuerdas AB y CD supuestas iguales, que pasarán por los centros de cada una de estas, segun la proposición 3, y siendo EA y EC las hipotenusas (que son radios) iguales, también lo serán sus cuadrados y la suma de los cuadrados de AF y FE á la de los lados CG y GE; y como AF es igual CG por ser mitades de cuerdas iguales y serlo por consiguiente sus cuadrados, los cuadrados restantes de EF y de EG también lo serán; luego será finalmente EF igual á EG.

Este empleo de la relación que expresa el teorema de Pitágoras para demostrar la igualdad de dos rectas, pasándose de la igualdad de los cuadrados á la igualdad de las rectas correspondientes, es digno de notarse por lo frecuente que es en la obra de Euclides.

Respecto á la tangente, primero demuestra que: *La recta trazada en el extremo A del diámetro, formando con este ángulos rectos, caerá fuera del círculo*, y después, que *entre ella y la circunferencia no podrá trazarse otra recta que no lo corte*, lo primero, porque si cayese dentro como la recta AB, por ejemplo, formaría uniendo los puntos A y B con el centro un triángulo con dos ángulos rectos, y lo segundo, porque si existiese entre la tangente y la circunferencia otra recta AH, bajando desde el centro D la perpendicular DIH (el punto I es el de intersección con la circunferencia), en el triángulo ADH el ángulo DAH sería menor que el ángulo recto DHA, y por consiguiente AD ó su igual DI mayor que DH, es decir, la parte mayor que el todo.

A esta y otras proposiciones relativas á la tangente siguen las que tratan de los ángulos en el círculo, y se demuestra que los ángulos situados en un mismo segmento son iguales, haciendo ver que son la mitad del ángulo en el centro.

El empleo de procedimientos esencialmente geométricos, complica algunos razonamientos, que actualmente se han simplificado haciendo uso de relaciones numéricas, pudiéndose notar esta circunstancia en el teorema: *Si dos líneas rectas se cortan dentro de un círculo, el rectángulo de los segmentos de la una es* *igual al rectángulo de los segmentos de la otra*, en cuyo teorema distingue cuatro casos, en los cuales se trata sucesivamente de dos rectas AB y CD que se cortan en el centro E, de una recta CD que pase por el centro F y corte en el punto medio E á la recta AB en partes iguales, de una recta CD que pase por el centro y corte á la AB en partes desiguales EA y EB, y en fin, de las rectas CD y AB de las que ninguna pasa por el centro.

En el primer caso la conclusión es evidente porque los segmentos son iguales. En el segundo, el diámetro CD, dividido por F en dos partes iguales y por E en dos partes desiguales, conduce á la igualdad entre el rectángulo de las partes desiguales, CE ED juntamente con el cuadrado de la parte intermedia EF y el cuadrado de la mitad FD ó su igual FB, que por ser hipotenusa del triángulo FBE permite sustituir la suma de los cuadrados de los catetos FE y EB al cuadrado de FB. Quitando en seguida en las dos expresiones el cuadrado de FE queda finalmente el rectángulo de CE y DE igual al cuadrado de EB, que es el rectángulo de AE y BE, por ser E el punto medio. En el tercer caso, no siendo E el punto medio, la perpendicular FG trazada por el centro F permite aplicar también á la recta AB, dividida por los puntos G y E en dos partes iguales y desiguales, el mismo teorema que anteriormente, ó sea la proposición 5.ª del libro 2.° ya citada, y lo mismo á la CD también dividida en dos partes iguales y desiguales; y sustituyendo el cuadrado de EF por la suma de los cuadrados de los catetos GF y GB, una serie complicada de transformaciones y simplificaciones conduce á la igualdad de productos buscada. En fin, cuando ninguna de las dos rectas pasa por el centro, refiriendo cada una de ellas á una tercera recta que pase por el centro y su punto de intersección, queda establecida la igualdad que se busca.

No insistiremos en manifestar cómo se establece la igualdad entre el cuadrado de la tangente y el producto de la secante por un segmento externo, lo que conduce á un razonamiento análogo al anterior que depende de la proposición 6.ª del libro 2.º de que se hizo ya mención, ni tampoco nos detendremos en el libro 4.º, donde se resuelven los problemas de inscripción de los polígonos, entre los que basta citar el caso del pentágono que depende de la construcción de un triángulo isósceles cuyo ángulo del vértice es la mitad de los ángulos en la base, pues construído este triángulo é inscrito en el círculo un triángulo ACD equiángulo con el mismo, si en seguida se trazan las bisectrices CE y DB de los ángulos ACD y ADC de las bases, determinan los otros vértices E y B del pentágono, lo que se demuestra considerando todos los ángulos iguales de la figura que comprenden arcos iguales y como cuerdas los lados del pentágono.

Después del libro 5.º, destinado á las razones y proporciones en sus transformaciones numerosas, aplica su contenido en el libro 6.°, donde se halla expuesta la teoría de las figuras semejantes.

Nos fijaremos especialmente en la manera de probar que: *Si se traza una recta paralela á uno de los lados de un triángulo, cortará á los otros lados proporcionalmente, y si una recta corta proporcionalmente á dos lados de un triángulo, es paralela al tercero.* Para ello después de haber demostrado que triángulos y paralelógramos de iguales alturas tienen la misma relación que sus bases, trazada la paralela DE á la base BC se compara el triángulo parcial ADE respectivamente con los DEB y EDC, obtenidos trazando las diagonales del trapecio interior á dicho triángulo parcial. Pero como los triángulos DEB y EDC que tienen la misma base DE, tienen sus vértices en la paralela AB á esta son iguales (equivalentes en el lenguaje moderno), y la misma razón tiene el triángulo DBE con el ADE que el triángulo DEC con el DEA, razones que son las mismas que las de BD á DA y de CE á EA, con lo que resulta demostrado el teorema, y análogamente se demuestra la segunda parte.

También son de notar los teoremas siguientes: *Paralelógramos ó triángulos iguales* (equivalentes) *que tienen un ángulo igual, tienen recíprocos los lados que comprenden ángulos iguales y los paralelógramos ó triángulos que tienen recíprocos los lados que comprenden ángulos iguales, son iguales* (equivalentes).

Hemos dado excesiva extensión al examen de la obra que se ha transmitido como precioso legado hasta los tiempos actuales por una serie de generaciones de geómetras. Esta obra, ha sido modificada á lo sumo en algunos detalles secundarios por los traductores. Así vemos que en la traducción al castellano del P. Kresa, hecha en el año 1689, se halla el texto amplificado por algunos corolarios, alguna demostración acompañada de otra nueva, como por ejemplo, la de la correspondencia entre ángulos iguales y lados iguales en un triángulo que se obtiene considerando el mismo triángulo ABC invertido, es decir el triángulo ABC y otro triángulo ACB, de cuya comparación resulta lo que se trata de probar. También el caso de igualdad, cuando los tres lados se suponen iguales, se demuestra colocando los dos triángulos con las bases confundidas, y situados á ambos lados de esta, y empleando la consideración del triángulo isósceles. Algunas demostraciones nuevas se añaden al texto, debidas al matemático español Antonio Hugo, y en fin, muchas demostraciones se efectúan acompañando á las rectas representaciones numéricas.

En Inglaterra se ha distinguido el geómetra Simpson por su exposición de los *Elementos* de Euclides, así como se distinguió por sus trabajos en la adivinación de los porismas del geómetra griego, y entre otros textos pueden citarse los *Elements of Geometry* del profesor Playfair, de Edimburgo, y las traducciones que á principios de este siglo se han hecho de la Geometría de Simpson.

Pero las aspiraciones de la inteligencia humana tienden incesantemente hacia nuevos ideales en la ciencia, y á parte de las tentativas realizadas para demostrar el postulado de Euclides, se aspiró á un perfeccionamiento en el modo de presentar la doctrina expuesta en los *Elementos geométricos*, siendo el matemático francés Legendre, el que ha figurado en primer lugar como uno de los reformadores de la Geometría desde el punto de vista de la disposición de sus materias, y también Lacroix es otra de las autoridades cuyos textos han servido de norma á las obras que sucesivamente se han publicado, ajustadas al plan moderno de los elementos geométricos.

No reproduciremos los procedimientos que han seguido diversos geómetras para llegar á la demostración del postulado ó alguna de las proposiciones que le son equivalentes, ó cuya demostración conduciría á la de aquel, como es, por ejemplo, la que trató de demostrar Legendre en su *Théorie des parallèles*, basándola en la proposición que: *la suma de los tres ángulos de un triángulo es igual á dos rectos.* Este geómetra pretende llegar al fin propuesto, reduciendo la cuestión á probar que no puede ser menor ni puede ser mayor, y en este caso, demostrado quedaría que es igual. Varias son las tentativas realizadas por este autor para llegar al objeto propuesto, y entre ellas la más aceptable ha sido la que publicó en algunas de las ediciones de su *Geometría* á partir de la 12.ª, y que se reduce, considerando el lado mayor $A\,B$ de un triángulo como base, á tomar el punto medio I del lado menor BC, prolongar la recta AI hasta que se tenga una longitud $AC' = AB$, tomar en AB un segmento $AK = AI$, con lo que se forma un triángulo AKC' igual al AIB y en fin, á prolongar el lado AB tomando en él una longitud $KB' = AK$, obteniendo un nuevo triángulo $AC'B'$; repitiendo el procedimiento, construye una serie indefinida de triángulos $AB''C''$, $AB'''C'''$,... $AB^n\ C^n$ cuyos ángulos, que tienen una suma de valor igual á la del primer triángulo, están expresados por las relaciones

$$A_n < \frac{1}{2^n} A;\ B_n < \frac{1}{2^{n-1}} A;\ A_n + B_n = A_{n-1};\ C_n = C_{n-1} + B_{n-1}$$

y concluye que, tendiendo los ángulos A_n y B_n hacia cero, al considerar un triángulo extremo, los tres puntos A, C^n, B^n se hallan próximamente en línea recta, y en el límite el ángulo C_n es equivalente á dos ángulos rectos.

Aparte de ser esta una demostración que emplea un procedimiento indefinido, y pone en juego la imaginación para representarse los tres puntos A, B_n, C_n aproximándose á su posición final en línea recta, como hace observar Baltzer, esta demostración pierde su valor, cuando queda en duda si el punto E situado en la prolongación de AD se halla en el ángulo formado por BC y la prolongación del lado AB; y por tanto, en la hipótesi de que la recta no tenga puntos reales infinitamente distantes.

Como dijimos, y es sabido, Legendre abandonó la costumbre de seguir el texto de Euclides para dar nueva forma á la exposición de la Geometría que la hiciere menos dificultosa en cuanto al procedimiento demostrativo y más flexible en cuanto á la diversa disposición de las materias.

El punto capital de la cuestión era el perfeccionamiento de la teoría de las paralelas; pero como se ha indicado, á pesar de la insistencia del sabio geómetra francés, fué preciso resignarse á admitir el postulado en una ú otra forma, y Blanchet, el continuador de Legendre, admitió en sus últimas ediciones, después de establecer que por un punto exterior á una recta se la puede trazar una paralela, que sólo se puede trazar una.

Legendre hizo un trabajo de coordinación de las cuestiones según su naturaleza, dando preferencia al razonamiento directo, de modo que los teoremas de la igualdad de triángulos se emplean casi de continuo. Antepuso á las cuestiones de triángulos todas las relativas á ángulos, y expuesta la demostración arriba citada respecto á la suma de los ángulos de un triángulo, reunió todas las proposiciones relativas á las paralelas, pudiendo establecer que: *si la suma de los ángulos interiores en un lado de la secante es inferior ó superior á dos ángulos rectos, las rectas no son paralelas*, en el momento en que consideraba probada la proposición relativa á la suma de los ángulos de un triángulo. Pues si EF es la secante y FD la recta que forma el ángulo DFE cuya suma con el FEB es menor que dos ángulos rectos, se puede obtener una serie de triángulos isósceles cuyas bases, que encuentran todas á la recta *A B*, no solo se aproximan á la recta *F D*, sino que la llegan á dejar en el interior del ángulo que forman con la *E F*; luego la *F D* encontrará á la *A B*.

Después de la teoría de las paralelas, expone las propiedades del paralelógramo y á continuación las propiedades de la recta en la circunferencia, llegando á la medida de los ángulos y haciendo seguir á los libros primero y segundo una serie de problemas relativos á los mismos. En fin, el libro tercero lo destina á las figuras equivalentes y semejantes. El libro cuarto lo destina á los polígonos regulares y á la medida del círculo y los últimos libros tratan sucesivamente de los planos y los ángulos sólidos, los poliedros, y los tres cuerpos redondos.

Lacroix ha sido también uno de los geómetras que más influencia han ejercido en la divulgación de la ciencia matemática. Además de sus *Essais sur l'enseignement en général et sur celui des Mathématiques en particulier*, donde reunió todo lo que había escrito sobre la metafísica de estas ciencias, hablando del orden que debe seguirse en los elementos de Geometría, de la manera de escribirlos y acerca del método, escribió una serie de tratados donde presentó sus puntos de vista especiales.

Abandona como Legendre el modo de exposición de Euclides, adoptando nuevo orden en la coordinación de las proposiciones y prefiriendo también las demostraciones directas á las demostraciones *ad absurdum*.

No es, sin embargo, la innovación tan completa que permita ver enteramente separadas proposiciones de índole tan distinta como el teorema y el problema, ni cuestiones tan heterogéneas como las que se refieren á procedimientos puramente geométricos, y las que se resuelven empleando consideraciones de medida y de relación numérica.

En vista de la ineficacia de las tentativas realizadas para resolver la cuestión del postulado, cree conveniente sustituir el enunciado de Euclides por otro más sencillo, á saber que: *Si una recta es perpendicular y otra oblicua á una tercera, esta, prolongada suficientemente, encontrará á la primera.*

No vamos á detenernos en seguir el desarrollo que hace de las diversas teorías, con ligeras variantes en los detalles respecto al tratado de Legendre. Bastará decir que después de los teoremas relativos á los ángulos, á los triángulos, á las perpendiculares y oblicuas y á las paralelas, variamente combinados con los problemas correspondientes, pasa al teorema que establece la proporcionalidad de los segmentos rectilíneos comprendidos entre rectas paralelas, presentado como corolario del caso de la igualdad de los segmentos en una de las transversales que conduce á la igualdad de los segmentos correspondientes de la otra; y con este preliminar entra de lleno en la teoría de los polígonos semejantes. En fin, nada diremos, por ser sobrado conocido, de lo que concierne á las teorías de la recta y el círculo y de los polígonos inscritos y circunscritos, que con muy escasas diferencias se hallan reproducidas en los textos de la actualidad, pues basta con indicar el momento en que se verificó la reforma que hace pasar del estilo antiguo al estilo moderno la exposición de la Geometría elemental, y quiénes fueron los que la iniciaron. Pero sí fijaremos la atención, aunque ligeramente, en el importante *Traité de Géométrie* de los autores franceses Rouché y Comberouse, notable además por razón del cuidadoso empeño con que separan entre sí los diferentes géneros de cuestiones con el propósito que realizan de unir á las teorías antiguas la exposición de las características de la Geometría moderna, hallando muchas veces en la sencillez de los procedimientos demostrativos la verdadera elegancia geométrica. Así, al reducir las cuestiones de proporcionalidad entre dos magnitudes á correspondencia en la igualdad y correspondencia en la suma, procedimiento que también se encuentra en la Geometría de Bourget, generalizan el procedimiento para todas las especies de magnitudes proporcionales, y llegan al resultado con más brevedad que estableciendo directamente la proporcionalidad en cada caso, como era costumbre entre los autores anteriores. Al aplicar la consideración de las rectas antiparalelas á la demostración de igualdad de productos de segmentos, además de abreviar las demostraciones evitando el empleo de triángulos semejantes y el determinar los lados que en estos son homólogos, se hace visible una correlación entre el paralelismo y el antiparalelismo, que corresponden á igualdad de razones ó igualdad de productos. Al anteponer á las proposiciones concernientes á relaciones de proporcionalidad el teorema que determina la existencia de dos puntos en la recta que une dos fijos, tales que las relaciones de sus distancias á estos sean iguales, además de darse á conocer la relación armónica, se presenta un método para demostrar gran número de proposiciones recíprocas. Al generalizar el problema de la división de una recta en media y extrema razón, se facilita la consideración de los polígonos regulares estrellados, cuya exposición se hace para los casos del decágono, el pentágono y el pentedecágono. Por último, es digna de citarse como innovación importante, la simplicación que obtienen las demostraciones relativas al paralelismo en el espacio y su independencia de las relaciones de perpendicularidad con un plano, según los procedimientos empleados comunmente, pues principiando los citados autores por demostrar que: *Si dos rectas son paralelas, todo plano que corta á una de ellas, también cortará á la otra,* se demuestra inmediatamente por reducción al absurdo lo contrario, es decir, que: *Si dos rectas son paralelas, todo plano que contiene á una de ellas ó le es paralelo, contiene á la otra ó le es paralelo;* porque si esto no sucediera, cortando á la segunda cortaría á la primera, lo que es contra la hipótesis. Y estas proposiciones conducen á demostrar fácilmente, ó con elegante sencillez, que: *Si dos rectas, A y B, son paralelas, toda recta C paralela á la primera es paralela á la segunda*, porque, en primer lugar, si *C* no coincide con *B*, no puede tener con ella ningún punto común, por el que habría dos paralelas á la recta *A*; en segundo lugar *C* y *B* se hallan en un plano, es decir, que el plano determinado por la recta *C* y un punto de la *B*, contiene á esta recta, porque si este plano cortara á la recta *B*, tendría que cortar á la *C*, lo que es contra lo supuesto. Esto es evidentemente preferible á trazar un plano perpendicular á la recta *A* que lo será á sus paralelas, etc., lo cual exige, como se sabe, una serie de teoremas, que el procedimiento anterior evita.

Hemos hecho una breve exposición de las reformas por que han pasado los *Elementos de Euclides*, especialmente en Francia bajo la iniciativa de Legendre; reformas que veremos dirigirse en otro sentido si examinamos la evolución de esta ciencia en Alemania, donde los métodos de la Geometría moderna, en que predomina la idea de posición sobre la de magnitud, se han cultivado con preferencia, reduciéndose á ciertos límites los desarrollos correspondientes á la Geometría euclídea. Entre las muchas obras que pudieran citarse hallamos el elegante tratado del doctor Hubert Müller *Leitfaden der ebenen Geometrie* (Guía de la Geometría plana), en el que se hallan combinadas las proposiciones de uno y otro sistema con el fin de iniciar al alumno en las nuevas teorías al mismo tiempo que se posesiona de lo más importante que contienen las antiguas. Y uno de los tratados que más caracterizan esta aspiración á extender los límites de las obras elementales es la tan conocida del notable escritor Baltzer, pues lo mismo en su *Planimetría* que en su *Estereometría*, los conceptos geométricos más variados tienen su desenvolvimiento.

El plan de esta Geometría difiere considerablemente de los arriba diseñados, pues no solo comprende la Geometría de Euclides, sino que además explana las ideas muchas veces con relación á la llamada Geometría no euclídea, según el punto de vista de Lobatschewsky, y también desenvuelve las teorías principales de la Geometría moderna ó de posición.

Da noción de la recta diciendo que es la más sencilla entre todas las líneas y la que determina ó fija una *dirección* en uno y otro sentido, á partir de un punto, y se extiende en esta indefinidamente. Además establece el axioma de la recta: *Dos rectas que tienen dos puntos comunes coinciden*, y á continuación la proposición que determina el plano por medio de tres puntos.

Proponiéndose dar la mayor generalidad á los conceptos, desde el principio considera la *dirección ó sentido*, según el que se consideran los ángulos, y también aplica desde luego la noción del *movimiento*. Ya al considerar el multiángulo juntamente con el multilátero principia á exponer la correspondencia bilateral ó la ley de *dualidad* (reciprocidad, polaridad) según la que de un teorema se deriva su correspondiente (recíproco, polar) cambiando entre sí puntos por planos ó inversamente, y con la distinción de las tres especies de cuadrángulos indica la generalidad que predomina en los conceptos de la nueva Geometría.

La relación $ASB + BSC + CSA = 0$ que liga los ángulos que forman entre sí las rectas SA, SB, SC, relación análoga á otra entre los puntos A, B, C de una línea recta, y que existe en la hipótesis de ser considerados los ángulos descritos por giros en el mismo sentido, es muy conforme en el modo de exposición del geómetra alemán.

Dadas dos rectas AB, CD que forman con una secante EF los ángulos FGB y FHC que difieren en 180° (grado es una de las 360 partes en que se divide un plano alrededor de un punto) de lo que resulta la congruencia de las figuras $BGHD$ y $CHGA$, estas se pueden hacer coincidir, haciendo girar una de ellas en el plano hasta que GB y HC coincidan; de manera que si los lados GB y HD tuviesen un punto común, también lo tendrían HC y GA, y las rectas AB y CD tendrían dos puntos comunes, lo que es absurdo, luego AB y CD no tienen ningún punto común, es decir, no se cortan.

Pasando al orden de ideas del sistema no euclidiano, define la recta paralela al lado AB de un triángulo ABC. Para ello supone que permaneciendo el ángulo BAC y el lado CA invariables, el AB vaya aumentando, en cuyo caso aumentará también el ángulo ACB opuesto, y si existe un ángulo determinado ACD al cual por un crecimiento suficiente del lado AB pueda aproximarse el ángulo ACB tanto como se quiera, el lado CD que se dirige hacia un punto *infinitamente distante* del lado AB y que no corte á este, mientras todas las rectas que parten de C, y se hallan contenidas en el ángulo ACD le cortan, se dice paralelo al mismo. El ángulo ACD puede alcanzar, pero no exceder, al suplemento de BAC, y si N es normal á AB, teniendo NB' y NB direcciones opuestas, y siendo $D'CN = DCN$, de la congruencia de las figuras $BNCD$ y $B'NCD'$ se deduce que CD' es también paralela á NB'. En particular, si el ángulo NCD es recto, se tendrá $NCD' + NCD = 180°$, y las dos paralelas se extienden en una misma recta.

Pero si no existiese semejante límite ACD del ángulo ACB, y la recta fuese una línea cerrada, sobre la cual, partiendo desde A y pasando por B, siempre en la misma dirección, se pudiese llegar nuevamente al punto A, no podrían construirse las paralelas.

Con relación á las paralelas se atribuye á una recta dos puntos distintos (reales ó no) infinitamente distantes, ó uno solo infinitamente lejano.

Cuál de estos tres casos posibles se verifica efectivamente, no puede decidirse ni por la experiencia (con la observación), ni por la teoría (especulativamente). En la hipótesis, no contradicha por la experiencia, de que en la recta puede imaginarse un solo y único punto en el infinito, se funda la Geometría vulgar ó euclidiana. La hipótesis de que la recta tenga dos puntos distintos en el infinito, da ocasión á dos Geometrías no euclidianas.

Expuestas las ideas en que se basan los dos sistemas de Geometría, como preliminar necesario al orden de desarrollo que quiere seguirse, añade Baltzer que: Si el lado CD es paralelo al NB y CD' á NB, siendo los ángulos NCD y $D'CN$ rectos, y por consiguiente CD y CD' caen sobre una misma recta DD' (axioma de la Geometría vulgar), las rectas BB' y DD' son paralelas. Esta circunstancia reduce la Geometría euclidiana á un caso de la no euclidiana.

Partiendo de esta hipótesis, expone Baltzer la teoría de las paralelas en el sistema euclidiano.

Conocida por estas indicaciones la índole y el vasto alcance de este tratado de Geometría, y no pudiendo seguir con detalle todas las circunstancias que ofrece una obra como esta de carácter universal, fundada en los más variados resultados que los más eminentes geómetras han obtenido en uno ú otro sentido, terminaremos justificando nuestro aserto al consignar brevemente que: en la Planimetría es digno de citarse el siguiente enunciado: *Si en un triángulo permanecen invariables dos lados, cuando el ángulo comprendido por ellos aumenta, también aumentará el lado opuesto al mismo ángulo*, lo que manifiesta la intervención que da á la idea de movimiento. El siguiente enunciado: *Para dos figuras semejantes y del* *mismo sentido* ABC*... y* $A_1B_1C_1$*... existe un punto S que se corresponde á sí mismo, y de tal modo, que las figuras* $SABC$*... y* $S_1A_1B_1C_1$*... son también semejantes y del mismo sentido*, es un ejemplo de idea de posición, así como el siguiente: *Si una figura* $SABC$*... gira en un plano alrededor de un punto S*, hasta que la dirección *de SA coincida con la* SA_1 *ó con la opuesta*, *adquiere dicha figura la llamada posición perspectiva.* En la 2.ª parte ó Estereometría, estas ideas se presentan con mayor generalidad al tratarse de las proyecciones *central, paralela* y *estereográfica.* Los casos en que el *centro* y el *eje de colineación* están en el infinito son correspondientes á las figuras llamadas *perspectivo-afines* y *perspectivo-semejantes.* El desarrollo dado á la teoría de los poliedros que comprende los poliedros semi-regulares de Arquímedes con vértices triláteros, cuadriláteros y quinqueláteros. La exposición del cálculo baricéntrico, y conceptos como el de la recta y el plano en el infinito, y las intersecciones imaginarias de las líneas ó de las superficies, expresan el espíritu de generalización y el propósito de asimilar dentro de un plan cuanto de más notable y en todas las épocas han producido los primeros talentos matemáticos respecto á la ciencia de la extensión.

Hemos examinado hasta ahora casi exclusivamente la evolución de los conceptos que intervienen en el modo de organizarse la Geometría elemental. Las obras de Euclides, Legendre, Lacroix y otras también muy conocidas, como los tratados de Vincent, Cirodde, etc., no han tenido otro propósito. Pero además de los elementos que, según su significado, expresan aquello de más simple y fundamental que hay en la ciencia, como base de ulteriores desarrollos, existe un género de verdades más complejas que se desenvuelven sobre los primeros; y esto, no es producto exclusivo de los tiempos modernos, porque los vestigios que nos han llegado de la Geometría antigua revelan la existencia de un organismo superior de verdades como complemento del organismo elemental. Algunas obras se han conservado íntegras como las *Dadas* de Euclides, otras ya traducidas del árabe, ya restablecidas, tales son el tratado de la *Sección de razón*, y el 8.º libro de las *Cónicas* de Apolonio, debidas á la asiduidad del astrónomo Halley, muy versado en lenguas antiguas, el tratado de los *Lugares planos* de Apolonio de que Fermat y Schooten dieron las demostraciones, el primero por la simple Geometría, el otro por medio del cálculo algébrico de Descartes, basándose en los enunciados de los mismos que Pappus conservó; pero ninguna ha excitado tanto el interés y la actividad de los geómetras como la obra de los *Porismas*, de Euclides, de la que solo tenemos noticia por algunos fragmentos citados en las obras del geómetra alejandrino Pappus, obra que, según el testimonio de este, contenía una amplia colección de proposiciones de una concepción ingeniosa, de útil empleo para la resolución de los más difíciles problemas. Esta obra, que hace suponer habría enaltecido aún más el nombre de Euclides por el superior alcance de las proposiciones en ella contenidas, debió ser complemento de la Geometría elemental, tanto, que Chasles encuentra en ella los gérmenes de los métodos modernos; y los mismos lemas de Pappus, por medio de los cuales llegó el geómetra francés á restablecer los porismas, son una serie de proposiciones que corresponden á las teorías actuales de la *relación anarmónica*, á las *divisiones homográficas* y á la *involución;* y estas conexiones le llevan á la convicción de que si la obra de Euclides se hubiera transmitido hasta nosotros bajo la autoridad de este nombre, antes hubieran entrado en el plan de enseñanza de la Geometría estos conceptos geométricos, relegados hasta poco há á los dominios de la pura especulación. Además, el examen de esta obra, como el de otras arriba citadas, así como la consideración atenta de los trabajos realizados por los geómetras sobre la índole de las diversas cuestiones que encierran, hace comprender que la Matemática no se reduce á solo desarrollos mecánicos de fórmulas ó combinaciones fortuitas de figuras, sino que también exige el empleo de razonamientos sutiles y profundos acerca de la categoría y el significado de los conceptos, lo cual pertenece ya al dominio de la lógica ó de la metafísica de la misma. Nos basta, para convencernos de ello, seguir á Chasles en el desenvolvimiento de la idea de porisma, para lo cual tiene que referirla á otros conceptos, como el de teorema, problema, lugar, corolario, dada, conocida. Ya desde luego nos es conocida la relación en que se hallan el teorema y el problema, la prioridad de origen del último que al quedar resuelto, admite el enunciado bajo la forma de teorema, correspondiendo el razonamiento demostrativo de este, á la serie de construcciones empleadas en la resolución de aquel.

El porisma, según Pappus, es una proposición en la que se pide hallar lo que se ha propuesto, y aún cita otra definición menos general, dada por otros geómetras y fundada en una circunstancia accidental, implicando la idea ó la condición de una proposición *local*, de manera que según estos: *Lo que constituye el porisma es lo que falta á la hipótesis de un teorema local* (el teorema *local* es una proposición que expresa una propiedad común á todos los puntos de una misma línea recta ó curva). El *lugar* es una proposición en la que se dice que tales puntos sometidos á una ley conocida, se hallan en una línea (recta, circular ú otra), cuya naturaleza, se enuncia, pero quedando por hallar la magnitud y la posición; por ejemplo: *Dados dos puntos, y una razón, el lugar de un punto cuyas distancias á estos se hallan entre sí en esta razón, es una circunferencia de circulo dada en magnitud y posición.* Así, pues, el *lugar* participa del teorema y del problema, esto último por cuanto hay que determinar la magnitud y la posición del lugar, expresando el lugar la misma cosa que el teorema, pero de una manera menos explícita que deja algo por completar.

Expuestas estas consideraciones, añade Chasles que nos vemos conducidos á concluir que los *lugares* son *porismas*, aunque Pappus no lo dijera terminantemente. Pero también los porismas son corolarios, si bien de otro orden que los propiamente dichos, y Euclides expresa con el mismo nombre los corolarios de sus *Elementos* y las proposiciones de sus tres libros de *Porismas*, pues aunque Chasles reconoce que unas y otras proposiciones son muy diferentes en el fondo, si los *corolarios* son proposiciones que se deducen inmediatamente, ya del enunciado de un teoreoma, ya de algún punto de su demostración, ya de un razonamiento que conduce á la resolución de un problema, aunque distintas de la proposición de que se derivan, también los porismas tienen su origen en teoremas ya conocidos, de los cuales son una especie de corolarios. En fin, Chasles encuentra entre los *porismas* y las *dadas* una analogía muy marcada, por cuanto estas son proposiciones en que una ó varias de las cosas de que se trata no tienen en el enunciado la determinación de magnitud ó de posición que le es propia en virtud de la hipótesis. Dichas proposiciones consisten en afirmar que esta determinación está comprendida implícitamente en la hipótesis ó *dada virtualmente*, pudiéndose deducir de ella. Así, la proposición 6 del libro de las *Dadas* que Chasles cita como ejemplo: *Si dos magnitudes* a *y* b *tienen entre sí una razón* λ, *la magnitud compuesta de las otras dos, tendrá con cada una de ellas una razón dada*, se habría convertido en un teorema si Euclides hubiera hecho conocer en el enunciado la razón de la suma $(a+b)$ á cada una de las magnitudes a y b, esto es: $\frac{\lambda+1}{\lambda}$ para $\frac{a+b}{a}$ y $(\lambda+1)$ para $\frac{a+b}{b}$. En resumen, los porismas eran á juicio de Chasles, con relación á las proposiciones *locales*, ó proposiciones en que se considera una infinidad de cosas variables, según cierta ley, lo que las *dadas* eran con relación á los simples teoremas de los *Elementos*, conjeturando que unas y otras formaban un *Complemento de los Elementos de Geometría*, propios para facilitar el empleo de estos en la resolución de los problemas.

La idea de porisma, que Chasles se propone desentrañar, la funda también en una necesidad que existe en la Geometría moderna, como debió existir en la Geometría griega, y es la de abreviar los enunciados ó desembarazarlos de muchas determinaciones, á veces complicadas y sin utilidad. Sea la prosición: *Si se toman sobre el diámetro de un círculo dos puntos que dividan á dicho diámetro armónicamente, la relación de las distancias de cada punto de la circunferencia á estos dos puntos, será constante*. Si decimos que la relación está *dada*, lo que aquí significa lo mismo que *constante*, se enunciará un *porisma* en el sentido de Euclides; y para que la proposición fuese un teorema, sería preciso dar á conocer en el enunciado el valor de la razón, diciendo que es igual á la relación de las distancias de los dos puntos, á uno de los extremos del diámetro sobre que están situados; y como dice Chasles, hoy se hacen porismas de igual manera y con la misma frecuencia que se hacían antes.

Son proposiciones del mismo género que pueden reunirse bajo un mismo título, según opina Chasles, además de las contenidas en el libro de las *Dadas*, las del tratado de las *Conocidas geométricas* de Hassan ben Haitham y los porismas citados por Diofanto, como el siguiente: *Si dos números son tales, que cada uno de ellos aumentado en un mismo número dado, sea un cuadrado y su producto aumentado en el mismo número sea también un cuadrado*, *estos dos números provienen de dos cuadrados consecutivos*, que adquiere el carácter de una *dada* ó de un *porisma* bajo la forma siguiente: *Dados dos cuadrados consecutivos, así como un número, se pueden hallar otros dos números tales, que cada uno de ellos y su producto sumados con el número dado, sean cuadrados;* y en general, el geómetra francés reconoce que la mayor parte de las proposiciones de la teoría de los números pueden considerarse como *dadas*, pues expresan que tal función de tales números, ó tal relación entre tales números da lugar á tal otra relación. Estas analogías á que llega Chasles le permiten definir los porismas como *teoremas* no completos *que expresan ciertas relaciones entre cosas variables según una ley conocida*, y además reconoce en los porismas una utilidad para los geómetras antiguos, análoga á la del análisis cartesiano para los modernos, pues si la obtención de algún lugar geométrico exigía el empleo de algún porisma, la cuestión se reducía á concluir de estas condiciones otra expresión del lugar que fuese ya conocida, y que por consiguiente hiciera conocer la naturaleza del lugar, objeto de la cuestión; de modo que el tránsito de la expresión de un lugar á la de otro exigía un porisma. En virtud de esto, infiere que el *Tratado de los porismas* de Euclides debía ser una colección de proposiciones que servían para pasar de una expresión conocida de un lugar á otra expresión del mismo lugar, y más generalmente *para pasar de las condiciones conocidas que determinan un sistema de cosas variables sujetas á una ley común, á otras condiciones que determinan las mismas cosas variables.* Esto, añade, se observa actualmente en el análisis cartesiano, pues la ecuación,

$$x^2 + ax + y^2 + by = c,$$

por ejemplo, expresa que, tomándose arbitrariamente dos ejes rectangulares en el plano de una figura, *se pueden determinar dos segmentos rectilíneos* a, b *y un espacio ó rectángulo* c, *tales, que la suma de los cuadrados de las distancias de cada punto del lugar á los* *dos ejes, mas los productos de estas distancias por los segmentos* a *y* b *formen una suma igual al rectángulo* c.

Hemos detallado el concepto de Chasles acerca de los porismas, porque en tan importantes desarrollos como los que hace este notable geómetra, además de profundos conceptos filosóficos que dan idea del encadenamiento lógico de las ideas geométricas, establece un enlace entre la Geometría antigua y la moderna, que sirve para explicar la evolución de una manera natural; y aunque los porismas restablecidos según los antecedentes de que dispuso, á los cuales corresponden de una manera rigurosa, no incidieran con los que realmente fueron expuestos en la obra perdida de Euclides, siempre por la obra de Chasles se verá el lazo de unión entre las teorías modernas y las antiguas, cuyos solos vestigios nos revelan una íntima analogía.

Consideremos con este objeto los 38 lemas de Pappus, de los cuales 23 se refieren á las figuras rectilíneas, 7 á la relación anarmónica y 8 al círculo. De los 23 primeros, 6 tienen por objeto el cuadrilátero cortado por una transversal, ó se refieren á la involución en el cuadrilátero, 6 conciernen á la relación anarmónica de dos sistemas de cuatro puntos, ó mejor, á esta relación en un haz de cuatro rectas cortadas por dos transversales, 4 pueden reducirse á la consideración del exágono inscrito en dos rectas, 2 expresan relaciones de áreas de dos triángulos que tienen dos ángulos iguales ó suplementarios, 4 se refieren á ciertos sistemas de rectas, y el último es un caso del problema de la *sección del espacio.*

Los lemas correspondientes al cuadrilátero cortado por una transversal solo expresan hoy casos particulares de una misma proposición. En la Geometría griega son otras tantas proposiciones que se demuestran independientemente; ya la transversal es paralela á una diagonal del cuadrilátero, como sucede en los lemas I y II, ya pasa por los dos puntos de intersección de las dos diagonales y de dos lados opuestos del cuadrilátero, ó de los lados opuestos, casos que se expresan en los lemas V y VI, ya como en el lema VII la transversal pasa por uno de los puntos de intersección de dos lados opuestos y es paralela á una diagonal. Las conclusiones de estos lemas son, ó que *tal recta es paralela á tal otra*, ó que *tres puntos de la figura se hallan en línea recta;* y esto á consecuencia de una relación de segmentos expresada en la hipótesis.

Si á las figuras del texto griego, en que las letras dispuestas de cualquier modo, no facilitan en manera alguna la comprensión de las analogías que permiten referir las unas á las otras, sustituímos la formada por un cuadrilátero $ambS$ considerado en el caso general, que es el expresado por el lema IV, de manera que las prolongaciones de aS y bS corten á la transversal en los puntos A y B, las de am y bm en los P y Q, la de ab en ρ y la de mS en R (que es la figura 180 de nuestra *Geometría elemental*), podremos como lo hacemos en dicho libro, donde exponemos también la demostración según el texto griego, referir los demás lemas á dicho lema IV de una manera visible, pues cuando Sm ó ab son paralelas á la transversal, R ó ρ se hallan en el infinito, como sucede en los lemas I y II, y cuando las diagonales ab y Sm y los lados opuestos aS y bm se cortan en la transversal, los puntos ρ y R se confunden en uno solo, así como los Q y A (lemas V y VI).

Modificando, pues, las letras de la figura del texto griego de manera que el cuadrilátero sea el $Samb$ cuyas diagonales ab, Sm y cuyos lados bS, ma cortan á la transversal en los puntos ρ, R, B, P y cuyos lados bm y aS la cortan en los puntos Q y A, el enunciado será el siguiente: *Si en dicha figura se verifica la relación*

$$\frac{\rho R \,.\, QP}{\rho Q \,.\, PR} = \frac{\rho R \,.\, BA}{\rho B \,.\, RA} \quad \text{ó} \quad \frac{QP}{BA} = \frac{\rho Q \,.\, RP}{\rho B \,.\, RA} \quad [1]$$

LOS TRES PUNTOS m, S, R ESTÁN EN LÍNEA RECTA.

La demostración general que exponemos en nuestra Geometría elemental es la siguiente:

Construcción.—Trácese la paralela ank á la transversal, y la paralela AX á la aP.

Demostración.—Se tiene evidentemente que

$$\frac{QP}{BA} = \frac{QP}{an}\,\frac{an}{ak}\,\frac{ak}{BA}; \quad \text{luego} \quad \frac{QP}{an}\,\frac{an}{ak}\,\frac{ak}{BA} = \frac{\rho Q \,.\, RP}{\rho B \,.\, RA}.$$

Pero $\frac{Q\,P}{a\,n} = \frac{m\,P}{m\,a}$, $\frac{a\,n}{a\,k} = \frac{\rho\,Q}{\rho\,B}$, $\frac{a\,k}{B\,A} = \frac{S\,a}{S\,A}$
(constr. 1.ª)

luego $\frac{Q\,P}{a\,n}\,\frac{a\,k}{B\,A} = \frac{R\,P}{R\,A}$ (suprimiendo el factor común $\frac{\rho\,Q}{\rho\,B}$),

y sustituyendo, $\frac{m\,P}{m\,a}\,\frac{S\,a}{S\,A} = \frac{R\,P}{R\,A}$;

$$\text{luego } \frac{m\,P}{m\,a}\,\frac{m\,a}{X\,A} \quad \text{ó} \quad \frac{m\,P}{X\,A} = \frac{R\,P}{R\,A}$$

(pues $\frac{S\,a}{S\,A} = \frac{m\,a}{X\,A}$, constr. 2.ª);

luego m, S y R están en línea recta.

Hecha esta demostración para el caso general, resulta inmediatamente la de los demás casos, pues para los lemas I y II, estando R y ρ en el infinito, las fracciones $\frac{\rho\,R}{P\,R}$ y $\frac{\rho\,R}{A\,R}$, así como las $\frac{\rho\,R}{\rho\,Q}$ y $\frac{\rho\,R}{\rho\,B}$ se reducen á la unidad; y entonces se tiene que para el lema I la fórmula [1] se reduce á

$$\frac{Q\,P}{B\,A} = \frac{\rho\,Q}{\rho\,B}, \frac{Q\,P}{a\,n}\,\frac{a\,n}{a\,k}\,\frac{a\,k}{B\,A} = \frac{\rho\,Q}{\rho\,B}, \frac{m\,P}{m\,a}\,\frac{S\,a}{S\,A} = 1,$$

$$\text{ó } \frac{m\,P}{m\,a} = \frac{S\,A}{S\,a};$$

luego $P\,A$ es paralela á $S\,m$.

En el caso del lema II se tiene

$$\frac{Q\,P}{B\,A} \text{ ó } \frac{Q\,P}{a\,b}\,\frac{a\,b}{B\,A} \text{ ó } \frac{m\,P}{m\,a}\,\frac{S\,a}{S\,A}$$

$$\text{ó } \frac{m\,P}{m\,a}\,\frac{m\,a}{X\,A} \text{ ó } \frac{m\,P}{X\,A} = \frac{R\,P}{R\,A};$$

luego R, m, S están en línea recta.

Los enunciados de dichos lemas son: I. Si $\frac{\rho A}{\rho B} = \frac{\rho P}{\rho Q}$, (pues son iguales á la unidad, por hipótesis) la transversal será paralela á la diagonal mS. II. Si la transversal es paralela á la diagonal ab, se hallarán en línea recta los puntos S, m, R.

La demostración de los lemas V y VI resultará también calcada sobre la del lema IV, haciendo en la fórmula [1] $Q = A$, $R = \rho$; y se obtendrá que: si $\frac{A\,P}{A\,B} = \frac{\rho\,P}{\rho\,Q}$, los tres puntos m, S, ρ se hallan en línea recta (lema V) y haciendo en dicha fórmula $Q = A, P = B, \rho = \infty$, se obtendrá que $\frac{A\,B}{A\,B} = \frac{B\,R}{A\,R}$ ó $1 = \frac{B\,R}{A\,R}$, ó $B\,R = A\,R$, es decir, que si $a\,b$ es paralela á $A\,B$ será $A\,R = B\,R$, y de análoga manera se demuestra el lema VII.

Para concluir estas investigaciones acerca de los siete primeros lemas de Pappus, observaremos que las relaciones expresadas en los mismos son relaciones de puntos en involución sobre la transversal; y esto se hace visible designando las intersecciones P y B, Q y A, ρ y R por las letras a y a', b y b' c y c', y entonces la fórmula [1] se reduce á

$$\frac{cc' \, . \, ab}{ac' \, . \, bc} = \frac{cc' \, . \, a'b'}{a'c \, . \, b'c'} \text{ ó } ab \, . \, a'c \, . \, b'c' + a'b' \, . \, ac' \, . \, bc = 0,$$

que es una de las fórmulas conocidas de la teoría de la involución.

Los lemas III, X, XI, XIV, XVI y XIX establecen la igualdad de *relaciones anarmónicas* que cuatro rectas trazadas desde un punto forman sobre otras dos, según arriba se indicó. Y entre estas proposiciones el lema III expresa el caso general. Considerando tres rectas que parten de un punto S cortadas en los puntos a y a', b y b', c y c', por dos transversales que parten de un punto P. El enunciado de Pappus consiste en afirmar que el rectángulo $Pa \, . \, bc$ es al rectángulo $Pc \, . \, ab$ como el rectángulo $Pa' \, . \, b'c'$ es al rectángulo $Pc' \, . \, a'b'$; los demás lemas citados son variantes de este en casos particulares.

En fin, entre los demás lemas citaremos los XII, XIII, XV y XVII, que pueden considerarse como casos distintos del exágono, inscrito en dos rectas. En los XII y XV las dos rectas son paralelas. Si dadas dos rectas, partiendo de un punto 1 de una de ellas á un punto 2 de la otra, y de este á un punto 3 de la primera, y así sucesivamente, formamos un exágono 1, 2, 3, 4, 5, 6, el lema XIII concluye de esta construcción (hecha en otros términos en el texto griego) que las intersecciones 14, 36, 25 de los lados opuestos 1 y 4, 3 y 6, 2 y 5 se hallan en línea recta; el XII concluye con los vértices 1, 2 y la intersección 14 se hallan en línea recta, y análogamente los XV y XVII, según se expresa por las figuras 147, 148, 149 y 150 de nuestra Geometría elemental, fundándose todos ellos en los lemas anteriormente citados, relativos á la relación anarmónica, en los cuales, de una igualdad de productos de rectángulos construídos sobre ciertos segmentos de la figura, se deduce que ciertos tres puntos de la misma se hallan en línea recta ó recíprocamente.

Además de los lemas de Pappus sirvieron á Chasles para el restablecimiento de los porismas de Euclides los 39 géneros de porismas citados por Pappus, de los cuales solo describe la cosa buscada, omitiendo las hipótesis, pues dice el geómetra alejandrino que «no es por las diferencias de las hipótesis por lo que deben distinguirse los porismas, sino por las diferencias de los resultados ó de las cosas buscadas.» Así: *Que tal punto está situado sobre una recta dada en posición; que tal recta pasa por un punto dado; que tal recta está dada en posición; que tal recta tiene una relación dada con tal otra trazada por tal punto; que tal recta forma sobre otras dos rectas dadas en posición, segmentos cuyo rectángulo está dado.* Son ejemplos de algunos de los 39 géneros. En fin, los tres porismas enunciados completamente, son: 1.° El siguiente: *Si desde dos puntos dados se trazan dos rectas* *que se cortan en una recta dada en posición, de las que la una intercepta sobre una recta dada en posición un segmento, contado á partir desde un punto dado, la otra formará también sobre otra recta un segmento que estará con el primero en una razón dada.* 2.° La proposición llamada de las cuatro rectas; á saber, que: *Dadas cuatro rectas que se cortan dos á dos, si tres de los puntos de intersección situados sobre una de ellas, ó dos solamente en el caso del paralelismo, están dados* (es decir, quedan fijos); *y de los otros tres, dos quedan sujetos á permanecer cada uno sobre una recta dada, el último se hallará situado sobre una recta dada en posición*, que enunciado en el lenguaje moderno, como dice Chasles, se reduce á la siguiente: *Dadas cuatro rectas de las que tres giran alrededor de los puntos en que encuentran á la cuarta, de manera que dos de los puntos de intersección de estas rectas resbalen sobre dos rectas dadas de posición, el punto de intersección restante describe una nueva recta*; proposición que, como se sabe, también se reduce á la que expresa la deformación de un triángulo, de manera que tres de sus lados giren alrededor de tres puntos situados en línea recta, y dos de sus vértices resbalen sobre dos rectas fijas, tomadas arbitrariamente, resultando entonces necesariamente que el tercer vértice describirá una tercera recta. El último porisma citado por Pappus es la extensión del caso de las cuatro rectas á un número cualquiera de estas.

Con los antecedentes que hemos expuesto, y que se hallan en las colecciones matemáticas de Pappus, es como pudo Chasles llegar á obtener, no los 171 porismas citados por el geómetra alejandrino como constituyendo la obra perdida de Euclides, sino 220 que se ajustan á las conclusiones de los 29 géneros, reconociendo que es necesario eliminar algunos; pero en la dificultad de proceder con acierto lo deja á la consideración de los geómetras.

Entre las 220 proposiciones que contienen los tres libros de porismas restablecidos por Chasles, solo citaremos los diez primeros porismas expuestos á parte, y como anteriores al primer género descrito por Pappus, y que constituyen los *diez casos de la proposición de las cuatro rectas*, casos que no necesita distinguir la Geometría moderna, poseyendo como posee la noción de signo y un espíritu generalizador que eran extraños á los geómetras de la antigüedad. En todos ellos se considera un cuadrilátero $Samb$ y tres puntos ρ, P, Q situados en una recta que designa Chasles con el nombre de recta de los polos, dependiendo la diversidad de los porismas de las varias posiciones que la recta de los polos tiene con relación al cuadrilátero. Así en el porisma I la diagonal Sm, que es el lugar geométrico del punto m es paralela á la recta de los polos. En el porisma II esta es paralela á la otra diagonal ab. En el III, suponiéndose paralelas las rectas AaX y BbY, el cuadrilátero deja de existir por haber pasado, según la expresión moderna, el vértice S al infinito. En el porisma IV se trata del caso general, en el que la recta *S R dada en posición,* depende de la relación general de los seis segmentos que los lados y las diagonales forman en la recta de los polos. En fin, las condiciones de ser algún lado ó alguna diagonal paralelos á la recta de los polos ó de concurrir en esta las dos diagonales ó dos lados opuestos combinados, originan los varios casos de la cuestión, de los cuales parece que Euclides solo eligió los que exigían demostraciones distintas, según se infiere del texto de Pappus. Hacer una exposición de las proposiciones enunciadas y demostradas en los tres libros de los porismas, equivaldría á recorrer las páginas del *Traité de Géométrie superieure* de Chasles, de tanta afinidad con la obra de Euclides, que dicho geómetra, antes de proceder al restablecimiento de esta, creyó necesario, como lo manifiesta, dar antes á las teorías de la relación anarmónica, de las divisiones homográficas y de la involución los desarrollos de que eran susceptibles los gérmenes que de ellas existen en los lemas de Pappus, siendo necesarias para interpretar los porismas del libro 1.° muchas de las transformaciones de las ecuaciones de dos, tres ó cuatro términos que expresan la relación anarmónica.

Estas consideraciones servirán para convencernos de las dificultades que existen para fijar los límites entre lo que debe comprender la parte elemental de la Geometría y lo que corresponde al dominio de las teorías superiores, aunque esta división es un simple artificio relacionado con los fines de la enseñanza.

La ciencia, á la par que progresa, varía en la forma de su organismo, y aunque aumente este considerablemente, aunque las verdades en él incluídas se multipliquen indefinidamente, no por eso los obstáculos que se ofrezcan para su adquisición aumentan en la misma medida. Cuanto mayor es el número de verdades allegadas en las diferentes épocas, mayores son las facilidades que se obtienen para agruparlas y clasificarlas de manera que las unas evoquen á las otras, ya por una relación de coordinación ó de subordinación. El secreto de la ciencia se halla en este enlace, y su perfeccionamiento consiste en el mayor acierto con que se somete la variedad á la unidad, llegándose á un todo armónico.

La ciencia progresa por síntesis sucesivas; estas síntesis no tienen en cada época más que una perfección relativa, pero cuanto de ella se conoce se halla encadenado formando una unidad que constantemente se renueva ó es reemplazada por unidades más amplias, bajo las que se subordinan relaciones en número creciente. La Astronomía, que en un principio relacionaba todos los astros con la Tierra, considerada como fija en el centro del universo, más tarde sustituyó este sistema provisional por otro más perfecto en que el Sol era el centro y la Tierra quedaba reducida á figurar entre el número de los planetas. En fin, los progresos ulteriores de la ciencia astronómica han relegado al Sol á la categoría de otros muchos soles que se mueven en el espacio y forman unidades en otro sistema superior.

La Física hoy nos revela una unidad superior á las artificiosas unidades que precedieron y que se halla expresada por el principio de la *transformación de las energías*. La Química ha realizado sustituciones análogas de principios que la han conducido sucesivamente hasta la actual constitución que la aproxima á enlazar sus fenómenos con los que se hallan sometidos á las energías físicas.

Las ciencias naturales buscan hoy en los principios de la constitución de la materia orgánica los fundamentos de nuevas unidades que reemplazan á otras anteriores no tan amplias, por haber sido más reducidas las bases sobre que se edificaran. Y no es solo esto lo que tenemos que contemplar en el desenvolvimiento científico, donde cada ciencia eleva sus ideales acrecentando su variedad y su unidad, sino que todas ellas tienden á combinarse, penetrando las unas en la circunscripción de las otras, para buscar sobre las unidades parciales que cada cual representa una unidad superior.

Lo mismo observamos en la Matemática, aunque debemos notar una diferencia, y es que en esta ciencia las conclusiones á que se ha llegado en una época persisten en las épocas sucesivas, pues tienen un valor absoluto, y lo único que progresa es el organismo en que se hallan contenidas, progreso que permite variar los procedimientos ó la forma de los encadenamientos por medio de los cuales de las unas se llega á las otras.

Ciñéndonos por ahora á la Geometría, vemos que el sistema cartesiano es un nuevo método basado en la correspondencia entre ciertas líneas y los números que las representan, de modo que una figura geométrica puede tener su representación por medio de una ecuación, en la cual los elementos de aquella aparecen sustituídos por símbolos del análisis; y en cuanto esta correspondencia queda fijada, toda combinación de figuras representables por ecuaciones conducirá á una combinación correspondiente de expresiones numéricas, y podremos indistintamente proceder en uno ó en otro de los sistemas, sabiendo que la correspondencia en el otro será perfecta. Así, por ejemplo, podremos demostrar todos los teoremas de la Geometría de Euclides, por medio de ecuaciones, en cuanto se ha establecido la correspondencia entre las líneas rectas y la circunferencia con las ecuaciones que son su representación analítica. Y es claro que si empleamos los sistemas de representación de Bellavitis y de Hamilton, también por estos nuevos métodos llegaremos á establecer las mismas verdades que en la Geometría de Euclides se establecen con el razonamiento directo sobre cada figura; y además es posible pasar de un sistema cualquiera á otro de la misma manera que, por ejemplo, se pasa de la expresión de un lugar geométrico en coordenadas cartesianas á su expresión en coordenadas polares ó trilineales, etc. La cuestión se reduce siempre á verificar la traducción de un sistema dado en aquel otro en que se le pretende transformar.

En estos últimos tiempos un nuevo sistema de Geometría ha sido expuesto por Staudt, que aspiró á desarrollar esta ciencia independientemente de toda noción de magnitud como una especie de antítesis del sistema cartesiano, en que los procedimientos puramente geométricos resultaban absorbidos bajo las formas analíticas predominantes. Y aunque ciertamente la obra de Staudt es de considerable transcendencia, puesto que además de aplicarse los razonamientos directamente al objeto geométrico, nos permiten elegir procedimientos adecuados al fin que pretendemos obtener, evitándonos el emplear recursos extraños, como se ha hecho con frecuencia, por falta de recursos propios, también puede juzgarse como una traba para el desarrollo y el progreso de la ciencia la intransigencia con que ciertos partidarios de los procedimientos gráficos pretenden anular ó reducir á un lugar secundario en la enseñanza y exposición de la Geometría los procedimientos analíticos.

La ciencia tiene un carácter de universalidad, en virtud del cual acoge todos los procedimientos conducentes á establecer la verdad. En ella caben todos los métodos. Cuando algunas de sus teorías han obtenido un alto grado de perfección, sus métodos propios les bastan para su completo desarrollo. Cuando, por el contrario, se trata de teorias nacientes, en algunas circunstancias la necesidad impone aplicarles procedimientos no adecuados á su índole especial. Como ejemplo podemos citar algunas demostraciones efectuadas por procedimientos analíticos en cuestiones que figuran en ciertos tratados de Geometría descriptiva.

Descendiendo ahora al caso en que solo se trata de los *Elementos* de Euclides, podemos observar el cuidado con que aspira á emplear la teoría de la semejanza en los últimos libros de su obra, que solo principia á emplearse en el libro VI. Euclides se sirve desde el principio de su Geometría de un artificio que suple á la teoría de la semejanza. Así, por un punto cualquiera de una diagonal de un paralelógramo, se trazan paralelas á los lados, quedando dividido este en otros cuatro: dos *peridiametrales* (atravesados por la diagonal) y otros dos *parapleromos* (complementos), equivalentes entre sí y cuyos lados son por consiguiente recíprocos, equivalencia que se demuestra muy sencillamente en el libro segundo, como arriba se indicó, lo que da á Euclides el medio de construir, sin usar la palabra, una cuarta proporcional, como segundo lado de un *parapleromo* cuyo primer lado es conocido con el parapleromo correspondiente, bastando acabar la figura paralelográmica.

Pasando del examen de los *Elementos*, al de los lemas de Pappus, hallamos en estos un empleo exclusivo de las proporciones, como debiera suceder en la obra de los porismas y como realmente se verifica en la obra restituída por Chasles, donde emplea, según hemos manifestado, ecuaciones hasta de cuatro términos y como se observa en su Geometría superior, basada en la simple consideración de la relación anarmónica.

Hemos dicho anteriormente que las ciencias han sufrido una alteración constante por el acrecentamiento de sus diversas teorías ó por la generalización de sus ideales. Y esta circunstancia debemos tener presente al tratar de discernir lo que hoy debe entrar en los dominios de la Geometría elemental. Ciertamente que en la obra de Euclides se hallan los elementos de esta ciencia y que en los lemas de Pappus y en el Tratado de los porismas ya se trata mas bien de sistemas que de individualidades y en cierto modo esto último entra en los dominios de lo superior, lo que atestigua el título de la obra de Chasles ya citada. Pero tantos han sido los progresos recientes de la Geometría en las teorías de las curvas y de las superficies, en cuanto concierne á las varias clasificaciones de estas y á las múltiples propiedades que ofrecen cada grupo, cada orden, cada familia y aun cada individuo, que hoy resulta en cierto modo, con el carácter de elemental, como una especie de preliminar, aquello que antes se ofreció con el carácter de superior, como la última etapa á que la ciencia había extendido sus dominios.

Expuesto lo que concierne al sistema ú organismo de verdades que forma la ciencia, vamos ahora á tratar en detalle lo que se refiere á algunos puntos de vista especiales, los cuales debemos examinar como complemento de aquello de general que hemos manifestado, puntos de vista que es preciso considerar en la exposición de la Geometría y son: el dialéctico, el crítico y el estético.

Bajo el punto de vista dialéctico, es decir, de la dirección del raciocinio, debe examinarse la naturaleza de las proposiciones y su modo de encadenarse al expresar las relaciones de las ideas. Bajo el punto de vista crítico debe examinarse la dependencia lógica de las ideas y su mutua situación en la Ciencia, sus coordinaciones y subordinaciones; y bajo el punto de vista estético hay que discutir el modo más perfecto y elegante de presentar, no solo cada proposición, sino el conjunto de todas ellas en el plan científico.

En la Geometría no se trata de relaciones cualitativas que conciernen á las subordinaciones ó inclusiones de unas clases en otras, como sucede en las ciencias naturales. Las relaciones que establece son de igualdad ó de desigualdad. Cada teorema expresa una relación de simultaneidad ó coexistencia entre dos términos dados por la hipótesis y la tesis. En las ciencias de la naturaleza las entidades existen de un modo absoluto, y la Ciencia las incluye ó las excluye de los tipos generales que ha establecido la clasificación. La experimentación es el criterio que sirve para formar el encadenamiento de las mismas. En la Geometría las relaciones tienen un carácter relativo ó condicional. La demostración une los dos extremos por construcciones intermedias que hacen coexistir los términos del teorema en una misma figura. Hay que distinguir la invención de la exposición. El primer procedimiento forma la ciencia, el segundo ofrece los resultados obtenidos por el primero.

En la invención el problema precede al teorema. Antes de conocerse una relación hasta el punto de ser enunciada en términos claros y precisos, debe proponérsela el entendimiento conteniendo alguna ó algunas incógnitas. Resuelto el problema por el análisis, aquel puede formular el enlace de lo conocido y lo desconocido por medio de un teorema, y así el *teorema es el resultado del enunciado de un problema.* Cualquier geómetra al descubrir un teorema seguramente que habría comenzado por buscar la solución de un problema. Pitágoras, antes de establecer un teorema, se habría propuesto hallar la relación entre los lados de un triángulo rectángulo, y después de obtenida, su enunciado constituyó su célebre teorema.

La ciencia constituída se descompone en teoremas. El problema corresponde tan solo á su estado de formación; y si se exponen en las obras didácticas, esto solo se practica atendiendo á los fines de la enseñanza. Así, en un razonamiento geométrico nos basta estar ciertos de la posibilidad de una relación geométrica, para emplearla en lo sucesivo, prescindiendo de los medios de realización. Lo que se impone necesariamente es el rigor en el enlace de las ideas, su realización material es secundaria. Así, Euclides no necesitó en su proposición 9.ª dividir un ángulo en dos partes iguales, para en la 10 dividir una recta en dos partes iguales, pues aunque no se *supiese* dividir un ángulo en dos partes iguales, la *posibilidad* resulta de la *continuidad* del espacio; y esto basta para *suponer* legítimamente en la proposición 10 la bisectriz del ángulo del vértice del triángulo equilátero empleado.

Además, la Geometría no es la ciencia que establece las propiedades del espacio como algunos erróneamente pretenden; esto compete á la Filosofía ó á la ciencia de los principios y de las ideas primeras. El espacio es el dato ó la materia de la Geometría, y el objeto de esta es las figuras ó las determinaciones del espacio. En cada figura pueden buscarse todas las combinaciones de algunos de sus elementos suficientes para determinar los demás, y á cada una corresponderá un teorema distinto. Si se dan dos lados de un triángulo y el ángulo comprendido, se obtiene una combinación de elementos que determina el triángulo, determinando los otros tres elementos; y la determinación de estos, á su vez, constituye una nueva combinación que determina también el triángulo y forma un nuevo teorema, el recíproco del primero. Determinadas así las condiciones de existencia de cada figura, á esta se podrán enlazar ó combinar otras nuevas, y formarse una red de construcciones indefinidas; y á este encadenamiento corresponderá otro encadenamiento de teoremas que fijarán las diversas coexistencias. Supuesto un triángulo isósceles, puedo trazar su altura, ó la bisectriz del ángulo del vértice, ó la recta que une este con el punto medio de la base, y obtendré que una de estas rectas es cualquiera de las demás, es decir, se identifica con ellas. Un paralelógramo quedará complicado trazándose sus diagonales, y estos nuevos elementos combinados con los de la figura primitiva implican necesariamente la igualdad de los segmentos en que aquellas se dividen.

Toda proposición admite como variantes su forma recíproca, la contraria y la recíproca de la contraria ó la contraria de la recíproca, es decir, además de: si A es B, A' es B', se tendrá: si A' es B', A es B (recíproca); si A no es B, A' no es B' (contraria), y si A' no es B', A no es B (recíproca de la contraria), que designaremos con los números 1, 2, 3 y 4.

No es preciso demostrar las 4 formas de la proposición para que resulten demostradas todas, basta demostrar la 1 y la 2, ó la 1 y la 3, ó la 2 y la 4, ó la 3 y la 4; pero no la 1 y la 4, ni la 2 y la 3, pues demostrar una de estos dos últimos grupos equivale á demostrar la otra, no conduciendo ninguna de ellas á ningún nuevo resultado, es decir, que demostrando la directa y su contraria, ó la directa y su recíproca, ó las dos recíprocas ó las dos contrarias, quedan implícitamente demostradas las cuatro, pues las dos que faltan se obtienen por reducción al absurdo.

En los tratados de enseñanza se demuestran indiferente la directa y la recíproca, ó la directa y la contraria. Acerca de este particular debe advertirse que es preferible demostrar la directa y la recíproca, porque estas dos proposiciones exigen una sola figura, siendo los teoremas en que se apoya la una, los recíprocos de los en que se apoya la otra; y esta preferencia se observa en el *Tratado de Geometría* de los Sres. Rouché y Comberouse. Sin embargo, cuando el teorema es de los que admiten tres casos correspondientes á que una magnitud es mayor, igual ó menor que otra, es indispensable demostrar la directa y la contraria. Así, demostrado que: *si por un punto exterior á una recta se trazan varias oblicuas, las que equidistan del pie de la perpendicular son iguales* (1), es preciso demostrar en seguida que: *la oblicua que dista más es la mayor* (3), y no que: *las que son iguales equidistan* (2), pues la proposición (1) y la (2) no bastan para demostrar la (3) ni la (4). Pero si el teorema solo exigiera la correspondencia entre la *igual ó desigual distancia* y la *igual ó desigual longitud* de las oblicuas, sería indiferente la elección de la proposición, conforme arriba se ha indicado. Así, por ejemplo, demostrado que: *si las oblicuas distan igualmente del pie de la perpendicular, son iguales* y su recíproca, quedará establecido *ad absurdum*, que *si son desiguales distarán desigualmente*, y que *si distandesigualmente, son desiguales.*

También se encuentran algunas veces proposiciones cuyas recíprocas no son ciertas. Ejemplos: 1.° Si dos ángulos son adyacentes, son suplementarios. 2.° Dos ángulos opuestos por el vértice son iguales. 3.° Si dos triángulos son iguales, lo son las circunferencias inscritas ó circunscritas. Esta aparente anomalía exige la siguiente explicación. Cuando hay perfecta igualdad en la extensión de las ideas que expresan la hipótesis y la tesis, la inversión podrá hacerse; pero si una es más extensa que otra, cuando *la más extensa forme la hipótesis*, se tendrá que restringir, con el fin de identificar la extensión. Así, la relación, *ángulos iguales*, es más extensa que la de *opuestos por el vértice*, así como la *ángulos suplementarios* más que la de *ángulos adyacentes*, y la de *triángulos inscritos* más que la de la *circunferencia*, pues á cada una de estas corresponden infinidad de triángulos inscritos; luego al invertirse pueden elegirse entidades que no correspondan á la hipótesis primitiva. No se puede por consiguiente afirmar que: *si dos circunferencias son iguales, lo serán sus triángulos inscritos.*

La equivalencia ó no equivalencia de las entidades geométricas es el criterio que permite el poder avanzar ó retroceder indistintamente unas veces y otras no, en nuestros razonamientos. En el ejemplo último, todos los puntos de la circunferencia, excepto los tres dados, son extraños á la figura construída, lo mismo que un ángulo cualquiera igual á otro es extraño á la figura que forma al primero con su opuesto por el vértice; y que es la misma figura, por deberse considerar las rectas indefinidamente prolongadas.

Pasemos ahora á las consideraciones que nos han de explicar el encadenamiento de las verdades geométricas.

Las definiciones y los postulados son los puntos de partida del encadenamiento geométrico.

El postulado de la recta ó axioma según los distintos criterios de los geómetras: *Dos rectas no pueden cerrar un espacio* y el llamado postulado de Euclides ó axioma 11 de sus *Elementos*, son las bases sobre que se construye el edificio de la Geometría.

Considerando un punto P en una recta AB y otra recta que gira alrededor de dicho punto, además de concluirse que *la suma angular es constante á un lado de una recta*, se llega á la *definición del ángulo recto* como mitad de esta suma; y si suponemos el punto P en el exterior y lo unimos á los extremos A y B de la recta, observamos que, por poderse superponer una recta con otra en todas sus partes, los ángulos rectos correspondientes á todos sus puntos también se podrán superponer; luego, si suponemos que el ángulo APB sea igual á dos rectos, superponiendo parcialmente cada uno de sus ángulos rectos con dos de la recta AB en cualquiera de sus puntos, la línea APB coincidiría con la AB, lo que es absurdo; luego el ángulo APB no vale dos ángulos rectos.

Las proposiciones: Por un punto *solo* se puede trazar una *perpendicular* á una recta, una *paralela* ó una recta que forme *un ángulo dado* (considerado en un sentido determinado), son otros casos de la determinación de la recta que se derivan del fundamental expresado por el postulado ó axioma arriba citado. No es necesario que digamos cómo se demuestra que por un punto exterior solo se puede trazar á una recta una perpendicular, llegándose á concluir que si hubiera dos perpendiculares, también dos rectas cerrarían un espacio, lo que es absurdo.

Que por un punto exterior á una recta solo se le puede trazar una recta formando un ángulo dado, se funda en que si existiesen dos, un ángulo externo de un triángulo sería igual á uno de los internos no adyacentes. En fin, el caso de la paralela se demuestra fundándolo en el caso de la perpendicular, si antes se admite el axioma 11 ó la proposición equivalente que sustituyó Lacroix cuyo enunciado es el siguiente: *Si á una recta se le trazan una perpendicular y una oblicua, está prolongada suficientemente encontrará á la perpendicular;* si estos postulados no se admiten, en vez de ellos puede admitirse la proposición que expresa la existencia de una sola paralela á una recta.

La equivalencia de estas tres proposiciones se demuestra de la manera siguiente:

Sean las cuatro proposiciones.

1.ª Si A no es paralela á B y B es perpendicular á C, A no es perpendicular á C.

2.ª Si A es paralela á B y B es perpendicular á C, A es perpendicular á C.

3.ª Si B es perpendicular á C y A no es perpendicular á C, A no es paralela á B.

4.ª Si A es perpendicular á C y B es perpendicular á C, A es paralela á B.

La 2.ª es la contraria de la 1.ª, la 3.ª y la 4.ª son respectivamente las recíprocas de la 1.ª y la 2.ª (esto se observa inmediatamente prescindiendo de la condición común á todas, B es perpendicular á C.)

La 1.ª es lo mismo que decir: *Por un punto no se puede trazar más que una perpendicular á una recta*, pues expresa que cualquiera recta trazada por un punto de la B no es perpendicular á la C. La 4.ª que suele enunciarse así. *Dos rectas perpendiculares á una tercera son paralelas*, por ser la recíproca de la contraria de la 1.ª, se deduce de ella por reducción al absurdo. La proposición 3.ª es el enunciado del postulado de las paralelas, según Lacroix. La proposición 2.ª equivale al enunciado: *Por un punto exterior á una recta solo se le puede trazar una paralela*, pues admitiendo: 1.°, que *por un punto solo puede trazarse una perpendicular á una recta* (prop. 1.ª); y 2.°, que *si dos rectas A y B son paralelas y B es perpendicular á C, también lo será A* (prop. 2.ª) diremos: Siendo cierto que todas las paralelas que puedan trazarse á B por un punto de la recta A son perpendiculares á C, y además pudiendo solo existir una perpendicular á C en dicho punto, *no puede haber tampoco más que una* *paralela*, pues si hubiera varias habría otras tantas perpendiculares, lo que es contra lo admitido. También se demuestra inmediatamente que el enunciado de Lacroix es equivalente á la proposición 2.ª, pues siendo B perpendicular á C y A oblicua, debiendo ser, en virtud de la proposición 2.ª, toda paralela á B perpendicular á C, si la oblicua A fuese paralela á B, tendría que ser perpendicular á C, lo que es absurdo.

El enunciado de Euclides es equivalente al de Lacroix. Ya en la forma restringida de este se ve que las rectas A y B, formando la una un ángulo recto y la otra un ángulo agudo, los dos ángulos suman menos que dos ángulos rectos. Pero debe considerarse el axioma de Euclides en otro sistema de cuatro proposiciones más general, que se corresponden exactamente con las del sistema que acabamos de considerar. Así, designando, para mayor sencillez, por 1 y 2 los ángulos internos tomados á un lado de la secante y por 3 el adyacente al 2, que es el correspondiente del 1, diremos:

Si AB y CD no son paralelas, los ángulos 1 y 2 no son suplementarios (1′).

Si AB y CD son paralelas, los ángulos 1 y 2 son suplementarios (contraria) (2′).

Si los ángulos 1 y 2 no son suplementarios, AB y CD no son paralelas (recíproca) (3′).

Si los ángulos 1 y 2 son suplementarios, AB y CD son paralelas (recíproca de la contraria) (4′).

Así como la proposición 1.ª expresa que: *Por un* *punto no puede trazarse más de una recta que forme ángulos rectos con otra*, la (1′) expresa que: *Por un punto no puede trazarse más que una recta que forme un ángulo dado con otra* (cuya orientación está dada también); dichos ángulos son el 1 y el 3, de manera que también puede decirse que *si las rectas AB y CD no son paralelas, los ángulos correspondientes no son iguales*. La proposición (3′) es el postulado de Euclides, que corresponde á la 3.ª, ó enunciado de Lacroix; la proposición (2′) corresponde á la 2.ª, con la diferencia de que en la primera los ángulos 1 y 3 son rectos y en la segunda basta enunciar que son iguales. En fin, la (4′) es la recíproca de la contraria de la (1′) de la cual resulta por reducción al absurdo.

Basta, pues, demostrar directamente la (1′) ó la (4′) (pues una de ellas se deduce de la otra) y admitir como postulado ó la (2′) ó la (3′), para que todo el sistema quede establecido. Euclides después de admitir el postulado, como el undécimo de sus axiomas, demostró la proposición 27, á saber: *Si dos rectas AB, CD, cortadas por una tercera EF forman con ella los ángulos AEF y EFD iguales, son paralelas*, que demuestra *ad absurdum*, pues, si *AB* y *CD* se encontrasen en un punto *G*, en el triángulo *EFG* se tendría un ángulo externo igual á uno de los interiores no adyacentes á aquel, lo que es contrario á la proposición 16, que es la proposición (1′) expresada en otros términos. Quedan, pues, establecidas las cuatro proposiciones del sistema, porque la (2′) resulta *ad* *absurdum* de la (3'). También puede reemplazarse á la proposición 16 de Euclides la 17: *En un triángulo la suma de dos ángulos vale menos que dos rectos*, que le es equivalente como también á la proposición (1').

Hay que observar que la proposición (4') también se demuestra como lo hacen Baltzer y otros autores anteriores fundándose en la congruencia de las dos figuras que resultan á uno y otro lado de la secante, pues, si se supone que AB y CD se encuentran, haciendo girar á la parte de la figura en que se encuentran alrededor del punto medio de la secante, al coincidir las dos partes de la figura, también se encontrarán al otro lado, y *dos rectas cerrarán un espacio*, lo que es absurdo.

Todas las proposiciones geométricas constan de las cuatro partes, si bien no se enuncian siempre todas por no ofrecer las que se omiten ninguna utilidad.

Cuando se trata de una entidad perfectamente determinada, como, por ejemplo, de una perpendicular, una paralela, una bisectriz, el punto que en el interior ó exteriormente á un segmento lo divide en una razón dada, la recíproca de la proposición que se ha demostrado se halla implícitamente demostrada. Así, después de haberse demostrado que *dos perpendiculares á una recta son paralelas*, nos encontramos demostrada la proposición recíproca, fundándonos en que *por un punto de una de ellas solo puede trazarse una paralela á la otra*, pues por la directa se halla establecido que *existe* la paralela B á la A, la cual, juntamente con esta es perpendicular á C; pero como *solo existe una paralela* pasando por un punto de la B, esta paralela tiene que *ser necesariamente la perpendicular supuesta en el directo*. Lo mismo diremos si se trata de las dos rectas que forman ángulos alternos internos iguales, las cuales son paralelas. *Existe* trazada por el punto de intersección de la primera de las dos rectas y la secante una paralela á la otra (tesis), que es la que forma igual ángulo alterno interno con la secante (hipótesis); pero como *solo pasa por dicho punto una paralela*, esta paralela (hipótesis ahora) es precisamente la que forma igual ángulo alterno interno con la secante que la otra (tesis del teorema recíproco). Euclides, después de probar en su proposición 4 que en un triángulo á lados iguales se oponen lados iguales, demuestra por reducción al absurdo la proposición 5, que es la recíproca de la anterior, y esto ofrece un nuevo ejemplo que sirve de comprobación á nuestro razonamiento, pues, en efecto, la proposición 4 equivale á establecer que á un triángulo formado por tres lados a, a y b corresponden ángulos respectivamente opuestos A, A y B (este tercero no es objeto del teorema). Pero como el triángulo supuesto con los tres lados a, a, b *está determinado*, es decir, es *único*, es evidente que el triángulo que supongamos con la base b y los ángulos A y A (hipótesis del recíproco) es dicho triángulo único que tiene los lados a y a iguales (tesis del recíproco que resulta probada). Y esta es la razón en que se funda la posibilidad de probar simplemente, empleando el procedimiento *ad absurdum*, el recíproco que constituye dicha proposición 5. También observaremos de paso cuán preferible es emplear la expresión *determinación del triángulo*, como lo hacemos en nuestra Geometría elemental, á la expresión *igualdad de triángulos*, que en muchas ocasiones no indica, como debiera ser, la idea de una entidad ó individualidad geométrica perfectamente caracterizada. La consideración de la igualdad de dos figuras que satisfacen á ciertas condiciones, es el medio conducente á fijar las condiciones que determinan ó definen una sola de ellas, y esta determinación es la idea capital. Así, pues, diremos que, si un triángulo ABC está determinado por los lados AB, BC y el ángulo comprendido B (caso correspondiente á la igualdad de dos triángulos que tienen iguales dos lados y el ángulo comprendido), de manera que sus otros tres elementos son los ángulos γ, α y el lado b; por ser *único* dicho triángulo cuya *existencia* ó *realidad* se halla establecida, también quedará este determinado con el lado AB, el ángulo B y el ángulo γ, ó también con los lados AB, BC, y el b, es decir, todos los casos de la determinación de un triángulo, que se hallan virtualmente contenidos en el primero que se haya establecido. El teorema relativo á la igualdad de oblicuas, que distan igualmente del pié de la perpendicular, y su recíproco, son casos particulares de la determinación del triángulo, que suelen ir acompañados de sus contrarios en los tratados. Por último, diremos que si la paralela (recta que forma un ángulo nulo), la perpendicular y la bisectriz (que forman ángulos iguales), son los casos más sencillos de la determinación geométrica, el empleo de las razones numéricas, como por ejemplo, la igualdad de razones de segmentos, que determinan rectas paralelas y figuras homotéticas y semejantes, son otros casos más generales de determinación, sobre los que tenemos el de la relación anarmónica, fundamento á su vez de las relaciones más generales de la homografía y la involución. Y limitándonos al caso de la relación anarmónica, pondremos por ejemplo el lema III de Pappus, reducido á enunciar que, si tres rectas trazadas por un punto P, cortan á dos transversales trazadas por un punto a, respectivamente, en los puntos b y b' c y c', d y d', se verificará la relación $\frac{ab}{ad} : \frac{cb}{cd} = \frac{ab'}{ad'} : \frac{c'b'}{c'd'}$. Como esta figura se halla determinada, es evidente que, si sustituímos en la hipótesis una de las rectas Pc' de la misma, por ejemplo, por la relación anarmónica de la tesis, para formar la proposición recíproca; en virtud de *existir un solo punto, c,* que con los demás supuestos forma dicha relación anarmónica, la línea Pcc' tiene que ser la recta Pc', supuesta en la proposición directa; y esto explica entre otros muchos ejemplos, la reciprocidad de los diversos casos del exágono inscrito en dos rectas, de que ya nos hemos ocupado.

También nos fijaremos, para terminar estas consideraciones, en algunos teoremas que son dobles; es decir, que comprenden en sí el directo y el recíproco por efecto de cierta simetría existente en las entidades del enunciado. Así ocurre en el teorema: *Si dos rectas son paralelas y una de ellas encuentra á un plano, la otra también lo encontrará*, y es claro que incluye, tanto el caso de suponerse que la recta *A* ó la *B* encuentre al plano, para concluirse que la *B* ó la *A* también lo encontrará; y después de probada esta proposición resulta por reducción al absurdo la contraria; es decir, que *si una de ellas es paralela ó se halla en un plano, la otra será paralela á este ó se hallará contenida en el mismo.*

Las proposiciones que antes hemos citado contienen los fundamentos de la Geometría, que en realidad se reducen al axioma de la recta y al axioma de la paralela. Se hallan ya establecidas las proposiciones que determinan: una *recta*, una *paralela*, una *perpendicular* y un *ángulo dado*, todas equivalentes y sustituíbles entre sí, pues la paralela puede concebirse determinada también por dos puntos, uno de los cuales se halla en el infinito, y las otras dos también por el punto desde donde se trazan y por el punto de la otra recta determinado implícitamente por el ángulo dado, sea recto ú oblicuo.

Las construcciones auxiliares empleadas en las demostraciones sirven de enlace entre los casos particulares que se han demostrado primeramente y los casos más generales que se deducen de ellos. Así, por ejemplo, demostrado que: *Dos perpendiculares á una recta son paralelas*, puede pasarse á la demostración del teorema general: *Si dos rectas forman ángulos alternos internos iguales con otra, serán paralelas*, construyéndose dos triángulos cuya igualdad se demuestra en seguida, al trazarse por el punto medio de la secante una perpendicular á una de las rectas.

Cada teorema, como se dijo, expresa una relación de coexistencia entre dos términos expuestos en la hipótesis y la tesis. Las construcciones auxiliares forman un encadenamiento que enlaza dichos extremos con auxilio de los términos medios introducidos. La Geometría procede, pues, por enlaces de figuras que se traducen en enlaces correspondientes de proposiciones que forman el organismo científico. Cada teorema comprende ó sintetiza en sí un sistema de verdades (todas las que concurren á demostrarlo) unido á un sistema correspondiente de figuras; estas síntesis varían según la disposición que ha dado cada autor á las materias. Tal teorema que en un plan sirve para demostrar otro, en un plan distinto es innecesario.

Esto nos conduce á considerar el organismo de la ciencia bajo el punto de vista estético.

La demostración tiene sus elegancias, que consisten en la sencillez. Esto respecto á cada proposición. A la elegancia de cada uno de los elementos debe corresponder la elegancia en el conjunto, que se traducirá en la armonía de las partes en el todo, en la simetría de la disposición, en la perfección de la coordinación y subordinación de las verdades, según sus categorías y la naturaleza del objeto á que se refieren.

Se observa que Euclides descuidó las exigencias estéticas en beneficio del rigor lógico. Así, en cuanto á las proposiciones, por ejemplo, presenta separadas todas las proposiciones que forman un mismo enunciado. En cuanto al plan, sigue un orden serial ó sucesivo, formando en vez de ramificaciones un encadenamiento continuo.

Entre los autores modernos citaremos como ejemplo de elegancia la manera de demostrarse en la Geometría de Rouché y Comberouse que: *Dos rectas paralelas á una tercera son paralelas entre sí*, fundándose en la consideración de que, si una de dos paralelas corta á un plano, la otra también lo cortará, mientras que en los autores anteriores para obtener este resultado es preciso trazar un plano perpendicular á la tercera, que resultará perpendicular á las dos primeras; y este teorema á su vez exige un encadenamiento de teoremas que no es necesario en el primer caso. Se observan, por el contrario, en algunos autores demostraciones que comprenden las de varios teoremas, resultado de algún defecto en el plan que han seguido. En general, las demostraciones serán tanto más sencillas cuanto más independencia se haya dado en el plan general á las proposiciones de naturaleza distinta, cuyas agrupaciones puedan haberse separado unas de otras.

Estas circunstancias hemos tenido presentes en la exposición de nuestra Geometría elemental, cuyo plan indicaremos brevemente, haciendo resaltar los puntos de vista más culminantes, que creemos debe tenerse presente en una síntesis que responda al fin científico y al de la enseñanza.

El teorema debe separarse del problema. El teorema es el elemento de la teoría y tiene, como esta, un carácter especulativo. El problema tiene un carácter práctico. Esta diferencia indujo á Wronski á establecer una distinción entre la *teoría* y la *técnia*. En la una predomina el *entendimiento*, en la otra la *actividad*. En la ciencia pura es secundario lo que concierne á los medios ó procedimientos de que disponemos para hacer una cosa, lo que se impone es dejar establecida su *existencia* ó su *posibilidad*. Esto hace la Geometría, demostrando, por ejemplo, que *existe una paralela* ó una *perpendicular*, aunque ignorásemos el modo material de obtenerlas.

Deben distinguirse cuidadosamente las relaciones de *igualdad* y *desigualdad* de las de *proporcionalidad;* las primeras implican una simple comparación, las segundas una comparación en que unas entidades resultan *medidas* por medio de otras. El primer género de relaciones se verifica en una circunscripción mucho más reducida que el segundo. En el primero es necesario proceder gradualmente, como hemos visto, desde casos sencillos como el de la perpendicular y la paralela, llegando á lo sumo á la división en dos partes iguales de las rectas y de los ángulos. En el segundo, empleamos un intermediario de aplicaciones universales, el *número* que hacemos corresponder á las entidades geométricas, y que aplicado de una manera amplia nos conduciría á la Geometría cartesiana; pero empleado solo bajo la consideración de la *relación de proporcionalidad*, nos deja todavía en los dominios de la Geometría de Euclides. Los ángulos y sus arcos correspondientes, las superficies, de igual modo que los volúmenes y las dimensiones que los miden, los segmentos rectilíneos comprendidos entre paralelas son varias especies de magnitudes proporcionales, y los números que les corresponden son términos medios que nos permiten pasar en nuestros razonamientos de las unas á las otras, de igual manera que, por ejemplo, en el estudio de las energías físicas, al conocer la relación que existe entre las calorías y los kilográmetros, podemos pasar de una á otra manifestación de la fuerza, todo lo que nos da á conocer el método general de la ciencia, que expresando las relaciones existentes entre las entidades más diversas, nos ofrece el medio de examinar las unas indirectamente, al examinar directamente otras á las cuales se hallan ligadas en el encadenamiento científico.

El paralelismo, como sabemos, corresponde á una igualdad de razones, y el anti-paralelismo á una igualdad de productos. Las simples proporciones nos conducen á determinar en un triángulo uno de los lados por medio de los otros; y en cuanto estas determinaciones se conocen en el triángulo, se pueden extender á los polígonos y especialmente á los polígonos y poliedros regulares. Pero no basta considerar relaciones entre lados ó líneas de un polígono, es preciso relacionar los lados con los ángulos, y esto se ha realizado hasta ahora empleando como términos medios las líneas trigonométricas, cuyo estudio se hace en la rama de la Matemática que se llama Trigonometría, que algún autor ha llegado hasta á designarla como una ciencia, si bien no pasa de ser un capítulo de la Geometría, y así lo hacemos en nuestra Geometría elemental. Para ello, concibiendo formados todos los triángulos rectángulos cuya hipotenusa es el radio de una circunferencia dada; moviéndose desde una posición inicial hasta haber girado 180°, se obtendrán todos los *tipos* diferentes de triángulos rectángulos pertenecientes cada uno á una *clase* de triángulos formada por todos los que le sean homotéticos. Pero cada triángulo tipo está determinado, en cuanto se conoce la relación numérica (con el signo que le corresponda), de un cateto con la hipotenusa (seno ó coseno), ó de los dos catetos (tangente y cotangente); y para pasar de cada triángulo tipo á uno de los de su clase, basta multiplicar por la razón numérica que hay entre cada dos lados homólogos, el elemento conocido (por medio de las tablas trigonométricas) del triángulo tipo, homotético del que se va á determinar. Esta operación es un problema, que en la parte especulativa de la ciencia basta indicar, haciendo ver la posibilidad de determinar los elementos de un triángulo cualquiera mediante su triángulo homotético, cuya hipotenusa es el radio según el cual están calculadas las tablas trigonométricas. Añadiremos, para completar esta cuestión, que las múltiples relaciones que en los tratados de Trigonometría se exponen relativas á las líneas trigonométricas, tienen su lugar natural en los tratados de Análisis, donde se estudian estas bajo el punto de vista algorítmico.

Después de las propiedades geométricas que dependen de la proporcionalidad, entre las que ocupa un lugar importante la homotecia, cuyo desenvolvimiento debe hacerse preceder al de la teoría de la semejanza de las figuras, puesto que es lógico deducir esta de aquella, se pueden emplear las dobles razones, como dicen los alemanes, ó la relación anarmónica, según la expresión de Chasles, de las que es un caso particular la relación armónica; y con este auxiliar la Geometría se eleva á teorías cuyo objeto es el estudio de ciertos sistemas de puntos ó de rectas, como los sistemas armónicos, las divisiones homográficas, la involución, que á su vez conducen á las teorías fundamentales de la Geometría superior, que son la de las figuras polares recíprocas, las figuras homológicas, homográficas y correlativas.

Tal es la extensión que creemos debe tener un Tratado fundamental de Geometría en el estado á que hoy ha llegado la evolución científica. Reduciéndose la enseñanza, por ejemplo, á un Tratado de la extensión de Legendre ó Lacroix no se pone al alumno en disposición de abordar las regiones superiores de la Geometría actual, ni de formarse una idea exacta de los fines que se propone. Y aunque se sacrifiquen algún tanto los detalles y repeticiones muchas veces innecesarios, es preciso que se destaque lo fundamental, porque poseyéndolo, poseeremos las consecuencias que envuelve. Es necesario comprender que el fin último de la Geometría no se reduce á calcular los perímetros de los polígonos regulares, ni el del círculo, ni el volumen de los cuerpos redondos. Hay en la Geometría aspiraciones más altas que reducen estas cuestiones á simples problemas imperceptibles en el indefinido conjunto de otros muchos problemas incluídos en el tejido de relaciones, de cuyo número y complicación solo puede formarse una idea, al concebirse lo ilimitado de las combinaciones sucesivas que es capaz de producir nuestro espíritu por el ejercicio continuo de su actividad. Si la ciencia puede considerarse como infinita, tampoco debemos desalentarnos, antes bien procurar apoderarnos de lo esencial que en ella descubrimos, de lo general que incluye lo particular; y esto exige la racional coordinación de las ideas, unida á la consideración de los medios de que disponemos para realizar estas coordinaciones. Después de llevar á las inteligencias el convencimiento de que el sistema de la Geometría elemental se reduce, en suma, á la determinación de la recta por dos puntos y á determinación de la paralela (que según arriba se indicó, es el caso anterior, cuando el segundo punto esté en el infinito), todos los teoremas relativos á la perpendicular y á la paralela son variantes de dichas proposiciones fundamentales; y como un medio de determinación más general disponemos de la determinación del triángulo, que ya nos determina un punto (por ejemplo, cuando se dan un lado y los ángulos adyacentes), ya una recta (cuando se dan dos lados y el ángulo comprendido); y así, el triángulo llega á ser el elemento determinador en las diversas proposiciones de la Geometría elemental. Un nuevo elemento determinador de más amplias aplicaciones es la proporcionalidad de segmentos, y otro, en fin, el más fecundo en consecuencias, y que ya se aplica á la determinación, no de cada figura en particular, sino de sistemas de figuras, es la relación anarmónica que de una manera sencillísima y uniforme llega, como lo hizo Chasles en su *Tratado de Geometría superior*, hasta las relaciones que expresan las figuras homológicas, homográficas y correlativas, punto donde la inteligencia, conocedora ya de los fines á que aspira la Geometría, puede detenerse, como en la primera etapa de su camino, preparándose para, en la segunda, abordar el estudio general de las curvas y de las superficies.

Pero esta segunda fase de la ciencia geométrica exige nuevos medios adecuados á la grandeza de su objeto, y estos medios son los métodos más ó menos eficaces para desenvolverlo en todas sus manifestaciones y para darlo á conocer. Por eso conviene hacer una exposición de lo que caracteriza á cada uno de los principales métodos que se han seguido en Geometría para estudiar las curvas y las superficies. Los métodos de Descartes, Moebius, Hamilton, Staudt, son sistemas geométricos especiales que conducen á un mismo fin, aunque de distinta manera, y es conveniente darlos á conocer en sus rasgos principales desde un principio y aun contrastarlos, pues de este modo, además de la ciencia, nos serán conocidos los instrumentos ó medios de que esta dispone para realizar sus fines.

Como complemento del desarrollo teórico de la Geometría conviene, en conformidad con la división hecha por Wronski de la matemática en teoría y técnia, ejercitar la actividad intelectual al mismo tiempo que presentar aplicaciones del estudio teórico en un segundo Tratado, cuyo objeto sea la resolución de problemas geométricos, para que la inteligencia, después de conocer la verdad, posea los medios de convertirla en una realidad objetiva. Así, además de la ciencia como desarrollo subjetivo, conoceremos sus aplicaciones, que nos proporcionarán una nueva verificación. Esta segunda parte será un segundo desarrollo de la Geometría, aunque en orden distinto. Al aplicar el método analítico á cada cuestión, se reproducirán las verdades ya asentadas en el *Tratado teórico*, si bien en orden diferente. Las enumeraciones de métodos para la resolución de problemas, el examen de los métodos analítico y sintético, su empleo, sus correspondencias á través del encadenamiento de cuestiones que, desde la tomada como punto de partida nos lleva á la cuestión final que resuelve el problema. Todo esto se halla expuesto en tratados especiales, como son la obra de Duhamel, *Des méthodes dans les sciences de raisonnement*, los *Problèmes de Géométrie* de Ritt, *Théorèmes et problèmes* de Catalán, los *Problemas de Geometría* de Echegaray, los *Méthodes et théories* de Petersen y otras muchas obras cuya enumeración sería demasiado extensa.

En fin, después de la exposición sistemática que nos ha dado el encadenamiento lógico de las verdades que forman el organismo científico, y del tratado complementario que nos enseña las aplicaciones en el orden material, un conocimiento fundado de la Geometría exige un Tratado de Crítica, cuyo fin sería dar las razones del plan científico más perfecto, según resulta, no solo de los progresos que la ciencia ha hecho en las diferentes épocas de su formación, es decir, no solo de cuanto nos está revelado por la historia, que nos manifiesta el modo de generación de los métodos y de los conceptos, y nos ofrece el material científico en toda su variedad para nuestra síntesis, sino que, además, los principios de la lógica deben ser aplicados al examen de este material reunido en otras síntesis anteriores, para dar las últimas razones del orden científico seguido, y convertir lo que de otro modo hubiera sido un conocimiento espontáneo ó inconsciente en conocimiento fundado ó filosófico.

Precio, 2,50 pesetas