Propiedad Intelectual. — N.º 52.

CURSO

DE

ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA

ELEMENTAL

POR

D. EUSEBIO SÁNCHEZ RAMOS

Catedrático del Instituto de Logroño

Y

D. TEODORO SABRÁS Y CAUSAPÉ

Profesor auxiliar del Instituto de Logroño.

LOGROÑO:

IMP. Y LIB. DE RICARDO M. MERINO

92 — Portales — 92.

1892

[illegible]

CURSO

DE

ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA

ELEMENTAL

POR

D. EUSEBIO SÁNCHEZ RAMOS

Catedrático del Instituto de Logroño

Y

D. TEODORO SABRÁS Y ÇAUSAPÉ

Profesor auxiliar del Instituto de Logroño.

LOGROÑO:
IMP. Y LIB. DE RICARDO M. MERINO
92 — Portales — 92.
1892

Eusebio Sánchez Ramos

Teodoro Sabrás Causapé

ÍNDICE

ARITMÉTICA

PRIMERA PARTE. — ARITMÉTICA DE LOS NÚMEROS ABSTRACTOS

SECCIÓN PRIMERA.—Cálculo aritmético.

LIBRO PRIMERO.—LOS NÚMEROS ENTEROS.

LIBRO SEGUNDO.—Los números fraccionarios.

LIBRO TERCERO.—Los números incomensurables

SECCIÓN SEGUNDA.—Comparación aritmética.

SEGUNDA PARTE. — Aritmética de los números concretos

ÁLGEBRA

PRIMERA PARTE. — Cálculo algebráico

LIBRO PRIMERO.—Las operaciones fundamentales.

LIBRO SEGUNDO.—LAS FRACCIONES ALGEBRÁICAS

Página

LIBRO TERCERO.—LAS POTENCIAS Y RAÍCES DE LAS CANTIDADES ALGEBRÁICAS

SEGUNDA PARTE.—APLICACIÓN DEL CÁLCULO ALGEBRÁICO Á LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES.

LIBRO PRIMERO.—LAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO.

PRELIMINARES.

1. Varias cosas que tienen uno, ó muchos caracteres comunes, se dicen *homogéneas* por relación á dichos caracteres comunes, y si tienen otros caracteres diferentes *heterogéneas* por relación á éstos.

Dos dados, uno de plomo y otro de marfil, son homogéneos por relación á su figura, y heterogéneos por la materia de que están construídos. Pueden además ser iguales ó distintos, el peso ó el tamaño, por ejemplo.

Si varias cosas tienen todos sus caracteres comunes, se dicen *idénticas*.

2. Varias cosas, por relación á sus caracteres comunes, ó en cuanto son homogéneas forman un conjunto que se puede considerar obtenido por la repetición de cualquiera de ellas. La cosa repetida se llama la *unidad*, el conjunto formado por la repetición de la unidad constituye una *pluralidad*. La expresión determinada de *cuantas veces* se ha repetido la *unidad*, se llama *número*.

El número es, pues, una pluralidad determinada de cosas ú objetos homogéneos: cualquiera de las cosas ú objetos es la unidad.

3. Como la unidad generatriz del número puede ser un objeto cualquiera, podemos hacer abstracción de la naturaleza de la unidad y expresar solamente *cuantas veces* está repetida para formar el número.

El número que expresa la naturaleza de la unidad generatriz se llama *concreto*, y el que no la expresa, *abstracto*.

4. Por lo que hasta ahora llevamos dicho se comprende que el número es un conjunto de partes separables unas de otras, ó disgregables, es decir, que el número es *discreto*.

5. La unidad puede ser un todo formando un individuo que no se puede descomponer en partes sin destruirle; esto sucede, si por ejemplo la unidad es un hombre, un árbol, etc. Pero también puede ser una cosa descomponible en partes iguales y homogéneas: esto sucederá si la unidad es una distancia, un peso, etc,

En el primer caso la unidad se impone en la formación del número: así, para numerar un conjunto de árboles tomamos por unidad un árbol. Lo más que podremos hacer, si la distribución de los árboles lo permite, es tomar por unidad una colección de árboles, una fila, por ejemplo, si están distribuídos en filas.

En el segundo caso, es decir, cuando la unidad se puede descomponer en partes homogéneas, queda completamente libre la eleccción de su tamaño; resultando tanto mayor el número, cuanto menor es la unidad elegida.

6. El concepto de tamaño, ó limitación de los seres finitos, constituye su *magnitud*: el carácter esencial de la magnitud es ser susceptible de aumento y disminución. Las palabras *magnitud* y *cantidad* se suelen emplear como sinónimas; pero es mejor aplicar el nombre de cantidad solamente á las magnitudes determinables, ó numerables por medio de una unidad de su misma naturaleza y excluir las magnitudes que no sean determinables; como por ejemplo, las facultades intelectuales, afectos, etc.

7. La cantidad es *continua*, es decir, que se puede descomponer en partes homogéneas, tan pequeñas como se quiera, é inversamente se puede formar una cantidad por la repetición sucesiva de una parte cualquiera. De un modo más general, la cantidad puede aumentar ó disminuir por grados insensibles.

8. Cuando se *determina*, ó *mide* una cantidad fija, ó como suele llamarse *constante*, por medio de una unidad de su misma naturaleza, constante también, puede suceder: 1.º Que la cantidad contenga un número *exacto* de veces á la unidad y entonces se origina un número formado por una pluralidad de unidades, conforme hemos explicado en

el número 2. En lo sucesivo le llamaremos *número entero.* 2.º Que la cantidad no contenga exactamente á la unidad, pero sí á una de las *partes alícuotas* que resultan de dividirla en cierto número de partes iguales, y entonces se origina un número que se llama *fraccionario.* 3.º Que la cantidad no contenga exactamente á la unidad ni á ninguna de sus partes alícuotas, y entonces se origina el número *incomensurable.*

En los dos primeros casos, la unidad y la cantidad son *comensurables* entre sí, ó tienen una *medida común,* que es, ó la unidad misma, ó una de sus partes alícuotas: los números que expresan la relación de la cantidad á la unidad, ó sea la medida de la cantidad, son comensurables. En el tercer caso, la unidad y la cantidad son *incomensurables* entre sí, puesto que ninguna parte alícuota de la unidad está exactamente contenida en la cantidad. Más adelante encontraremos ejemplos de números incomensurables y veremos que no se pueden expresar exactamente, pero sí, con toda la aproximación que se quiera.

9. *La Ciencia de la cantidad en general se llama Matemática.*

La Ciencia de los números en general ha recibido distintos nombres, Aritmología y Algoritmia. La parte elemental de que nos ocuparemos nosotros se llama Aritmética.

10. Antes de comenzar la Aritmética es conveniente conocer la nomenclatura escolástica usual para designar las proposiciones matemáticas.

DEFINICIÓN es el desarrollo verbal de la comprensión de una idea.

DIVISIÓN es la enumeración de las partes que interiormente forman el todo definido.

DEMOSTRACIÓN es un raciocinio que se hace para patentizar la verdad de una proposición.

AXIOMA es una proposición evidente por sí misma y que, por consiguiente, no necesita demostración.

TEOREMA es una verdad demostrable. El teorema consta de un *enunciado* y una *demostración.* El enunciado es la proposición que se anuncia como verdadera; consta de dos partes; una *hipótesis*, ó *suposición*, que afirma lo que se supone cierto, y una *tesis*, ó *conclusión*, cuya verdad se ha de establecer por medio de la demostración.

Un teorema es *recíproco* de otro cuando tiene por hipótesis la conclusión y por conclusión la hipótesis de este otro.

Un teorema es *contrario* de otro, cuando tiene una hipótesis y una conclusión contrarias á las de este otro.

Lema es un teorema de poca importancia por sí mismo, pero necesario como fundamento de otros teoremas más importantes.

Corolario es un teorema cuya verdad se deduce inmediatamente de un teorema conocido.

Postulado es un teorema que no se puede demostrar y que por tanto debe admitirse como axioma en la formación de la Ciencia.

Escolio es una advertencia, ó nota que se hace sobre uno ó muchos teoremas relativos al mismo asunto, ó que forman una teoría.

Problema es una cuestión en que nos proponemos determinar una ó muchas cosas desconocidas ó *incógnitas*, por medio de otras conocidas ó *datos*.

La proposición en que se declara el objeto del problema, se llama *enunciado*: el procedimiento para determinar las incógnitas de modo que satisfagan al enunciado, se llama *resolución*: el resultado obtenido después de resolverle, se llama *solución*.

11. Se llama *igualdad* la relación que existe entre dos cantidades homogéneas idénticas, ó entre los números que las miden.

La igualdad se expresa colocando el signo $=$, que se lee *igual á*, entre las cantidades ó números iguales.

Así, si las cantidades representadas por los símbolos A y B son iguales, escribiremos $A = B$, y leeremos, A *igual á* B.

Todo lo que antecede al signo $=$ se llama *primer miem-*

bro de la igualdad, y lo que le sigue, *segundo miembro.*

Se llama *desigualdad* la relación que existe entre dos cantidades homogéneas, tales que una de ellas es mayor que la otra, ó entre los números que las miden.

Para expresar la desigualdad, se emplea uno de los signos $>$ y $<$, que se leen respectivamente *mayor que* y *menor que*, colocados entre las cantidades que se comparan.

Así, si las cantidades A y B, que se comparan, son tales que A es mayor B, escribiremos $A > B$ y leeremos A *mayor que* B. Si A fuese menor que B, la desigualdad sería $A < B$.

Lo mismo que en las igualdades, todo lo que hay escrito antes del signo $>$, ó $<$, se llama *primer miembro*, y todo lo que hay después, *segundo miembro* de la desigualdad.

Es evidente que en una igualdad se puede cambiar el orden de los dos miembros; así, si se tiene $A = B$, también es cierto que $B = A$.

En una desigualdad se puede cambiar el orden de los dos miembros, pero cambiando el signo de la desigualdad: así, si $A > B$, se tendrá: $B < A$.

12. Entre cantidades *heterogéneas* no existe igualdad, pero puede existir *equivalencia*, es decir, igualdad en los valores, ya sea ésta natural, ya sea convencional. (*)

13. Los axiomas fundamentales de la Matemática son verdades conocidas de todos por el sentido común, y apenas se necesita enumerarlos.

Una cosa es idéntica á ella misma. Dos cosas iguales á una tercera, son iguales entre sí, ó más generalmente: *si entre muchas cosas la primera es igual á la segunda, ésta á la tercera y así sucesivamente, dos cualesquiera de èstas cosas serán iguales.* El todo es mayor que una de sus partes, etc.

(*) El trabajo necesario para elevar un kilogramo de agua destilada de la temperatura cero grados á un grado, que es aproximadamente 425 kilográmetros, se llama equivalente mecánico del calor, y es igual á lo que los físicos llaman una caloría: luego cierta cantidad de trabajo tendrá su equivalente en calor, y recíprocamente: ésta es, pues, una equivalencia natural. La equivalencia entre una mercancía y su coste es convencional entre el comprador y el vendedor: depende de muchas circunstancias ajenas, á veces, á uno y otro.

14. Dividiremos la Aritmética en dos partes: la primera tratará de los números *abstractos*, y la segunda, de los *concretos*, considerando esta última como una simple aplicación de la primera.

La primera parte la dividiremos en dos secciones: Cálculo aritmético y comparación aritmética; y el cálculo aritmético en tres libros, que tratarán respectivamente de los números enteros, de los fraccionarios y de los incomensurables.

PRIMERA PARTE.

ARITMÉTICA DE LOS NÚMEROS ABSTRACTOS.

SECCIÓN PRIMERA.

Cálculo aritmético

LIBRO PRIMERO.

LOS NÚMEROS ENTEROS.

CAPÍTULO PRIMERO

La numeración.

15. *La numeración es la parte de la aritmética que se ocupa de la formación y expresión de los números.*

Los números enteros se forman por medio de la unidad, que se va repitiendo y agregándose á sí misma. Si á cualquier número, ya formado, se le agrega la unidad, se formará el número siguiente: como esta operación se pueda verificar siempre por grande que sea el número, la serie natural de los números es indefinida.

16. De aquí la necesidad de un medio convencional y sistemático para poder expresar los números: este medio convencional comprende dos partes: una, la *numeración verbal*, ó expresión de los números por medio de palabras, y otra, la *numeración escrita*, ó expresión de los números por medio de signos.

Nosotros expondremos el sistema de numeración decimal, que es el adoptado por todos.

17. La unidad se expresa por la palabra *uno*, y se llama el número uno: la reunión de uno y uno se llama *dos*: la de dos y uno, *tres*; la de tres y uno, *cuatro*; la de cuatro y uno, *cinco*; la de cinco y uno, *seis*; la de seis y uno, *siete*; la de siete y uno, *ocho*; la de ocho y uno, *nueve*; la de nueve y uno, *diez*.

La reunión de diez unidades, se considera como una nueva unidad, que se dice de *segundo orden* ó *decena*, (la unidad simple se dice también de *primer orden*) la decena es una unidad colectiva y se puede contar por decenas como se ha contado por unidades.

Así, la reunión de dos decenas, se llama *veinte*, la de tres, *treinta*, la de cuatro, *cuarenta* y sucesivamente, *cincuenta, sesenta, setenta, ochenta y noventa.*

La reunión de diez decenas forma el número *ciento*, que se considera como una nueva unidad, que se llama *centena* ó unidad de *tercer orden* y se cuenta por centenas, como por decenas y unidades. La reunión de dos centenas es *doscientos*; la de tres, *trescientos* y sucesivamente, *cuatrocientos, quinientos, seiscientos, setecientos, ochocientos y novecientos.*

La reunión de diez centenas forma el número *mil*, que se considera como una nueva unidad, que se llama *millar*, ó unidad de *cuarto orden*. Se cuenta por millares, como por las anteriores unidades. Así tendremos los números *dos mil, tres mil..... nueve mil, diez mil.* El número diez mil se considera como una nueva unidad, que se llama decena de millar, ó unidad de *quinto orden*, con la cual se cuentan los números *veinte mil, treinta mil..... noventa mil* y *cien mil.* El número cien mil forma una nueva unidad, la *centena de millar*, ó unidad de *sexto orden* y con se ella cuentan los números *doscientos mil, trescientos mil..... novecientos mil.*

La reunión de diez centenas de millar, forma un *millón*, que es la unidad de *séptimo orden.*

Con los millones se forman, como con las unidades simples, decenas, centenas, millares, decenas de millar y centenas de millar, todas ellas de millón; y son los órdenes *octavo, noveno*..... y *duodécimo* de unidades y se cuenta con ellas como con los órdenes anteriores.

Mil millares de millón, ó sea un millón de millones, se llama *billón*. El billón es la unidad de orden décimo tercio y se forman con ella decenas, centenas, millares, decenas de millar y centenas de millar, con las que se cuenta como con las anteriores.

Un millón de billones forma el *trillón* y así sucesivamente.

18. Desde diez hasta veinte se cuentan los números intermedios agregando á la palabra diez las de los nueve primeros números y diciendo por consiguiente: diez y uno *(once)*, (*) diez y dos *(doce)*, diez y tres *(trece)*, diez y cuatro *(catorce)*, diez y cinco *(quince)*, diez y seis, diez y siete, diez y ocho, diez y nueve. Desde veinte hasta treinta se cuentan los números intermedios añadiendo á la palabra veinte, los nombres de los nueve primeros números; así se contará: veintiuno, veintidos..... veintinueve. Del mismo modo se cuenta de treinta á cuarenta, de cuarenta á cincuenta..... de noventa á ciento.

Desde ciento á doscientos se cuentan los números intermedios agregando á la palabra ciento los nombres de los noventa y nueve primeros números y se dirá: ciento uno, ciento dos...... ciento diez, ciento veinte...... ciento noventa y nueve. Del mismo modo se contará entre doscientos y trescientos y así sucesivamente hasta novecientos noventa y nueve.

Entre mil y dos mil se contará agregando á la palabra mil los nombres de los novecientos noventa y nueve primeros números y lo mismo entre dos mil y tres mil y así sucesivamente hasta llegar á nueve mil novecientos noventa y nueve.

(*) El uso ha sustituído las palabras diez y uno, diez y dos, etc., por las once, doce, trece, catorce y quince, por evitar la cacofonía de las primeras.

10000

De modo análogo se cuentan los números intermedios entre diez mil y veinte mil, entre veinte mil y treinta mil..... entre cien mil y doscientos mil y así sucesivamente.

19. De todo lo expuesto se deduce que diez unidades simples, ó de primer orden forman una decena ó unidad de segundo orden: diez decenas forman una centena, ó unidad de tercer orden y siempre diez unidades de un orden forman la del inmediato superior.

En virtud de esto se llama *base* del sistema de numeración decimal el número diez, que expresa cuantas unidades de un orden se necesitan para formar la del orden inmediato superior.

Debemos observar que las unidades de cada orden en un número son menos de diez, y por consiguiente, son nueve á lo sumo: además en un número pueden faltar ciertos órdenes de unidades, que serán precisamente las que no se nombran. Así el número trescientos siete, contiene centenas y unidades, pero carece de decenas.

También conviene observar que se cuenta por unidades, decenas y centenas simples, ó de millar, ó de millón, ó de millar de millón, etc., de suerte que de tres en tres órdenes se forma una unidad que podemos considerar como *principal.*

20. Para la escritura de los números se han adoptado los signos:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

que representan, respectivamente, los nueve primeros números, y se llaman *cifras significativas* del sistema. Como hemos visto que en todo número las unidades de cada orden son menos de diez, la cifras anteriores servirán para expresar cuantas unidades de cada orden contiene un número. Para expresar la falta de unidades de cualquier orden se usa el signo:

0

que se llama *cero* y también *cifra no significativa*, para distinguirla de las demás. El cero, por consiguiente, no tiene valor.

21. Se conviene en que: *toda cifra escrita á la izquierda de otra representa unidades del orden inmediato superior ó diez veces mayores*: de este modo el primer lugar de la derecha corresponde á las unidades; el segundo (contando hacia la izquierda) á las decenas, ó unidades de segundo orden; el tercero á las centenas, ó unidades de tercer orden, y en general, cada orden de unidades ocupa el lugar marcado por su orden.

De aquí resulta que cada cifra tiene dos valores, uno *absoluto*, que, como su nombre indica, es invariable y depende de su figura, y otro *relativo*, que es accidental y depende del lugar que ocupa en el número.

De esto se deduce que las unidades de diferentes órdenes se escribirán por medio de la unidad seguida de un número conveniente de ceros. Así:

1, 10, 100, 1000, 10000.....

serán los números *uno, diez, ciento, mil, diez mil.....*

22. Para escribir un número cuyo enunciado ó expresión verbal conocemos, consideraremos tres casos: 1.° *Que el número sea inferior á mil.* 2.° *Que sea superior á mil é inferior á un millón.* 3.° *Que sea mayor que un millón.*

1.° Si el número que se quiere escribir es inferior á mil, *se escribirán primero sus centenas, á la derecha de éstas las decenas, y á la derecha de las decenas, las unidades*. Así, para escribir el número *trescientos veintisiete*, escribiremos primero un 3, por ser tres las centenas, á su derecha un 2, por ser dos las decenas, y á la derecha de éstas un 7, por ser siete las unidades, de modo que escribiremos 327.

Si el número carece de decenas ó unidades, se ocuparán sus lugares con ceros: si no llegase á 100, ó á 10, bastarían dos, ó una cifra para escribirle.

2.° Si el número que se quiere escribir es mayor que mil y menor que un millón, se supondrá formado por dos grupos de unidades *principales*; uno de unidades simples y otro de millares: *se escribirá el grupo de millares, que á lo sumo tendrá tres cifras* (unidades, decenas y centenas de millar), *como se ha dicho en el caso anterior, y á su derecha* *dejando un pequeño hueco, ó separándole por una coma, el grupo de unidades que también tendrá á lo sumo tres cifras* (unidades, decenas y centenas simples). Por ejemplo, el número *doscientos cuarenta y cinco mil setecientos treinta y nueve* se escribirá:

245 739 ó 245,739

Si faltan algunos órdenes de unidades se ocuparán sus lugares con cero, cuya situación es muy fácil de determinar en cada grupo. Así: el número *doscientos cuarenta mil treinta y nueve, se escribirá:*

240,039.

3.º Si el número es mayor que un millón, se tendrá presente que los dos grupos de tres cifras de la derecha corresponden á los dos órdenes principales, unidades y millares: los dos siguientes á la izquierda, unidades y millares de de millón, los otros dos más á la izquierda, unidades y millares de billón, y así sucesivamente. Por consiguiente *para escribir un número mayor que un millón, se escriben primero los grupos de millares y unidades más elevados: á la derecha de éstos los grupos de millares y unidades siguientes descendiendo, y así hasta llegar á los grupos de millares y unidades simples.*

Cuando el número sea muy grande, conviene escribir á la derecha y á la parte superior de la cifra de unidades de millón un 1 pequeñito; en el mismo lugar y á la derecha de las unidades de billón un 2, etc.; y separar por comas cada grupo de millares del de unidades, ó sea los grupos de tres cifras.

Sea por ejemplo el número: *doce billones, doscientos cincuenta y seis mil cuatrocientos diez y siete millones, setecientas veintitres mil doscientas ochenta y siete unidades;* se escribirá:

$12^{2}256,417^{1}723,287$.

Si faltasen algunos órdenes de unidades, se ocuparán sus lugares con ceros: el número *setecientos dos mil siete millones, veinticuatro unidades,* se escribirá:

$702,207^{1}000,024$

23. *Para leer un número cualquiera, se divide en grupos de seis cifras, poniendo á la izquierda del primero un 1, como hemos indicado para la escritura, á la izquierda del segundo un 2, etc., se dividen estos grupos cada uno en dos de tres cifras por medio de comas, se comienza la lectura por los grupos superiores leyendo sus centenas, decenas y unidades, añadiendo la palabra mil á los situados á la izquierda de cada coma y las palabras millones, billones, etc., á la terminación de los grupos que tienen á su derecha un 1, un 2, etc.* Así el número

$4^{2}324,610^{1}012,685$

se leerá: *cuatro billones, trescientos veinticuatro mil seiscientos diez millones, doce mil seiscientas ochenta y cinco unidades.*

CAPÍTULO II.

LAS OPERACIONES FUNDAMENTALES.

I. La adicion.

24. *Se da el nombre de operación al acto por el cual se verifica una transformación en un objeto, ó combinación de objetos.*

Las operaciones matemáticas pueden ser de *cálculo, construcción, combinatorias,* etc. Por ahora nos limitaremos á las operaciones del cálculo, que son: *las que tienen por objeto hallar uno ó muchos números, que se llaman resultado, por medio de otros que se llamen datos.*

Dos ó más operaciones combinadas forman una operación compuesta: *cuando una operación indicada se considera como dato para someterle á otra operación ulterior, se encierra la operación indicada en un paréntesis.*

Las operaciones fundamentales del cálculo aritmético, son: *adición, sustracción, multiplicación* y *división.*

La adición y multiplicación son operaciones de composición: la sustracción y división de descomposición.

Una operación es *inversa* de otra cuando tiene por datos el resultado y uno de los datos de la primera, y por resultado el otro dato. Más adelante veremos que la sustracción es inversa de la adición, y la división, en su acepción más general, inversa de la multiplicación.

La adición y sustracción también se dicen operaciones de *primer grado*, y la multiplicación y división de *segundo grado*.

25. *Adición es una operación que tiene por objeto reunir en un solo número las unidades de otros varios.* (*)

Los datos de la adición se llaman *sumandos*, el resultado *suma* y la práctica de la operación *sumar*.

Se indica la operación escribiendo el signo +, que se lee *más*, entre cada dos sumandos y separando los datos del resultado por el signo =.

Así, siendo los sumandos 4, 7 y 3 escribiremos

$$4+7+3=14.$$

26. El procedimiento primitivo de la adición es añadir al primer sumando las unidades del segundo, *contándolas* una á una, como se ha explicado en la numeración; al resultado que se obtenga se añaden las del tercer sumando, contadas del mismo modo, y así sucesivamente hasta el último sumando.

Este procedimiento no es bueno más que cuando los sumandos son de una cifra ó *dígitos* (**) y se llega á hacer de memoria cuando se tiene alguna práctica en la operación: pero para considerar más de dos sumandos, se necesita aprender la *tabla de sumar*, que contiene todas las sumas posibles de dos números dígitos.

Antes de formarla debemos tener presente, que si uno de dos sumandos es *cero*, *la suma es igual al otro sumando*; propiedad que se deduce inmediatamente de la definición de la operación.

Esto supuesto, escribamos en una línea horizontal el ce-

(*) Damos una definición que sólo comprende la adición de números enteros, pero iremos generalizando cada operación á medida que sea necesario, teniendo presente que una operación generalizada contiene la operación particular, pero como puede perder algunas de sus propiedades, se deben revisar estas, para conservar solamente las que correspondan á la operación generalizada.

(**) Se llaman dígitos los números de una cifra porque se pueden contar por los dedos.

ro y los nueve primeros números, debajo correspondiéndose con los de la primera línea, los mismos números aumentados cada uno en una unidad y se tendrá la suma de los números de la primera línea con 1; debajo se escriben los números de la segunda línea aumentados en una unidad, y se formará una tercera línea, que contiene los de la primera aumentados en dos unidades: se sigue del mismo modo hasta formar la décima línea, que contendrá la suma de los números de la primera con 9.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

De lo dicho resulta que cada línea horizontal contiene la suma de los números de la primera línea con el número que la comienza, y cada línea vertical contiene la suma del número que la comienza con los números de la primera vertical.

La suma 5 + 7, por ejemplo, estará en la vertical que comienza por 5 y en la horizontal que comienza por 7, será, por consiguiente, el número 12, común á las dos líneas.

27. Pasemos ya al caso general de la adición, que consiste en sumar números cualesquiera: está fundado en las siguientes propiedades de la adición.

1.ª *Una suma no se altera aunque se altere el orden de los sumandos.* Porque la suma es el conjunto de unidades que contienen los sumandos y no varía este número de unidades con el orden de los sumandos.

2.ª *Dos ó más sumandos se pueden sustituir por su suma efectuada.* Para esto basta suponer que se colocan los primeros (1.ª), y que, por consiguiente, por ellos comienza la suma.

Es claro, que *inversamente se puede suponer cualquier* *sumando descompuesto en dos, ó más partes, que sumadas compongan el sumando.*

28. En virtud de estas propiedades, para sumar números cualesquiera, se les puede suponer descompuestos, cada uno de ellos, en unidades, decenas, centenas, millares, etc. Suponer después alterado el orden de estos nuevos sumandos y sumar unidades con unidades, decenas con decenas, centenas con centenas, etc., y reunir los resultados en un solo número.

Para hacer más fácil la aplicación práctica del principio anterior, seguiremos la siguiente:

REGLA: *Para sumar números cualesquiera, se escriben los sumandos unos debajo de otros, de modo que se correspondan unidades con unidades, decenas con decenas, centenas con centenas, etc., se traza una raya debajo de los sumandos y se suman los números de cada columna comenzando por la derecha; si la suma no llega á diez, se escribe debajo de la raya, correspondiéndose con la columna sumada, y si llega ó pasa de diez, se escribe la cifra de las unidades de la suma y se reservan las decenas para agregarlas á la siguiente columna de la izquierda. El número que así resulte será la suma pedida.*

Sea sumar los números 14675, 8344, 24803, 586, se escribirán en columna del modo siguiente:

14675 Lacolumna de las unidades da por suma parcial
8344 18, escribimos, por consiguiente un 8, que es la cifra
24803 de las unidades y reservamos, una decena para su-
586 mar con las decenas (*).
48408 La columna de las decenas da 19 y 1 de la suma anterior 20; escribiremos el 0 y reservaremos el 2, que expresa centenas para sumarle con las centenas. Del mismo modo, de la suma de las centenas, que es 24, sólo escribimos el 4. De la suma de los millares, que es 18, escribimos

(*) Cuando se sume cada columna conviene, al seguirla con la pluma, nombrar solamente las sumas parciales que se obtengan sin nombrar los sumandos. Así, no diremos 5 y 4 son 9 y 3 son 12 y 6, 18; sino 5, 9, 12, 18. De este modo se hace más rápidamente la operación y hasta se evitan motivos de equivocaciones.

el 8: y por último, escribiremos el 4, que es la suma de las decenas de millar.

La suma buscada será, pués, 48408.

29. Es fácil observar que si no sumásemos las columnas procediendo de derecha á izquierda, no se podría escribir de una sola vez el resultado, sino en el caso de ser todas las sumas parciales inferiores á 10.

La suma de las unidades más elevadas se escribirá completa aunque sea igual ó mayor que 10, porque ya no se tienen que reservar las decenas que resulten para agregarlas á otra suma parcial.

30. *Prueba de una operación es otra operación que tiene por objeto verificar la exactitud del resultado obtenido en la primera.*

Si la prueba y la operación están conformes, tendremos *casi certeza* de que la operación está bien hecha, por ser bastanle difícil cometer los mismos errores en la operación y en la prueba: si no están conformes, habrá equivocación en la prueba ó en la operación y se deben repetir ambas con todo cuidado, para que resulten conformes.

La prueba más sencilla de la adición consiste en repetir la operación sumando de abajo á arriba, si la primera vez se ha sumado de arriba á abajo.

También se puede comprobar la suma dividiendo los sumandos, en grupos, que se suman separadamente, y sumando después las sumas parciales obtenidas.

Este procedimiento se suele emplear como operación y no como prueba, cuando los sumandos son muchos.

31. *Para* sumar sumas *indicadas, se forma una suma indicada con todos los sumandos de las sumas parciales* (*).

Sean las sumas $5 + 7 + 3$ y $4 + 9$.

Si formamos la suma $5 + 7 + 3 + 4 + 9$, compuesta de los sumandos de ambas sumas, podemos sustituir los sumandos $5 + 7 + 3$ y $4 + 9$ por su suma efectuada (núm. 27, 2.ª propiedad), luego podremos escribir

(*) Es evidenle que también se pueden efectuar las sumas parciales y sumarlas después.

$$(5 + 7 + 3) + (4 + 9) = 5 + 7 + 3 + 4 + 9.$$

32. *Si varios sumandos aumentan en números cualesquiera, la suma aumenta en la suma de los aumentos de los sumandos.*

Sea la suma $5 + 7 + 3$ y supongamos que el primer sumando aumente en 4 y el tercero en 9 unidades: se tendrá

$$(5 + 4) + 7 + (3 + 9),$$

que se podrá escribir (núm. 31) sin los paréntesis, y será

$$5 + 4 + 7 + 3 + 9,$$

sustituyendo ahora los sumandos 5, 7 y 3 por su suma y los 4 y 9 por la suya (núm. 27, 2.ª propiedad) se tendrá finalmente

$$(5 + 7 + 3) + (4 + 9),$$

que demuestra la propiedad enunciada, puesto que la suma $5 + 7 + 3$ ha aumentado en $4 + 9$.

En particular; *si sólo aumenta un sumando, la suma aumenta en el mismo número que el sumando.*

33. *Si se suman miembro á miembro varias igualdades, el resultado es una igualdad* (*).

Es evidente que constando del mismo número de unidades los dos miembros de cada igualdad, las dos sumas efectuadas constarán también del mismo número de unidades.

De las igualdades $3 + 9 = 12$ y $4 + 5 = 2 + 7$, obtendremos:

$$3 + 9 + 4 + 5 = 12 + 2 + 7.$$

Como caso particular resulta, *que si á los dos miembros de una igualdad se les aumenta en el mismo número, los resultados forman una igualdad.*

34. *Si se suman miembro á miembro varias desigualdades que se verifican en su mismo sentido* (todas del signo $\searrow$ ó todas del signo $\angle$), *el resultado es una desigualdad que tiene lugar en el mismo sentido que las propuestas.*

Si tenemos $12 \searrow 9$ y $18 \searrow 15$, la suma $12 + 18$ se compone de dos grupos de unidades mayores respectivamente

(*) Sumar miembro á miembro se dice también sumar ordenadamente.

que los de la suma $9 + 15$ de los segundos miembros; luego es evidente que se tendrá:

$$12 + 18 \gtrdot 9 + 15.$$

Si sumamos una desigualdad con una igualdad, el resultado es una desigualdad en el mismo sentido, ó del mismo signo que la propuesta.

Si á los dos miembros de la desigualdad $12 \gtrdot 9$ les agregamos los de la igualdad $7 = 7$, se formarán las sumas $12 + 7$ y $9 + 7$, y como es evidente que la primera tiene más unidades que la segunda, se tendrá:

$$12 + 7 \gtrdot 9 + 7$$

II La sustracción.

35. *La sustracción es una operación que tiene por objeto, dados dos números, averiguar en cuantas unidades el mayor excede al menor.*

El mayor de los números dados se llama *minuendo*, el menor, *sustraendo*; el resultado, *resto* ó *diferencia*, y la práctica de la operación, *restar*.

Se indica la sustracción escribiendo el minuendo, después el signo —, que se lee *menos*, y á continuación el sustraendo, separando los datos del resultado por el signo =.

Así, siendo 7 el minuendo y 4 el sustraendo, escribiremos:

$$7 - 4 = 3.$$

37. De la definición de la sustracción se deduce: *que la suma del sustraendo y del resto es igual al minuendo*, y por consiguiente podemos dar también la siguiente definición: *sustracción es una operación que tiene por objeto, dados la suma y uno de los sumandos, hallar el otro.*

La sustracción es, pues, una operación *inversa* de la adición. No puede la adición tener otra operación inversa que la sustracción, porque el orden de los sumandos no altera la suma.

Sea la suma $12 = 8 + 4$; si el minuendo es 12 y el sustraendo 8, se tendrá $12 - 8 = 4$; pero si cambiamos el orden de los sumandos, $12 = 4 + 8$, de modo que siendo 12 el minuendo, el sustraendo será 4, y se tendrá $12 - 4 = 8$.

El procedimiento elemental primitivo de la sustracción es restar del minuendo las unidades del sustraendo, *descontándolas una á una.*

Este procedimiento es practicable cuando el sustraendo es un número dígito.

Si el sustraendo es dígito y el minuendo le excede en menos de 10 unidades, se puede hallar el resto por medio de la tabla de sumar (núm. 26). Sea, por ejemplo, restar 8 del número 15. Si recorremos descendiendo la línea vertical que comienza por 8 hasta encontrar el número 15, vemos que se halla en la línea horizantal que comienza por 7, luego la suma de los números 7 y 8 es 15; entonces si 15 es el minuendo y 8 el sustraendo, el resto será 7.

Aunque el minuendo sea un número cualquiera, si el sustrayendo es dígito, se adquiere pronto suficiente práctica para hacer mentalmente la sustracción, por lo cual pasaremos á ocuparnos del caso general.

38. La sustracción de dos números cualesquiera se funda en que es una operación inversa de la adición, y en el siguiente principio:

El resto de dos números no varía cuando se aumentan ambos en igual número de unidades.

Sea, por ejemplo: $7 - 4 = 3$, de donde $7 = 4 + 3$.

Si aumentamos los dos miembros de la última igualdad en 5 unidades, se tendrá:

$$7 + 5 = 4 + 3 + 5.$$

que se puede escribir (número 27, 2.ª propiedad)

$$7 + 5 = (4 + 5) + 3;$$

de donde, considerando las sumas $(7 + 5)$ y $(4 + 5)$ como minuendo y sustraendo, se tendrá, en virtud de la definición de sustracción:

$$(7 + 5) - (4 + 5) = 3$$

como se quería demostrar.

Para restar números cualesquiera, supondremos descompuestos el minuendo y el sustraendo en sus diferentes órdenes de unidades y restaremos de las unidades de cada orden del minuendo, las correspondientes del sustraendo.

Está fundado este procedimiento en que siendo el minuendo la suma de sustraendo y resto, cada uno de sus órdenes de unidades debe provenir de la suma de los correspondientes en sustraendo y resto.

Puede ocurrir qne alguna de las cifras del minuendo sea menor que la correspondiente del sustraendo: porque ya vimos (número 28) que cuando la suma parcial de las unidades de algún orden era mayor que 10, sólo se escribía la cifra de las unidades y se reservaba la de las decenas para agregarla á la suma siguiente; luego es claro que de la cifra de las unidades de una suma parcial no se puede restar ninguno de los dos sumandos cuya suma era de dos cifras.

En este caso, para poder efectuar la sustracción parcial correspondiente, se agregan á la cifra del minuendo 10 unidades de su orden, rebajando luego una unidad la cifra del orden siguiente en el minuendo, para que haya compensación.

El principio demostrado arrriba, permite modificar este procedimiento. Cuando una sustracción parcial no es posible, se añaden 10 unidades de su orden á la cifra del minuendo, pero en vez de suponer rebajada en una unidad la cifra siguiente del minuendo, se supone aumentada en dicha unidad la cifra siguiente del sustraendo, y como el minuendo y sustraendo han aumentado en números iguales, el resto no varía.

38 bis. De estos razonamientos se deduce la siguiente:

Regla. *Para restar dos números cualesquiera, se escribe el sustraendo debajo del minuendo, de modo que se correspondan las unidades de todos los órdenes; se traza debajo de ambos una raya, se resta de cada cifra del minuendo la correspondiente del sustraendo, comenzando por la derecha y se escriben los resultados debajo de la raya, de modo que se correspondan con las cifras restadas. Si alguna cifra del sustraendo no se puede restar de la correspon-*

diente del minuendo, se añaden á ésta 10 unidades y en la siguiente sustracción parcial se añade una unidad á la cifra del sustraendo. El número que así se forme es el resto que se busca.

Ejemplo: Restar los números 16427 y 9546, se escribirán del modo siguiente:

$$\begin{array}{r} 16427 \\ \underline{9546} \\ 6881 \end{array}$$

De la cifra 7 del minuendo, se resta la 6, del sustraendo y escribimos debajo la diferencia 1, que será la cifra de las unidades del resto. De la cifra 2, decenas del minuendo, no se puede restar la cifra 4, decenas del sustraendo, añadiendo á aquélla 10, serán 12, y restando 4, quedan 8, escribiremos, pues, un 8, que será la cifra de las decenas del resto.

Para compensar el aumento de 10 decenas que ha recibido el minuendo, aumentaremos el sustraendo en una centena: por consiguiente, la cifra de las centenas en vez de 5 será 6, que no se puede restar de 4, que es la cifra de las centenas del minuendo; entonces se restará de 14, y la diferencia 8, que es la cifra de las centenas del resto la escribiremos en el lugar que le corresponde. Por compensación la cifra 9 de los millares del sustraendo se aumenta en una unidad, y será 10; y restando de 16 millares que quedan en el minuendo la diferencia 6, es la cifra de los millares del resto, y se escribirá en el lugar que le corresponde. Luego el resto total será 6881.

39. La prueba más sencilla de la sustracción consiste en sumar el sustraendo y el resto, y la suma debe ser igual al minuendo.

También se puede comprobar restando del minuendo el resto, y la diferencia debe ser igual al sustraendo.

Debe advertirse que ninguna de estas dos pruebas exige escribir nada nuevo.

40. *Para restar de un número una suma indicada, se resta del número dado el primer sumando, del resto que resulte, el segundo, y así, sucesivamente hasta restar el último.*

Sea el número 48 del cual queremos restar la suma $4 + 5 + 9 = 18$. Es evidente que

$$48 - (4 + 5 + 9) = 48 - 18,$$

también es evidente que al mismo resultado se llegará restando del número 48, de una vez las 18 unidades, ó restándolas sucesivamente por los grupos parciales contenidos en los sumandos 4, 5 y 9 cuya suma es 18. Entonces tendremos:

$$48 - (4 + 5 + 9) = 48 - 4 - 5 - 9$$

41. *Para restar de un número una diferencia indicada, se suma con el número el sustraendo de la diferencia y se resta del resultado el minuendo de dicha diferencia.*

Sea el número 20, del cual queremos restar la diferencia $24 - 13$, siendo 20 el minuendo y $24 - 13$ el sustraendo: como á los dos números les podemos aumentar el mismo número de unidades sin que el resto varíe (núm. 38), aumentando á ambos en 13 unidades, tendremos:

$$20 - (24 - 13) = (20 + 13) - (24 - 13 + 13) = 20 + 13 - 24,$$

como se quería demostrar.

42. *Para hallar el resultado de una operación compuesta de adiciones y sustracciones, reuniremos en una suma todos los sumandos; en otra todos los sustraendos y restaremos de la primera suma la segunda.*

Si queremos efectuar la operación compuesta

$$4 + 9 - 5 + 6 - 3 - 2$$

vemos que el resultado debe formarse reuniendo todas las unidades de los sumandos y descontando después las de los sustraendos: luego tendremos:

$$4 + 9 - 5 + 6 - 3 - 2 = 4 + 9 + 6 - 5 - 3 - 2,$$

pero si restamos la suma $5 + 3 + 2$ de las unidades contenidas en los sustraendos, se obtiene el mismo resultado que si restamos primero 5, después 3 y luego 2, (núm. 40): por consiguiente se tendrá finalmente:

$$4 + 9 - 5 + 6 - 3 - 2 = (4 + 9 + 6) - (5 + 3 + 2).$$

Escolio. De lo dicho en este párrafo y los anteriores se deduce: que si un paréntesis precedido del signo —, ó sea un sustraendo, contiene operaciones indicadas de sumar, ó restar, ó ambas, *se pueden sacar los términos del parén-*

tesis cambiando los signos + en — y los — en +, entendiéndose que si el primer término interior al paréntesis no lleva signo, se debe suponer que tiene el signo +.

Así: $45 - (4 + 7 - 8) = 45 - 4 - 7 + 8$.

Es claro que recíprocamente para introducir dentro de un paréntesis, precedido del signo — varios términos enlazados con los signos + y —, se deben escribir cambiándoles los signos.

43. *Si se restan miembro á miembro dos igualdades, los restos forman una igualdad.*

Sean las dos igualdades $3 + 9 = 12$, y $4 + 5 = 2 + 7$, decimos que

$$(3 + 9) - (4 + 5) = 12 - (2 + 7).$$

Los restos $(3 + 9) - (4 + 5)$ y $12 - (2 + 7)$ son iguales, porque sumados con los sustraendos iguales $(4 + 5)$ y $(2 + 7)$, producen los minuendos $3 + 9$ y 12, que por hipótesis son iguales.

En particular resulta que de los dos miembros de una igualdad se puede restar un *mismo número* y el resultado será una igualdad.

44. *Si de los dos miembros de una desigualdad se resta un mismo número, los restos forman una desigualdad en el mismo sentido, ó del mismo signo que la propuesta.*

Sea la desigualdad $12 \gtrdot 9$: si de los dos miembros restamos el número 7, los restos $12 - 7$ y $9 - 7$, sumados con un mismo número, el 7, dan sumas desiguales, y como uno de los sumandos es común y el otro diferente, la suma mayor tiene que ser la producida por el mayor de los sumandos diferentes, luego se tendrá:

$$12 - 7 \gtrdot 9 - 7$$

45. Se *llama complemento aritmético de un número, lo que le falta para componer la unidad del orden inmediatamente superior á su cifra más elevada.*

Así, el complemento de 7245 es $10000 - 7245 = 2755$.

Para efectuar esta sustraccion se descompone la unidad seguida de ceros del modo siguiente:

$$10000 = 9990 + 10$$

y el número propuesto en decenas y unidades

$$7245 = 7240 + 5$$

y se restará la cifra de las unidades de 10 y las demás de 9.

Si el número termina en ceros, se considera como cifra de las unidades la cifra significativa de orden inferior, y á la derecha del resultado se añaden tantos ceros como tenga el número dado.

Así, para hallar el complemento de 724500, hallaremos el de 7245 y le añadiremos dos ceros, y será 275500.

Para restar dos números se puede sumar el minuendo con el complemento del sustraendo y restar del resultado la unidad del orden inmediato superior á la cifra más elevada del sustraendo.

Sea la diferencia 12489—7245.

El complemento del sustraendo es 10000—7245=2755; y como una diferencia no se altera añadiendo al minuendo y al sustraendo el mismo número, ó números iguales, tendremos:

$$12489 - 7245 = 12489 + 2755 - (7245 + 10000 - 7245),$$

ó sea

$$12489 - 7245 = 12489 + 2755 - 10000$$

como se quería demostrar.

En la teoría de logaritmos encontraremos aplicaciones útiles de los complementos.

46. Escolio I. La suma de cero con cualquier número es el mismo número: por consiguiente, si restamos *cero* de cualquier número, la diferencia es *el mismo número*; y si dos *números son iguales*, su diferencia es *cero*.

Escolio II. Hemos supuesto siempre que el minuendo es mayor que el sustraendo; pero si quisiéramos efectuar una diferencia cuando el sustraendo es mayor que el minuendo, la operación sería aritméticamente imposible. En el Algebra interpretaremos el resultado por medio de las cantidades y números negativos.

III. La multiplicación.

47. *La multiplicación es una operación que tiene por objeto repetir un número, que se llama multiplicando, tantas veces por sumando como unidades tiene otro, que se llama multiplicador.*

El resultado de la multiplicación se llama *producto* y el multiplicando y multiplicador reciben también el nombre de *factores* del producto.

Se indica la multiplicación escribiendo el multiplicando, á continuación el signo $\times$ ó. que se lee *multiplicado por*, y después el multiplicador, separando los datos del resultado por medio del signo $=$.

De la definición de la multiplicación se deduce que se puede efectuar la operación como una suma. Así:

$$12 \times 3 = 12 + 12 + 12,$$

de donde

$$12 \times 3 = 36.$$

De la definición de la multiplicación se deduce: *que el producto es tantas veces mayor que el multiplicando, como unidades tiene el multiplicador.*

En términos más generales podremos definir la operación diciendo: *la multiplicación es una operación que tiene por objeto, dados dos números que se llaman multiplicando y multiplicador, hallar un tercer número, que se llama producto, que esté formado con respecto al multiplicando como el multiplicador está formado con respecto á la unidad* (*).

Si el multiplicador *es la unidad*, el producto es *igual al mutiplicando;* porque sólo entra una vez por sumando. Si el multiplicando *es igual á la unidad*, el producto *es igual al multiplicador*; porque el sumando que se repite tantas veces como unidades tiene el multiplicador es igual á la unidad. Si el multiplicador *es cero*, el producto también *es cero*; porque no se puede tomar el multiplicando ninguna

(*) Más adelante veremos que esta última definición es la única aplicable á los números que no son enteros.

vez por sumando. Si el multiplicando *es cero*, el producto *es cero*; porque el sumando que se repite es cero.

Si el multiplicador tiene muchas unidades, es muy penoso formar el producto por medio de la suma como en el ejemplo anterior, por lo cual, para el estudio de esta operación, consideraremos tres casos:

1.° *Multiplicar dos números dígitos.*

2.° *Multiplicar un número de varias cifras por un dígito.*

3.° *Multiplicar dos números de varias cifras.*

48. Primer caso. *Multiplicación de dos números dígitos.*

El producto de dos números dígitos se halla por la *tabla de multiplicar*, que es un cuadro que contiene todos los productos posibles de dos números dígitos.

Para formar dicha tabla, se escriben en una línea horizontal los nueve primeros números, debajo se escriben las sumas de cada uno de ellos consigo mismo y se tendrán los productos de los nueve primeros números por 2: sumando los números correspondientes en estas dos líneas se formará una tercera línea que contiene los nueve primeros números tres veces, ó sea sus productos por 3: sumando los números correspondientes en la primera y la tercera líneas, se obtiene una cuarta línea que contendrá los números de la primera cuatro veces, y por tanto será su producto por cuatro; continuando del mismo modo, sumando cada línea que se obtenga con la primera hasta formar la novena, resultarán líneas que contendrán sucesivamente los productos de los nueve primeros números por 5, 6, 7, 8 y 9.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

De lo dicho se infiere que cada línea horizontal contiene los productos de los nueve primeros números por el que comienza la línea, siendo este último el multiplicador y cada línea vertical contiene los productos del número que la comienza por los nueve primeros números, siendo aquél el multiplicando.

El producto 5×7, por ejemplo, estará en la línea vertical que comienza por 5 y en la horizontal que comienza por 7, será pues, el número 35, común á las dos líneas.

49. 2.° Caso. *Multiplicación de un número de varias cifras, por un dígito.*

Supongamos que se trate de multiplicar 6527 por 4.

Según la definición de la operación, se debe repetir 6527 cuatro veces por sumando, luego se podrá hacer del modo siguiente:

$$\begin{array}{r} 6527 \\ 6527 \\ 6527 \\ 6527 \\ \hline 26108 \end{array}$$

De aquí se deduce que cada cifra del multiplicando se repite 4 veces, ó multiplica por 4, luego podremos evitar las sumas formando los productos de cada cifra, ó *productos parciales*, por la tabla de multiplicar.

Sabemos también que las decenas de cada suma parcial se agregan á la suma siguiente: en consecuencia, comenzaremos la operación por la derecha del multiplicando, escribiremos solamente la cifra de las unidades de cada producto parcial y reservaremos la de las decenas para agregarla al producto siguiente.

En la práctica se procederá del modo que se indica en la siguiente regla, fundada en los principios anteriores.

Para multiplicar un número de varias cifras por otro de una sola, se escribe el multiplicador correspondiéndose con la cifra de las unidades del multiplicando y debajo de ambos una raya para separarlos del producto: se multiplica cada cifra del multiplicando por el multiplicador, comenzando por la derecha, se escriben las unidades de cada producto parcial debajo de la cifra correspondiente en el multiplicando y se añaden las decenas que resulten al producto siguiente. El número así formado será el producto pedido.

En el ejemplo anterior tendremos:

$$\begin{array}{r} 6527 \\ 4 \\ \hline 26108 \end{array}$$

La cifra 8 del producto, resulta de multiplicar 7 por 4, que son 28, se escribe 8 en el sitio de las unidades y se reservan las 2 decenas. Después 2×4

es 8, y las 2 de antes,10, se escribe el 0 en el lugar de las decenas y se reserva el 1, que expresa centenas para agregarle alproducto siguiente. En seguida $5 \times 4 = 20$, y 1 del producto anterior 21; se escribe el 1 y se reserva el 2. Por último $6 \times 4 = 24$, y 2 del producto anterior 26, que se escribe ocupando el lugar de los millares.

50. TERCER CASO. *Multiplicación de dos números de varias cifras.*

La regla general se obtiene considerando antes el producto de un número cualquiera por la unidad, ú otra cifra significativa seguida de ceros.

1.º *Para multiplicar un número por la unidad seguida de ceros, basta escribir á la derecha del número tantos ceros como siguen á la unidad.*

En efecto: sea multiplicar 6823 por 100. El multiplicando expresa 6823 unidades simples, ó de primer orden; pero si escribimos dos ceros á su derecha se formará el número 682300, que se puede leer 6823 centenas, es decir 6823, unidades 100 veces mayores que las unidades simples, luego el número 682300 será 100 veces mayor que el propuesto.

No está demás advertir que cada una de sus cifras ha conservado su valor absoluto, pero ha adquirido un valor relativo 100 veces mayor.

2.º *Para multiplicar un entero cualquiera por una cifra significativa seguida de ceros, se multiplica el número por la cifra y se agregan á la derecha del producto tantos ceros como siguen á la cifra significativa.*

Sea multiplicar 6823 por 400. Para efectuar la operación se debe tomar 6823, cuatrocientas veces por sumando, y esto se consigue formando 100 grupos de 4 sumandos cada uno: pero un grupo de 4 sumandos es $6823 \times 4 = 27292$, luego debemos repetir 100 veces este último número y el producto será, (1.º) 2729200.

Consideremos ya el caso general, y sea multiplicar 6823 por 435: tendremos que repetir 6823 cuatrocientas treinta y cinco veces por snmando; lo cual equivale á formar tres grupos, uno de 400, otro de 30 y otro de 5 sumandos, ó sea á multiplicar 6823 por 400, por 30 y por 5, y sumar los productos.

La práctica de la operación se funda en los principios anteriores, y se hace por la siguente:

Regla. *Para multiplicar dos números cualesquiera se escribe el multiplicando y después el multiplicador, de modo que se correspondan sus diversos órdenes de unidades, y debajo de ambos se traza una raya para separarlos de los productos; se multiplica todo el multiplicando por cada una de las cifras del multiplicador* (como se dijo en el 2.º caso), *se escribe la primera cifra de la derecha de cada producto parcial debajo del multiplicador correspondiente, se suman los productos parciales que hayan resultado, y la suma será el producto total.*

$$\begin{array}{r} 6823 \\ 435 \\ \hline 34115 \\ 20469 \\ 27292 \\ \hline 2968005 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 6823 \\ 435 \\ \hline 27292 \\ 20469 \\ 34115 \\ \hline 2968005 \end{array}$$

Los productos del multiplicando por las cifras 4 y 3 del multiplicador, que expresan centenas y decenas respectivamente, debían estar seguidos de dos y un cero, pero no hay necesidad de escribirlos, sujetándose á la regla dada arriba, porque las cifras de los productos ocupan los lugares que les corresponden y los ceros no alteran la suma.

En el multiplicando se debe proceder de derecha á izquierda; en el multiplicador se puede proceder también de izquierda á derecha y aun en cualquier orden; pero la costumbre es proceder como en el multiplicando.

51. *El producto de dos factores no varía tomando el multiplicador por multiplicando y al contrario.*

Sea el producto 4×3: sabemos que este producto significa que 4 se ha de repetir 3 veces. Ahora, si descomponemos el 4 en sus unidades y escribimos un cuadro que tenga 3 líneas horizontales de 4 unidades cada una, es evidente que este cuadro contendrá tantas unidades como $4 + 4 + 4$, que es el producto de 4×3.

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

Si en vez de considerar el cuadro por líneas horizontales, sumamos por verticales, como son 4 líneas de 3 unidades cada una, es decir $3+3+3+3$, el resultado será el producto 3×4, luego se tendrá finalmente

$$4 \times 3 = 3 \times 4.$$

52. De aquí se deduce la prueba de la multiplicación, que consiste en repetir la operación tomando el multiplicando por multiplicador y al contrario.

El mismo teorema permite también elegir como multiplicador el número menor, ó el que tenga menos cifras significativas, y justifica la denominación de *factores* que se da al multiplicando y multiplicador reunidos.

53. *Si se multiplican, miembro á miembro, dos igualdades, los productos forman una igualdad.*

Porque siendo los multiplicandos y los multiplicadores iguales, se forman los dos productos por medio de sumandos iguales repetidos las mismas veces.

Como caso particular resulta que los dos miembros de una igualdad se pueden multiplicar por un *mismo número* y los productos serán iguales.

54. *Si se multiplican, miembro á miembro, una desigualdad y una igualdad, los productos forman una desigualdad del mismo signo que la propuesta.*

Sean la desigualdad $12 \gtrdot 9$ y la igualdad $7=7$. En los productos 12×7 y 9×7, entran los sumandos 12 y 9, siete veces cada uno; luego el primer producto será el mayor, porque el sumando 12 es mayor que 9, y se tendrá:

$$12 \times 7 \gtrdot 9 \times 7.$$

Este teorema se puede enunciar diciendo: *Si se multiplican por un mismo número los dos miembros de una desigualdad, los productos forman una desigualdad del mismo signo que la propuesta.*

55. *Si se multiplican, miembro á miembro, dos desigual-*

dades del mismo signo, los productos formarán una desigualdad del mismo signo que las propuestas.

Sean las desigualdades $12 > 9$ y $7 > 5$. Los productos serán 12×7 y 9×5; pero en el producto 12×7 está contenido 12 más de 5 veces, que son las que 9 está contenido en el producto 9×5, luego hay dos motivos para que 12×7 sea mayor que 9×5; uno que el sumando 12 es mayor que 9, y otro que está repetido más veces: entonces se tendrá:

$$12 \times 7 > 9 \times 5$$

56. *El producto de dos números tiene tantas cifras como entre los dos factores, ó una menos.*

Sean los dos números 4372 y 821. Por estar comprendido el 821 entre 100 y 1000, tendremos: (núm. 54)

$$4372 \times 821 < 4372 \times 1000$$
$$4372 \times 821 > 4372 \times 100;$$

pero el producto 4372×1000 se obtiene agregando á 4372 tres ceros, luego tiene tantas cifras como entre los números 4372 y 821, y el producto 4372×100 una cifra menos: luego el de los números propuestos, que es intermedio entre estos dos, tendrá necesariamente tantas cifras como uno de ellos.

57. *Para multiplicar una suma indicada por un número, se multiplican todos los sumandos y se suman los productos* (*)

Sea multiplicar la suma $4 + 5 + 6$ por 3. Multiplicar por 3 es repetir 3 veces por sumando, luego tendremos:

$$(4+5+6)\times 3=(4+5+6)+(4+5+6)+(4+5+6)$$
$$=(4+4+4)+(5+5+5)+(6+6+6)=4\times 3+5\times 3+6\times 3$$

Conviene observar que como el producto no se altera aunque se altere el orden de los factores, también se tendrá:

$$3 \times (4 + 5 + 6) = 3 \times 4 + 3 \times 5 + 3 \times 6$$

58. *Para multiplicar una diferencia indicada por un número, se multiplican el minuendo y el sustraendo y se restan los productos.*

(*) Si tenemos que efectuar una operación compuesta, podemos, si así nos conviene, reducir los datos y operar después de simplificados: ahora, por ejemplo, podríamos efectuar la suma y multiplicar el resultado por el número; pero conviene estudiar las operaciones compuestas, porque aparte de su importancia, tienen aplicaciones ulteriores de que no se puede prescindir.

Sea multiplicar la diferencia $12 - 7$ por 4. Tenemos:

$$12 - 7 = 5 \quad \text{de donde} \quad 12 = 7 + 5,$$

y multiplicando por 4 los dos miembros de la última igualdad

$$12 \times 4 = (7 + 5) 4 \quad (*)$$

pero (núm, 58)

$$(7 + 5) 4 = 7 \times 4 + 5 \times 4,$$

luego también

$$12 \times 4 = 7 \times 4 + 5 \times 4,$$

restando de ambos miembros 7×4 resulta

$$12 \times 4 - 7 \times 4 = 5 \times 4,$$

y poniendo en vez de 5 su igual, la diferencia $12 - 7$, resultará finalmente

$$12 \times 4 - 7 \times 4 = (12 - 7) 4,$$

conviene observar, como en el número anterior, que también se tendrá:

$$4 (12 - 7) = 4 \times 12 - 4 \times 7.$$

59. En virtud de los dos teoremas anteriores, *si varios sumandos, ó un sumando* y *un sustraendo tienen un factor común, se pueden encerrar en un paréntesis, prescindiendo del factor común, que se colocará fuera como multiplicador.* Así:

$$4 \times 3 + 5 \times 3 + 6 \times 3 = (4 + 5 + 6) 3$$

$$12 \times 7 - 9 \times 7 = (12 - 9) 7.$$

60. *Para multiplicar dos sumas indicadas, se multiplican todos los sumandos de la primera por cada uno de los de la segunda y se suman los productos.*

Sean las dos sumas $5 + 4 + 7$ y $2 + 6$. Efectuando la primera tendremos:

$$\begin{aligned}(5 + 4 + 7)(2 + 6) &= 16 (2 + 6)\\ &= 16 \times 2 + 16 \times 6\end{aligned}$$

(*) En lo sucesivo siempre que un factor esté encerrado en un paréntesis, prescendiremos del signo de multiplicar.

poniendo ahora en vez de 16 su igual $5+4+7$ se tendrá:

$$(5+4+7)(2+6)=(5+4+7)2+(5+4+7)6$$

y efectuando las operaciones indicadas en el segundo miembros, resultará finalmente:

$$(5+4+7)(2+6)=5\times2+4\times2+7\times2+5\times6+4\times6+7\times6.$$

Producto de varios factores.

61. Para indicar que un producto de dos números se ha de multiplicar por un tercer factor, lo que resulte por otro y así sucesivamente, se escriben los factores por su orden en una línea horizontal separándolos por medio del signo $\times$ ó .

Así: $12\times3\times5\times6$, ó bien $12.3.5.6$, significa que se debe multiplicar 12 por 3, el producto que resulte por 5 y lo que resulte por 6.

62. *Un producto de varios factores no se altera, aunque se cambie el orden de sus factores.*

Para demostrar este teorema, antepondremos los siguientes lemas.

Lema primero. *Un producto de varios factores no se altera cuando se permutan los dos últimos factores.*

Sea el producto 3. 5. 4. 2, decimos que es igual á 3. 5. 2. 4, que es el producto que resulta cambiando el orden de los dos últimos factores.

Para efectuar un producto se comienza multiplicando los dos primeros factores, luego por ser $15=3.5$, tendremos:

$$3.\ 5.\ 4.\ 2=15.\ 4.\ 2.$$

Pero:

$$15.\ 4=15+15+15+15$$

y multiplicando ambos miembros por 2

$$15\ .\ 4\ .\ 2=15\ .\ 2+15\ .\ 2+15\ .\ 2+15\ .\ 2,$$

el segundo miembro se compone de 15 . 2 repetido 4 veces; luego será 15 . 2 . 4, y como es igual al primer miembro

$$15\ .\ 4\ .\ 2=15\ .\ 2\ .\ 4,$$

ó sustituyendo 15 por su igual 3 . 5,

$$3 . 5 . 4 . 2 = 3 . 5 . 2 . 4.$$

LEMA SEGUNDO. Un *producto de varios factores no se altera cuando se permutan dos factores consecutivos.*

Sea el producto 3 . 5 . 4 . 2 . 8 . 7. Si queremos permutar los factores 4 y 2, prescindiremos de los factores 8 y 7, y tendremos (Lema primero).

$$3 . 5 . 4 . 2 = 3 . 5 . 2 . 4;$$

y multiplicando los dos miembros de esta igualdad, primero por 8 y luego por 7, se tendrá:

$$3 . 5 . 4 . 2 . 8 . 7 = 3 . 5 . 2 . 4 . 8 . 7 \text{ (*)}.$$

De estos dos lemas se deduce fácilmente el teorema general.

Supongamos que en el producto 3 . 5 . 4 . 2 . 8 . 7 se quiere que el 4 ocupe el primer lugar, permutándole sucesivamente con los que le anteceden, formaríamos los productos iguales al propuesto 3 . 4 . 5 . 2 . 8 . 7 y 4 . 3 . 5 . 2 . 8 . 7

Del mismo modo haríamos ocupar el segundo lugar á otro factor, al 7, por ejemplo, y así de los demás.

63. *Para multiplicar un número por un producto de varios factores, se forma un producto que contenga el número y los demás factores del primer producto.*

Sea, multiplicar el núm. 12 por el producto 4 . 7 . 5 .; la operación se indica así: 12 (4 . 7 . 5) .; pero considerando efectuado el producto 4 . 7 . 5 ., se puede cambiar el orden y tendremos:

$$12 (4 . 7 . 5) = (4 . 7 . 5) 12$$

En el segundo miembro es inútil el paréntesis, porque para efectuar la operación, se multiplica 4 por 7, lo que resulta por 5 y el producto obtenido por 12; suprimiendo, pues, el paréntesis, resulta:

$$12 (4 . 7 . 5) = 4 . 7 . 5 . 12 = 12 . 4 . 7 . 5.$$

64. *En un producto indicado se pueden sustituir dos ó más factores, por su producto efectuado.*

(*) Si los factores que se quiere permutar son los dos primeros, también es cierto el teorema, puesto que 3 . 5 = 5 . 3, y no tendríamos más que multiplicar ambos miembros sucesivamente por 5 , 2 , 3 y 7.

Sea el producto $4 \,.\, 7 \,.\, 5 \,.\, 12$. Si queremos sustituir los factores 4 y 12 por su producto efectuado, los colocaremos los primeros, y se tendrá:

$$4 \,.\, 7 \,.\, 5 \,.\, 12 = 4 \,.\, 12 \,.\, 7 \,.\, 5,$$

ó bien efectuando la multiplicación de 4 por 12

$$4 \,.\, 7 \,.\, 5 \,.\, 12 = 48 \,.\, 7 \,.\, 5.$$

Si se quiere, el último producto se puede dejar así: $(4 \,.\, 12)\, 7 \,.\, 5$.

65. *Para multiplicar un producto por un número, se multiplica uno cualquiera de los factores.*

En efecto; sea multiplicar el producto $4 \,.\, 7 \,.\, 12$ por el número 12, tendremos:

$$(4 \,.\, 7 \,.\, 5)\, 12 = 4 \,.\, 7 \,.\, 5 \,.\, 12;$$

pero los factores 7 y 12, por ejemplo, se pueden sustituir por su producto efectuado (núm. 64); luego

$$4 \,.\, 7 \,.\, 5 \,.\, 12 = 4\, (7 \,.\, 12)\, 5;$$

ó bien

$$(4 \,.\, 7 \,.\, 5)\, 12 = 4\, (7 \,.\, 12)\, 5.$$

66. *Para multiplicar dos productos de varios factores, se forma un solo producto que contenga todos los factores.*

Sea multiplicar el producto $4 \,.\, 5 \,.\, 9$ por $7 \,.\, 8$. Efectuando el primer producto se tendrá:

$$(4 \,.\, 5 \,.\, 9)\, (7 \,.\, 8) = 180\, (7 \,.\, 8) = 180 \,.\, 7 \,.\, 8 \text{ (núm. 63)},$$

y poniendo en vez de 180 su igual $4 \,.\, 5 \,.\, 9$, se tendrá finalmente

$$(4 \,.\, 5 \,.\, 9)\, (7 \,.\, 8) = (4 \,.\, 5 \,.\, 9)\, 7 \,.\, 8 = 4 \,.\, 5 \,.\, 9 \,.\, 7 \,.\, 8.$$

67. De los teoremas anteriores se deduce que un producto de varios factores se puede efectuar de muchos modos, que hasta servirán de comprobación unos á otros.

Así: $4 \,.\, 5 \,.\, 9 \,.\, 7 = 20 \,.\, 9 \,.\, 7 = 20 \,.\, 63 = 1260$

$4 \,.\, 5 \,.\, 9 \,.\, 7 = 45 \,.\, 4 \,.\, 7 = 180 \,.\, 7 = 1260$, etc.

De estos modos se elige el que la práctica sugiera como más breve.

68. Los teoremas anteriores permiten simplicar la operación de multiplicar cuando uno ó los dos factores terminan en ceros.

Sea, por ejemplo, multiplicar 127000 por 6400, por ser $127000 = 127 \times 1000$ y $6400 = 64 \times 100$, se tendrá:

$$127000 \times 6400 = 127 \times 1000 \times 64 \times 100$$

ó bien (núm. 64) $127000 \times 6400 = 127 \times 64 \times 100000$

La última forma permite efectuar el producto de los números propuestos *multiplicando los números que resultan prescindiendo de los ceros y agregando á la derecha del producto tantos ceros como tienen entre los dos factores.*

Así:

$$\begin{array}{r} 127000 \\ 6400 \\ \hline 508 \\ 762 \\ \hline 812800000 \end{array}$$

Si sólo uno de los factores termina en ceros, se *multiplican los números, prescindiendo de los ceros, y se agregan éstos á la derecha del producto.*

69. En virtud de los teoremas sobre productos de varios factores, es evidente: *que el producto que resulta de multiplicar miembro á miembro tres ó más igualdades es una igualdad, y el producto de tres ó más desigualdades del mismo signo, ó con alguna igualdad, es una desigualdad del mismo signo que las propuestas:* quedando así generalizados los teoremas de los números 53, 54 y 55.

IV. Las potencias.

70. *Se llama potencia de un número el producto que resulta de varios factores iguales á dicho número.*

Grado de la potencia es el número ordinal que indica cuantos factores la producen. Se clasifican por grados: en *segunda potencia*, ó *cuadrado*, cuando los factores son dos;

tercera potencia, ó *cubo*, cuando son tres; *cuarta potencia*, cuando son cuatro, y así sucesivamente.

Todo número se considera como su *primera potencia*.

La operación de formar potencias recibe el nombre de *elevación á potencias*, y el número que se eleva recibe diversos nombres; *base, raíz, dignando*. El último nombre es el menos usado, á pesar de ser el más apropiado, porque no tiene otra aplicación en las Matemáticas.

Una potencia se indica escribiendo á la derecha y á la parte superior del dignando, ó base, otro número de menor tamaño, que expresa las unidades de su grado, y se llama exponente.

Así, la cuarta potencia de 5 se indica 5^4 y se lee 5 elevado á la cuarta potencia.

El exponente de la primera potencia es la unidad y no se escribe.

71. De la definición de potencia se deduce:

1.° *Que las potencias de la unidad son la unidad.*

2.° *Que las potencias de 10 son la unidad seguida de tantos ceros como unidades tiene el exponente.*

Así: $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, $10^4 = 10000$.......

72. *Si se elevan á una misma potencia los dos miembros de una igualdad el resultado es otra igualdad.*

Es un caso particular del teorema número 69 sobre el producto de igualdades.

73. *Si se elevan á una misma potencia los miembros de una desigualdad, el resultado es otra desigualdad del mismo signo que la primera.*

Es un caso particular del producto de desigualdades del mismo signo (número 69.)

74. *El producto de dos potencias de un mismo número es otra potencia de dicho número, cuyo exponente es la suma de los exponentes.*

Sea multiplicar 5^4 por 5^3. En 5^4 entra el factor 5 cuatro veces, y en 5^3 entra tres veces; luego en el producto $5^4 \times 5^3$ entrará 4 veces más 3 veces, y se tendrá

$$5^4 \times 5^3 = 5^{4+3}$$

75. *Para elevar una potencia á otra potencia, se multiplican los exponentes, dejando la misma base ó dignando.*

Sea elevar al cubo 5^4. El factor 5^4 se debe repetir 3 veces, luego se tendrá:

$$(5^4)^3 = 5^4 \times 5^4 \times 5^4 = 5^{4+4+4}$$

ó bien por ser $4 + 4 + 4 = 4 . 3$

$$(5^4)^3 = 5^{4 . 3}$$

76. *Para elevar un producto á una potencia, se elevan todos sus factores á dicha potencia.*

Sea elevar al cubo el producto $5 \times 2 \times 7$, se tendrá:

$$(5 . 2 . 7)^3 = (5 . 2 . 7)(5 . 2 . 7)(5 . 2 . 7)$$

pero en virtud de los teoremas números 62 y siguientes, el segundo miembro es igual á

$$5 . 5 . 5 . 2 . 2 . 2 . 7 . 7 . 7, \text{ ó sea á } 5^3 . 2^3 . 7^3$$

luego se tendrá:

$$(5 . 2 . 7)^3 = 5^3 . 2^3 . 7^3$$

Si los factores estuvieran elevados á alguna potencia, el teorema se verificaría lo mismo. Así:

$$(5^2 . 2 . 7^4)^3 = (5^2)^3\, 2^3\, (7^4)^3$$

y como el segundo miembro es igual á $5^{2 . 3}\, 2^3 . 7^{4 . 3}$ (númemero 75), también se tiene

$$(5^2 . 2 . 7^4) = 5^{2 . 3} . 2^3 . 7^{4 . 3}$$

V. *La división.*

77. *La división es una operación que tiene por objeto hallar cuantas veces, un número dado, que se llama dividendo, contiene á otro número, también dado, que se llama divisor.*

El número de veces que el dividendo contiene al divisor se llama *cociente* Al dividendo y divisor se los suele llamar también *términos de la división.*

La división se indica con el signo :, que se lee *dividido por*, colocado entre el dividendo y divisor.

Si el dividendo es 12 y el divisor 4, escribiremos 12 : 4.

Se indica también la división escribiendo el divisor debajo del dividendo y separándolos por una raya horizontal. Así: $\frac{12}{4}$.

78. De la definición de la división, se deduce que se puede efectuar por sustracciones sucesivas.

Sea dividir 22 por 4.

$$\begin{array}{r} 22 \\ \underline{4} \\ 18 \\ \underline{4} \\ 14 \\ \underline{4} \\ 10 \\ \underline{4} \\ 6 \\ \underline{4} \\ 2 \end{array}$$

Restando 4 de 22 quedan 18: restando 4 de 14 quedan 10: restando 4 de 10 quedan 6; y por último, restando 4 de 6 quedan 2. Como este último resto es menor que 4, no se pueden efectuar más sustracciones.

Hemos hecho 5 sustracciones; entonces el dividendo 22 contiene al divisor 4 cinco veces; luego el cociente es 5. El último resto recibe el nombre de *resto* ó *residuo* de la división.

Como al residuo se llega cuando ya no se puede restar el divisor, deducimos que el carácter del *resto* ó *residuo* es ser menor que el divisor.

El anterior análisis demuestra que si se toma 5 veces por sumando el divisor 4, ó lo que es lo mismo, si se multiplica 4 por 5 y al producto se agrega el residuo 2, el resultado será igual al dividendo 22.

De suerte: *que el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente más el residuo.*

No se necesita modificar este enunciado cuando el residuo sea cero (como hubiera sucedido, por ejemplo, si el dividendo en vez de 22 hubiese sido 20); pero entonces como el sumando cero no altera suma, se verifica en este caso: *que el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente.*

Cuando el residuo es cero, la división se dice *exacta;* cuando no es cero, inexacta.

La división exacta se puede definir diciendo: *que es una* *operación que tiene por ob eto, dados un producto y uno de los factores, hallar el otro* (*).

Un número se dice *divisible* por otro cuando el cociente de su división es exacta; como el dividendo resulta entonces de multiplicar el divisor por el cociente, se llama también *múltiplo*. El número que divide á otro exactamente se dice, respecto á este otro, *divisor*, *submúltiplo*, *factor* y *parte alicuota*.

Los múltiplos que resultan de multiplicar por 2, 3, 4, etc., se llaman *duplo*, *triplo*, *cuádruplo*, etc.

Cuando los divisores son 2, 3, 4, etc., los cocientes se llaman *mitad*, *tercio*, *cuarto*, etc.

79. Al efectuar la división por sustracciones vemos que si es exacta, *el divisor hace el papel de multiplicando y el cociente de multiplicador*. Pero se pueden invertir los papeles de uno y otro; porque la división exacta se puede definir diciendo: *que tiene por objeto dividir un número en tantas partes iguales como unidades tiene otro*: cada una de estas partes es igual al *cociente*; luego éste hace el papel de *multiplicando*.

La división exacta (**) es una operación inversa de la multiplicación, puesto que se halla un factor cuando se conocen el producto y el otro factor.

La observación que acabamos de hacer sobre el cambio de papeles de divisor y cociente, nos hace presumir que la multiplicación no tiene más que *una operación inversa*; pero el teorema que dice que el producto no se altera cuando se toma el multiplicando por multiplicador y éste por multiplicando lo demuestra.

Si de la operación directa

$4 \times 8 = 32$ se deduce la inversa $32 : 4 = 8$,

como se tiene

$4 \times 8 = 8 \times 4 = 32$ también se tendrá: $32 : 8 = 4$.

(*) Más adelante veremos que esta definición es aplicable á todos los casos de la división, aunque no se trate de números enteros. No la hemos tomado como punto de partida, porque en este capitulo no podemos ocuparnos del cociente completo de la división, que en general es fraccionario, y el cociente entero por el divisor en la división inexacta es menor que el dividendo.

(**) Refiriéndose al cociente completo, la división siempre es una operación inversa de la multiplicación.

80. De la definición de la división se deduce:

1.° *Si el divisor es igual á la unidad, el cociente es igual al dividendo.*

2.° *Si el divisor es igual al dividendo, el cociente es igual á la unidad.*

3.° *Si el dividendo es cero, el cociente también es cero* (*).

Supondremos en todo este artículo que el dividendo es igual, ó mayor que el divisor, pues en el caso contrario no le contendría, una vez cuando menos.

81. Cuando el dividendo contiene al divisor muchas veces, la división no se efectúa por sustracciones del modo indicado en el núm. 78: para evitar aquel procedimiento, que sería muy largo, estudiaremos en la operación los casos siguientes.

1.° *Que el divisor y el cociente tengan una sola cifra.*

2.° *Que el divisor tenga varias cifras y el cociente una sola.*

3.° *Que el divisor y el cociente tengan varias cifras.*

82. PRIMER CASO. *Que el divisor y el cociente tengan una sola cifra.*

En este caso el divisor multiplicado por 10, ó sea seguido de un cero, debe ser mayor que el dividendo; luego este número tiene que ser inferior á 90, que es el producto del mayor número de una cifra por 10.

Sea dividir 48 por 6. El cociente es menor que 10, porque $6 \times 10 = 60$. Ahora bien; si en la tabla de multiplicar (núm. 48) recorremos, descendiendo, la línea vertical, que comienza por 7, encontraremos en la octava línea horizontal el número 48, que por la formación de la tabla sabemos que es el producto 6×8, luego el cociente de la división será 8.

Si tenemos que dividir 53 por 6; descendiendo en la vertical que comienza por 6, vemos que 53 está comprendido entre 48 y 54, que son los productos de 6 por 8 y por 9; lue-

(*) En el Algebra estudiaremos los casos en que el divisor, ó el dividendo y el divisor á un tiempo, son iguales á cero.

go la división es inexacta, el cociente es 8 y el resto es 5, porque este número es la diferencia entre 53 y 48.

Esta operación se llega á efectuar mentalmente al cabo de cierta práctica.

83. SEGUNDO CASO. *Que el divisor tenga varias cifras y el cociente una sola.*

Para que el cociente tenga una sola cifra, se necesita que añadiendo un cero al divisor el resultado sea mayor que el dividendo.

Sea, dividir 2537 por 692. El número 6920, producto del divisor por 10, es mayor que el dividendo 2537; luego el cociente será menor que 10, y por consiguiente no tendrá más que una cifra.

El dividendo es igual ó mayor que el producto del divisor por el cociente, luego también será igual ó mayor que el producto de la cifra de orden más elevado en el divisor, por el cociente: entonces si dividimos 2537, que es el dividendo, por 600, que es la cifra de orden más elevado en el divisor, el cociente que se obtenga será *igual* ó *mayor* que el verdadero.

El producto de 600 por una cifra de unidades termina en dos ceros, ó es un número exacto de centenas, luego debe estar contenido en las centenas del dividendo, y por tanto para hallar la cifra del cociente bastará dividir 2500 por 600, ó sea 25 centenas por 6 centenas: esta división da el mismo cociente que 25 unidades por 6 unidades; porque es evidente que 25 centenas contienen á 6 centenas las mismas veces que 25 unidades á 6 unidades. Ahora, por lo dicho en el caso anterior, sabemos hallar el cociente de 25 entre 6, que es 4: como este cociente puede ser mayor que el verdadero; para comprobarle, se multiplica el divisor 692 por 4 y resulta el producto 2768, que no se puede restar del dividendo, que es 2537; entonces la cifra 4 es grande.

Rebajando una unidad, el cociente será 3; el producto de 692 por 3 es 2076, que ya es menor que el dividendo 2537, luego la cifra 3 es buena. El residuo de esta división es 461 y se halla restando 2076 de 2537.

De lo expuesto se deduce la siguiente:

Regla. *Para dividir dos numeros de varias cifras, cuando el cociente tiene una sola cifra, se dividen, por la cifra de orden más elevado en el divisor, las unidades de igual orden en el dividendo* (la primera ó las dos primeras cifras de la izquierda) *y se obtiene un cociente igual ó mayor que el verdadero. Se multiplica el cociente obtenido por el divisor, y si el producto se puede restar del dividendo, se hace la sustracción, y el resto será el residuo de la división: si el producto del divisor por la cifra del cociente es mayor que el dividendo, se rebaja el cociente una unidad; si todavía fuese mayor dicho producto, se rebaja nuevamente otra unidad, y así se continúa rebajando hasta que el producto del divisor por el cociente sea menor que el dividendo y la sustracción se pueda efectuar.*

Se acostumbra á escribir los datos y el resultado de la operación del modo siguiente:

2537	692
2076	3
461	

84. Ordinariamente se efectúan la multiplicación y la sustracción al mismo tiempo: para esto se agrega á cada cifra del dividendo tantas veces 10 como se necesite para poder efectuar la sustracción del producto parcial correspondiente, y al obtener el producto parcial siguiente se le añaden, para que haya compensación, otras tantas unidades.

En el ejemplo anterior tendremos:

2537	692
461	3

Diremos 3 por 2 es 6 á 7 va 1, que escribimos; 3 por 9 es 27, que no se puede restar de 3, añadiremos á esta cifra 30, para que de la suma que es 33, se pueda restar 27, y diremos de 27 á 33 van 6, escribimos el 6, y para compensar el aumento de 30 decenas que ha recibido el dividendo, que es un minuendo, tendremos que añadir 3 centenas al producto parcial siguiente, que expresa centenas, y diremos 3 por 6 es 18 y 3 son 21, á 25 van 4, y escribiendo esta cifra, el residuo que queda es 461.

85. La cifra del cociente no se debe escribir sin tener seguridad de que es buena, y por tanto se deben efectuar los productos y sustracciones parciales mentalmente, pero teniendo presente que la última sustracción se ha de poder hacer sin añadir nada al dividendo.

Por evitar la operación mental completa se suele comenzarla por la izquierda.

En nuestro ejemplo podremos decir: 25 entre 6 á 4; 4 por 6 son 24 á 25 va 1, con el 3 siguiente 13; 4 por 9 son 36, que no se puede restar de 13, luego la cifra 4 es grande. Rebajándola una unidad, diremos: 25 entre 6 á 3; 3 por 6 son 18 á 25 van 7, que son centenas, ó 70 decenas, y como el producto parcial siguiente no puede llegar á 30 decenas (por ser 3 la cifra del cociente), la cifra 3 no puede ser grande. La cifra 4 era grande y 3 no lo es, luego esta cifra es buena.

Esta operación mental se llama *tanteo*; se puede suspender y dar por buena la cifra del cociente (si la inmediata superior es grande) cuando en una sustracción parcial se obtenga un resto igual ó mayor que la cifra tanteada (*).

86. TERCER CASO. *Que el divisor y el cociente tengan varias cifras.*

Se sabe que el cociente tiene varias cifras, cuando el dividendo es igual ó mayor que el divisor seguido de un cero, porque entonces el cociente será igual ó mayer que 10, y por consiguiente tendrá dos cifras, cuando menos.

Sea, el dividendo 224617 y el divisor 583. Se ve inmediatamente que el dividendo es mayor que 5830, luego el cociente es mayor que 10, y por consiguiente tendrá varias cifras.

Si añadimos ahora á la derecha del divisor dos y tres ceros sucesivamente, tendremos:

$$224617 > 58300 \quad \text{y} \quad 224617 < 583000$$

(*) Si la cifra tanteada es un 3 por ejemplo y se llega al resto 3, colocándonos en el caso más desfavorable, que es que todas las cifras siguientes en el dividendo sean ceros y en el divisor nueves, el producto $9 \times 3 = 27$, se podrá restar de 30 y volverá á dejar el resto 3, luego la cifra 3 no puede ser grande.

lo que patentiza que el cociente es mayor que 100 y menor que 1000, tendrá, pues, tres cifras, que serán *centenas, decenas* y *unidades*.

La primera de las dos desigualdades anteriores nos hace ver que el dividendo es mayor que 583 centenas: para que se verifique, se necesita y basta que las 2246 centenas del dividendo formen un número igual ó mayor que 583 centenas; porque si fuese menor, para igualar á 583 centenas, habría que añadirle cuando menos una centena y basta aumentarle en 17 unidades, para que forme un número mayor que 583 centenas, ó 58300 unidades.

La segunda de las dos desigualdades indica que el dividendo es menor que 5830 centenas, y se verifica, con más motivo, si prescindimos de las 17 unidades del dividendo y se tendrá $224600 \angle 583000$.

De estas consideraciones se deduce: *que si separamos de la izquierda del dividendo un número de cifras suficiente para contener al divisor, pero sin llegar á contenerlo diez veces, el orden marcado por la cifra de la derecha en la parte separada del dividendo es el mismo que el de la cifra de orden superior en el cociente.*

87. *Si separamos de la izquierda del dividendo tantas cifras como se necesiten para contener al divisor, pero sin llegar á contenerlo diez veces, el cociente del número así formado por el divisor, es la cifra de orden superior del cociente.*

Sea, el dividendo 224617 y el divisor 583. Separemos de la izquierda del dividendo el número 2246 que contiene al divisor, pero menos de 10 veces; como la cifra de la derecha expresa centenas, la cifra de orden superior del cociente, también expresa centenas (núm. 86). Si dividimos 2246 por 583 (por la regla del núm. 83), se halla el cociente 3, y vamos á demostrar que esta cifra es la de las centenas del cociente pedido.

El producto de 583 por 3 se puede restar de 2246, luego del mismo modo se podrá restar el producto de 583 unidades por 3 centenas de 2246 centenas, y con más motivo de 2246 centenas más 17 unidades, ó sea de todo el dividendo; luego el cociente es, cuando menos, igual á 300.

El producto de 583 por 4 es mayor que 2246, y del mismo modo 583 por 4 centenas es mayor que 2246 centenas; luego dicho producto excede á este número, cuando menos en una centena; entonces es también mayor que 2246 centenas más 17 unidades, que es todo el dividendo; luego el cociente no llega á 400.

De lo cual resulta que estando comprendido el cociente entre 300 y 400, su cifra de las centenas es necesariamente un tres. Conforme con el enunciado.

88. Pasemos ya á efectuar la división de 224617 por 583. Dispongamos la operación como en el segundo caso (número 83).

224617	583
1749	385
49717	
4664	
3077	
2915	
162	

Si separamos de la izquierda del dividendo el número 2246 y le dividimos por 583, hallamos el cociente 3, que será la cifra de las centenas del cociente (núm. 87).

Multipliquemos ahora 583 por 3 centenas y el producto expresará centenas; luego restando este número de las centenas del dividendo, la diferencia, que es 497, también expresará centenas, y si le añadimos las 17 unidades del dividendo, el número 49717 es el exceso del dividendo sobre el producto del divisor por 300.

El dividendo, según esto, se compone de 300 veces el divisor más 49717; de suerte que para concluir de determinar el cociente necesitamos hallar cuantas veces 49717 contiene á 583, ó sea dividir 49717 por 583.

Aplicando los razonamientos anteriores, se deduce que para dividir estos números se debe separar de la izquierda del dividiendo el número 4971, y como expresa decenas, si le dividimos por 583, el cociente 8 será la cifra de las decenas; multplicándola por el divisor y restando el producto 4664 decenas de 4971, el resto será 307 decenas.

Añadiendo á este número las 7 unidades del dividendo, se obtienen 3077 unidades, que serán el exceso de 49717 sobre 80 veces el divisor; el problema queda ya reducido á hallar el cociente de 3077 por 583.

Hecha la división, resulta que el cociente, 5, es la cifra de las unidades; multiplicandola por el divisor y restando el producto de 3077, queda un resto de 162 unidades.

Resumiendo lo que hemos dicho, resulta que el dividendo contiene al divisor 300 más 80 más 5 veces, ó sea 385 veces y además un exceso de 162 unidades; luego el cociente será 385 y el resto 162.

Los números 2246, 4971 y 3077 que han sido los dividendos para determinar cada una de las cifras del cociente, se llaman *dividendos parciales*; cada una de las operaciones de dividir, *división parcial*, y los números 497, 307 y 162 son los restos de las divisiones parciales; el último también se llama *residuo.*

224617	583
4971	
3077	
162	

La multiplicación y sustracción que se efectúan en cada división parcial pueden hacerse al mismo tiempo, según se indicó (núm. 84).

A la derecha de cada resto hemos escrito antes todas las cifras no consideradas aún en el dividendo, pero no hace falta escribir más que la siguiente por ser la que con el resto forma el dividendo parcial.

De estas consideraciones deducimos la siguiente:

Regla. *Para dividir dos números, cuando el cociente tiene varias cifras, se separan de la izquierda del dividendo las cifras que se necesiten para contener al divisor sin llegar á contenerlo diez veces* (tantas cifras como tiene el divisor, ó una más si consideradas como unidades simples forman un número menor que el divisor), *el número formado será el primer dividendo parcial, se divide por el divisor y se tendrá la cifra más elevada del cociente; se multiplica esta cifra por el divisor y el producto se resta del dividendo parcial; á la derecha del resto se escribe la cifra siguiente en el dividendo y se obtendrá el segundo dividendo parcial; se divide por el divisor y se tendrá la segunda cifra del cociente, que se escribe á la derecha de la primera;*

se multiplica esta cifra por el divisor y el producto se resta del segundo dividendo parcial; con el segundo resto se procede como con el primero, continuando la operación hasta obtener la última cifra del cociente y el último resto, que en el caso de ser la división exacta, es cero.

El divisor excede á cada resto cuando menos en una unidad, luego añadiendo una cifra á la derecha de cada resto, resulta un dividendo parcial que necesariamente es menor que 10 veces el divisor; pero puede suceder que sea también menor que una vez el divisor, y entonces se escribe *cero* en el cociente y se forma el siguiente dividendo parcial, añadiendo al precedente la cifra que sigue en el dividendo.

89. Si el divisor no tiene más que una cifra, se abrevia la división haciendo las operaciones mentalmente sin escribir los restos y dividendos parciales, pero colocando las cifras del cociente en los lugares que les correpondan.

Sea dividir 43169 entre 8. Dispondremos la operación del modo siguiente:

43169	8
1	5396

Diremos: 43 entre 8 á 5 y sobran 3; 31 entre 8 á 3 y sobran 7; 76 entre 8 á 9 y sobran 4; 49 entre 8 á 6 y sobra 1.

90. La *prueba* de la división consiste en multiplicar el cociente por el divisor y sumar el residuo con el producto y el resultado debe ser igual al dividendo (núm. 78.)

Si el residuo es cero, el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, luego cuando la división es exacta, también se puede comprobar tomando el cociente por divisor y debe resultar para cociente el divisor primitivo.

91. El número de cifras del cociente es igual al de dividendos parciales; el primer dividendo parcial se forma tomando de la izquierda del dividendo tantas cifras como se necesiten para contener al divisor, pero menos de 10 veces, y cada uno de los demás dividendos, añadiendo á cada resto una de las cifras que quedaron á la derecha del primer dividendo parcial; luego el número de cifras del co-

ciente es *una más* que las que quedan á la derecha del primer dividendo parcial.

Ahora; si el primer dividendo parcial tiene tantas cifras como el divisor, á su derecha quedan tantas cifras como indique la diferencia entre los números de cifras del dividendo y divisor: en este caso el cociente tiene una cifra más que dicha diferencia.

Si el primer dividendo parcial tiene una cifra más que el divisor, el número de cifras que quedan á su derecha es igual á la diferencia antes citada menos una, y como el cociente tiene una cifra más, tendrá tantas como dicha diferencia.

Resumiendo lo dicho: *El número de cifras del cociente es igual á la diferencia de los números de cifras del dividendo y divisor, ó una más.*

92. *La división se puede abreviar, cuando el dividendo y el divisor terminan en ceros, suprimiendo de la derecha de ambos el mismo número de ceros y dividiendo los números que quedan; pero añadiendo al residuo tantos ceros como se han suprimido de la derecha del dividendo y del divisor.*

Sea, dividir 24700 por 1600. Los números que nos proponemos dividir son iguales á 247 centenas y 16 centenas; pero es evidente que las mismas veces contiene 247 centenas á 16 centenas, que 247 unidades á 16 unidades, y como en este último caso el cociente es 15 unidades, también lo será en el primero.

En la primera división el producto del cociente 15 unidades por el divisor 16 centenas, expresa centenas; luego el resto, 7, expresará también centenas, ó será 700; es decir, que el resto es el mismo que resulta de dividir los números 247 y 16, pero seguido de los dos ceros que se habían suprimido.

93. También se puede abreviar la división *aunque sólo termine en ceros el divisor: en este caso se separan los ceros del divisor y de la derecha del dividendo otras tantas cifras; se dividen los números que quedan á la izquierda, y á la de-*

recha del residuo se agregan las cifras separadas á la derecha en el dividendo.

Sea, dividir los números 24785 y 1600. Si se tratara, como en el ejemplo anterior, de dividir 24700 por 1600, el cociente sería 15 y el resto 700; pero el número 24785 excede á 24700 en menos de 100 unidades, ó sea de una centena, luego no llega á contener al divisor 1600, ó sea 16 centenas, una vez más que 24700, entonces el cociente es el mismo que si el dividendo terminase en dos ceros; pero el residuo en vez de ser 700, tendrá evidentemente 85 unidades más, y por consiguiente será 785. Conforme con el enunciado.

94. Un caso particular que ocurre muy á menudo, es la división de un número por la unidad seguida de ceros.

Si separamos de la derecha del dividendo tantas cifras como ceros siguen á la unidad, el número que queda á la izquierda *será el cociente;* porque entonces el divisor es 1: el resto será el número formado *por las cifras separadas.* Luego si el dividendo *termina en tantos ceros como siguen á la unidad, la división será exacta.*

Ejemplos: El cociente de 28671 por 100 es 286, y el resto 71.

El cociente de 28600 por 100 es 286, y el resto cero.

95. En algunas aplicaciones de la división conviene considerar el cociente aumentado en una unidad, á lo cual se llama *forzar la unidad,* y al cociente aumentando se le llama *cociente por exceso.* Cuando se habla de este cociente y del ordinario, este último recibe el nombre de *cociente por defecto.*

El producto del divisor por el cociente por exceso, es mayor que el dividendo; la diferencia entre dicho producto y el dividendo, tomando éste por sustraendo, recibe el nombre de *resto por exceso,* ó *resto sustractivo;* el resto ordinario se llama entonces *resto por defecto,* ó *aditivo.*

Si representamos por D el dividendo, por d el divisor, por c el cociente por defecto y por r el resto aditivo, el cociente por exceso será $c + 1$, y si designamos por r' el resto sustractivo, se tendrá según las condiciones establecidas (*)

$$D = d \cdot c + r \qquad \text{y} \qquad D = d(c + 1) - r'$$

96. TEOREMA. *La suma de los restos aditivo y sustractivo es igual al divisor.*

Adoptando la notación del número anterior, tenemos

$$D = d \cdot c + r \qquad \text{y} \qquad D = d(c + 1) - r'$$

Puesto que estas igualdades tienen el mismo primer miembro, los segundos miembros serán iguales, y tendremos:

$$d \cdot c + r = d(c + 1) - r'$$

y efectuando la multiplicación indicada en el segundo miembro

$$d \cdot c + r = d \cdot c + d - r'$$

restando de ambos miembros $d \cdot c$ y sumando r', resultará:

$$r + r' = d$$

igualdad que demuestra el teorema.

97. *Si se dividen miembro á miembro dos igualdades, los cocientes y restos serán iguales.* (**)

Es, una consecuencia inmediata de la definición de la división.

98. *Si los dos miembros de una desigualdad se dividen por números iguales, al mayor dividendo corresponde en general mayor cociente, y si los cocientes son iguales, mayor resto.*

Es evidente, por la difinición de la división, que cuando se trata de un mismo divisor, ó divisores iguales, el mayor dividendo contiene, en general, más veces al divisor; pero si esto no sucediese, decimos que, cuando menos, el resto correspondiente al mayor dividendo será mayor.

(*) Representaremos los números por letras siempre que sea necesario para la mayor claridad en las demostraciones, pero no abusaremos de esta notación en la Aritmética.

(**) Cuando podamos referirnos á la definición general de la división, esta proposición es: Si se dividen miembro á miembro dos igualdades, los cocientes son iguales. La misma observación se puede hacer sobre el teorema siguiente, del texto.

En efecto: siendo el dividendo igual al producto del divisor por el cociente más el resto, si los factores del producto son iguales, la mayor suma corresponderá al mayor de los dos sumandos desiguales; es decir, el mayor dividendo al mayor de los restos.

Teoremas relativos á la división

99. *Para dividir un producto por uno de sus factores, basta suprimirle.*

Sea, dividir el producto 8 . 7 . 3 por su factor 7. El cociente será 8 . 3, porque el producto 8 . 7 . 3 se puede considerar como el resultado de multiplicar 7 por 8 . 3 (número 63); es decir que tendremos:

$$8 \cdot 7 \cdot 3 = 7\,(8 \cdot 3)$$

igualdad que demuestra el enunciado.

100. *Para dividir un producto por un divisor exacto de uno de sus factores, basta dividir dicho factor por el divisor.*

Sea dividir el producto 8 . 30 . 4 por el número 5, que es divisor de 30. Si descomponemos el 30 en los factores 6 y 5; puesto que los factores 6 y 5 se pueden sustituir por su producto efectuado (núm. 64), se podrá inversamente sustituir por sus factores, y tendremos:

$$8 \cdot 30 \cdot 4 = 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$$

y dividiendo por 5 los dos miembros de la igualdad, como el cociente del segundo miembro es 8 . 6 . 4, resultará:

$$(8 \cdot 30 \cdot 4) : 5 = 8 \cdot 6 \cdot 4\,.$$

101. *Para dividir un número por un producto de varios factores, se divide el número por el primer factor, el cociente que resulte por el segundo, el cociente que resulte por el tercero y así sucesivamente hasta dividir por el último.*

Pueden seceder dos casos:

1.° *Supongamos que la división sea exacta:*

Sea, dividir 360 por el producto $9 \times 4 = 36$. Siendo 10 el cociente de 360 por 36, tendremos:

$$360 = 36 \times 10$$

ó poniendo en vez de 36 su igual 9×4

$$360 = 9 \,.\, 4 \,.\, 10$$

dividiendo los dos miembros de la igualdad por 9, se tendrá (núm. 99)

$$360 : 9 = 4 \times 10$$

dividiendo nuevamente por 4, resultará

$$(360 : 9) : 4 = 10.$$

Es decir, el mismo cociente que cuando se dividió el número 360 directamente por 36, que era el producto 9×4.

2.° *Supongamos que la división no sea exacta:*

Sea, dividir 378 por el producto $9 \times 4 = 36$. Siendo 10 el cociente por defecto, el cociente por exceso será $10 + 1$ y como el dividendo de una división inexacta es mayor que el producto del divisor por el cociente por defecto y menor que el divisor por el cociente por exceso, tendremos la doble desigualdad: (*)

$$36 \,.\, 10 \angle 378 \angle 36\,(10 + 1)$$

ó poniendo en vez de 36 su igual 9×4

$$9 \,.\, 4 \,.\, 10 \angle 378 \angle 9 \,.\, 4\,(10 + 1)$$

Si se dividen por 9 y por 4 el primero y el tercer miembro, los cocientes exactos son 10 y $10 + 1$; pero el segundo miembro es intermedio entre ambos; luego dividido por 9 y por 4, dará un cociente que no es menor que 10 (núm. 98) y no puede llegar á $10 + 1$; luego será 10.

En el primer caso que hemos considerado, los restos son iguales á cero.

En el segundo caso, los restos, generalmente, no son iguales, porque cuando se divide sucesivamente por los factores, el resto final es *menor que el último factor*, y cuando se divide por el producto efectuado, el resto es *menor que el producto*, pero puede ser *igual ó mayor que alguno ó que todos los factores.*

(*) La doble desigualdad que se verifica en el mismo sentido se llama limitación.

En nuestro ejemplo: dividiendo 378 por 36, el resto es 18, y dividiendo primero por 9 y después el cociente 42 por 4, el resto es 2.

102. *El cociente* de dos potencias *de un número es otra potencia del mismo número, cuyo exponente es la diferencia de los exponentes.*

Sea, dividir 5^7 por 5^4, decimos que el cociente es 5^{7-4}

De la regla del producto de dos potencias (núm. 74) se deduce:

$$5^7 = 5^4 \times 5^{7-4}$$

y dividiendo los dos miembros de esta igualdad por 5^4, resulta

$$5^7 : 5^4 = 5^{7-4}$$

Si los exponentes de las potencias son iguales, la aplicación de la regla conduce á considerar cantidades con exponente cero. Así:

$$5^7 : 5^7 = 5^{7-7} = 5^0$$

Por otra parte, el cociente de dividir un número por sí mismo es la unidad, luego se debe admitir que la potencia de grado cero, ó con exponente cero de cualquier número es la unidad. En particular, se tendrá $10^0 = 1$ Resultado que está conforme con el enunciado en el núm. 71, donde se dijo que las potencias de 10 son la unidad seguida de tantos ceros como unidades tiene el exponente de la potencia.

103. *Si el dividendo y el divisor se multiplican por un mismo número, el cociente no varía, y el resto queda multiplicado por dicho número.*

Sean D, el dividendo, d, el divisor, c, el cociente y r, el resto; se tendrá:

$$D = d \,.\, c + r$$

Si multiplicamos los dos miembros de esta igualdad por un número cualquiera, n, resulta:

$$D \,.\, n = (d \,.\, c + r)\, n$$

pero para multiplicar la suma $d.c + r$ por n, hay que multiplicar por n, los dos sumandos $d \,.\, c$ y r y para multiplicar el producto $d.c$, basta multiplicar uno de los factores, que aquí es d, por hipótesis; luego tendremos:

$$D \cdot n = (d \cdot n)\, c + r \cdot n$$

En la división de D. n por $d \cdot n$ el cociente es c y el resto será $r \cdot n$, siempre que este número sea menor que el divisor $d.n$; pero por ser $r \angle d$, también será $r \cdot n \angle d.n$, luego el cociente no ha variado y el resto queda multiplicado por n.

VI. La numeración romana.

104. El sistema de numeración que hemos expuesto se llama decimal, porque su base es 10; se debe á los árabes y está en uso en Europa desde hace algunos siglos; es muy perfecto no sólo por la facilidad que ofrece para enunciar, escribir y leer los números, sino por lo bien que se presta á las operaciones del cálculo aritmético.

Podríamos adoptar por base del sistema de númeración otro número cualquiera y modificar los principios de la numeración y establecer la teoría de las operaciones y propiedades de los números con arreglo á dicha base; así como estudiar el modo de transformar un número escrito en un sistema ú otro cualquiera; pero siendo esta una obra muy elemental, no creemos necesario hacer aquí dicho estudio.

De lo único que diremos algo es de la numeración llamada romana, por no haber desaparecido totalmente.

Para escribir los números se emplean letras, cuyos valores van indicados

1	5	10	50	100	500	1000
I	V	X	L	C	D ó IↃ	M ó CIↃ

Se conviene en que una letra escrita á la derecha de otra de más valor, le añade el suyo y se le quita si tiene menos valor.

Por ejemplo: LX, es 60, porque la X añade su valor á la L; XL, es 40, porque la X quita su valor á la L.

Ninguna letra se debe repetir cuatro veces seguidas; tampoco se repite dos veces si hay otra de doble valor: por ejemplo, la V, ó la L, no se repiten dos veces, porque la X y la C, tienon doble valor respectivamente que aquéllas.

Cuando las letras llevan una raya horizontal encima, reprepentan un valor mil veces mayor que el suyo. Así: $\overline{\text{L}}$ es 50000. $\overline{\text{MDX}}$ es 1510000. Si las letras llevan dos rayas encima; representan un valor un millón de veces mayor, con tres rayas encima, mil millones de veces mayor, etc.

El signo IↃ, representa un valor 10, 100, 1000..... veces mayor, añadiendo á su derecha el signo Ↄ, una, dos, tres..... veces.

Así: IↃ, IↃↃ, IↃↃↃ..... son los números 500, 5000, 50000...

El signo CIↃ, representa un valor 10, 100; 1000..... veces mayor, añadiendo á su derecha y á su izquierda los signos C y Ↄ, una, dos, tres..... veces.

Así: CIↃ, CCIↃↃ, CCCIↃↃↃ..... son los números. 1000, 10000, 100000..... Como último ejemplo escribiremos en este sistema el año actual, 1891 y será:

MDCCCXCI ó CIↃIↃCCCXCI.

CAPÍTULO III.

Las propiedades elementales de los números enteros.

I. Teoría de la divisibilidad.

105. Los múltiplos de un número se obtienen multiplicándole por 1, 2, 3, 4, 5..... y así sucesivamente; luego la serie de los *múltiplos de un número* es ilimitada. El producto de cualquier número por cero es cero, de aquí que se considere el *cero como múltiplo de todos los números.*

Todo número entero es el mayor divisor de sí mismo, y la unidad es divisor de todo número entero; luego el *número de divisores de cualquier entero es limitado,* porque el menor es la unidad y el mayor el mismo número.

Cuando un número es divisible, ó múltiplo de otros varios, se dice un *múltiplo común* de éstos.

Cuando varios números son divisibles por un mismo número, éste se llama *divisor común.*

Para indicar que un número es múltiplo, ó divisible por otro, escribiremos, siguiendo la notación de Leibniz un punto encima del submúltiplo ó divisor.

Así: $20 = \dot{5}$; $b = \dot{a}$, indican que 20 es un múltiplo de 5 y b un múltiplo de a.

106. TEOREMA. *Si un número es divisor común de otros varios, es divisor de su suma.*

Sea el número 5, divisor común de 20, 30 y 35; tendremos las igualdades.

$$20 = 5 \cdot 4$$
$$30 = 5 \cdot 6$$
$$35 = 5 \cdot 7$$

Sumando ordenadamente

$$20 + 30 + 35 = 5 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + 5 \cdot 7$$

y sacando á 5 como factor común en el segundo miembro

$$20 + 30 + 35 = 5\,(4 + 6 + 7) = 5 \cdot 17$$

que se podrá escribir $\quad 20 + 30 + 35 = \dot{5}$

107. COROLARIO. *Si un número es divisor de otro, es divisor de sus múltiplos.*

Si el número 5 es divisor de 20, dividirá á cualquier múltiplo de 20 (núm. 106), porque los múltiplos de 20 son sumas de sumandos iguales á 20.

108. TEOREMA. *Si un número es divisor de otros dos, es divisor de su diferencia.*

Sea el número 5, divisor de 35 y de 20, tendremos:

$$35 = 5 \cdot 7$$
$$20 = 5 \cdot 4$$

restando ordenadamente y sacando en el segundo miembro 5 como factor común

$$35 - 30 = 5\,(7 - 4) = 5 \cdot 3$$

que se podrá escribir $\quad 35 - 30 = \dot{5}$

109. COROLARIO. *Si en una suma de dos sumandos un nùmero es divisor de uno de ellos y del otro no, tampoco es divisor de la suma.*

Si la suma fuese divisible por el número, considerándola como un minuendo y al sumando divisible como sustraendo, el minuendo y el sustraendo tendrían un divisor común, luego también le tendría el resto (núm. 108), lo cual es contra la hipótesis.

110. Teorema. *Si un número es divisor, ó factor de otros dos, lo es del resto de su división.*

Sea D el dividendo, d el divisor, c el cociente, r el resto y n un factor común á D y d, tendremos:

$$D = d \cdot c + r$$

y restando $d \cdot c$ de los dos miembros de esta igualdad

$$D - d \cdot c = r$$

por tener d el divisor n, le tiene también su múltiplo $d \cdot c$; luego n es un divisor común al minuendo y sustraendo de la diferencia $D - d \cdot c$; luego será divisor del resto r (núm. 108)

111. Teorema. *Si un número es factor común del divisor y del resto de una división, es factor del dividendo.*

Siguiendo la notación de antes, tendremos:

$$D = d \cdot c + r$$

Todo factor de d es factor su múltiplo $d \cdot c$; luego si n es un factor común á d y r, también lo será á $d \cdot c$ y r, luego será factor de su suma $d \cdot c + r$ (núm. 107), que es igual á D.

112. De estos dos teoremas resulta el siguiente importante

Corolario. *Todos los factores comunes al dividendo y divisor* son factores del resto; luego *serán factores comunes al divisor y al resto.* Recíprocamente: *todos los factores comunes al divisor y al resto* son factores del dividendo; luego *serán factores comunes al dividendo y al divisor.*

113. Otra consecuencia importante se deduce del teorema (núm. 110).

Si el dividendo y divisor se dividen por uno de sus factores, el cociente no varía y el resto queda dividido por dicho factor.

Adoptando la notación del núm. 110, tendremos como allí la igualdad:

$$D - d \cdot c = r$$

suponiendo ahora que n sea el factor común por quien se divide y que por ser exactos los cocientes de D, d y r por n, tengamos las igualdades

$$D = D' \,.\, n;\ d = d' \,.\, n;\ r = r' \,.\, n$$

sustituyendo estos valores en la primera, resultará:

$$D' \,.\, n - d' \,.\, n \,.\, c = r' \,.\, n$$

sacando n como factor común en el primer miembro

$$n\,(D' - d' \,.\, c) = r' \,.\, n$$

y suprimiendo el factor común n

$$D' - d' \,.\, c = r'$$

ó bien sumando á los dos miembros de la igualdad $d' \,.\, c$

$$D' = d' \,.\, c + r'$$

que demuestra el enunciado.

114. TEOREMA. *El resto de una división no varía aumentando, ó disminuyendo el dividendo en un múltiplo del divisor.*

Supongamos que según la notación anterior se tenga

$$D = d \,.\, c + r$$

Si á los dos miembros de la igualdad añadimos el múltiplo $d \,.\, n$ del divisor, tendremos:

$$D + d \,.\, n = d \,.\, c + d \,.\, n + r$$

sacando en los dos primeros sumandos del segundo miembro d en factor común.

$$D + d \,.\, n = d\,(c + n) + r$$

igualdad que demuestra que si el dividendo es $D + d \,.\, n$ y el divisor d, el cociente es $c + n$, y el resto r, es decir, el mismo que en la primitiva división.

Lo mismo se demuestra el teorema si en vez de aumentar disminuimos el dividendo en un múltiplo del divisor.

II. Caracteres de divisibilidad por 2, 5, 9, 3 y 11.

115. Hay casos en que es muy fácil conocer si un número es divisor de otro sin practicar la división, y por la utilidad que resulta para las aplicaciones deduciremos las reglas para conocer si los referidos números son divisores de otros, ó hallaremos sus *caracteres de divisibilidad.*

116. Se ha visto (núm. 93) que para dividir un número por la unidad seguida de ceros se separan de la derecha del dividendo tantas cifras como ceros siguen á la unidad, lo que queda á la izquierda es el cociente, y lo que queda á la

derecha el resto. Para que la división sea exacta, se necesita que las cifras separadas á la derecha sean todas ceros.

De aquí deducimos: *que un número es divisible por la unidad seguida de ceros, cuando termina en tantos ceros, lo menos, como siguen á la unidad.*

Como la unidad seguida de ceros es una potencia de 10, cuyo exponente es igual al número de ceros que siguen á la unidad, la regla anterior se puede enunciar así:

Un número es divisible por una potencia de 10 cuando termina en tantos ceros, por lo menos, como unidades tiene el exponente de la potencia.

117. El número 10 es igual al producto 2×5; por consiguiente, como 2 y 5 son divisores de 10, lo serán de sus múltiplos (núm. 107); *luego todo número terminado en cero es divisible por 2 y por 5.*

Sea ahora cualquier número, 2457; descomponiéndole en decenas y unidades, se tendrá:

$$2457 = 2450 + 7$$

El primer sumando del segundo miembro es divisible por 2 y por 5; luego para que lo sea la suma, se necesita y basta que lo sea el otro sumando (números 106 y 109.)

De aquí deducimos: *que un número es divisible por 2 ó por 5, cuando la cifra de las unidades es divisible por 2 ó por 5* (*).

Las cifras 2, 4, 6 y 8, divisibles por 2, se llaman cifras pares, y los números terminados en cero, ó cifra par, se llaman números pares.

En virtud de esto se pueden enunciar así los caracteres de divisibilidad por 2 y 5:

Un número es divisible por 2 cuando es par, ó sea cuando termina en cero, ó cifra par.

Un número es divisible por 5 cuando termina en cero ó en 5.

118. Si elevamos á la potencia *m* los dos miembros de la igualdad $10 = 2 \times 5$, tendremos:

(*) No hay que modificar esta regla cuando el número termina en cero, porque ya hemos dicho (núm. 105) que cero es múltiplo ó divisible por todos números.

$$10^m = 2^m \times 5^m$$

Si de la derecha de un número separamos m cifras, la parte que queda á la izquierda terminará en m ceros, y por consiguiente será un múltiplo de 10^m (núm. 116), luego también lo será de $2^m \times 5^m$.

Si el número formado por las m *cifras de la derecha es múltiplo de 2^m ó de 5^m, también lo será el número propuesto, y no lo será en el caso contrario* (números 106 y 109.)

En particular, para que un número sea divisible por 4 (que es igual á 2^2), *se necesita y basta que termine en dos ceros, ó las dos cifras de la derecha formen un múltiplo de 4.*

Para que un número sea divisible por 25 (que es 5^2), *se necesita y basta que termine en dos ceros, ó las dos cifras de la derecha formen un múltiplo de 25.*

119. LEMA. *La unidad seguida de ceros es un múltiplo de 9 más 1.*

Dividamos por 9 la unidad seguida de cualquier número de ceros, ó tomemos por dividendos sucesivos 10, 100 1000, 10000.....

$$\begin{array}{l|l} 10000\ldots\ldots & 9 \\ \cline{2-2} \ 10 & 1111\ldots\ldots \\ \ \ 10 & \\ \ \ \ 10\ldots\ldots & \end{array}$$

y siempre hallaremos por cociente 1 y por resto 1.

En virtud de esto podemos escribir la igualdad

$$10000\ldots\ldots = \dot{9} + 1$$

120. LEMA. *Toda cifra significativa seguida de ceros es un múltiplo de 9 más dicha cifra.*

Sea 4000 la cifra seguida de ceros, se tendrá

$$4000 = 1000 \times 4 = (\dot{9} + 1)\, 4$$

y efectuando la multiplicación indicada por el paréntesis

$$4000 = \dot{9} \times 4 + 4$$

pero $\dot{9} \times 4$ es también un múltiplo de 9 (núm. 107); luego se podrá escribir.

$$4000 = \dot{9} + 4$$

121. Sea ya un número cualquiera, 54726; descompo-

niéndole en sus diversos órdenes de unidades, se tendrá:

$$54726 = 50000 + 4000 + 700 + 20 + 6$$

y en virtud del lema anterior, tendremos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} 50000 &= \dot{9} + 5 \\ 4000 &= \dot{9} + 4 \\ 700 &= \dot{9} + 7 \\ 20 &= \dot{9} + 2 \\ 6 &= \phantom{\dot{9} +{}} 6 \end{aligned}$$

Como la suma de los múltiplos de 9 es un múltiplo de 9 (núm. 106), si sumamos ordenadamente las igualdades anteriores, resultará

$$54726 = \dot{9} + (5 + 4 + 7 + 2 + 6)$$

Considerando el segundo miembro como la suma de los dos sumandos, uno el $\dot{9}$ y otro el paréntesis. $(5 + 4 + 7 + 2 + 6)$ se compone dicha suma de dos partes una de las cuales es divisible por 9; luego para que la suma sea también divisible por 9 se necesita y basta que el sumando $(5 + 4 + 7 + 2 + 6)$ sea divisible por 9 (números 106 y 109).

El paréntesis encierra la suma de los valores absolutos de las cifras del número; luego; *para que un número sea divisible por 9 se necesita y basta que la suma de los valores absolutos de sus cifras sea un múltiplo de 9.*

122. Por ser 9 un múltiplo de 3, todo múltiplo de 9 lo es de 3 (núm. 107), de consiguiente: *para que un número sea divisible por 3 se necesita y basta que la suma de los valores absolutos de sus cifras sea un múltiplo de 3.*

Así, teníamos $54726 = \dot{9} + (5 + 4 + 7 + 2 + 6)$, de donde deduciremos

$$54726 = \dot{3} + (5 + 4 + 7 + 2 + 6)$$

123. Lema. *La unidad seguida de un número par de ceros es un múltiplo de 11, más 1: la unidad seguida de un número impar de ceros es un múltiplo de 11, menos 1.*

Dividiremos por 11 la unidad seguida de un número par é impar de ceros; considerando por consiguiente los dividendos 10, 100, 1000, 10000.....

$$\begin{array}{r|l} 100000\ldots\ldots & 11 \\ \cline{2-2} 100 & 09090 \\ 10\ldots\ldots & \end{array}$$

se observa desde luego que los cocientes son 0,9,0.9... y los restos 1,10,1,10... siendo 1 los restos que corresponden á los dividendos formados por la unidad seguida de un número par de ceros, y 10 los que corresponden á la unidad seguida de un número impar de ceros.

Pero si el dividendo es la unidad seguida de un número impar de ceros, podemos forzar la unidad en el cociente y el resto *sustractivo* será 1 (núm. 97); luego en virtud de esto, tendremos igualdades de la forma:

$$10000 = \dot{\overline{11}} + 1 \qquad 100000 = \dot{\overline{11}} - 1$$

124. Lema. *Toda cifra significativa seguida de un número par de ceros es un múltiplo de 11, más el valor absoluto de dicha cifra: toda cifra sifinificativa seguida de un número impar de ceros es un múltiplo de 11, menos el valor absoluto de dicha cifra.*

1.° Sea, 40000, la cifra seguida de un número par de ceros, se tendrá:

$$40000 = 10000 + 4 = (\dot{\overline{11}} + 1)\,4$$

y efectuando la multiplicación indicada

$$40000 = \dot{\overline{11}} \times 4 + 4$$

ó bién, por ser $\dot{\overline{11}} \times 4$ un múltiplo de 11

$$40000 = \dot{\overline{11}} + 4$$

2.° Sea, 4000, la cifra significativa seguida de un número impar de ceros, se tendrá

$$4000 = 1000 \times 4 = (\dot{\overline{11}} - 1)\,4$$

efectuando la multiplicación y teniendo presente $\dot{\overline{11}} \times 4$ es un múltiplo de 11

$$4000 = \dot{\overline{11}} - 4$$

125. Sea un número cualquiera, 46837, descomponiéndole en sus diversos órdenes de unidades se tendrá:

$$40000 = \dot{\overline{11}} + 4$$

$$6000 = \dot{\overline{11}} - 6$$

$$800 = \dot{\overline{11}} + 8$$

$$30 = \dot{\overline{11}} - 3$$

$$7 = \quad 7$$

Sumando ordenadamente y teniendo presente que la suma de los múltiplos de 11 es múltiplo de 11, resulta

$$46837 = \dot{\overline{11}} + (4 + 8 + 7) - (6 + 3)$$

Como el primer paréntesis encierra la suma de las cifras que ocupan lugares impares en el número, y el segundo la suma de las que ocupan lugares pares, si representamos la primera suma por I y la segunda por P, podremos escribir así la anterior igualdad

$$46837 = \dot{\overline{11}} + (I - P)$$

y considerando en el segundo miembro la suma de dos sumandos, uno el $\dot{\overline{11}}$ y otro $(I - P)$, si este segundo es divisible por 11, también lo será la suma (núm. 106).

Luego: *para que un número sea divisible por 11, se necesita y basta que la suma de los valores absolutos de las cifras de lugar impar, menos la suma de los valores absolutos de las cifras de lugar par sea un múltiplo de 11* (*).

Puede suceder que la suma de las cifras de lugar par sea mayor que la de las cifras de lugar impar, y entonces no se puede efectuar la sustracción I—P.

En este caso del primer sumando, que es un múltiplo de 11, se toman tantas veces 11 unidades como se necesiten para que sumadas con I den una suma mayor que P.

Así; $829389 = \dot{\overline{11}} + (2 + 3 + 9) - (8 + 9 + 8)$

como la primera suma es 14 y la segunda 25, no se puede efectuar la sustracción y necesitamos tomar del $\dot{\overline{11}}$, una vez 11, y tendremos:

(*) No se debe olvidar, por si la diferencia de ambas sumas es cero, que cero es múltiplo de todos los números.

$$829389 = \dot{\overline{11}} + (14 + 11) - 25 = \dot{\overline{11}}$$

126. Los caracteres de divisibilidad que hemos hallado son muy útiles por ser muy sencillos, y el método que hemos seguido para hallar el de 9 y 11 se puede aplicar á cualquier número; pero es más facil hacer las divisiones directamente que aplicar los caracteres de divisibilidad que se hallarían. (*)

III. Máximo común divisor.

Máximo común divisor de dos números.

127. Dos números tienen siempre la unidad por divisor *común*: si no tienen más divisor común que la unidad, se llaman *primos entre sí*.

Cuando dos números tienen varios divisores comunes, el mayor de todos se llama *máximo común divisor:* se suele representar por la notación *m. c. d.*

Los números 8 y 12 tienen los divisores comunes 1, 2 y 4, luego 4 será el *m. c. d.*

128. Teorema. *Si un número es divisible por otro; el menor es el* m. c. d. *de ambos.*

Sea el número 130, divisible por 26: decimos que 26 es el *m. c. d.* de 130 y 26.

En efecto: puesto que 26 es divisor de sí mismo y, por hipótesis, también de 130, es un divisor común á los dos números; pero 26 no puede tener otro divisor mayor que el mismo, luego será el *m. c. d.* de los dos números propuestos.

129. Teorema. *El* m. c. d. *de dos dúmeros es el mismo que el del menor y el resto de su división.*

Sean los números 420 y 156, si hacemos la división, se halla 2 de cociente y 108 de resto. Hemos visto (núm. 112) que todos los factores comunes al dividendo y al divisor

(*) Si estudiásemos otros sistemas de numeración distintos del decimal veríamos que los caracteres análogos á los que hemos estudiado serían los de los factores de la base y sus potencias; y los de la base más y menos la unidad y sus factores.

son factores comunes al divisor y al resto, y recíprocamente que todos los factores comunes al divisor y al resto, son factores comunes al dividendo y al divisor: luego los números 420 y 156 (dividendo y divisor) por una parte y los números 156 y 108 (divisor y resto) por otra, admiten la misma serie de divisores comunes, y como uno de ellos será el mayor de todos, admiten el mismo máximo común divisor.

130. En virtud del teorema anterior, la investigación del *m. c. d.* de dos números queda reducida á la de otros dos más pequeños, porque el divisor y el resto son respectivamente menores que el dividendo y el divisor.

En nuestro ejemplo después de dividir 420 por 156, la operación queda reducida á hallar el *m. c. d.* de 156 y 108. Haciendo la división de estos dos números se halla el cociente 1 y el resto 48, luego el *m. c. d.* de 156 y 108 es el mismo que el de 108 y 48 (núm. 129). Dividiendo 108 por 48, se obtiene el cociente 2 y el resto 12, entonces la operación estará ya reducida á hallar el *m. c. d.* de 48 y 12, que será el mismo que el de 108 y 48: pero 48 es divisible por 12, luego 12 es el *m. c. d.* de estos últimos números, y retrocediendo en la serie de operaciones efectuada, se ve que en virtud del teorema núm. 129, el *m. c. d.* de 426 y 156 es 12. De estos razonamientos se deduce la siguiente:

REGLA. *Para hallar el* m. c. d. *de dos números se divide el mayor por el menor; si la división es exacta, el menor es el* m. c. d., *en el caso contrario se divide el menor por el resto que se halle, este primer resto por el segundo y así sucesivamente hasta llegar á un resto cero: el último divisor será el máximo común divisor pedido.*

La operación se dispone como se indica en el siguiente cuadro:

	2	1	2	4
420	156	108	48	12
108	48	12	0	

Conviene escribir los cocientes encima de los divisores correspondientes, para que no se confundan con los restos.

131. Las divisiones que se practican terminan necesariamente, porque siendo cada resto menor que el divisor correspondiente, los restos irán disminuyendo, y aun en el caso más desfavorable se llega al resto 1, que necesariamente divide al resto anterior.

132. TEOREMA. *Todo divisor común á dos números divide exactamente* á su m. c. d.

Todo divisor común á dos números divide al resto de su división (núm. 110) y aplicado este teorema á las divisiones sucesivas que se hacen para hallar el *m. c. d.*, se vé que siendo este número el penúltimo resto tiene necesariamente dicho divisor.

Refiriéndonos al ejemplo anterior, sea 3 el divisor común á 420 y 156, dividirá al resto 108: dividiendo á 156 y 108, dividirá al resto 48, y dividiendo á 108 y 48, dividirá al resto 12, que es el máximo común divisor.

Recíprocamente, como dos números son múltiplos de su *m. c. d.*, todo divisor del *m. c. d.* divide á los números.

De esto se deduce que si queremos hallar todos los divisores comunes á dos números tenemos que hallar todos los divisores de su máximo común divisor.

133. TEOREMA. *Si dos números se multiplican ó dividen por otro, su* m. c. d. *queda multiplicado ó dividido por este otro.*

Multiplicando ó dividiendo dos números por otro, el resto de su división queda multiplicado ó dividido por este otro (números 104 y 113). Apliquemos este teorema á las divisiones sucesivas que se hacen para hallar el *m. c. d.*, y sea 3 el número por el cual se multiplican ó dividen los números dados, que supondremos son 420 y 156. Puesto que el dividendo 420 y el divisor 156 se multiplican ó dividen por 3, el resto 108 quedará multiplicado ó dividido por 3: en la segunda división el dividendo 156 y el divisor 108 están multiplicados ó divididos por 3, luego el resto 48 quedará multiplicado ó dividido por 3; por último, el dividendo 108 y el divisor 48 están multiplicados ó divididos por 3, luego el resto 12 quedará multiplicado ó dividido por

3. Lo cual demuestra el teorema, porque 12 es el *m. c. d.* de 420 y 156.

134. En virtud de este teorema se puede simplificar la operación de hallar el máximo común divisor de dos números, suprimiendo los factores comunes que se vean á primera vista y se puedan suprimir por una división muy fácil.

Si tuviéramos que hallar el *m. c. d.* de 42000 y 15600 se podría suprimir el factor 100, hallar el *m. c. d.* de 420 y 156, que es 12, y multiplicarle después por 100. El máximo común divisor de 42000 y 15600 será, pues, 1200.

135. Corolario. *Si dos números se dividen por su máximo común divisor, los cocientes son primos entre sí.*

El máximo común divisor quedará dividido por sí mismo (núm. 133), luego será la unidad, lo cual demuestra el enunciado.

136. Teorema. *Si un número divide á un producto de dos factores y es primo con uno de ellos, es divisor del otro factor.*

Sea, N es producto de los dos factores A y B, y P un número que divide á N y es primo con A, decimos que es divisor de B.

Por ser A y P dos números primos entre sí, se tendrá:

$$\left.\begin{matrix}\mathrm{A}\\ \mathrm{P}\end{matrix}\right\} m.\ c.\ d. = 1.$$

Si multiplicamos los números A y P por B, su *m. c. d.* quedará multiplicado por B (núm. 133), y tendremos·

$$\left.\begin{matrix}\mathrm{A}\times\mathrm{B}\\ \mathrm{P}\times\mathrm{B}\end{matrix}\right\} m.\ c.\ d. = 1\times\mathrm{B} = \mathrm{B}$$

P divide al producto A × B, porque este producto es igual á N; también divide P al producto P × B, porque es uno de sus factores; luego dividirá al máximo común divisor de estos productos (núm. 132), que es B; lo cual demuestra el teorema.

Máximo común divisor de varios números.

137. Varios números tienen siempre la unidad por divisor común: si no tienen otro, se dicen *primos entre sí*. Cuando tomados de dos en dos no tienen más divisor común que la unidad, se dicen *primos entre sí dos á dos*.

Si varios números tienen más de un divisor común, el mayor se llama *máximo común divisor* de varios números.

138. TEOREMA. Sean varios números A, B, C, D, y sea d el máximo común divisor de dos de ellos, A y B, por ejemplo: *decimos que el máximo común divisor de los números* A, B, C, D *es el mismo que el de los números* d, C, D.

Por ser d el máximo común divisor de A y B, todos los divisores comunes de A y B son divisores de d (número 132); luego todos los divisores comunes á los números A, B, C, D, son divisores de los números d, C, D. Recíprocamente, todos los divisores de d son divisores de A y B; luego todos los divisores comunes á los números d, C, D, son divisores de los números A, B, C, D; entonces las dos líneas de números:

$$\begin{array}{c} A\ B\ C\ D \\ d\ C\ D \end{array}$$

tienen todos sus divisores comunes, y por tanto tendrán el mismo máximo común divisor.

139. Del teorema anterior se deduce la siguiente:

REGLA. *Para hallar el* m. c. d. *de varios números se halla el de dos de ellos, después el del máximo común divisor hallado y otro de los números dados, continuando del mismo modo hasta considerar el último de los números.*

La operación se puede indicar como está en el adjunto cuadro.

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{A\quad B}_{d}\quad C}_{d'}\quad D}_{d''}$$

d es el máximo común divisor de A y B: la segunda línea de números tendrá el mismo *m. c. d.* que la primera. El máximo común divisor de d y C es d'; luego d' y D tienen el mismo *m. c. d.* que los números de la segunda línea. El máximo común divisor de d' y D es d'', luego también lo será de d, C, D, y por consiguiente de los números propuestos A, B, C, D.

Se puede comenzar la operación por dos números cualesquiera; pero generalmente se llega más pronto al resultado comenzando por los menores.

Ejemplo. Hallar el *m. c. d.* de 330, 462, 770 y 1155.

El *m. c. d.* de 330 y 462 es 66: el *m. c. d.* de 66 y 770 es 22; y por último, el *m. c. d.* de 22 y 1155 es 11; luego este número será el máximo común divisor que se buscaba.

El cuadro de los resultádos es el siguiente:

$$\underbrace{330 \quad 462} \quad 770 \quad 1155$$
$$\underbrace{66 \quad 770} \quad 1155$$
$$\underbrace{22 \quad\quad 1155}$$
$$11$$

140. TEOREMA. *Todo divisor común á varios números divide exactamente á su* m. c. d.

Adoptando la notación del número anterior tendremos que todo divisor común de A, B, C, D, es divisor de d, C, D (núm. 138); del mismo modo todo divisor común de d, C, D, lo es de d, D, y por consiguiente de d'', que es el máximo común divisor.

RECÍPROCAMENTE. Todo divisor del *m. c. d.* de varios números es divisor de los números (núm. 107), porque todos son múltiplos de su *m. c. d.*

141. TEOREMA. *Si se multiplican ó dividen varios números por otro, su* m. c. d. *queda multiplicado ó dividido por este otro.*

COROLARIO. *Si varios números se dividen por su* m. c. d. *los cocientes son primos entre sí.*

Se demuestran como el teorema del núm. 140.

IV. Mínimo común múltiplo.

142. Un número divisible por otros varios es un múltiplo *común* de todos ellos.

Se sabe que los múltiplos de un número se forman multiplicándole por 1, 2, 3, 4..... luego el menor de todos los múltiplos de un número es el mismo número (*). Entre los múltiplos comunes á varios números hay uno menor que todos los demás y se llama *mínimo común múltiplo*, cuyo valor es, por lo menos, tan grande como el mayor de los números. El mínimo común múltiplo se suele designar por la notación m. c. ~~d~~. m

Mínimo común múltiplo de dos números.

143. Sean A y B dos números, d su máximo común divisor, a y b los cocientes de dividir A y B por su máximo común divisor d. Tendremos las igualdades

$$A = da \text{ y } B = db \quad (^{**})$$

Los números a y b son primos entre si (núm. 135).

Designemos por M un múltiplo cualquiera de A, tendrá la forma $M = Aq$ siendo q un número entero, ó bien, poniendo en vez de A su igual a

$$M = adq$$

Ahora, si M ha de ser también múltiplo de B tiene que serlo de su igual db, ó lo que es lo mismo, dividido por db tiene que dar un cociente exacto.

Para dividir por el producto db se divide primero por d y el cociente que resulte por b (núm. 101). El cociente de adq dividido por d se obtiene suprimiendo el factor d, y por consiguiente es aq; luego el producto aq tiene que ser divisible por b; pero b es primo con a, entonces debe dividir al factor q (núm. 136), y si designamos por q' el cociente, se tendrá $q = bq'$.

(*) En todo este artículo se prescinde de que cero sea múltiplo de todos los números.

(**) Cuando representamos los números por letras y tengamos que indicar una multiplicación prescindiremes del signo.

Sustituyendo este valor en la expresión $M = adq$, resultará

$$M = abdq'$$

de cuya igualdad se deduce que todo múltiplo común de dos números A y B es un producto del máximo común divisor de dichos números, multiplicando por los cocientes de dividirlos por su máximo común divisor y multiplicado por otro factor indeterminado.

El menor de todos los múltiplos corresponderá al menor valor que se pueda asignar al factor indeterminado q', y como tiene que ser un número entero, haremos $q'=1$. El mínimo común múltiplo será, pues, designándole por m

$$m = abd$$

144. En virtud de las igualdades $A=ad$ y $B=bd$, el mínimo común múltiplo puede recibir las formas.

$$abd = Ab = Ba = (AB):d$$

En la práctica se adopta la segunda ó tercera forma, que enunciada como un teorema dice:

El mínimo común múltiplo de dos números es igual al producto de uno de ellos por el cociente de dividir el otro por su máximo común divisor.

Ejemplo: Sean los números 420 y 156, su máximo común divisor es 12, y el cociente de dividir 156 por 12 es 13, luego el mínimo común múltiplo será

$$420 \times 13 = 5460$$

145. Todos los múltiplos comunes de dos números A y B son múltiplos del producto abd, luego son múltiplos del mínimo común múltiplo. Recíprocamente, todos los múltiplos del mínimo común múltiplo son múltiplos de los números.

146. Una de las expresiones del mínimo común múltiplo es (núm. 144)

$$m = (AB) : d$$

de donde se deduce multiplicando por d los dos miembros de la igualdad

$$md = AB$$

Es decir que el producto del mínimo común múltiplo de dos números por el máximo común divisor es igual al producto de los números.

147. En virtud de esto, si uno de ellos, A, por ejemplo, es múltiplo de B, el máximo común divisor será igual á B, que será el menor de los números, y resultará *que el mínimo común múltiplo será igual* á A, *al mayor de los números.*

148. Si los números son primos entre sí, su máximo común divisor es la unidad; luego *el mínimo común múltiplo será igual al producto de los números.*

Mínimo común múltiplo de varios números.

149. Teorema. Sean varios números A, B, C, D, y sea m el mínimo común múltiplo de dos de ellos, A y B: *decimos que el mínimo común múltiplo de los números* A, B, C, D es *el mismo que el de los números d,* C, D.

Por ser m el mínimo común múltiplo de A y B, todos los múltiplos comunes de A y B son múltiplos de m (número 145) luego todos los múltiplos comunes á los números A, B, C, D son múltiplos de m C, D. Recíprocamente, todos los múltiplos de m son múltiplos comunes de A y B; luego todos los múltiplos comunes á m, C, D son múltiplos comunes á los números A, B, C, D; entonces las dos líneas de números

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ & m & C & D \end{array}$$

tienen todos sus múltiplos comunes, y por tanto tendrán el mismo mínimo común múltiplo.

150. Del teorema anterior se deduce la siguiente:

Regla. *Para hallar el mínimo común múltiplo de varios números, se halla el de dos de los números, despues el del mínimo común múltiplo hallado y otro de los números, continuando del mismo modo hasta considerar el último de los números dados.*

La operación se puedc indicar como está en el siguiente cuadro

$$\underbrace{A \quad B}_{m} \quad C \quad D$$
$$\underbrace{m \quad C}_{m'} \quad D$$
$$\underbrace{m' \quad D}_{m''}$$

m es el mínimo común múltiplo de A y B, la segunda línea tendrá entonces el mismo m. c. m que la primera; m' es el m. c. m. de m y C; luego m' y D tienen el mismo m. c. m. que los números de la segunda línea. Por último, m'' es el mínimo común múltiplo de m' y D, luego también lo será de m, C, D, y por consiguiente A, B, C, D.

Ejemplo: Hallar el mínimo común múltiplo de 114, 154, 170 y 195.

El máximo común divisor de 114 y 154 es 2, y el cociente de dividir 154 por 2 es 77; luego el mínimo común múltiplo de 114 y 154 es $114 \times 77 = 8778$. Según la notación anterior

$$m = 8778$$

El máximo común divisor de 170 y 8778 es 2, y el cociente de dividir 170 por 2 es 85; luego el mínimo común múltiplo de 170 y 8778 es $8778 \times 85 = 746130$. O sea, según la notación de antes

$$m' = 746130$$

El máximo común divisor de 195 y 746130 es 15, y el cociente de dividir 195 por 15 es 13; luego el mínimo común múltiplo de 195 y 746130 es $746130 \times 13 = 9699690$, de donde

$$m'' = 9699690$$

151. *Todos los múltiplos comunes á varios números son múltiplos del mínimo común múltiplo.*

La demostración no es más que la repetición de los razonamientos hechos en el núm. 149.

V. Teoría de los números primos.

Teoremas sobre los números primos.

152. Número *primo* es el que no tiene más divisores que el mismo y la unidad: 2, 3, 7, son números primos.

Si un número primo no es divisor de otro cualquiera, es *primo con él:* porque los dos únicos divisores comunes que podrían tener son la unidad y el número primo, y este último, por hipótesis, no es divisor común.

Los números primos son primos entre sí dos á dos, pero evidentemente la recíproca no es cierta. Por ejemplo, 8 y 9 son primos entre sí y no lo son separadamente.

153. *Todo número que no es primo admite un divisor primo.*

Sea N, un número que no es primo, admitirá un divisor N′, por ejemplo, y tendremos, designando por q el cociente de N por N′, $N = N' \times q$. Si N′ es un número primo, el teorema está demostrado; si no lo es, admitirá un divisor: sea N″ este divisor y q' el cociente que se obtiene, de donde $N' = N'' \times q'$; si N″ es número primo, el teorema está demostrado, porque N″ es divisor también de N, por ser este número múltiplo de N′. Si N″ no es primo, continuando el mismo razonamiento, como los divisores son enteros y van disminuyendo, se llegará, cuando menos, á la unidad, y entonces el anterior divisor es primo necesariamente.

154. *Dos números que no son primos entre sí, admiten un factor primo común.*

Porque sino son primos entre si, su *m. c. d.* es distinto de la unidad, y es un número primo, ó admite un factor primo (núm 153).

155. *La serie de números primos es ilimitada.*

Admitamos que no lo sea y que p sea el mayor de todos los números primos.

Si formamos el producto de todos los números primos hasta p, tendremos:

$$1 . 2 . 3 . 5 . 7 . 11 \ldots\ldots . p = N$$

Si añadimos á este número una unidad, se tendrá

$$1 . 2 . 3 . 5 . 7 . 11 \ldots\ldots . p + 1 = N + 1$$

Si el número N + 1 es primo, el teorema está demostrado, porque $N + 1 > p$: si N + 1 no es primo, admitirá un factor primo, que no puede ser ninguno de los números primos hasta p inclusive, porque si lo fuera, la diferencia

$$(N + 1) - N = 1$$

que es 1, admitiría también dicho factor (núm. 108). Entonces el factor primo de $N + 1$ tiene que ser mayor que p, y por consiguiente, no es p el mayor de todos los números primos.

156. Para formar una tabla de números primos, comprendidos entre 1 y un límite dado, 100 por ejemplo, se escriben los números por su orden natural hasta el límite dado.

1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10	**11**	12	**13**	14	15
16	**17**	18	**19**	20	21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**	30
31	32	33	34	35	36	**37**	38	39	40	**41**	42	**43**	44	45
46	**47**	48	49	50	51	52	**53**	54	55	56	57	58	**59**	60
61	62	63	64	65	66	**67**	68	69	70	**71**	72	**73**	74	75
76	77	78	**79**	80	81	82	**83**	84	85	86	87	88	**89**	90
91	92	93	94	95	96	**97**	98	99	100.					

Los números 1 y 2 evidentemente son primos.

Se *tachan* los números de *dos en dos*, á partir del 2, y todos los números tachados serán múltiplos de 2, luego no serán primos.

El primer número *no tachado* es 3, que será número primo, porque no es divisible por 2, único número inferior á él además de la unidad.

Se tachan enseguida contándolos de *tres en tres*, á partir del 3, y los números tachados serán múltiplos de 3.

El primer número que queda sin tachar es 5, luego será primo, porque no admite los factores primos inferiores á él, que son 2 y 3.

Se tachan ahora contándolos de *cinco en cinco*, á partir del 5, y los números tachados serán múltiplos de 5. El primer número no tachado es 7, que por consiguiente será número primo.

A partir del 7 se cuentan de *siete en siete*, y los números tachados serán múltiplos de 7.

Se continuará del mismo modo hasta que sólo queden números primos en la tabla.

Se puede observar que cuando tachamos los múltiplos de 3, ya estaban tachados los que á la vez son múltiplos de 2; cuando se tachan los múltiplos de 5, están ya tachados los que han sido múltiplos de 2 y de 3; cuando se tachan los múltiplos de 7, ya están tachados los que á la vez lo son de 2, 3 ó 5 y así de los demás.

Decimos: *que cuando se tachan los múltiplos de un número primo cualquiera, el primero, que no estaba tachado antes, es el cuadrado del número primo.*

Supongamos, para fijar ideas, que se trata del 13; los múltiplos de 13, inferiores á 13×13, admiten un factor inferior á 13; entonces, ó este factor es primo, ó admite un factor primo, que también será inferior á 13; luego en ambos casos se habrá tachado antes el múltiplo de que se trata.

Si la tabla de números primos no ha de llegar más que hasta 100, el último número primo cuyos múltiplos se tachan es 7, porque el cuadrado de 11 es 121. (*)

157. Si se tiene una tabla de números primos (**) se averigua inmediatamente si un número dado, inferior al mayor de la tabla, es primo; pero si se trata de un número á que no alcance la tabla, se necesita efectuar algunas operaciones, fundadas en el siguiente:

Teorema. *Todo número, que no es divisible por ningún número primo cuyo cuadrado no le exceda, es número primo.*

Sea el número N, que no es divisible por ningún número primo cuyo cuadrado no le excede, y admitamos que es divisible por un número primo p, cuyo cuadrado $p \times p \gtrless N$, tendremos $N = p \times q$, siendo q un cociente entero, pero menor que p; luego evidentemente $N \gtrless q \times q$, es decir, que

(*) En la práctica de la formación de una tabla de números primos, sólo se escriben los impares y el 2, pero los teoremas anteriores se demuestran más sencillamente escribiendo todos los números.

(**) En las tablas de logaritmos de Sánchez Ramos, segunda edición, hay una tabla, la XXIII, de los números primos inferiores á 6968.

N es mayor que el cuadrado de q, luego N admitirá un factor primo igual ó menor que q, lo cual es contra la hipótesis.

Entonces no podemos admitir que N tenga un divisor primo cuyo cuadrado le exceda, y por consiguiente será número primo.

Escolio. Se conoce que se llega á un número primo cuyo cuadrado excede á N, en que cuando esto sucede el *cociente es menor que el divisor.*

158. Teorema. *Si un número primo divide á un producto de varios factores, divide, cuando menos, á uno de ellos.*

1.° Supongamos que los factores son dos, a, y b y sea p el número primo que divide á su producto ab. Si p divide á a, el teorema es cierto, y si no divide al factor a es primo con él; luego dividirá á b (núm. 136).

2.° Supongamos que los factores son varios, a, b, c y d y sea p el número primo que divide al producto $abcd$: este producto se puede considerar compuesto de los factores a y bcd y escribirse así: $a\,(bcd)$; si p divide á a, el teorema está demostrado, sino es primo con él y dividirá á bcd (número 136): el producto bcd se puede escribir así: $b\,(cd)$; si p divide á b, el teorema está demostrado, sino es primo con b y dividirá al producto cd, luego dividirá á uno cuando menos de sus factores (1.°)

159. Corolario 1.°. *Si un número primo divide á una potencia de otro número, divide también al numero.*

Sea 5 un divisor de 30^4, será divisor del producto $30 \times 30 \times 30 \times 30$, que es igual á 30^4, luego dividirá á cualquiera de los factores.

Corolario 2.°. *Si dos números son primos entre sí, sus potencias también lo son.*

Sean 8 y 15 dos números primos entre si; dos potencias suyas 8^4 y 15^3, por ejemplo, serán números primos entre sí, porque si admitieran un divisor primo (núm. 154) también sería divisor de 8 y 15 (1.°)

160. Teorema. *Si un número es primo con cada uno de*

los factores de un producto, es primo con el producto. Recíprocamente: si un número es primo con un producto, es primo con cada uno de sus factores.

Sea $N = abc$ y p un número primo con cada uno de los factores a, b, c del producto, decimos que será primo con N. En efecto; si N y p admitieran un divisor primo común (núm. 154), este divisor lo sería también de uno, cuando menos, de los factores a, b, c (núm. 158), lo que es contra la hipótesis.

Recíprocamente, si p es primo con N, lo será con sus factores a, b, c,; porque si uno de ellos, a, por ejemplo, admitiera un factor primo común con p, N, que es un múltiplo de a, también le admitiría (núm. 107), contra la hipótesis.

161. TEOREMA. *Si un número es divisible por varios primos entre sí dos á dos, es divisible por su producto.*

Sea N un número divisible por a, b y c, que suponemos son números primos entre sí dos á dos. Efectuemos la división de N por a, y sea q el cociente, tendremos

$$N = aq$$

N es divisible por b, luego su igual al producto aq también debe serlo; pero b es primo con a, entonces será divisor de q (núm. 136), y llamando q' al cociente de la división, se tendrá $q = bq'$, y sustituyendo en la igualdad anterior este valor de q, se tiene:

$$N = abq'$$

N es divisible por c, su igual abq' tambien lo será, pero a y b son primos con c, luego su producto ab es primo con c (núm. 160), entonces c es divisor de q' (núm. 136), y llamando q'' al cociente, se tendrá $q' = cq''$, y sustituyendo q' por su valor en la anterior igualdad, resulta

$$N = abcq''$$

que demuestra el teorema.

162. COROLARIO. *Si un número es divisible por varios números primos, es divisible por su producto.*

Porque los números primos son primos entre si dos á dos. Un número divisible por 2 y por 3 lo es por 6. En virtud de esto, un número es divisible por 6 cuando es par y la suma de sus cifras es un múltiplo de 3.

Descomposición de un número en factores primos.

163. TEOREMA. *Todo número que no es primo, es un producto de factores primos.*

Sea N un número que no es primo, admitirá un divisor primo (núm. 153); si designamos por a el divisor primo y por N' el cociente, tendremos: $N = aN'$. Si N' es primo, el teorema está demostrado, si no lo es, admitirá un divisor primo. Designando por b el divisor primo y por N'' el cociente, se tendrá: $N' = bN''$. Sustituyendo el valor de N' en la anterior igualdad, resulta $N = abN''$: si N'' es primo, el teorema está demostrado, si no lo es, admitirá un divisor primo c, que dará un cociente N''', de donde $N'' = cN'''$, y sustituyendo en la anterior igualdad $N = abcN'''$. Si N''' es es primo, el teorema está demostrado, si no lo es, admitirá un divisor primo y continúaremos las operaciones del mismo modo hasta llegar á un cociente primo. Esto tiene que suceder necesariamente, porque los cocientes N', N'', N'''... son enteros y van disminuyendo.

164. Nada de lo dicho en el teorema anterior indica que entre los factores primos del número N no puedan algunos ser iguales.

Así, $540 = 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 5$, que se puede escribir de un modo más sencillo, porque $2 \,.\, 2 = 2^2$ y $3 \,.\, 3 \,.\, 3 = 3^3$, de modo que $540 = 2^2 \,.\, 3^3 \,.\, 5$.

Descomponer el número en sus factores primos es hallar un producto de números primos que sea igual al número dado.

165. TEOREMA. *Un número cualquiera no admite más que una descomposición en factores primos.*

Supongamos que el número N admita dos descomposiciones en factores primos y se tenga á la vez $N = abcd$ y $N = a'b'c'd'$. Por ser el mismo el primer miembro de estas igualdades, los segundos miembros serán iguales, de modo que

$$abcd = a'b'c'd'$$

a es un factor del primer miembro, luego debe dividir también al segundo; pero siendo a un número primo, debe dividir á uno de los factores del segundo miembro (número 136), y como éstos son también números primos, cada uno no es divisible más que por sí mismo, luego a debe ser igual á uno de los factores del segundo miembro. Supongamos $a = a'$, y dividamos el primer miembro por a y el segundo por a' (núm. 99), y resultará la igualdad

$$bcd = b'c'd',$$

Se puede repetir el razonamiento anterior para el factor b, y se hallará $b = b'$. Después para c, y hallaremos $c = c'$, y así sucesivamente resultará cada uno de los factores del primer miembro igual á uno de los factores del segundo.

Si en el primer miembro estuviese repetido algún factor, su igual en el segundo miembro estaría repetido las las mismas veces, porque el razonamiento que hemos hecho para demostrar el teorema no excluye el caso de que a y b, por ejemplo, sean iguales entre sí, en cuyo caso también lo serán a' y b'.

De suerte, *que dos productos de factores primos iguales á un número dado, tienen iguales factores y repetidos las mismas veces, ó con los mismos exponentes.*

166. Apliquemos ya los teoremas anteriores á la descomposición de un número en factores primos.

Sea el número 3300.

Por ser un número terminado en cero, es divisible por 2, y se tendrá:

$$3300 = 2 \,.\, 1650$$

Si el cociente 1650 fuese número primo, estaría hecha la descomposición, pero como no lo es, le dividiremos por un factor primo, 2, y resulta

$$1650 = 2 \,.\, 825$$

y sustituyendo en la igualdad anterior el valor de 1650

$$3300 = 2 \,.\, 2 \,.\, 825$$

El número 825 admite el factor 3, porque la suma de sus cifras es 15, ó sea un múltiplo de 3, y tendremos

$$825 = 3 . 275$$

cuyo valor sustituido en la anterior igualdad dé

$$3300 = 2 . 2 . 3 . 275$$

A su vez 275 es divisible por 5, porque termina en 5, de donde:

$$275 = 5 . 55$$

y poniendo este valor de 275 en la anterior igualdad

$$3300 = 2 . 2 . 3 . 5 . 55$$

55 es divisible por 5, y el cociente 11 es ya número primo

$$55 = 5 . 11$$

sustituyendo en el valor anterior de 3300 se tiene finalmente

$$3300 = 2 . 2 . 3 . 5 . 5 . 11$$

Como los factores 2 y 5 están repetidos se puede escribir más sencillamente

$$3300 = 2^2 . 3 . 5^2 . 11$$

Debemos advertir que como un número no admite dos descomposiciones distintas en factores primos se puede proceder dividiendo el número y los cocientes que resultan por cualquiera de sus factores primos; pero lo más fácil y cómodo es dividir siempre por el menor factor primo. De lo expuesto se deduce la siguiente:

REGLA. *Para hallar los factores primos de un número se le divide por su menor factor primo, distinto de 1: el cociente que resulta de esta división se divide por su menor factor primo y se continúa operando del mismo modo con los cocientes sucesivos, hasta llegar al cociente 1. El producto de todos los divisores empleados será igual al número dado.*

$$\begin{array}{r|l} 3300 & 2 \\ 1650 & 2 \\ 825 & 3 \\ 275 & 5 \\ 55 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

La operación se dispone como se indica al margen, escribiendo los cocientes debajo de los dividendos y los divisores á la derecha de sus dividendos, de los cuales están separados por una raya vertical.

En las divisiones cuando los divisores son muy pequeños se emplea la nomenclatura de los números partitivos. Así, se dice la mitad de 3, es 1, la mitad de 13 es 6, la mitad 10 es 5 y la de 0 es 0.

167. *Cuando un número es potencia, de cierto grado de otro número, los exponentes de sus factores primos son múltiplos del exponente que indica el grado de la potencia.*

Sea el número $N = 3300^3$, siendo $3300 = 2^2 . 3 . 5^2 . 11$ se tendrá

$$N = (2^2 . 3 . 5^2 . 11)^3$$

y aplicando al segundo miembro la regla de la potencia de un producto (núm. 75)

$$N = 2^{2.3} . 3^3 . 5^{2.3} . 11^3$$

RECÍPROCAMENTE. *Si los exponentes de los factores primos de un número admiten un divisor común, el número es una potencia cuyo exponente es igual al divisor común.*

Sea $N = 2^6 . 3^3 . 5^6 . 11^3$, cuyos exponentes admiten el factor común 3, se tendrá:

$$N = 2^{2.3} . 3^3 . 5^{2.3} . 11^3$$

cuyo segundo miembro proviene de elevar al cubo $2^{2.3} . 3^3 . 5^{2.3} . 11$ (núm. 75), entonces se tendrá:

$$N = (2^2 . 3 . 5^2 . 11)^3 .$$

Como consecuencia de esto resulta que la condición necesaria y suficiente para que un número sea *cuadrado perfecto*, es que los exponentes de sus factores primos *sean pares*; y para que sea *cubo perfecto*, que sean múltiplos de *tres*.

Formación de todos los divisores de un número.

168. TEOREMA. *Para que un número sea divisible por otro se necesita y basta que el dividendo contenga todos los factores primos del divisor con un exponente, cuando menos igual al que tienen en el divisor.*

Sea el dividendo $N = 2^4 . 3^2 . 5 . 11 . 17$ y el divisor $N' = 2^3 . 3^2 . 11$.

El dividendo es divisible por 2^3, porque lo es uno de sus factores, el 2^4, por tener el exponente mayor que el del divisor, y la división se hace restando los exponentes (número 102), es divisible por 3^2, porque tiene este factor, y la división se hace suprimiéndole, y por 11 por la misma razón. Luego el dividendo es divisible por los números 2^3, 3^2 y 11, que son primos entre sí dos á dos (núm. 159), luego será divisible por su producto (núm. 162).

Si el divisor tuviese algún factor primo distinto de los del dividendo, sería primo con cada uno de los factores del dividendo, porque los números primos, son primos entre sí y lo mismo sus potencias (núm. 159), luego este factor primo distinto sería primo con el dividendo (núm. 160), y en consecuencia el dividendo no sería divisible por él, ni por el divisor, que es un múltiplo suyo.

Si el divisor contuviese algún factor 3^3, por ejemplo, con exponente más elevado que en el dividendo, como 3^3 es un factor primo con todos los del dividendo, á excepción de 3^2, debería dividir á 3^2 (núm. 136), lo cual es imposible porque $3^3 > 3^2$; entonces el dividendo tampoco sería divisible por el divisor, que es un múltiplo de 3^3. Luego la condición enunciada es necesaria y suficiente para que la disión sea exacta. Cuando esta condición se cumple, el cociente se halla dividiendo sucesivamenie por los factores del divisor (núm. 101), aplicando á cada uno la regla de división de potencias (núm. 102), ó de la división por uno de los factores del dividendo.

En los números propuestos tendremos:

$$2^4 . 3^2 . 5 . 11 . 17 : 2^3 . 3^2 . 11 = 2 . 5 . 17$$

169. El teorema que acabamos de demostrar se aplica á la determinación de todos los divisores de un número dado.

Sea el número, $360 = 2^3 . 3^2 . 5$. Los divisores de 360 serán, según el teorema anterior, la unidad, que es factor de todos los números, las potencias de los factores 2, 3 y 5, cuyos exponentes no pasen respectivamente de 3, 2 y 1, y los productos de multiplicar dichos factores de dos en dos y de tres en tres, de todas las maneras posibles.

Por consiguiente, para formar ordenamente dichos divisores, escribiremos en una línea horizontal la unidad y las potencias sucesivas del primer factor primo

1	2	4	8

las multiplicaremos por la unidad y las potencias primera y segunda del segundo factor primo, que es 3, y tendremos los productos:

1	2	4	8
3	6	12	24
9	18	36	72

y multiplicando todos estos productos por la unidad y por 5, puesto que no entra más que la primera potencia de 5, tendremos:

1	2	4	8
3	6	12	24
9	18	36	72
5	10	20	40
15	30	60	120
45	90	180	360

Se debe observar que cuando se multiplica por la unidad y las potencias de algún factor primo, los productos por la unidad están ya escritos y no hay necesidad de repetirlos; de suerte que basta escribir, debajo de lo que ya se tenía escrito, los productos por las potencias del factor primo que se considera.

El último de los divisores debe resultar igual al número propuesto.

Composición del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo por los factores primos.

170. *El máximo común divisor de dos ó más números, es el producto de los factores primos comunes, afectados de los menores exponentes.*

El producto de los factores primos comunes afectados de los menores exponentes es divisor de los números propuestos (núm. 168), porque sólo contiene los factores comunes con un exponente á lo más igual al que tienen en dichos números. Es el mayor de todos los divisores, porque si tuviese algún factor no común á todos los números, dejaría de ser divisor de todos; y si alguno de los factores comunes no estuviese afectado del menor exponente, también dejaría de ser divisor común.

Ejemplo: Sean los números $360 = 2^3 . 2^2 . 5$; $420 = 2^2 . 3 . 5 . 7$; $1980 = 2^2 . 3^2 . 5 . 11$.

El máximo común divisor será $2^2 . 3 . 5 = 60$; porque los factores comunes son 2, 3 y 5 y los menores exponentes de que están afectados 2, 1 y 1.

171. *El mínimo común múltiplo de dos, ó más números, es el producto de todos sus factores primos, afectados de los mayores exponentes.*

El producto de todos los factores primos, afectados de los mayores exponentes, es múltiplo de los números propuestos (núm. 168), porque contiene todos sus factores primos con un exponente, cuando menos igual al que tienen en los números. Es el menor de todos los múltiplos, porque para ser múltiplo no se le puede quitar ningún factor, ni rebajar ningún exponente.

Ejemplo: Sean los números $360 = 2^3 . 3^3 . 5$; $420 = 2^2 . 3 . 5 . 7$; $1980 = 2^2 . 3^2 . 5 . 11$.

El mínimo común múltiplo será $2^3 . 3^2 . 5 . 7 . 11$, porque contiene todos los factores de los números dados, con los mayores exponentes de que están afectados. (*)

(*) El método de hallar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo por los factores primos es muy espedito cuando los factores son pequeños, pero en el caso contrario conviene recurrir á los métodos expuestos en los números 127 y siguientes y 143 y siguientes. Para facilitar la descomposición de algunos números en factores sirve la tabla XXII de las Tablas de logaritmos de Sánchez Ramos, 2.ª edición. Contiene dicha tabla los números compuestos inferiores á 8358 y no divisibles por 2, 3, 5 y 11, con la indicación, para cada número, de su menor factor primo,

LIBRO SEGUNDO.

LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS.

CAPÍTULO PRIMERO.

La numeración, propiedades y transformaciones de los fraccionarios.

I. La numeración de los fraccionarios.

172. Hemos dicho (núm. 8) que cuando se trata de medir una cantidad por medio de otra de su misma naturaleza que se toma por unidad, puede suceder que la cantidad no contenga exactamente á la unidad, pero sí á una parte alícuota suya, y el número que entonces resulta es *fraccionario.*

Número fraccionario es, pues, un conjunto de partes iguales de la unidad. Cada una de las partes iguales de la unidad se llama *unidad fraccionaria.* Las unidades fraccionarias reciben los nombres de *medios*, *tercios*, *cuartos*, *quintos*, *sextos*, *séptimos*, *octavos*, *novenos* y *décimos*, según que resulten de dividir la unidad entera en 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 partes respectivamente. Pero en general se designa la unidad fraccionaria enunciando el número de partes en que se divide la unidad entera y añadiendo la terminación *avos.* Así, cuando la unidad se divide en 27 partes se llaman *veintisiete avos.*

El número fraccionario se suele llamar también *fracción* y *quebrado.* De la definición de número fraccionario se deduce que para su expresión se necesitan dos números; uno, que se llama *numerador*, indica cuantas unidades fraccionarias le forman, y otro, que se llama *denominador*, indica en cuantas partes se divide la unidad.

El numerador y denominador se suelen llamar términos del quebrado.

Para escribir un número fraccionario se escribe el numerador y debajo el denominador, separándolos por una raya horizontal. Así $\frac{12}{17}$ es un quebrado formado por 12 unidades iguales á un *diez y siete avo*, cada una.

Para leer un quebrado se lee el numerador y después el denominador añadiendo la terminación avos. Así $\frac{12}{17}$ se lee *doce diez y siete avos*. Si el denominador es menor que 10, se lee el numerador y después el denominador, como partitivo. Así $\frac{3}{4}$, se lee, *tres cuartos*.

173. Si el denominador de un quebrado es la unidad, la unidad fraccionaria es igual á la unidad entera, luego el valor del quebrado es igual al numerador.

Así, $\frac{3}{1}$, $\frac{5}{1}$, son quebrados iguales á 3 y á 5 unidades respectivamente.

Luego: *todo número entero se puede considerar, ó escribir como un fraccionario cuyo númerador es el entero y cuyo denominador es la unidad.*

174. Si con un mismo denominador formamos una serie de quebrados, de numeradores crecientes, por ejemplo:

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3}, \frac{7}{3} \ldots\ldots$$

es evidente que el valor de la unidad fraccionaria se conserva constantemente igual á $\frac{1}{3}$, pero que el número de unidades fraccionarias crece con los númeradores, y que por consiguiente los quebrados anteriores forman una serie creciente. Luego, *cuando se conserva constante el denominador, los quebrados aumentan, ó disminuyen, cuando aumenta, ó disminuye su numerador.*

Si con un mismo numerador formamos una serie de quebrados de denominadores crecientes, por ejemplo:

12

$$\frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{3}{3}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{6}, \frac{3}{7}\ldots\ldots$$

es evidente que aumentando el número de partes en que se divide la unidad, el valor de cada parte disminuye, pero la serie anterior está formada por quebrado, que por tener el mismo numerador, cada uno comprende 3 unidades fraccionarias cuyo valor va disminuyendo, luego forman una serie decreciente. *Entonces, cuando se conserva constante el numerador, los quebrados disminuyen, ó aumentan cuando aumenta, ó disminuye el denominador.*

Si el numerador y denominador son iguales, el quebrado es igual á la unidad.

Si el numerador es mayor que el denominador, el quebrado es mayor que la unidad, y si el numerador es menor que el denominador, el quebrado es menor que la unidad.

Estas propiedades son consecuencia inmediata de la definición de quebrado y de lo demostrado anteriormente.

Se suele llamar *quebrado propio*, ó *fracción pura* al que es menor que la unidad; y *quebrados impropios* á los demás.

II. Las propiedades y transformaciones de los números fraccionarios.

175. *Si se multiplica el numerador de un quebrado por un número entero, ó se divide por uno de sus factores, el quebrado queda multiplicado, ó dividido por dicho número.*

1.° Sea el quebrado $\frac{8}{12}$; si multiplicamos su numerador por 4, se formará el quebrado $\frac{8\times4}{12}$; como el valor de la unidad fraccionaria continúa siendo $\frac{1}{12}$ y el número de unidades fraccionarias es 4 vecer mayor, el quebrado se habrá hecho 4 veces mayor, ó habrá quedado multiplicado por 4.

2.° Si dividimos el numerador por su factor 4, se formará el quebrado $\frac{8:4}{12}$. El valor de la unidad fraccionaria es $\frac{1}{12}$, como en el quebrado primitivo; pero ahora el número de unidades fraccionarias es 4 veces menor, luego el quebrado se habrá hecho 4 veces menor, ó habrá quedado dividido por 4.

176. *Si se multiplica el denominador de un quebrado por un número entero, ó se divide por uno de sus factores, el quebrado queda dividido, ó multiplicado por dicho número.*

1.° Sea el quebrado $\frac{8}{12}$, si multiplicamos su denominador por 4, se formará el quebrado $\frac{8}{12 \times 4}$: ahora de las unidades fraccionarias $\frac{1}{12 \times 4}$ se necesitan 4 veces más para formar una unidad entera, que de las unidades fraccionarias $\frac{1}{12}$, luego aquéllas son 4 veces menores que éstas y como los dos quebrados $\frac{8}{12}$ y $\frac{8}{12 \times 4}$ están formados por el mismo número de unidades fraccionarias, el segundo será 4 veces menor que el primero, ó será igual al primero dividido por 4.

2.° Si dividimos el denominador por su factor 4, se formará el quebrado $\frac{8}{12 : 4}$, y como en éste la unidad fraccionaria es 4 veces mayor que en $\frac{8}{12}$ y en ambos quebrados hay el mismo número de unidades fraccionarias, el quebrado $\frac{8}{12 : 4}$ es 4 veces mayor que $\frac{8}{12}$, ó será igual al producto de $\frac{8}{12}$ por 4.

177. Escolio. *Para multiplicar un quebrado por un entero se multiplica el numerador por el entero dejando el mismo denominador: y si el entero es factor del denominador, se puede dividir el denominador por el entero, dejando el mismo numerador.*

Para dividir un quebrado por un entero se multiplica el denominador por el entero dejando el mismo numerador; y si el entero es factor del numerador, se puede dividir el numerador por el entero, dejando el mismo denominador.

178. ESCOLIO 2.° *Como caso particular conviene notar que el producto de un quebrado por su denomidador es igual á su numerador.* Porque para hacer la multiplicación, podemos dividir el denominador por sí mismo y quedará por denominador la unidad.

Así, $\frac{4}{9} \times 9 = \frac{4}{9:9} = \frac{4}{1} = 4$

179. *Si los dos términos de un quebrado se multiplican por un número entero, ó se dividen por un factor común á ambos, el quebrado no varía.*

1.° Sea el quebrado $\frac{8}{12}$, si multiplicamos por 4 el numerador, se tendrá $\frac{8 \times 4}{12}$, que es 4 veces mayor que el propuesto, y multiplicando el denominador de este último por 4, se forma el quebrado $\frac{8 \times 4}{12 \times 4}$, que es 4 veces menor que $\frac{8 \times 4}{12}$, y por consiguiente será igual á $\frac{8}{12}$.

2.° Si dividimos el numerador del quebrado $\frac{8}{12}$ por 4, se tendrá $\frac{8:4}{12}$, que es 4 veces menor que el propuesto, y dividiendo el denominador de éste por 4, resultará $\frac{8:4}{12:4}$, que es 4 veces mayor que $\frac{8:4}{12}$, y por consiguiente, será igual á $\frac{8}{12}$.

180. *Todo número entero se puede poner bajo la forma de una fracción de denominador dado.*

Sea un número cualquiera, 8 por ejemplo, el que se quiere reducir á la forma fraccionaria de un denominador dado, 5, por ejemplo.

$\frac{12}{12} = \frac{4|12 \times 4}{12} = 1$

A todo número entero se le puede suponer por denominador la unidad (núm. 173), luego tendremos:

$$8 = \frac{8}{1}$$

pero si multiplicamos por 5 los dos términos del quebrado $\frac{8}{1}$, el quebrado no varía (núm. 179), luego:

$$\frac{8}{1} = \frac{8 \times 5}{5} \text{ ó bien } 8 = \frac{8 \times 5}{5}$$

181. Se llama *número mixto* un número compuesto de un entero y una fracción menor que la unidad.

Así, $12 + \frac{5}{7}$ es un número mixto. Generalmente se suprime el signo + y sólo se escribe $12\frac{5}{7}$.

Una expresión compuesta de un entero y una fracción se puede transformar en un quebrado equivalente; para esto se multiplica el entero por el denominador de la fracción y al producto se añade el numerador poniendo el resultado por numerador y dejando por denominador el mismo de la fracción.

Sea $12\frac{5}{7}$. El entero 12 reducido á séptimos es $\frac{12 \times 7}{7}$ (núm. 180); luego el número de *séptimos* contenidos en el entero es 12×7, y como en el mixto hay además otros 5 séptimos, el número total de séptimos será $12 \times 7 + 5$, y tendremos:

$$12\frac{5}{7} = \frac{12 \times 7 + 5}{7} = \frac{89}{7}$$

182. *Para reducir un quebrado mayor que la unidad á número mixto, se divide el numerador por el denominador, el cociente será la parte entera y la fraccionaria será un quebrado cuyo numerador es el resto y el denominador el divisor.*

Sea el quebrado $\frac{89}{7}$. Como cada unidad contiene 7 *séptimos*, el número de unidades contenidas en $\frac{89}{7}$ es igual al número de veces que 89 séptimos contiene á 7 séptimos, ó sea el número de veces que 89 contiene á 7. Dividiendo 89 por 7 se halla el cociente 12 y el resto 5, luego 89 séptimos contiene 12 veces á 7 séptimos y quedan además otros 5 séptimos; entonces 89 séptimos es igual á 12 unidades y 5 séptimos, se tendrá pues:

$$\frac{89}{7} = 12\,\frac{5}{7}.$$

Si el cociente del numerador por el denominador fuese exacto, el quebrado sería igual á un número entero. De aquí se deduce que: *para que un quebrado sea equivalente á un número entero, se necesita que el numerador del quebrado sea divisible por el denominador.*

183. Sabemos que si una división es inexacta, el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente más el residuo. Ahora bien; si formamos un quebrado cuyo numerador sea el residuo y cuyo denominador sea el divisor y le multiplicamos por el divisor, dará de producto el residuo (núm. 178), que es su numerador; luego este quebrado unido al cociente entero formará un número mixto que multiplicado por el divisor reproducirá el dividendo.

En virtud de esto, si llamamos cociente completo de la división al número mixto formado por el cociente entero y una fracción cuyo numerador sea el resto y el denominador el divisor, podremos adoptar para definición de la división la siguiente: *división es una operación que tiene por objeto, dados un producto y uno de los factores, hallar el otro.* Esta definición general sólo la pudimos aplicar al caso de la división exacta (núm. 78) en la teoría de los números enteros.

184. *Un quebrado cualquiera se puede considerar como un cociente de su numerador por su denominador,* porque si multiplicamos el quebrado por el denominador, el producto es el numerador.

Podremos por consiguiente considerar divisiones en que el dividendo *sea menor que el divisor* y enunciar como propiedades de la división todas las propiedades de las fracciones sin más que cambiar las palabras *numerador*, *denominador* y *quebrado*, ó *fracción* en las de *dividendo*, *divisor* y *cociente*.

Por ejemplo, la propiedad núm. 175 será: *si se multiplica el dividendo por un número entero ó se divide por uno de sus factores, el cociente queda multiplicado, ó dividido por dicho número.*

Simplificación de las fracciones.

185. Hemos visto (núm. 179) que una fracción no varía si se multiplican sus dos términos por un mismo número, ó se dividen por un factor común á ambos; luego hay muchas fracciones iguales y que tienen términos distintos, y por consiguiente podemos proponernos hallar cual es, entre todas las fracciones iguales, la de términos menores.

La fracción de términos menores entre todas las iguales se llama *fracción irreducible*; la operación de convertir una fracción en otra igual é irreducible se llama *simplificación de una fracción*.

186. *Si una fracción tiene su numerador y denominador primos entre sí, toda fraccion igual á ella tendrá sus términos equimúltiplos de los de la primera.* (*)

Sea la fracción $\frac{2}{3}$, cuyos términos son primos entre sí, igual á $\frac{a}{b}$. Si multiplicamos ambas fracciones por b, los productos serán (núm. 177) $\frac{2 \times b}{3}$ y $\frac{a \times b}{b}$, fracciones todavía iguales, pero $\frac{a \times b}{b} = a$, luego tendremos:

$$\frac{2 \times b}{3} = a$$

como el segundo miembro de esta igualdad es un número

(*) Dos números son equimúltiplos de otros dos cuando resultan de multiplicar éstos por un mismo número. Así, 24 y 33 son equimúltiplos de 8 y 11, porque son respectivamente 8×3 y 11×3.

entero, el primero también lo será; luego el producto $2 \times b$ será divisible por 3; pero 2 y 3 son primos entre sí, luego b será divisible por 3 (núm. 136), y llamando c al cociente de la división, tendremos:

$$b = 3 \times c$$

sustituyendo este valor de b en la igualdad anterior

$$\frac{2 \times 3 \times c}{3} = a, \quad \text{ó bien} \quad 2 \times c = a$$

luego los números a y b son los productos de 2 y 3 por un mismo número c, ó son equimúltiplos de 2 y 3.

187. *Toda fracción cuyos términos son primos entre sí es irreducible.*

Porque cualquiera otra igual á ella tendrá sus términos mayores (núm. 186.)

Recíprocamente: *los términos de una fracción irreducible son primos entre sí.* Porque si no lo fueran, dividiéndolos por su máximo común divisor se obtendría otra fracción irreducible igual á la primera y de términos menores, luego la primera no sería irreducible, lo que es contra la hipótesis.

188. De lo expuesto en los números anteriores se deduce: *que para simplificar una fracción basta hallar el máximo común divisor de sus dos términos y dividirlos por él.*

Porque siendo los cocientes que se obtienen primos entre sí (núm. 135), la fracción que resulta será irreducible.

Ejemplo. Simplificar la fracción $\frac{1890}{2970}$. El m. c. d. de sus dos términos es 270 y los cocientes de dividir 1890 y 2970 por 270 son, respectivamente, 7 y 11, luego tendremos:

$$\frac{1890}{2970} = \frac{7}{11}$$

También se puede simplificar una fracción dividiendo sus dos términos por los factores comunes que se aperciban á primera vista.

Así, los términos de la fracción $\frac{1890}{2970}$ tienen el factor común 10: suprimiéndole, resultará $\frac{189}{297}$. Los dos términos tienen todavía el factor común 9, suprimiéndole queda $\frac{21}{33}$ y suprimiendo ahora el factor común 3, resultará $\frac{7}{11}$ luego tendremos:

$$\frac{1890}{2970}=\frac{189}{297}=\frac{21}{33}=\frac{7}{11}$$

Si no se viera, á primera vista que la fracción $\frac{7}{11}$ es es irreducible, hallaríamos el *m. c. d.* de sus dos términos y dividiríamos por él para acabar la simplificación.

189. Para formar las fracciones iguales á una fracción irreducible dada, se multiplican sus dos términos por la serie natural de los números enteros.

Dos fracciones irreducibles iguales, tienen sus términos iguales.

Porque los términos de cada una tienen que ser al mismo tiempo múltiplos y divisores de los de la otra (núm. 186)

Redución de fracciones á un común denominador.

190. *Reducir fracciones á un común denominador es transformarlas en otras iguales y que tengan todas el mismo denominador.*

Supondremos que las fracciones que se trata de reducir á un común denominador son irreducibles, si no lo son, se comienza por simplificarlas.

191. Como el denominador de una fracción igual á otra irreducible es múltiplo del de ésta (núm. 186), el denominador común de varias fracciones iguales á otras irreducibles *deberá ser múltiplo de todos los denominadores de las fracciones irreducibles;* y para que los valores de las fracciones no se alteren, se tendrá que multiplicar el numerador y denominador de cada una por el mismo número.

Si además queremos que el denominador común sea el menor posible, deberá ser igual al mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones irreducibles.

192. De estas consideraciones se dedude la siguiente regla: *Para reducir al mínimo denominador común varias fracciones, después de simplificadas, se multiplican los dos términos de cada una por el cociente de dividir por su denominador el mínimo común múltiplo de los denominadores.*

Ejemplo. Sean las fracciones irreducibles.

$$\frac{5}{8}, \frac{7}{12}, \frac{8}{15}, \frac{9}{20}, \frac{29}{63}$$

El mínimo común múltiplo de los denominadores se puede hallar descomponiéndolos en factores simples y formando el producto de las mayores potencias de todos los factores núm. 171).

Así: $8 = 2^3 \quad 12 = 2^2 \times 3; \; 15 = 3 \times 5$

$20 = 2^2 \times 5; \; 63 = 3^2 \times 7$

luego el mínimo común múltiplo será

$$2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 2520$$

Dividiéndole por los denominadores, 8, 12, 15, 20 y 63, se hallan los cocientes (núm. 101) $3^2 \times 5 \times 7 = 315$, $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$; $2^3 \times 3 \times 7 = 168$; $2 \times 3^2 \times 7 = 126$, y $2^3 \times 5 = 40$,

y multiplicando respectivamente por estos números los dos términos de las fracciones propuestas se tendrá

$$\frac{5}{8} = \frac{5 \times 315}{8 \times 315} = \frac{1575}{2520}; \; \frac{7}{12} = \frac{7 \times 210}{12 \times 210} = \frac{1470}{2520}$$

$$\frac{8}{15} = \frac{8 \times 168}{15 \times 168} = \frac{1344}{2520}; \; \frac{9}{20} = \frac{9 \times 126}{20 \times 126} = \frac{1134}{2520}$$

$$\frac{29}{63} = \frac{29 \times 40}{63 \times 40} = \frac{1160}{2520}.$$

193. Otra regla para reducir fracciones á un común denominador. *Para reducir varias fracciones á un común denominador, se comienza por simplificarlas si no son irre-*

ducibles, y se multiplican los dos términos de cada fracción por el producto de los denominadares de las demás.

Las fracciones que así se formen serán iguales á las propuestas, porque resultan de multiplicar los dos términos de cada una por el producto de los denominadores de las demás y tendrán todas por denominador común el producto de los denominadores.

Ejemplo. Sean las fracciones irreducibles

$$\frac{5}{8}, \frac{7}{12}, \frac{29}{63}$$

serán iguales á las fracciones

$$\frac{5 \times 12 \times 63}{8 \times 12 \times 63}, \frac{7 \times 8 \times 63}{12 \times 8 \times 63}, \frac{29 \times 8 \times 12}{63 \times 8 \times 12}$$

y efectuando las multiplicaciones resultará:

$$\frac{3780}{4536}, \frac{3528}{4536}, \frac{2784}{4536}$$

CAPÍTULO II.

LAS FRACCIONES DECIMALES.

194. La unidad se puede dividir en 10, 100, 1000,... partes iguales que reciben los nombres de *décimas, centésimas, milésimas.....* Todas ellas se llaman unidades *fraccionarias decimales;* siendo de *primer orden* las décimas; de *segundo orden*, las centésimas; de *tercero*, las milésimas, etc. De estas definiciones se deduce que una unidad tiene 10 décimas; una décima, 10 centésimas; una centésima, 10 milésimas, y en general, *una unidad decimal cualquiera vale 10 unidades del orden siguiente.*

Número decimal es un número formado por varias unidades y partes decimales de la unidad. El número decimal tiene menos de 10 unidades de cada orden, porque 10 unidades de un orden forman una del orden inmediatamente mayor.

195. El principio fundamental de la escritura de los

números enteros es aplicable á los decimales; y podremos convenir en que el primer lugar á la derecha de las unidades le ocupen las décimas, el segundo las centésimas, el tercero las milésimas y, en general, convenir en que cada cifra decimal escrita á la derecha de otra represente unidades decimales del orden inmediatamente menor.

Para saber donde termina la parte entera y comienza la decimal se escribe á la derecha de la cifra de unidades una *coma* ó *vírgula* que marque la separación de ambas partes. Si el número decimal es menor que la unidad, no tiene parte entera y se escribe un cero en el lugar de las unidades.

Escribir un número decimal compuesto de 123 *unidades*, 8 *décimas*, 7 *centésimas*, 4 *diez milésimas* y 5 *millonésimas*.

Escribiremos primero la parte entera y á la derecha de las unidades la coma, haciendo ocupar después á cada una de las cifras decimales el lugar que le corresponde á la derecha de la coma y escribiendo ceros en los lugares correspondientes á las *milésimas* y *cienmilésimas*, que no hay en el número propuesto. Tendremos, pues, 123,870409.

Escribir el número decimal 8 *centésimas* y 6 *diez milésimas*.

Como no tiene parte entera, ocuparemos el lugar de las unidades con un cero, y el número será: 0,0806.

196. Para leer un número decimal se puede leer la parte entera y las distintas cifras que componen su parte decimal, una á una, con la denominación que les corresponda. Pero es preferible *leer la parte entera, si la hay, y después la decimal como si fuese entera, añadiendo la denominación correspondiente á la última cifra decimal.*

Así, el número 24,2307, se leerá 24 *unidades* y 2307 *diez milésimas*. Esta regla se funda en que 2 *décimas* valen 20 *centésimas*, 200 *milésimas*, ó 2000 *diez milésimas* y 3 *centésimas* valen 30 *milésimas*, ó 300 *diez milésimas*.

Algunas veces se lee un número decimal como si fuese *entero, pero dando la denominación correspondiente á su última cifra decimal.*

Así, el número 24,2307, se puede leer 242307 *diez milésimas.*

Cuando se trata de un decimal compuesto de muchas cifras se pueden leer de tres en tres, dando á cada grupo la denominación que corresponda á su cifra de la derecha. El último grupo de la derecha podrá constar de una ó dos cifras.

Así, el número 36,12620037, se puede leer 36 *unidades* 126 *milésimas*, 200 *millonésimas* y 37 *cien millonésimas.*

197. *Todo número decimal es una fracción cuyo denominador es la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene el número, y cuyo numerador es el decimal sin la coma.*

En efecto, sea el número 24,2307. Hemos visto que este número se puede leer como un número entero dándole la denominación de su última cifra decimal, y será 242307 *diez milésimas*; luego esta lectura es la de un quebrado cuyo numerador es 242307 y cuyo denominador es 10000, y tendremos:

$$24{,}2307 = \frac{242307}{10000}$$

198. En virtud de esto, todas las propiedades de los quebrados son aplicables á los números decimales; por esta razón se les llama tambien *fracciones decimales*, y á las demás fracciones, para distinguirlas de estas, *fracciones ordinarias.*

Aunque podríamos dar á las fracciones decimales la forma de fracciones ordinarias, les conservaremos la forma entera y estudiaremos algunas otras propiedades importantes que les corresponden.

199. *Una fracción decimal no cambia de valor cuando se añaden, ó suprimen ceros de su derecha.*

Sea el número 32,45. Añadiendo dos ceros á su derecha tendremos: 32,4500; que es igual al anterior, porque se compone como el primero de 32 *unidades* y 45 *centési-*

mas; pues la parte añadida no tiene valor ninguno, ni hace variar el valor relativo de las demás cifras.

Del mismo modo se demuestra que la fracción decimal no varía suprimiendo ceros de su derecha, si los tiene.

200. *Si en una fracción decimal se corre la coma* 1, 2, 3... *lugares á la derecha, ó á la izquierda, queda multiplicada, o dividida por 10, 100, 1000..... es decir, queda multiplicada ó dividida por la unidad seguida de tantos ceros como lugares se ha corrido la coma.*

Sea la fracción 385,2471. Si corremos la coma dos lugares á la derecha tendremos: 38524,71. La primera fracción tiene 3852471 *diez milésimas*, y la segunda 3852471 *centésimas*: es decir, el mismo número de unidades decimales, pero 100 veces mayores, luego será 100 veces mayor, ó sea el producto de la primera por 100.

Se debe observar que el valor relativo de cada una de las cifras se ha hecho 100 veces mayor.

Si en la misma fracción corremos la coma dos lugares á la izquierda, se tendrá 3,852471, es decir, 3852471 *millonésimas*, ó sea el mismo número de unidades decimales que primitivamente, pero 100 veces menores, luego la fracción habrá quedado dividida por 100.

Si no hubiese bastantes lugares á la derecha, ó á la izquierda para correr la coma, se suplen con un número suficiente de ceros.

Así: $32,25 \times 10000 = 322500$

$32,25 : 10000 = 0,003225$

De lo expuesto se deduce que: *para multiplicar, ó dividir un número decimal por la unidad seguida de ceros se corre la coma á la derecha, ó á la izquierda tantos lugares, como ceros siguen á la unidad.*

CAPITULO III.

REDUCCIÓN DE LAS FRACCIONES ORDINARIAS Á DECIMALES Y VICEVERSA.

I. Reducción de las fracciones ordinarias á decimales.

201. Si queremos convertir una fracción ordinaria irreducible en una fracción decimal equivalente, el denominador de la fracción decimal debe ser múltiplo del denominador de la fracción irreducible (núm. 186).

Como el denominador de la fracción decimal es la unidad seguida de ceros (núm. 197) y la unidad seguida de ceros es una potencia de 10, la podremos expresar en general por 10^n, siendo n el exponente de la potencia, igual al números de ceros que siguen á la unidad.

Sea, pues, $\frac{a}{b}$ una fracción irreducible y $\frac{x}{10^n}$ la fracción decimal equivalente, tendremos:

$$\frac{a}{b}=\frac{x}{10^n}$$

y multiplicando las dos fracciones por 10^n

$$\frac{a\,10^n}{b}=x. \qquad (1)$$

De esta igualdad se deduce que: *para convertir una fracción ordinaria en decimal equivalente, se multiplica el numerador de la fracción por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales se han de obtener y el cociente será el numerador de la fracción decimal. Después, para obtener la fracción decimal, bastará separar de la derecha del cociente tantas cifras decimales como ceros se añadieron al numerador de la fracción ordinaria.*

No se necesita añadir los ceros al numerador de la fracción ordinaria al comenzar la división, sino que se obtendrá el cociente entero de la división de a por b, y á la derecha de las unidades se colocará la coma, escribiendo después los cocientes que se obtengan, añadiendo un cero á cada uno de los restos hasta terminar la operación.

Así, para convertir en decimal la fracción $\frac{13}{16}$ tendremos:

$$\begin{array}{r|l} 130 & 16 \\ \cline{2-2} 20 & 0{,}8125 \\ 40 & \\ 80 & \\ 0 & \end{array}$$

202. Siendo irreducible la fracción $\frac{a}{b}$, a y b son primos entre sí: luego para que el cociente indicado en el primer miembro de la igualdad (1) sea un número entero, se necesita que 10^n sea un múltiplo de b (núm. 136). Ahora como 10^n es igual á $2^n \times 5^n$; *para que una fracción irreducible se pueda convertir exactamente en decimal, se necesita que su denominador no contenga más factores primos que 2 y 5.*

Si el denominador de la fracción irreducible contiene algún factor primo distinto de 2 y 5, ninguna potencia de 10 podrá ser divisible por el denominador (núm. 168), y la fracción no se podrá reducir exactamente á decimal. En este caso se puede hallar el valor de la fracción con menor error de una unidad decimal dada, continuando la división hasta obtener en el cociente la cifra de dicho orden.

Ejemplo. Hallar con menor error de *una diezmilésima* el valor de la fracción $\frac{5}{7}$, tendremos:

$$\begin{array}{r|l} 50 & 7 \\ \cline{2-2} 10 & 0{,}7142 \\ 30 & \\ 20 & \\ 6 & \end{array}$$

El cociente 0,7142 expresa con menos error de $\frac{1}{10000}$, por defecto, el valor de $\frac{5}{7}$, el núm. 0,7143 expresará la fracción $\frac{1}{10000}$ con un error, por exceso, menor que $\frac{1}{10000}$.

203. En toda división inexacta se puede obtener el cociente con menor error de una unidad decimal dada, siguiendo el procedimiento que hemos expuesto en los párrafos anteriores. Porque el cociente se puede considerar como una fracción cuyo numerador es el dividendo y cuyo denominador es el divisor (núm. 184).

Se debe advertir, *que como el dividendo y el divisor pueden no ser primos entre sí, algunas veces se llegará á cociente exacto aunque el divisor contenga factores primos distintos de 2 y 5*. Para esto bastará evidentemente que dichos factores primos sean también factores del dividendo.

Ejemplo. Hallar el cociente de los números 2583 y 72. Estos números son divisibles por 9 (núm. 121), y como el cociente de 72 entre 9 es 8 y este último número no tiene más factor primo que 2, aproximando el cociente con decimales se llegará al resto cero.

$$\begin{array}{r|l} 2583 & 72 \\ \cline{2-2} 423 & 35{,}875 \\ 630 & \\ 540 & \\ 360 & \\ 0 & \end{array}$$

203. *Si el denominador de una fracción irreducible no contiene más factores primos que 2 y 5, la fracción decimal exacta á que se puede reducir tendrá tantas cifras decimales como unidades el mayor de los exponentes de dichos factores.*

Sea la fracción irreducible $\frac{21}{2^3 \cdot 5}$. Multiplicando sus dos términos por 5^2, se tendrá

$$\frac{21}{2^3 \cdot 5} = \frac{21 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{525}{1000} = 0{,}525$$

204. Una fracción decimal de ilimitado número de cifras es *periódica* cuando á partir de cierto lugar un grupo de cifras se repite en el mismo orden, periódica é indefinidamente: el grupo de cifras repetidas se llama *período*. Si el período comienza en primera decimal, la fracción se llama *periódica pura*, y si comienza en otra cifra decimal

cualquiera, *periódica mixta*: en este último caso las cifras decimales anteriores al período se llaman parte *irregular*, ó no *periódica*.

La fracción 0,341341341..... es una fracción periódica pura cuyo período es 341.

La fracción 4,17215215215..... es una fracción periódica mixta cuyo período es 215 y cuya parte no periódica es 17.

Se pueden escribir abreviadamente las fracciones periódicas poniendo un solo período en un paréntesis. Así, las fracciones anteriores serán 0,(341) y 4,17(215).

205. *Cuando una fracción ordinaria no se puede convertir exactamente en decimal, origina una fracción decimal periódica.*

En efecto; sea $\frac{a}{b}$ una fracción que no se puede reducir exactamente á decimal.

En la división que se practica para la reducción no se podrá llegar al resto cero, porque entonces la fracción se reduciría exactamente á decimal; pero los restos son todos menores que el divisor b, luego al cabo de cierto número de divisiones parciales, á lo sumo $b - 1$, se repetirá algún resto, y por consiguiente se repetirán los dividendos parciales y cocientes siguientes.

Ejemplos. Reducir á decimales las fracciones $\frac{129}{37}$ y $\frac{23}{44}$

$$
\begin{array}{r|l}
129 & 37 \\ \cline{2-2}
180 & 3,486486... \\
320 & \\
240 & \\
180 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
230 & 44 \\ \cline{2-2}
100 & 0,522727..... \\
120 & \\
320 & \\
120 &
\end{array}
$$

de donde resulta $\frac{129}{37} = 3,(486)$ $\frac{23}{44} = 0,52(27)$,

II. Reducción de las fracciones decimales á ordinarias.

206. En la reducción de fracciones decimales á ordinarias consideraremos tres casos.

1.° *Que la decimal sea exacta.* 2.° *Que sea periódica pura* 3.° *Que sea periódica mixta.*

207. PRIMER CASO. *Para reducir á ordinaria una frac-*

ción decimal exacta, se pone por numerador la fracción sin la coma y por denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene la fracción.

Esta regla no es más que una consecuencia de lo que establecimos en el núm. 197.

Puesto que la fracción *generatriz de una decimal exacta tiene por denominador la unidad seguida de ceros, no contendrá en su denominador más factores primos que* 2 y 5. Si se puede simplificar, podrá perder uno de ellos y no puede perder los dos porque el numerador no termina en cero.

Ejemplo. Reducir á ordinaria la fracción decimal 0,275.

Se tendrá: $0{,}275 = \frac{275}{1000} = \frac{55}{200} = \frac{11}{40}$

208. 2.° Caso. *Para reducir á ordinaria una fracción decimal periódica pura menor que la unidad, se pone por numerador el período y por denominador tantos nueves como cifras tiene el período.*

Sea la fracción periódica pura 0, (126). Designando por f la *fracción generatriz* que la origina, tendremos:

$$f = 0{,}(126)$$

Si corremos la coma á la derecha del primer período habremos multiplicado por 1000, y tendremos:

$$1000 f = 126,\ (126)$$

restando estas dos igualdades (*) resultará

$$999 f = 126$$

y dividiendo por 999, quedará finalmente

$$f = \frac{126}{999} \quad \text{ó bien} \quad 0{,}(126) = \frac{126}{999}$$

Si la fracción decimal es mayor que la unidad, se convertirá en un número mixto, cuya parte entera es la de la fracción decimal

Así: $41{,}(243) = 41\frac{243}{999}$

El *denominador de la fracción generatriz de una periódica pura es primo con 10, por ser un número compuesto*

(1) La parte decimal está en las dos fracciones compuesta de un número ilimitado de períodos y por consiguiente se puede suponer la misma.

de nueves: por consiguiente, aunque se pueda simplificar, continuará siendo primo con 10.

Así: $0,(126)=\frac{126}{999}=\frac{14}{111}$

209. 3.er Caso. *Para reducir á ordinaria una fracción decimal periódica mixta menor que la unidad, se pone por numerador la parte no periódica, seguida del primer período menos la parte no periódica y por denominador tantos nueves como cifras tiene el período, seguidos de tantos ceros como cifras tiene la parte no periódica.*

Sea la fracción periódica mixta 0,12(324). Designando por f la fracción generatriz, tendremos:

$$f=0,12(324)$$

corriendo la coma á la derecha del período

$$100000\,f=12324,(324)$$

corriéndola á la derecha de la parte no periódica

$$100\,f=12,(324)$$

restando las dos últimas igualdades

$$99900\,f=12324-12$$

y dividiendo por 99900

$$f=\frac{12324-12}{99900},\quad \text{ó bien}\quad 0,12(324)=\frac{12324-12}{99900}$$

Si la fracción decimal es mayor que la unidad, se convertirá en un número mixto que tendrá la misma parte entera que la fracción decimal.

Así: $26,40(101)=26\frac{40101-40}{99900}$

El *denominador de la fracción generatriz de una periódica mixta contiene los factores 2 y 5 y otros distintos*: por simplificación puede perder el 2 ó el 5, pero no los dos á un tiempo, porque para esto se necesitaría que el numerador terminase en un cero cuando menos, y en este caso la última cifra del período y la de la parte no periódica serían iguales y el período comenzaría un lugar antes: tampoco puede el denominador perder por simplificación todos los factores distintos de 2 y 5, porque en este caso después de simplificada la fracción no contendría en su denominador más factores primos que 2 y 5, ó uno de ellos, y sería generatriz de una decimal exacta (núm. 202).

210. Los teoremas de los números 202 y 207 sobre las fracciones decimales exactas son recíprocos. Los teoremas de los números 208 y 209 también tienen sus recíprocos, que se demuestran fácilmente por un método llamado por redución al absurdo.

RECÍPROCO del teorema del núm. 208. *Si una fracción irreducible tiene su denominador primo con 10, es generatriz de una fracción decimal periódica pura.*

Si no originase una fracción decimal periódica pura, originaría una fracción decimal exacta, ó periódica mixta. En el primer caso convertida otra vez en ordinaria, su denominador no contendría más factores primos que 2 y 5 (núm. 207), lo cual es contra la hipótesis. En el segundo caso convertida otra vez en ordinaria, su denominador contendría uno cuando menos de los factores primos 2 y 5 y otros distintos (núm. 209), lo cual es también contra la hipótesis; luego si no puede originar una fracción decimal exacta, ni periódica mixta, originará una periódica pura, como se quería demostrar.

RECÍPROCO del teorema del núm. 209. *Si una fracción irreducible tiene su denominador los factores 2 y 5, ó uno de ellos y otros factores primos distintos es generatriz de una fracción decimal periódica mixta.*

Porque si originase una fracción decimal exacta, ó periódica pura convertida otra vez en ordinaria, su denominador, ó no contendría más factores primos que 2 y 5, ó sería primo con 10: ambas cosas contra la hipótesis, luego será generatriz de una fracción decimal periódica mixta. (*)

(*) Se pueden demostrar directamente estos teoremas al tratar de la conversión de una fracción ordinaria en decimal y no lo hemos hecho por ser este libro muy elemental.

CAPÍTULO IV.

LAS OPERACIONES CON LAS FRACCIONES.

I. La adición de las fracciones.

211. *Sumar números fraccionarios es reunir en un solo número las unidades y partes de la unidad contenidos en otros varios que se llaman sumandos.*

El resultado se llama *suma*, y la operación se indica, como en los enteros, por el signo +.

212. *Para sumar quebrados del mismo denominador se suman los numeradores y á la suma se pone el denominador común.*

Sean las fracciones $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$ y $\frac{3}{7}$. La suma se compondrá de *tantos séptimos* como tienen entre los tres sumandos, y puesto que éstos tienen 4, 5 y 3 *séptimos*, la suma tendrá 4 + 5 + 3 *séptimos*, entonces

$$\frac{4}{7}+\frac{5}{7}+\frac{3}{7}=\frac{4+5+3}{7}=\frac{12}{7}=1\frac{5}{7}$$

213. *Para sumar quebrados de distinto denominador, se reducen á un común denominador y se suman después como en el caso anterior.*

Sean las fracciones $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{9}$ y $\frac{7}{15}$. Reduciendo á un común denominador (núm. 192), tendremos:

$$\frac{3}{5}+\frac{4}{9}+\frac{7}{15}=\frac{27}{45}+\frac{20}{45}+\frac{21}{45}=\frac{20+27+21}{45}=\frac{68}{45}=1\frac{23}{45}$$

214. *Para sumar números que contengan enteros y fracciones, se suman primero las fracciones y después los enteros, añadiendo á la suma de éstos las unidades que resulten de sumar las fracciones.*

Sumar los números $\frac{4}{5}$, 3, $5\frac{4}{7}$ y $2\frac{1}{3}$. Tendremos:

$$\frac{4}{5}+\frac{4}{7}+\frac{1}{3}=\frac{84}{105}+\frac{60}{105}+\frac{35}{105}=\frac{84+60+35}{105}=\frac{179}{105}=1\frac{74}{105}$$

luego: $$\frac{4}{5}+3+5\frac{4}{7}+2\frac{1}{3}=10+1\frac{74}{105}=11\frac{74}{105}$$

215. *Para sumar fracciones decimales se escriben unas debajo de otras de modo que se correspondan las comas y se suman como si fuesen números enteros, y en la suma obtenida se coloca la coma correspondiéndose con las de los sumandos.*

En los números decimales se verifica como en los enteros, que 10 unidades de un orden forman una del orden inmediato superior, luego si suponemos los sumandos descompuestos en sus diferentes órdenes de unidades enteras y decimales, podremos sumar, décimas con décimas, centésimas con centésimas, etc.; unidades con unidades, decenas con decenas, etc., comenzando por la derecha y escribiendo las unidades de cada suma parcial debajo de las cifras que la han producido y reservando las decenas para agregarlas á la suma siguiente.

Sea sumar las fracciones decimales 21,45; 1,3484 y 0,786. Escribiremos los sumandos del modo siguiente, correspondiéndose las comas

21,45
1,3484
0,786
23,5844

La suma de las diez milésimas es 4, la escribiremos porque no llega á 10; la de las milésimas es 14, escribimos 4 y reservamos 1 para agregarla á la suma de las centésimas: la suma de las centésimas es 17 y 1 de la suma anterior 18, escribimos el 8; la suma de las décimas es 14 y uno de la suma anterior 15, etc.

Si quisiéramos que todos los sumandos expresasen unidades decimales del mismo orden, completaríamos con ceros á su derecha los que tuvieran menos; pero es inútil esta operación.

216. Si ocurre sumar fracciones ordinarias con decimales, se reducen á ordinarias ó á decimales para hacer la suma.

II. La sustracción de las fracciones.

217. *Restar números fraccionarios es disminuir un número dado que se llama minuendo en tantas unidades y partes de la unidad como tiene otro número dado que se llama*

sustraendo; ó bien dada una suma de dos sumandos y uno de ellos hallar el otro.

La operación se indica como en los enteros por el signo — y el resultado se llama *resto, exceso, ó diferencia.*

218. *Para restar quebrados del mismo denominador, se restan los numeradores y á la diferencia se pone el denominador común.*

Sea restar las fracciones $\frac{6}{7}$ y $\frac{2}{7}$. Según la definición, la operación es disminuir el número 6 *séptimos* en 2 *séptimos*, luego quedarán 6 — 2 séptimos, y se tendrá:

$$\frac{6}{7} - \frac{2}{7} = \frac{6-2}{7} = \frac{4}{7}$$

219. *Para restar quebrados de distinto denominador, se reducen á un común denominador y se restan después como en el caso anterior.*

Sean las fracciones $\frac{6}{7}$ y $\frac{3}{5}$. Reduciéndolas á un común denominador (núm. 193), se tendrá

$$\frac{6}{7} - \frac{3}{5} = \frac{30}{35} - \frac{21}{35} = \frac{9}{35}$$

220. *Para restar números mixtos, ó números en los cuales entren enteros y fracciones, se restan primero las fracciones y después los enteros, reuniendo en un número mixto los resultados.*

Sea restar los números $4\frac{3}{4}$ y $2\frac{2}{3}$. Tendremos:

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{9}{12} - \frac{8}{12} = \frac{1}{12}$$

de donde

$$4\frac{3}{4} - 2\frac{2}{3} = 2\frac{1}{12}$$

Si la fracción del sustraendo es mayor que la del minuendo, se reduce á fracción una unidad del minuendo para que la sustracción pueda verificarse.

$$6\frac{2}{5} - 3\frac{4}{5} = 5\frac{7}{5} - 3\frac{4}{5} = 2\frac{3}{5}$$

221. *Para restar fracciones decimales, se escriben una debajo de otra de modo que se correspondan las comas, se restan como si fuesen números enteros y en el resto se coloca la coma correspondiéndose con la de los datos.*

Sea restar los números 412,65 y 326,49. Tendremos:

$$\begin{array}{r} 412{,}65 \\ 326{,}49 \\ \hline 86{,}16 \end{array}$$

De las 5 centésimas no se puede restar 9 centésimas, añadiremos á la cifra 5, diez unidades de su orden, y diremos, de 9 á 15 van 6; añadiremos una unidad á la cifra 4 de las décimas del sustraendo y la restaremos de 6. etc.

Si el minuendo y el sustraendo no tienen el mismo número de cifras decimales, se puede completar con ceros el que tenga menos cifras, ó suponerle completado y restar conforme hemos dicho.

Si tenemos que restar una fracción decimal de otra ordinaria ó al contrario, se reducen ambas á decimales ó á ordinarias para efectuar la operación.

III. La multiplicación de las fracciones.

222. Para la multiplicación de números fraccionarios adoptaremos la definición general que ya enunciamos en el núm. 47, diciendo: *multiplicación es una operación que tiene por objeto, dados dos números que se llaman multiplicando y multiplicador, hallar un tercer número, que se llama producto, que esté formado con respecto al multiplicando, como el multiplicador está formado con respecto á la unidad.*

Para la multiplicación se emplea siempre el signo $\times$ y el multiplicando y multiplicador se llaman factores del producto.

223. *Para multiplicar dos fracciones, se multiplican los numeradores y el producto se parte por el de los denominadores.*

Sea multiplicar $\frac{5}{8}$ por $\frac{4}{7}$. Puesto que el multiplicador es las 4 *séptimas* partes de la unidad, el producto deberá ser las 4 séptimas partes del multiplicando, según la definición: luego si supiéramos formar la séptima parte de $\frac{5}{8}$, no tendríamos más que multiplicarla por 4. Pero la séptima parte de un número se obtiene dividiéndole por 7, y como para dividir un quebrado por un entero, se multiplica su denominador por el entero, dejando el mismo numerador (núm. 177), la séptima parte de $\frac{5}{8}$ será $\frac{5}{8 \times 7}$. El producto de este número por 4 se obtiene multiplicando el numerador por 4 y dejando el mismo denominador (núm. 177); luego será $\frac{5 \times 4}{8 \times 7}$; entonces tendremos:

$$\frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{5 \times 4}{8 \times 7}$$

224. Si el multiplicando, ó multiplicador fuesen enteros, para aplicar la regla anterior, se supone que el factor entero tiene por denominador la unidad; pero como el producto de un número por la unidad es el mismo número, resultará que: *para multiplicar un entero por un quebrado, ó un quebrado por un entero, se multiplica el entero por el numerador del quebrado, dejando el mismo denominador.*

Así: $\frac{5}{8} \times 7 = \frac{5 \times 7}{8}$ y $7 \times \frac{5}{8} = \frac{7 \times 5}{8}$

225. *Si uno, ó los dos factores fuesen mixtos, se reducen á quebrados y se multiplican como éstos.*

Ejemplos:

1.° $4\frac{2}{3} \times 5\frac{3}{8} = \frac{14}{3} \times \frac{43}{8} = \frac{14 \times 43}{3 \times 8} = \frac{602}{24} = \frac{301}{12} = 25\frac{1}{12}$

2.° $2\frac{3}{5} \times \frac{4}{9} = \frac{13}{5} \times \frac{4}{9} = \frac{52}{45} = 1\frac{7}{45}$

226. *Para multiplicar una fracción decimal por un número entero, se prescinde de la coma en el número decimal y se multiplican como dos enteros, separando después en el producto tantas cifras decimales como haya en el multiplicando.*

Sea multiplicar la fracción 27,354 por 26. El multiplicando se compone de 27354 *milésimas*, luego el producto será 26 veces 27354 milésimas. De donde se deduce que se debe multiplicar los números 27354 y 26 y separar de la derecha tres decimales para que el producto exprese milésimas como el multiplicando, según se manifiesta en la operación adjunta.

$$\begin{array}{r} 27{,}354 \\ 26 \\ \hline 164124 \\ 54708 \\ \hline 711{,}204 \end{array}$$

227. *Para multiplicar dos fracciones decimales, se prescinde de las comas y se multiplican como números enteros, separando después en el producto tantas cifras decimales como tengan entre los dos factores.*

Ejemplo: multiplicar las fracciones 3,114 y 2,31. El multiplicador 2,31 es igual á la fracción ordinaria $\frac{231}{100}$, luego el producto se podrá obtener hallando la *centésima* parte del multiplicando que es 0,03114 (núm. 200), y multiplicándola después por 231, según la regla del número anterior: pero el multiplicando tiene ahora tantas cifras decimales como entre los dos factores, luego el producto estará formado conforme á la regla enunciada.

$$\begin{array}{r} 0{,}03114 \\ 321 \\ \hline 3114 \\ 9342 \\ 6228 \\ \hline 7{,}19334 \end{array}$$

228. Si tenemos que multiplicar una fracción ordinaria por una decimal, ó al contrario, se reducen ambas á ordinarias, ó á decimales, y se efectúa la operación.

Conviene advertir que si alguna de las fracciones es periódica, efectuaremos el cálculo reduciéndola á fracción ordinaria, y si el resultado se ha de expresar en fracción decimal, haremos después la transformación inversa.(*)

Producto de varios factores.

229. Un producto de tres ó más factores fraccionarios significa que se debe multiplicar el primero por el segundo, el producto que resulte por el tercero y así sucesivamente hasta el último.

(*) La multiplicación de fracciones periódicas se puede hacer bajo la forma decimal sabiendo que aproximación ha de tener el resultado, pero no creemos propio de un libro de segunda enseñanza ni la teoría de errores y aproximaciones, ni las operaciones abreviadas.

Así: $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{7}{8}\times\frac{3}{7}=\frac{2\times4}{3\times5}\times\frac{7}{8}\times\frac{3}{7}=\frac{2\times4\times7}{3\times5\times8}\times\frac{3}{7}=\frac{2\times4\times7\times3}{3\times5\times8\times7}$

El *numerador del producto es el producto de todos los numeradores, y el denominador el producto de los denominadores.*

Si alguno de los factores es mixto, ó decimal se reduce á quebrado, y si es entero, se le supone por denominador la unidad.

230. Como el numerador y el denominador del producto de varias fracciones son productos de números enteros, no varía su valor aunque se altere el orden de los factores, de donde resulta que:

Un producto de varios factores fraccionarios no se altera aunque se cambie el orden de los factores.

Todas las consecuencias que de este teorema dedujimos en la teoría de los enteros (números 62 á 67), son aplicables á los fraccionarios.

IV. Las potencias de las fracciones.

231. *Se llama potencia de un fraccionario el producto de varios factores iguales á dicho número fraccionario.*

Todas las definiciones de *grado, exponente,* etc., dadas en el núm. 70 en la teoría de números enteros son aplicables á los fraccionarios.

232. *Para elevar una fracción á una potencia se elevan sus dos términos á dicha potencia.*

Sea, elevar al cubo la fracción $\frac{3}{5}$. Tendremos por definición.

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}$$

pero el segundo miembro, según la regla del núm. 229, es $\frac{3\times3\times3}{5\times5\times5}=\frac{3^3}{5_3}$, luego tendremos:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{3^3}{5^3}$$

233. *Para elevar un número mixto á una potencia se reduce antes á quebrado y se efectúa la operación como en el caso anterior.*

Ejemplo: $\left(2\frac{1}{3}\right)^4 = \left(\frac{7}{3}\right)^4 = \frac{7^4}{3^4}$

234. *Para elevar una fracción decimal á una potencia se eleva como si fuera un número entero, prescindiendo de la coma, y se separan del resultado tantas cifras decimales como indique el producto del exponente por el número de cifras decimales de la fracción.*

Esta regla es una consecuencia de la multiplicación de fracciones decimales (núm. 227).

Ejemplo: elevar al cubo 2,71. Se forma el cubo de 271, que es 19902511 y separaremos 6 cifras decimales del resultado, porque la fracción tiene 2 decimales y el exponente 3 y el producto $2 \times 3 = 6$. Luego $2{,}71^3 = 19{,}902511$.

235. *Las potencias de una fracción irreducible son fracciones irreducibles.*

Si la fracción $\frac{3}{5}$ es irreducible, los números 3 y 5 son primos entre sí. Una potencia cualquiera de $\frac{3}{5}$, la cuarta por ejemplo, será $\frac{3^4}{5^4}$, y como las potencias de los números primos entre sí son también números primos entre sí (núm. 159), la fracción $\frac{3^4}{5^4}$ será irreducible (núm. 187).

236. Los teoremas sobre producto de potencias, potencia de potencia y potencia de un producto que demostramos en los números 74 á 76, son aplicables á los fraccionarios y no los demostramos aquí porque la demostración se hace como en la teoría de los números enteros.

V. La división de las fracciones.

237. Sabemos (números 78 y 183) *que la división en general es una operación que tiene por objeto dados un producto y uno de los factores hallar el otro.*

Los datos y el resultado reciben como en los enteros los nombres de *dividendo, divisor y cociente* y el signo de operación es todavía: colocados entre el dividendo y divisor.

238. De la definición de la división se deduce que es una operación inversa de la multiplicación, por tanto, si consideramos el divisor como un multiplicador, el cociente será el multiplicando, y entonces *el dividendo debe ser respecto del cociente lo que el divisor respecto de la unidad* (núm. 222).

Así, dividir, el número $\frac{5}{8}$ por $\frac{4}{7}$ es formar un número tal que $\frac{5}{8}$ sea sus 4 séptimas partes.

239. *Para dividir dos fracciones se multiplica el dividendo por la fracción divisor invertida.*

Sea dividir $\frac{5}{8}$ por $\frac{4}{7}$, tendremos que formar un número cuyas $\frac{4}{7}$ sea $\frac{5}{8}$. Ahora bien, $\frac{5}{8}$ es la séptima parte de $\frac{5 \times 7}{8}$ (núm. 177), luego este número será 4 veces mayor que el cociente que buscamos, entonces para obtenerle bastará, dividir por 4 la fracción $\frac{5 \times 7}{8}$, lo cual se consigue multiplicando su denominador por 4 (núm. 177). El cociente será pues, $\frac{5 \times 7}{8 \times 4}$, y tendremos:

$$\frac{5}{8} : \frac{4}{7} = \frac{5 \times 7}{8 \times 4}$$

conforme á la regla enunciada.

El producto del cociente por el divisor contiene en sus dos términos, como factores, el numerador y denominador del divisor, por consiguiente suprimiéndolos resultará el dividendo.

$$\frac{5 \times 7}{8 \times 4} \times \frac{4}{7} = \frac{5 \times 7 \times 4}{8 \times 4 \times 7} = \frac{5}{8}$$

240. Si el dividendo es un número entero, se le supone por denominador la unidad, y como el producto de la uni-

dad por cualquier número es el mismo número, la regla anterior se puede enunciar así: *para dividir un entero por una fracción se multiplica el entero por el denominador de la fracción y el producto se parte por el numerador.*

Ejemplo:
$$8:\frac{5}{11}=\frac{8\times 11}{5}=\frac{88}{5}=17\ \frac{3}{5}$$

Si el divisor es entero, se le supone por denominador la unidad y se obtiene la regla conocida (núm. 177), *para dividir una fracción por un entero se multiplica el denominador por el entero dejando el mismo numerador.*

241. *Cuando los términos del dividendo son divisibles por los del divisor, se puede efectuar la división de dos fracciones dividiendo los términos del dividendo por los del divisor.*

Si tenemos que dividir $\frac{12}{25}$ por $\frac{4}{5}$ siendo $12=3\times 4$ y $25=5\times 5$, tendremos (núm. 239)
$$\frac{12}{25}:\frac{4}{5}=\frac{12\times 5}{25\times 4}=\frac{3\times 4\times 5}{5\times 5\times 4}$$
y suprimiendo en el numerador y denominador los factores 4 y 5
$$\frac{12}{25}:\frac{4}{5}=\frac{3}{5}=\frac{12:4}{25:5}$$

242. *Si uno ó los dos tèrminos de la división son números mixtos, se reducen á quebrados y se dividen como éstos.*

Ejemplos:

1.° $$4\ \frac{2}{3}:\frac{3}{5}=\frac{14}{3}:\frac{3}{5}=\frac{14\times 5}{3\times 3}=\frac{70}{9}=7\ \frac{7}{9}$$

2.° $$2\ \frac{1}{8}:5\ \frac{3}{7}=\frac{17}{8}:\frac{38}{7}=\frac{17\times 7}{38\times 8}=\frac{119}{304}$$

243. *Para dividir una fracción decimal por un número entero, se prescinde de la coma en el dividendo y se dividen como dos enteros, separando después en el cociente tantas cifras decimales como tiene el dividendo.*

Sea dividir el número decimal 27,854 por 15. El problema es tomar la *quinceava* parte de 27854 *milésimas*. Entonces podremos dividir 57854 por 15 y separar tres cifras decimales en el cociente para que exprese milésimas. Se hará, pues, la operación del modo siguiente:

27,854	15
12 8	1,856
85	
104	
14	

El cociente pedido es 1,856 por *defecto* con menos error de *una milésima*. El cociente completo se obtendría añadiendo al cociente anterior $\frac{14}{15}$ de milésima.

Se puede expresar el cociente con mayor aproximación añadiendo ceros á la derecha del dividendo, ó á la derecha del último resto, según la regla anterior, y de los restos sucesivos hasta obtener el número de cifras que se desea en el cociente.

Ejemplo. Hallar con menos de una *milésima* de error el cociente de 21,2 por 7.

21,2	7
20	3,028
60	
4	

El cociente se puede obtener por exceso añadiendo una unidad del último orden decimal al cociente por defecto Así, en el primer ejemplo el cociente por exceso es 1,857 y en el segundo 3,029.

Cuando el último resto es mayor que la mitad del di visor, la parte despreciada en el cociente por defecto vale más de *media unidad* del último orden decimal que se aprecia, por consiguiente es más aproximado el cociente por exceso. De suerte que si queremos tener el cociente con menos error de media unidad decimal del último orden que se aprecia, tomaremos el cociente *por defecto cuando el resto sea menor que la mitad del divisor, y por exceso, cuando sea mayor que dicha mitad.*

244 *Para dividir un entero ó un decimal por otro decimal, se suprime la coma en el divisor y se multiplica el dividendo por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene el divisor, y quedará reducida la division á la de dos enteros, ó de un decimal por un entero.*

Sea dividir 41,217 por 13,4. El divisor es igual á la fracción ordinaria $\frac{134}{10}$, luego se obtendrá el cociente multiplicando el dividendo por $\frac{10}{134}$, que es el divisor invertido (número 239).

Entonces tendremos que multiplicar el dividendo 41,217 por 10 y dividirle por 134.

$$\begin{array}{r|l} 412{,}17 & 134 \\ 10\ 17 & \overline{3{,}07} \\ 79 & \end{array}$$

El dividendo será, pues, 412,17 y la operación se efectuará como se indica al margen, y el cociente será 3,07.

Si se desea el cociente con mayor aproximación se añade al dividendo suficiente número de ceros para obtenerla.

La observación hecha sobre los cocientes por defecto y por exceso en el caso anterior es aplicable á éste.

245. Si tenemos que dividir una fracción ordinaria por una decimal, ó al contrario, se reducen ambas á ordinarias, ó á decimales.

Si el divisor es una fracción decimal periódica conviene reducirla á ordinaria.

Observaciones sobre el cálculo de los números fraccionarios.

* 247. *Para multiplicar una suma de fraccionarios, ó de enteros y fraccionarios por un número entero, ó fraccionario, se multiplican todos los sumandos y se suman los productos.*

Supondremos primero que el multiplicador es entero y después que es fraccionario.

1.° Sea multiplicar la suma $\left(\frac{3}{4}+2+\frac{5}{7}\right)$ por 3. Según la definición de multiplicación tendremos que repetir la suma tres veces por sumando y tendremos:

$$\left(\frac{3}{4}+2+\frac{5}{7}\right)\times 3=\left(\frac{3}{4}+2+\frac{5}{7}\right)+\left(\frac{3}{4}+2+\frac{5}{7}\right)+\left(\frac{3}{4}+2+\frac{5}{7}\right)$$

$$=\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\right)+(2+2+2)+\left(\frac{5}{7}+\frac{5}{7}+\frac{5}{7}\right)=\frac{3}{4}\times 3+2\times 3+\frac{5}{7}\times 3$$

2.° Sea multiplicar la suma $\left(\frac{3}{4}+2+\frac{5}{7}\right)$ por $\frac{3}{5}$. Según la definición de multiplicación tendremos que tomar la *quinta* parte de la suma y multiplicarla por 3.

Pero la quinta parte de $\left(\frac{3}{4}+2+\frac{5}{7}\right)$ es $\left(\frac{3}{4\times5}+\frac{2}{5}+\frac{5}{7\times5}\right)$ porque si esta última expresión la multiplicamos por 5 para lo cual basta dividir todos los denominadores por 5 (núm. 177) se reproducirá la suma dada, luego:

$$\left(\frac{3}{4}+2+\frac{5}{7}\right)\times\frac{3}{5}=\left(\frac{3}{4\times5}+\frac{2}{5}+\frac{5}{7\times5}\right)\times3=\frac{3}{4\times5}\times3+\frac{2}{5}\times3+\frac{5}{7\times5}\times3$$
$$=\frac{3}{4}\times\frac{3}{5}+2\times\frac{3}{5}+\frac{5}{7}\times\frac{3}{5}$$

Como el producto no se altera cuando se altera el orden de los sumandos (núm. 230), el producto de un número entero ó fraccionario por una suma indicada de enteros, ó fraccionarios, se forma por la regla anterior.

* 248. *Para multiplicar una diferencia de números fraccionarios, ó de entero y fraccionario por un número entero, ó fraccionario, se multiplican los dos términos de la diferencia y se restan los productos.*

La misma demostración que se dió en el núm. 59 cuando se trataba de números enteros es aplicable actualmente, porque está fundada en que el minuendo es igual á la suma del sustraendo y el resto.

* 249. *Para multiplicar dos sumas indicadas de términos fraccionarios todos, ó unos enteros y otros fraccionarios, se multiplican todos los términos del multiplicando por cada uno de los del multiplicador y se suman los productos.*

Sea multiplicar la suma $\frac{3}{4}+5+\frac{4}{7}$ por $\frac{2}{3}+\frac{5}{8}$. Representemos por un momento, por a, el valor de la primera suma efectuada, tendremos:

$$\left(\frac{3}{4}+5+\frac{4}{7}\right)\times\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{8}\right)=a\times\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{8}\right)$$

pero, según lo dicho en el núm. 247,

$$a\times\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{8}\right)=a\times\frac{2}{3}+a\times\frac{5}{8}$$

y poniendo en vez de a su valor $\frac{3}{4}+5+\frac{4}{7}$ el valor de la última expresión será

$$\left(\frac{3}{4}+5+\frac{4}{7}\right)\times\frac{2}{3}+\left(\frac{3}{4}+5+\frac{4}{7}\right)\times\frac{5}{8}=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}$$

$$+5\times\frac{2}{3}+\frac{4}{7}\times\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\times\frac{5}{8}+5\times\frac{5}{8}+\frac{4}{7}\times\frac{5}{8}$$

conforme habíamos enunciado.

250. Escolio. Podríamos ahora estudiar fracciones cuyos términos fuesen fraccionarios y veríamos que tienen las mismas propiedades que las de términos enteros y se opera con ellas por las mismas reglas. Pero podemos pasarnos sin esta generalización, porque más adelante estudiaremos las propiedades de las razones geométricas que son fracciones todavía más generales porque sus términos pueden ser *enteros*, *fraccionarios*, ó *inconmensurables*.

LIBRO TERCERO.

LOS NÚMEROS INCOMENSURABLES.

CAPÍTULO I.

EL CÁLCULO DE LOS NÚMEROS INCOMENSURABLES.

I. Nociones sobre los límites.

* 251. *Cantidad ó número variable es una cantidad, ó número que puede tomar diferentes valores.*

La cantidad puede ser una *variable continua*; para esto se necesita que no pueda pasar de un valor á otro sin pasar por todos los *valores intermedios.*

Si un punto se mueve en línea recta, su distancia al punto de partida es una cantidad que no puede pasar de un valor á otro, sin pasar por todos los intermedios, luego es una variable continua. En cualquiera posición del punto móvil se puede medir su distancia al punto de partida por medio de una unidad lineal, pero es imposible medir las distancias de todas las posiciones del punto móvil al de partida, porque son infinitas; luego *el número variable que representa la distancia del punto movil al de partida, no es continuo, sino discreto:* como dijimos al principio de la Aritmética que era siempre el número.

Se puede decir, sin embargo, que cuando se mide una serie de valores, de una cantidad variable continua, y cada dos valores se diferencian tan poco como se quiera, el número variable, que expresa dichos valores, tiende hacia la continuidad sin lograr alcanzarla.

Como ejemplos de números variables discontinuos podemos citar las fracciones decimales periódicas.

Así, la fracción 0,5555..... es un número variable que pasa por los valores 0,5; 0,55; 0,555; etc., que difieren del verdadero valor de la fracción periódica: el primero en menos de 0,1; el segundo en menos de 0,01; el tercero en menos de 0,001, etc. En general si se aprecian n cifras decimales se comete un error menor que una unidad decimal del orden *n esimo*.

* 252. *Límite de una cantidad, ó número variable es otra cantidad, ó número constante á cuyo valor puede acercarse la variable indefinidamente pero sin igualarle nunca.*

La fracción ordinaria generatriz de una fracción decimal periódica; es límite de la fracción periódica; porque bajo la forma decimal, por grande que sea el número de cifras decimales que consideremos, no conseguiremos nunca expresarla exactamente.

Así: la fracción periódica 0,5555..... tiene por límite $\frac{5}{9}$, que es su fracción generatriz (núm. 208).

El límite de una variable continua puede ser superior, ó inferior á la variable.

El límite es *superior* á la variable cuando todos sus valores son menores que el límite; para esto se necesita que la variable sea *creciente*. El límite es inferior cuando todos los valores de la variable son mayores que el límite, para esto es necesario que la variable sea decreciente.

Cuando la variable es discontinua puede tomar en muchos casos valores superiores é inferiores á su límite.

Ejemplo: la fracción 0,5555. ... que tiene por límite $\frac{5}{9}$, puede tomar los valores 0,5; 0,55; 0,555, etc., inferiores al límite y 0,6; 0,56; 0,556, etc, superiores á su límite.

Cuando una cantidad, ó número variable *disminuye indefinidamente*, pudiendo tomar valores menores que cualquiera cantidad, ó número dados, *por pequeños que sean, el límite de la variable es cero.*

La unidad fraccionaria $\frac{1}{n}$, tiene por límite cero, cuando n crece indefinidamente.

La diferencia entre una variable y su límite tiene por límite cero; porque el valor de la variable puede acercarse indefinidamente al de su límite, según se deduce de la definición de límite, dada arriba.

* 253. *Una variable no puede tener dos límites distintos.*

En efecto: Si la variable toma valores superiores á los dos límites, ó inferiores á ambos, no se puede acercar indefinidamente más que á uno de los dos, luego el otro no podrá ser límite: y si la variable toma valores intermedios á los límites, para acercarse indefinidamente á uno, tiene que separarse del otro, luego tampoco puede tener dos límites en este caso.

Dos, ó más variables pueden tener un mismo límite; aunque para esto será necesario que sea distinto el grado de rapidez con que tienden hacia cero sus diferencias con el límite, ó que una variable sea superior y otra inferior al límite.

Ejemplo: las dos fracciones $\frac{1}{3^n}$ y $\frac{1}{2^n}$, tienen por límite cero, cuando n crece indefinidamente.

* 254. *Si una constante está comprendida siempre entre dos variables cuya diferencia tenga por límite cero, la constante es límite común de las variables.*

Porque la diferencia entre la constante y cualquiera de las dos variables es menor que la de variables entre sí, y por consiguiente tendrá por límite cero.

* 255. *Dos variables que permanecen constantemente iguales, tienen el mismo límite.*

Sean x y x' las dos variables y admitamos que tienen, respectivamente límites distintos, L y L', siendo, por ejemplo, $L \angle L_{\prime}$.

Sea α una cantidad, ó número menor que la diferencia $L' - L$, se podrán escribir, por orden creciente, los valores:

$$L, L' - \alpha, L', L' + \alpha$$

y como L' es el límite de x', esta variable llegará á tomar valores comprendidos entre $L' - \alpha$ y $L' + \alpha$, es decir, que difieran de L' en un valor menor que α: los valores de x son iguales á los de x', luego no podrán acercarse indefinidamente á L; entonces L no podrá ser su límite si no se verifica $L=L'$.

* 256. *Si la diferencia entre dos cantidades, ó números constantes es menor que cualesquiera cantidad, ó número dados por pequeños que sean, las constantes son iguales.*

Sean A y B las dos constantes, su diferencia A—B también será constante, pero ha de ser menor que cada cantidad, ó número dados, luego tendrá que ser cero, porque no hay otra cantidad, ni otro número constantes que cumplan esta condición.

Como consecuencia se deduce: *que si dos constantes están comprendidas entre dos variables que tengan el mismo límite, la diferencia de las constantes es cero.*

Porque la diferencia entre las constantes es menor que la diferencia entre las variables, y esta última diferencia tiene por límite cero.

II. Expresión aproximada de los números incomensurables.

257. Hemos dicho (núm. 8) que cuando una cantidad no contiene exactamente á la unidad, ni á ninguna parte alícuota suya, el resultado de la comparación de la cantidad con la unidad se llama *número incomensurable*. Por consiguiente los números incomensurables no se pueden expresar exactamente ni por la unidad entera ni por ninguna unidad fraccionaria, por lo cual trataremos de hallar su expresión aproximada, para utilizarla en el cálculo.

La diferencia entre el valor exacto y el valor aproximado de un número comensurable, ó incomensurable, se llama *error absoluto* del número. El error puede ser por defecto, ó por exceso, según que el valor aproximado sea menor, ó mayor que el valor exacto.

258. *Todo número incomensurable se puede expresar por un número entero con un error, por defecto, ó por exceso, menor que la unidad.*

Sea el número incomensurable A: por grande que sea su valor, como la serie de los números

$$0, 1, 2, 3, 4.....$$

es ilimitada, se llegará á un número mayor que A. Supongamos que $m + 1$ es el primer número mayor que A, entonces el número m, anterior á $m + 1$, será menor que A, y tendremos:

$$m \angle A \angle m + 1$$

Por estar A comprendido entre dos números que se diferencian en una unidad, difiere de cualquiera de ellos en menos de una unidad, siendo m su expresión aproximada por defecto, y $m + 1$, por exceso.

259. *Todo número incomensurable se puede expresar por un número fraccionario con un error, por defecto, ó por exceso, menor que la unidad fraccionaria marcada por el denominador del quebrado*

Sea el numero incomensurable A, y sea n el denominador de la unidad fraccionaria de aproximación: si formamos la serie

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \frac{4}{n}, \ldots\ldots$$

cuyo denominador es constante y cuyos numeradores pueden crecer indefinidamente, se verificará que á partir de cierto término los números de esta serie serán mayores que A: supongamos, pues, que $\frac{m+1}{n}$ es el primer número mayor que A; el término anterior será $\frac{m}{n}$ y tendremos:

$$\frac{m}{n} \angle A \angle \frac{m+1}{n}$$

La diferencia entre $\frac{m+1}{n}$ y $\frac{m}{n}$ es $\frac{1}{n}$ y como A está comprendido entre ambos números, difiere de cualquiera de ellos en menos de $\frac{1}{n}$. Luego $\frac{m}{n}$ es una expresión aproximada de A con menor error de $\frac{1}{n}$ por defecto y $\frac{m+1}{n}$ otra expresión con menos error de $\frac{1}{n}$ por exceso.

* 260. Si *A es un número constante incomensurable tal que se tenga*

$$\frac{m}{n} \angle A \angle \frac{m+1}{n}$$

siendo n *un número entero que puede crecer indefinidamente, el número A es el límite de* $\frac{m}{n}$, ó de $\frac{m+1}{n}$, *cualquiera que sea la ley según la cual se haga crecer á* n *indefinidamente.* (*)

Sean p y p', dos números enteros tales que se tenga

$$\frac{K}{p} \angle A \angle \frac{K+1}{p} \quad \text{y} \quad \frac{K'}{pp'} \angle A \angle \frac{K'+1}{pp'}$$

multiplicando ambas limitaciones por pp', se tendrá

$$Kp' \angle App' \angle (K+1)\,p, \text{ y } K' \angle App' \angle K'+1$$

K' y $K'+1$ son dos *números consecutivos* que comprenden el número App' y Kp' y $(K'+1)\,p'$, son dos números *pero no consecutivos*, que también comprenden al número App', luego K' es cuando menos igual á Kp' y debe verificarse

$$Kp' \leq K'$$

y dividiendo por pp', tendremos:

$$\frac{K}{p} \leq \frac{K'}{pp'}$$

Del mismo modo se demostraría $\frac{K'}{pp'} \leq \frac{K''}{pp'p''}$ y asi sucesivamente.

También se verifica:

$$\frac{K+1}{p} \geq \frac{K'+1}{pp'} \geq \frac{K''+1}{pp'p''} \dots\dots$$

(*) Este teorema es una confirmación de lo que digimos (núm. 253) que muchas variables pueden tener un mismo límite.

Si hacemos $p = p' = p'' = ... = 2$, se formarán las series:

$$\frac{h_1}{2}, \frac{h_2}{2^2}, \frac{h_3}{2^3} \ldots\ldots \frac{h_r}{2^r}$$

de términos menores que A, tales que cada uno es cuando menos igual al anterior y

$$\frac{h_1+1}{2}, \frac{h_2+1}{2^2}, \frac{h_3+1}{3^2} \ldots\ldots \frac{h_r+1}{3^r}$$

de términos mayores que A y tales que cada uno es cuando más igual al anterior; pero $\frac{h_r+1}{2^r} - \frac{h_r}{2^r} = \frac{1}{2^r}$, es un número que tiene por límite cero, cuando r crece indefinidamente, luego los números $\frac{h_r}{2^r}$ y $\frac{h_r+1}{2^r}$, *tienen por límite común el número* A.

Ahora bien; puesto que

$$\frac{m}{n} \angle A \angle \frac{m+1}{n} \text{ y } \frac{h_r}{2^r} \angle A \angle \frac{h_r+1}{2^r}$$

se tendrá: $\frac{m}{n} \angle \frac{h_r+1}{2^r}$ y $\frac{h_r}{2^r} \angle \frac{m_r+1}{n^r}$

y restando $\frac{1}{n}$ de los dos miembros de la última desigualdad

$$\frac{h_r}{2^r} - \frac{1}{n} \angle \frac{m}{n}$$

de donde:

$$\frac{h_r}{2^r} - \frac{1}{n} \angle \frac{m}{n} \angle \frac{h_r+1}{2^r}$$

haciendo crecer á r indefinidamente, ó sea pasando á los límites las dos expresiones $\frac{h_r}{2^r}$ y $\frac{h_r+1}{2^r}$ serán sustituídas por su límite común A, y tendremos:

$$A - \frac{1}{n} \angle \frac{m}{n} \angle A$$

Si ahora hacemos crecer á n indefinidamente $\frac{1}{n}$ tendrá por límite cero, luego $\frac{m}{n}$ tendrá por límite A, como se quería demostrar.

* 261. En virtud del teorema que acabamos de demostrar, podremos considerar los números incomensurables como límites de expresiones aproximadas fraccionarias, cuyos denominadores haremos crecer según una ley cualquiera, y en la mayoría de los casos los aproximaremos por medio de decimales cuyas cifras se obtienen por distintos medios que dependen de la naturaleza de los problemas que originan los números incomensurables.

III. Las operaciones con los números incomensurables, considerados como límites.

* 262. *El límite de una suma de varias variables es la suma de los límites de las variables,*

Sean x, y, z..... las variables, A, B, C..... sus límites respectivos y α, β, γ.... las diferencias entre las variables y sus límites, tendremos: (*)

$$(x+\alpha)+(y+\beta)+(z+\gamma)+.....=A+B+C+.....$$

ó bien

$(x+y+z+.....)+(\alpha+\beta+\gamma+.....)=A+B+C+.....$ pero si el número de sumandos es n y designamos por λ la mayor de las diferencias α, β, γ..... se tendrá $\alpha+\beta+\gamma+.... \angle n\lambda$. Ahora, como α, β, γ..... tienen por limite cero, si n es un número finito, $n\lambda$ también tendrá por límite cero, y con más motivo será cero el límite de $\alpha+\beta+\gamma$..... Luego pasando á los límites tendremos:

$$\text{lím.}\,(x+y+z+....)=A+B+C+.....=\text{lím.}\,x+\text{lím.}\,y+\text{lím.}\,z.$$

* 263. *El límite de una diferencia de dos variables es la diferencia de los límites de las variables.*

Sean x, y las variables y z su diferencia, tendremos:

$$x-y=z \quad \text{de donde} \quad x=y+z$$

y pasando á los límites (núm. 262).

$$\text{lím.}\,x=\text{lím.}\,y+\text{lím.}\,z$$

y restando do ambos miembros lím. y

$$\text{lím.}\,x-\text{lím.}\,y=\text{lím.}\,z=\text{lím.}\,(x-y)$$

(*) Suponemos las variables inferiores á sus límites, pero lo mismo se podría demostrar el teorema si fuesen superiores, ó unas superiores y otras inferiores.

* 264. *El límite de un producto de factores variables es el producto de los límites de los factores.*

Sean x é y dos factores variables cuyos límites con A y B siendo α y β las diferencias entre las variables y sus límites tendremos:

$$(x + \alpha)(y + \beta) = \mathrm{A} \,.\, \mathrm{B} \qquad (*)$$

ó efectuando la multiplicación del primer miembro

$$x \,.\, y + x \,.\alpha + y \,.\beta + \alpha \,.\beta = \mathrm{A} \,.\, \mathrm{B}$$

pero los productos $x\,.\alpha$, $y\,.\beta$ y $\alpha\,.\,\beta$, tienen por límite cero, luego

$$\text{lím.}\,(x \,.\, y) = A \,.\, B = \text{lím.}\, x - \text{lím.}\, y$$

Si los factores son más de dos, se puede demostrar que si el teorema se verifica para n factores tiene lugar para $n+1$; y entonces como es cierto para dos factores, lo será para tres, y siéndolo para tres lo será para cuatro etcétera. luego será general.

Supongamos, pues, que tiene:

$$\text{lím.}\,(X \,.\, Y \ldots\ldots U) = \text{lím.}\, X \,.\, \text{lím.}\, Y \ldots\ldots \text{lím.}\, U$$

y sea V un número factor variable; considerando el producto $X \,.\, Y \ldots\ldots U$. como un solo factor, tendremos:

$$\text{lím.}\,(X \,.\, Y \ldots\ldots U \,.\, V.) = \text{lím.}\,(X \,.\, Y \ldots\ldots U) \,.\, \text{lím.}\, V$$
$$= \text{lím.}\, X \,.\, \text{lím.}\, Y \ldots\ldots \text{lím.}\, U \,.\, \text{lím.}\, V$$

* 265. *El límite de una potencia de una variable es la potencia de igual grado del límite de la variable.*

Tenemos:

$$X^n = X \,.\, X \,.\, X \ldots\ldots$$

y en virtud del teorema anterior.

$$\text{lím.}\, X^n = \text{lím.}\, X \,.\, \text{lím.}\, X \,.\, \text{lím.}\, X \ldots\ldots = (\text{lím.}\, X)^n$$

* 266. *El límite de un cociente de dos variables es el cociente de los límites de las variables.*

Sean X é Y las variables y Z su cociente, tendremos:

$$\frac{X}{Y} = \mathrm{Z} \qquad \text{de donde} \qquad X = Y \,.\, Z$$

(*) Suponemos las variables inferiores á sus límites, pero si fueran superiores, tendríamos $x \,.\, y = (\mathrm{A} + \alpha)\,(\mathrm{B} + \beta)$ y si una fuese superior y otra inferior $x \,.\, y = (\mathrm{A} + \alpha)(\mathrm{B} - \beta)$ y la demostración se haría como en el texto.

y pasando á los límites

$$\text{lím. } X. = \text{lím. } Y \text{ lím. } Z$$

ó bien

$$\frac{\text{lím. } X}{\text{lím. } Y} = \text{lím. } Z = \text{lím. } \frac{X}{Y}$$

* 267. *Si la diferencia de dos variables tiene por límite cero, su cociente tiene por límite la unidad. Si el cociente de dos variables tiene por límite la unidad, su diferencia tiene por límite cero.*

Si tenemos:

$$\text{lím. } (X - Y) = 0 \text{ de donde lím. } X = \text{lím. } Y$$

deduciremos

$$\frac{\text{lím. } X}{\text{lím. } Y} = \text{lím. } \frac{X}{Y} = 1$$

Si se tiene

$$\text{lím. } \frac{X}{Y} = \frac{\text{lím. } X}{\text{lím. } Y} = 1, \text{ de donde lím. } X = \text{lím. } Y$$

se deducirá:

$$\text{lím. } X - \text{lím. } Y = \text{lím. } (X - Y = 0$$

* 268. Los teoremas demostrados en los números 262 á 266, son ciertos también cuando alguna de las *variables es constante*, sin más que suponer que la constante es ella *misma* su límite.

También se debe observar que dichos teoremas se pueden resumir diciendo que *el límite del resultado de una operación, de las que hemos estudiado, entre números variables es el resultado de la misma operación entre los límites de los datos.*

* 269. Las propiedades de las operaciones de los números comensurables son en muchos casos aplicables á los incomensurables. Para generalizar una propiedad que se verifique entre números incomensurables, comenzaremos por considerar cada número comensurable como una variable y expresaremos la propiedad que se va á generalizar por medio de estas variables, y si estan enlazadas por las operaciones de sumar, restar, multiplicar, dividir, ó elevar á potencias, se podrá sustituir cada variable por su

límite, y como los límites son los números incomensurables, quedará establecida para estos números la propiedad de que se trata.

Las propiedades de la adición y sustracción son aplicables á los números incomensurables, y se demuestran con facilidad.

De las propiedades de la multiplicación, demostraremos nuevamente el teorema sobre el orden de los factores, porque de esta propiedad dependen las demás de la multiplicación y las de la elevación á potencias y división.

* 270 *Un producto de varios factores incomensurables todos, ó algunos de ellos, no se altera aunque se altere el orden de los factores.*

Sean, A, B, C, D, cuatro números incomensurables, que son límites respectivamente de los números comensurables variables X, Y, Z, U, y supongamos que se quiere demostrar.

$$A \,.\, B \,.\, C \,.\, D. = C \,.\, A \,.\, D \,.\, B$$

Entre las variables comensurubles se tiene (números 62 y 230).

$$X.\, Y.\, Z \,.\, U = Z \,.\, X.\, U \,.\, Y$$

pero, lím. $X \,.\, Y.\, Z \,.\, U = A \,.\, B \,.\, C \,.\, D$ (núm. 264) y límite $Z \,.\, X \,.\, U \,.\, Y = C \,.\, A.\, D \,.\, B$

luego también se tendrá

$$A \,.\, B \,.\, C \,.\, D = C \,.\, A \,.\, D \,.\, B$$

* 270 El cálculo de los números incomensurables se podrá reducir al de los números comensurables, considerando á éstos como números variables cuyos límites son los incomensurables.

Si fuera posible efectuar las operaciones con números infinitamente aproximados á los incomensurables, los resultados de las operaciones se podrían considerar como exactos. No siendo esto posible, debíamos resolver estos dos problemas: 1.°, *hallar qué aproximación tiene el resultado de una operación, cuando se conoce la aproximación de los datos*; 2.°, *qué aproximación deben tener los datos para que el resultado tenga una aproximación determi-*

nada. (*) Pero por grande que sea la importancia de estos dos problemas su resolución, no se puede considerar como incluída en el programa de Matemáticas de la segunda enseñanza.

CAPÍTULO II.

LA EXTRACCIÓN DE RAÍCES DE LOS NÚMEROS ENTEROS. FRACCIONARIOS É INCOMENSURABLES.

I. *Definiciones y teoremas fundamentales.*

271. *Se llama raiz del grado* n *de un número, otro número, que elevado á la potencia de grado* n *reproduce el número dado.*

La operación que se efectúa para hallar las raíces de un número dado se llama *extracción de raices.*

Por definición el grado de una raiz es el mismo que el de la potencia á que se debe elevar para reproducir el número dado y recibe el nombre de *indice.*

Las raíces se clasifican por grados: en *raiz de segundo grado, ó raiz cuadrada, raiz de tercer grado, ó raiz cúbica, raiz de cuarto grado*, etc.

Por la definición de raíz se comprende que todo número es su raíz de *primer grado.*

La extracción de raíces se indica por medio del signo $\sqrt{}$, que se llama *radical;* escribiendo el número del cual se ha de extraer la raíz debajo de él y en el ángulo que queda á la izquierda del índice. Así, la raíz del grado n del número A se escribirá $\sqrt[n]{A}$ y se lee raíz *n-ésima* de A, ó *raiz del grado n de* A.

Cuando el índice es 2, ó sea cuando se trata de una raíz cuadrada, se suprime.

Así, $\sqrt{A}$ es la raíz cuadrada de A.

272. *Las raices de cualquier grado de la unidad son la unidad.*

Se deduce de la definición de raíz, puesto que las potencias de cualquier grado de la unidad son la unidad:

273. Si un número entero se eleva á la potencia del grado n, el resultado es otro número entero que se dice *potencia perfecta* del grado n. En este caso el número tiene *raíz del grado* n *exacta*. Por ejemplo, siendo $3^4 = 81$, el número 81 tiene por raíz de 4º grado exacta, el número 3.

Pero se comprende fácilmente que no todos los números enteros tendrán raíz del grado n exacta y llamaremos *raíz entera del grado n de un número entero la raíz del grado n de la mayor potencia entera del grado n, contenida en dicho número.*

Así, siendo $3^4 = 81$ y $4^4 = 256$, la raíz de 4º grado *entera* de 145 será 3, porque la mayor potencia de 4º grado contenida en 145 es 81 y su raíz es 3.

274. *La raíz de grado n de un número entero es inconmensurable si su raíz entera no es exacta.*

En efecto; sea $\sqrt[n]{A}$. Puesto que no es igual á ningún número entero, tendrá que ser, ó fraccionaria, ó inconmensurable; pero si fuese fraccionaria podríamos convertirla en un quebrado irreducible (núm. 186), y representándole por $\frac{a}{b}$ tendríamos:

$$\sqrt[n]{A} = \frac{a}{b}$$

y como por definición $\left(\sqrt[n]{A}\right)^n = A$ y además $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ (número 232), se debiera tener

$$A = \frac{a^n}{b^n}$$

pero las potencias de un quebrado irreducible son quebrados irreducibles (núm. 235); luego la igualdad anterior es absurda, porque un número entero no puede ser igual á un quebrado irreducible.

Entonces, puesto que $\sqrt[n]{A}$ no puede ser fraccionario, será inconmensurable.

275. *Un quebrado irreducible tiene raíz del grado n exacta, cuando su numerador y denominador la tienen.*

Sea $\sqrt[n]{\frac{A}{B}}$, siendo $\frac{A}{B}$ un quebrado irreducibie. La raíz no puede ser un número entero, porque las potencias de los números enteros son enteras, y por consiguiente no pueden ser iguales á ningún quebrado irreducible.

Ahora bien; si hacemos

$$\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = \frac{a}{b}$$

siendo $\frac{a}{b}$ un quebrado irreducible y elevamos los dos miembros de la igualdad anterior á la potencia de grado n tendremos (núm. 232):

$$\frac{A}{B} = \frac{a^n}{b^n}$$

y como las dos fracciones son irreducibles, se deberá tener $A = a^n$ y $B = b^n$ (núm. 189), de donde se deduce $\sqrt[n]{A} = a$ $\sqrt[n]{B} = b$.

276. *Si los dos términos de un quebrado irreducible no son potencias perfectas del grado n, la raíz del grado n del quebrado es incomensurable.*

Porque si la raíz fuese comensurable, sería una fracción cuyo numerador y denominador serían las raíces del numerador y denominador de la fracción dada (núm. 275) y por consiguiente sus términos tendrían que ser potencias perfectas del grado n, lo que es contra la hipótesis.

277. *La raíz del grado n de un número incomensurable es incomensurable.*

Porque si la raíz fuese comensurable (entera ó fraccionaria), su potencia del grado n sería comensurable, lo que es contra la hipótesis.

278. *Si de los dos miembros de una igualdad se extrae la raíz del grado n, el resultado es una igualdad.*

Si se tiene $A = B$, decimos que $\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{B}$. Porque siendo $\left(\sqrt[n]{A}\right)^n = A$ y $A = B$, también se verifica $\left(\sqrt[n]{A}\right)^n = B$ cuya igualdad prueba que $\sqrt[n]{A}$ es igual á $\sqrt[n]{B}$.

279. *Si de los dos miembros de una desigualdad se extrae la raíz del grado n, el resultado es una desigualdad del mismo signo que la propuesta.*

Si tenemos $A > B$, decimos que $\sqrt[n]{A} > \sqrt[n]{B}$. Porque siendo $A = \left(\sqrt[n]{A}\right)^n$, un producto de n factores iguales y $\left(\sqrt[n]{B}\right)^n$ otro producto de n factores, para que el primer producto sea mayor que el segundo, se necesita que el factor $\sqrt[n]{A}$ sea mayor que el factor $\sqrt[n]{B}$

* 280. *El límite de la raíz del grado n de una variable es la raíz del mismo grado del límite de dicha variable.*

Sea y una variable igual á $\sqrt[n]{x}$, tendremos:

$\sqrt[n]{x} = y$ y elevando á la potencia de grado n $x = y^n$

de donde se deduce (núm. 265).

$$\text{lím. } x = \text{lím. } y^n = (\text{lím. } y)^n$$

y por consiguiente

$$\sqrt[n]{\text{lím. } x} = \text{lím. } y$$

pero por ser $\sqrt[n]{x} = y$, también se tiene lím. $\sqrt[n]{x} =$ lím. y

luego $$\text{lím. } \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{\text{lím. } x}$$

281. *La raíz del grado n de un producto, es igual al producto de las raíces del grado n de los factores.*

Decimos que $\sqrt[n]{A \,.\, B \,.\, C} = \sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B} \cdot \sqrt[n]{C}$

Si elevamos á la potencia del grado n el segundo miembro, tendremos

$$\left(\sqrt[n]{A}\cdot\sqrt[n]{B}\cdot\sqrt[n]{C}\right)^n=\left(\sqrt[n]{A}\right)^n\left(\sqrt[n]{B}\right)^n\left(\sqrt[n]{C}\right)^n=A\,.\,B\,.\,C$$

y extrayendo la raíz del grado n del primero y tercer miembro resulta

$$\sqrt[n]{A}\cdot\sqrt[n]{B}\cdot\sqrt[n]{C}=\sqrt[n]{A\,.\,B\,.\,C}$$

282. *La raíz del grado n de un quebrado es igual á la raíz del grado n del numerador partida por la raíz del grado n del denominador.*

Sea el quebrado $\frac{A}{B}=C$, de donde $A=B\,.\,C$. Extrayendo la raíz del grado n tendremos(núm. 279) $\sqrt[n]{A}=\sqrt[n]{B}\cdot\sqrt[n]{C}$

de donde $\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}=\sqrt[n]{C}$, y poniendo en vez de C su igual $\frac{A}{B}$, resultará:

$$\sqrt[n]{\frac{A}{B}}=\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}$$

II. La raíz cuadrada.

Raiz cuadrada de un número con menor error de una unidad.

283. En la definición general de raíz de un gradó cualquiera hemos dicho *que raíz cuadrada de un número es otro número cuyo cuadrado es el propuesto.* Así, 8 es la raíz cuadrada de 64. *Raíz cuadrada entera es la raíz cuadrada del mayor cuadrado entero contenido en un número.* Así, la raíz cuadrada entera de 70 es 8, porque el mayor cuadrado entero contenido en 70 es 64.

La diferencia entre un número y el cuadrado de su raíz cuadrada entera se llama resto de la raíz cuadrada. El resto de la raíz cuadrada de 70 es 6, porque la diferencia entre 70 y 64 que es el cuadrado de la raíz cuadrada entera es 6.

284. *La raíz cuadrada entera de un número cualquiera* (entero, fraccionario, ó incomensurable) *es la raíz cuadrada entera de su parte entera.*

Sea un número cualquiera, A, comprendido entre dos números enteros N y $N+1$, es decir tal, que se tenga $N \angle A \angle N+1$, y sea a la raíz cuadrada entera de N, tendremos:

$$a^2 \underline{\angle} N \text{ y } (a+1)^2 \underline{\diagdown} N+1$$

de donde se deduce

$$a^2 \angle A \text{ y } (a+1)^2 \diagdown A$$

luego la raíz entera de A es a, conforme queríamos demostrar.

En virtud de este teorema, *para extraer la raíz cuadrada entera de un número cualquiera con menor error de una unidad, bastará extraer la raíz cuadrada entera de su parte entera.* Por consiguiente sólo nos ocuparemos ahora de las raíces cuadradas de los números enteros.

Antes de comenzar la extracción de la raíz cuadrada entera de un número entero, demostraremos algunos teoremas necesarios para efectuar esta operación.

285. *El cuadrado de la suma de dos números es igual al cuadrado del primero, más el duplo del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.*

Sean los números a y b, tendremos, por definición.

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$

pero aplicando al segundo miembro la regla de la multiplicación de dos sumas indicadas (núm. 60), se tendrá:

$$(a+b)(a+b) = (a+b)\,a + (a+b)\,b$$

y efectuando en el segundo miembro, según la regla (número 57) de multiplicar una suma por un número:

$$(a+b)a+(a+b)b = a \,.\, a+a \,.\, b+a \,.\, b+ b \,.\, b = a^2 + 2ab + b^2$$

y por consiguiente

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Ejemplo: $(4+8)^2 = 4^2 + 2 \,.\, 4 \times 8 + 8^2$

286. Si los sumandos expresan, uno decenas y otro unidades, se tendrá: *El cuadrado de la suma de decenas y unidades es igual al cuadrado de las decenas, más el duplo de las decenas por las unidades, más el cuadrado de las unidades.*

Sea el número 347, que es igual á $340 + 7$, tendremos:
$(340 + 7)^2 = 340^2 + 2 . 340 \times 7 + 7^2 = 115600 + 4760 + 49$

Si en general representamos el número descompuesto en decenas y unidades por $d . 10 + u$, se tendrá:

$$(d . 10 + u)^2 = (d . 10)^2 + 2d . 10 . u + u^2$$

y teniendo presente que $(d . 10)^2 = d^2 . 100$ (núm. 76)

$$(d . 10 + u)^2 = d^2 . 100 + 2d . 10 . u + u^2$$

El cuadrado de decenas es un número que contiene siempre el factor 100, y el duplo de decenas por unidades el factor 10, luego el primero es siempre un *número exacto de centenas* y el segundo un *número exacto de decenas*.

287. *La diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos es igual al duplo del menor, más uno.*

Sean, a y $a + 1$, los dos números consecutivos, tendremos (núm. 285)

$$(a + 1)^2 = a^2 + 2a . 1 + 1^2 = a^2 + 2a + 1$$

y restando a^2, del primero y tercer miembro

$$(a + 1)^2 - a^2 = 2 a + 1$$

cuya igualdad demuestra el teorema.

288. *El resto de la raiz cuadrada entera de un número es menor que el doble de la raiz más la unidad.*

Sea el número N, a su raíz cuadrada entera y R el resto, tendremos:

$$N = a^2 + R$$

pero siendo a^2 el mayor cuadrado entero contenido en N, se tendrá $N \angle (a + 1)^2$, y como según lo dicho (núm. 287) $(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$, se verificará también

$$a^2 + R \angle a^2 + 2a + 1$$

y restando a^2 de los dos miembros resultará

$$R \angle 2 a + 1$$

Conviene advertir que la raíz entera a es la raíz *por defecto, con un error menor* que la unidad, y $a + 1$ es la raíz *por exceso, con un error menor también que la unidad*, porque entre ambas raíces está comprendida la raíz inconmensurable del número.

289. *Los cuadrados de la unidad seguida de ceros son*

la unidad seguida de doble número de ceros (núm. 50, 1.°)

Así: $10^2 = 100$; $100^2 = 10000$; $1000^2 = 1000000$;.....

De esto se deduce que la raíz cuadrada de un número *menor* que 100 será *menor* que 10 y por consiguiente tendrá *una cifra;* la de un número *mayor* que 100 y *menor* que 10000, será *mayor* que 10 y *menor* que 100, luego tendrá dos cifras, etc.

En la extracción de la raíz cuadrada entera consideraremos dos casos: 1.°, *que el número sea menor que* 100; 2.°, *que sea mayor que* 100.

289 *bis.* PRIMER CASO. *Extraer la raíz cuadrada entera de un número menor que* 100.

Escribamos la tabla de los cuadrados de los diez primeros números.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Si se trata de hallar la raíz cuadrada de un número contenido en la segunda fila, el resultado será su correspondiente en la primera. Así $\sqrt{64} = 8$. Si se trata de otro número cualquiera, 73, por ejemplo, la raíz entera será 8, porque 64 es el mayor cuadrado contenido en 73, y el resto será 9, por ser la diferencia entre 64 y 73.

La raíz entera de que hablamos tiene un *error por defecto* menor que una unidad: añadiéndola una unidad, se tendrá la raíz con *un error por exceso* menor que una unidad.

Así: de la limitación $64 \angle 73 \angle 81$, deducimos extrayendo la raíz cuadrada.

$$8 \angle \sqrt{73} \angle 9$$

290. SEGUNDO CASO. *Extraer la raíz cuadrada entera de un número mayor que* 100.

Consideremos en primer lugar un número mayor que 100 y menor que 10000, y tendrá por raíz cuadrada un número mayor que 10 y menor que 100, porque el cuadrado de 10 es 100, y el de 100 es 10000.

Sea, pues, el número 3216. Por tener dos cifras su raíz cuadrada, se compondrá de decenas y unidades, luego si 3216 es cuadrado perfecto, contiene las tres partes que forman el cuadrado de su raíz, que son (núm 286), el cuadrado de las decenas, el duplo de las decenas por las unidadades y el cuadrado de las unidades, y si 3216 no es cuadrado perfecto, contendrá además un resto que será la diferencia entre dicho número y el cuadrado de su raíz entera.

Para hallar la cifra de las decenas de la raíz debemos recordar que el cuadrado de las decenas es un número exacto de centenas (núm 286), luego debe estar contenido en las centenas de 3216, ó sea en 3200: la raíz entera de 32 es 5 (núm. 289), entonces el cuadrado de 5, que es 25, se puede restar de 32, y por consiguiente el cuadrado de 50, que es 2500, se podrá restar de 3200, y con más motivo del número propuesto, 3216; luego la raíz pedida es mayor que 50. Por otra parte, siendo 5 la raíz entera de 32, este número será menor que el cuadrado de 6, luego 3200 será menor que el cuadrado de 60, y la diferencia será, *cuando menos*, una centena; entonces también 3216 será menor que el cuadrado de 60 y por consiguiente la raíz cuadrada que buscamos estará comprendida entre 50 y 60; luego su cifra de decenas, será 5.

De aquí se deduce: *que para hallar la cifra de las decenas de la raíz, basta extraer la raíz cuadrada entera de las centenas del número.*

Restando de 3216 el cuadrado de las decenas de la raíz, que es 2500, la diferencia, que es 716, contendrá: *el duplo de las decenas de la raíz por las unidades, el cuadrado de las unidades*, y si el número dado no es cuadrado perfecto, *el resto de la raíz*. Como el duplo de las decenas por las unidades de la raíz es un número exacto de decenas (número 286) tiene que estar contenido en las 71 decenas de 716. Ahora, dividiendo 71 decenas por 10 decenas, que es el duplo de las decenas de la raíz, *el cociente será la cifra de las unidades, ó un número mayor;* porque en las 71 decenas de

716, puede haber decenas que hayan resultado del cuadrado de las unidades de la raíz y del resto, si le hay. El cociente de 71 entre 10 es 7, pero como puede ser mayor que la cifra de las unidades, es preciso comprobarle: para esto se une á la cifra de las decenas y se forma el número 57 si el cuadrado este de número se puede restar de 3216, la cifra 7 es buena, y sinó será grande, y se repetirá la comprobación rebajándola una unidad. El cuadrado de 57 es 3249, que no se puede restar de 3216, entonces la cifra 7 es grande: el cuadrado de 56 es 3136, y como este número es menor que 3216, la cifra 6 es buena; efectuando la sustracción, según está indicada al margen, el resto será 80.

32'16	56
50^2...25	
71'6	10
56^2...31'36	
80	

El método de comprobación de la cifra de las unidades se puede simplificar, porque después de restar del número propuesto el cuadrado de las decenas de su raíz, sólo nos falta restar de la diferencia obtenida el duplo de las decenas por las unidades y el cuadrado de las unidades de la raíz; es decir, $2 \,.\, 50 \times 6 + 6^2$. Pero estos dos números se pueden restar de una vez, porque se tiene:

$$2 \,.\, 50 \times 6 + 6^2 = (2 \,.\, 50 + 6)6 = (100 + 6)6 = 106 \times 6$$

Luego la cifra de las unidades se comprueba *sumándola con el duplo de las decenas de la raíz y multiplicando por ella, ó sea escribiéndola á la derecha del divisor* 10 y *multiplicando el resultado* 106 *por dicha cifra*, según se indica al margen.

32'16	5
25	
71'6	106
636	6
80	

Si el producto obtenido es grande, se repite la comprobación rebajando, de una en una unidad, el cociente, ó sea la cifra de las unidades de la raíz.

De lo expuesto se deduce *que para hallar la cifra de las unidades de la raíz* (cuando ya se ha hallado la cifra de las decenas y se ha restado su cuadrado del número dado) *se separa la cifra de la derecha del resto y lo que queda á la izquierda se divide por el duplo de la cifra de las decenas de la raíz; el cociente será la cifra de las unidades, ó un número mayor*: para comprobarle se escribe á la derecha del divisor y el número que se forma se multiplica por el cociente y el producto se resta del dividendo y la cifra separada; si la sustracción no es posible, la cifra comprobada es grande y habrá que rebajarla una, ó más unidades, hasta que el producto, formado según hemos dicho, se pueda restar del dividendo y la cifra separada. (*)

Sea ya, extraer la raíz cuadrada de un número cualquiera mayor que 10000; por ejemplo, 41624378.

Si suponemos la raíz cuadrada descompuesta en decenas y unidades, las decenas se obtendrán extrayendo la raíz cuadrada de las 416243 centenas del número propuesto. Pero el número 416243 es mayor que 100; por tanto su raíz cuadrada se compondrá de decenas y unidades, luego por igual razon que anteriormente hallaremos las decenas extrayendo la raíz cuadrada de las 4162 centenas del número 415243.

Como el número 4162 es mayor que 100, pero menor que 10000, se hallará su raíz cuadrada como en el ejemplo anterior.

41'6 2'4 3'7 8	6451
36	
5 6'2	124×4
4 9 6	
6 6 4'3	1285×5
6 4 2 5	
2 1 8 7'8	12901×1
1 2 9 0 1	
8 9 7 7	

La raíz cuadrada de 5162 es 64, por consiguiente las decenas de la raíz de 416243 son 64; la diferencia entre el cuadrado de 64 decenas y 416243 es 6643, dividiendo, pues, este número por el duplo de 64 decenas, que son 128 decenas, y procediendo como hemos explicado anteriormente, se halla la cifra 5, que unida á las dos anteriores, forma el número 645, que serán las decenas de la raíz de 41624378: la diferencia entre este núme-

(*) Teniendo presente lo que hemos dicho en la división sobre el tanteo de la cifra del cociente (núm. 85) no necesitamos escribir la cifra de las unidades de la raíz hasta tener seguridad de que es buena; para esto basta suponer que el dividendo es la diferencia que resulta después de restar el cuadrado de las decenas de la raíz, el divisor el duplo de las decenas sumado con la cifra de unidades que se va á comprobar y el cociente dicha cifra de unidades. Así, en el ejemplo del texto, para comprobar la cifra 7, el dividendo será 716, el divisor 107 y el cociente 7, y podremos hacer mentalmente la comprobación diciendo: 71 entre 10, á 7 y sobra 1, que con el 6 son 16, pero 7 por 7 son 49; luego la cifra 7 es grande. La comprobación de 6 se hace, siendo el dividendo el mismo 716, el divisor 106 y el cociente 6.

ro y el cuadrado de las 645 decenas de su raíz es 21878; por consiguiente, dividiendo es número por el duplo de 645 decenas, que son 1290 decenas, y procediendo como anteriormente se halla la cifra, 1, que unida á las anteriores forma el número 6451, que es la raíz cuadrada entera del número propuesto, con un error, por defecto, menor que una unidad, siendo 8977 el resto de la operación.

Las operaciones se disponen como estén indicadas en el ejemplo del margen.

De los razonamientos anteriores se deduce la siguiente:

Regla. *Para extraer la raíz cuadrada de un número entero con menos de una unidad de error, se le divide en secciones de dos cifras, comenzando por la derecha, de modo que la última sección, que es la primera de la izquierda, puede tener una, ó dos cifras. Se extrae la raíz cuadrada de la primera sección de la izquierda, y se tendrá la primera cifra de la raíz: el cuadrado de esta cifra se resta de esta misma sección y á la derecha del resto se baja la sección siguiente: del número que se obtenga se separa la cifra de la derecha, y lo que queda á la izquierda se divide por el duplo de la raíz hallada; el cociente se escribe á la derecha del divisor y se multiplica todo por el cociente y el producto que resulte se resta del dividendo y la cifra separada; si la sustracción no es posible, la cifra del cociente es grande, y se le rebaja, de unidad en unidad, hasta que la sustracción sea posible y se obtenga el segundo resto: entonces la cifra ensayada será la segunda de la raíz y se escribirá á la derecha de la primera. A la derecha del segundo resto se baja la tercera sección, se separa la cifra de la derecha y lo que queda á la izquierda se divide por el duplo del número formado por las dos cifras halladas de la raíz y el cociente será la tercera cifra de la raíz, ó un número mayor, y se comprobará como anteriormente. Se continuará del mismo modo hasta bajar la última sección, que dará la última cifra de la raíz, y el resto de la operación, si el número propuesto no es cuadrado perfecto.*

291 Cuando un dividendo no contenga al divisor correspondiente, la cifra de la raíz es cero y se pasará á determinar la cifra siguiente considerando este dividendo como un resto.

67'2 8'92'89	8203
3 2'8	162×2
0 4 9'28'9	16403×3
08 0	

La operación se simplifica efectuando, como en la división ordinaria, los productos y sustracciones simultáneamente, como en el ejemplo del margen.

292. El número de cifras de la raíz es evidentemente igual al número de secciones, luego será *la mitad, ó la mitad más una* que las que tenga el número.

293. No se puede conocer á primera vista si un número cualquiera tendrá raíz exacta; pero existen algunos caracteres, llamados de *exclusión*, por los cuales se conoce que un número dado no puede tener raíz exacta.

De la inspección de la tabla de cuadrados de los números dígitos se deduce: *que ningún número terminado en* 2, 3, 7 ú 8 *puede tener raiz cuadrada exacta*, porque ningún cuadrado termina en estas cifras.

Los cuadrados de los números terminados en ceros terminan en doble número de ceros, es decir, siempre en un número *par* de ceros, luego *ningún número terminado en ceros podrá tener raiz cuadrada exacta, si el número de ceros que le terminan es impar*.

Cuando se eleva al cuadrado un número terminado en 5, el duplo de las decenas por las unidades que siempre es un número exacto de decenas (núm. 286), contiene en este caso el producto de 2 por 5, luego será un número exacto de centenas, y por consiguiente el cuadrado terminará en 25.

Así: $(d\,.\,10 + 5) = d^2.100 + 2\,.\,d\,.\,10\,.\,5 + 5^2 = d^2.10 + d.100 + 25$

Luego *ningún nùmero terminado en* 5 *puede tener raiz cuadrada exacta si la cifra de las decenas no es un* 2.

294. *Si un número se descompone en factores primos y los exponentes de todos los factores son pares, tendrá raiz cuadrada exacta, y no la tendrá en el caso contrario* (número 167).

Cuando los exponentes de todos los factores son pares, la raíz cuadrada es el producto de los factores primos con exponentes mitades de los del número.

Así: $\sqrt{2^4 . 3^2 . 5^2} = 2^2 . 3 . 5$.

295. La prueba de la raíz cuadrada consiste en elevar al cuadrado la raíz y sumar el resultado con el resto, debiendo obtenerse el número dado.

También se debe tener presente que si por miedo á ensayar alguna cifra grande, se pone en la raíz una cifra menor que la verdadera, el resto correspondiente será igual, ó mayor que el duplo de la raíz hallada más uno (núm. 288), y habrá que aumentar dicha cifra.

Raíz cuadrada de un número con menor error de una unidad fraccionaria dada.

296. *Hallar la raíz cuadrada de un número entero, fraccionario, ó incomensurable. con menos error de $\frac{1}{n}$ es hallar el mayor número de n-ésimos contenidos en su raíz cuadrada.*

Así, si designamos por N un número cualquiera (entero, fraccionario, ó incomensurable) y por x el mayor número de *n-ésimos* contenidos en su raíz cuadrada se debe verificar.

$$\frac{x}{n} \angle \sqrt{N} \angle \frac{x+1}{n}$$

elevando al cuadrado los tres miembros

$$\frac{x^2}{n^2} \angle N \angle \frac{(x+1)^2}{n^2}$$

multiplicando por n^2 resultará

$$x^2 \angle N . n^2 \angle (x+1)^2$$

de donde se deduce que x^2 es el mayor cuadrado entero contenido en $N . n^2$, y por consiguiente x, será la raíz cuadrada entera, de la parte entera, del producto $N . n^2$ (número 284.)

Luego: *para extraer la raíz cuadrada de un número*

N entero, fraccionario, ó incomensurable con menor error de $\frac{1}{n}$, se extrae la raíz cuadrada entera de la parte entera del producto $N \cdot n^2$ y se divide el resultado por n.

Ejemplos:

1.° Hallar la raíz cuadrada de 23 con menos error de $\frac{1}{100}$.

Como el cuadrado de 100 es 10000, se hallará la raíz cuadrada entera de 230000 y se dividirá por 100. La raíz entera de 230000 es 479; entonces la raíz de 23, con menos error de $\frac{1}{100}$, será $\frac{479}{100} = 4'79$.

2.° Hallar la raíz cuadrada de $\frac{3}{5}$ con menos de $\frac{1}{61}$ de error.

El cuadrado de 61 es 3721, luego tendremos que hallar la raíz entera de la parte entera de $\frac{3 \times 3721}{5} = \frac{11163}{5} = 2232\frac{3}{5}$. La raíz entera de 2232 es 47, luego $\frac{47}{61}$ es la raíz cuadrada de $\frac{3}{5}$, con menos error de $\frac{1}{61}$

297. *Conviene advertir que generalmente se piden las raíces aproximadas de los números con un error menor que $\frac{1}{10^n}$, ó sea con n cifras decimales exactas, y por consiguiente la regla anterior está reducida á multiplicar los números por 10^{2n}, extraer la raíz entera, de la parte entera, del producto y separar n cifras decimales en la raíz.*

La operación de multiplicar un número por 10^{2n} se hace: si el número es entero, añadiéndole $2n$ ceros; si es decimal de número limitado, ó ilimitado de cifras, corriendo la coma $2n$ lugares: y si es fracción ordinaria, añadiendo al numerador $2n$ ceros y hallando el cociente entero que resulta de dividir por el denominador.

Ejemplos:

1.° Hallar con menos error de 0,001 la raíz cuadrada del número incomensurable $\pi = 3,14159265.....$

Corriendo la coma 6 lugares á la derecha resulta el número 3141592,65..... y extrayendo la raíz cuadrada de la parte entera se obtiene 1772; luego 1,772 será la raíz con menos error de 0,001.

2.° Hallar con menos error de 0,01 la raiz cuadrada de $\frac{22}{7}$. Se multiplica 22 por 10000 y se halla raíz de la parte entera del quebrado $\frac{220000}{7} = 31428,5...$ La raíz de 31428 es 177; luego la raíz pedida será 1,77.

Raíz cuadrada de las fracciones ordinarias y decimales.

298. Cuando se trata de hallar la raíz cuadrada de una fracción ordinaria, ó decimal, con una aproximación determinada, tenemos que aplicar las reglas de los números anteriores; por consiguiente sólo nos resta ocuparnos de las raíces de las fracciones, cuando no se marca el grado de la aproximación.

299. *La raíz cuadrada de un quebrado es igual á la raíz cuadrada del numerador partida por la del denominador.* Es un caso particular del teorema núm. 282. Así: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

300. *Para que un quebrado irreducible tenga raíz cuadrada exacta se necesita que su numerador y denominador sean cuadrados perfectos* (núm. 275).

Así: $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$

301. Cuando los términos de un quebrado irreducible no son cuadrados perfectos, conviene transformarle en otro equivalente cuyo denominador sea cuadrado perfecto, porque de este modo si se extrae la raíz entera del numerador y se parte por la exacta del denominador, se puede apreciar el grado de la aproximación que se obtiene.

Para transformar un quebrado en otro cuyo denominador sea cuadrado perfecto, se multiplican ambos términos por el denominador del quebrado. Así tendremos:

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{\frac{ab}{b^2}}=\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{b^2}}=\frac{\sqrt{ab}}{b}$$

Este resultado es el mismo que se obtendría si se tratase de hallar la raíz $\frac{a}{b}$ con menos error de $\frac{1}{b}$, por la regla del número 296.

302. Podemos proponernos transformar el quebrado irreducible en otro cuyo denominador sea el menor cuadrado perfecto posible: *para esto se descompone el denominador en factores primos y se multiplican los dos términos del quebrado por los factores cuyos exponentes sean impares.* Porque entonces los exponentes de los factores en el denominador serán pares y tendrá raíz exacta (núm. 294) y es el menor denominador posible porque tiene que ser múltiplo del antiguo y no se le puede quitar ningún factor sin dejar de cumplir esta condición, ó la de ser cuadrado perfecto.

Ejemplo: Hallar la $\sqrt{\frac{35}{54}}$. Descomponiendo 54 en factores primos resulta $54 = 2 \,.\, 3^3$ luego $\frac{35}{54}=\frac{35 \,.\, 2 \,.\, 3}{2^2 \,.\, 3^4}=\frac{210}{2^2 \,.\, 3^4}$, por consiguiente $\sqrt{\frac{35}{54}}=\frac{\sqrt{210}}{2 \,.\, 3^2}=\frac{\sqrt{210}}{18}$.

303. *Para extraer la raíz cuadrada de una fracción decimal, cuando el número de cifras decimales es par, se prescinde de la coma, se extrae la raíz cuadrada como si fuese un número entero y se separan de la raíz tantas cifras decimales como la mitad de las que tenga el número dado. Si el número de cifras decimales es impar se le agrega un cero y se aplica después la regla enunciada.*

Esta regla está comprendida en la del núm. 297. Hallar la raíz cuadrada de 2,146. Como el número de cifras decimales es impar añadiremos un cero y se hallará la raíz cuadrada de 3,7460 con menos error de 0,01. Para esto, según ya sabemos, se halla la raíz cuadrada de 37460 y se divide por 100, ó se separan dos cifras decimales.

También se puede explicar esta operación por la transformación del quebrado decimal en otro cuyo denominador es el mínimo cuadrado perfecto. Así:

$$\sqrt{3,746} = \sqrt{3,7460} = \sqrt{\frac{37460}{10000}} = \frac{\sqrt{37460}}{100}$$

De modo que siendo 193 la raíz cuadrada entera de 37460, la raíz pedida será 1,93.

304. De lo expuesto se deduce: *que una fracción decimal tiene raíz exacta cuando el número de sus cifras decimales es par, y prescindiendo de la coma es cuadrado perfecto: y no la tiene, sino se verifican ambas condiciones.* Es decir, tiene raiz exacta cuando su numerador y denominador son cuadrados perfectos, *como si se tratase de un quebrado irreducible.*

III. La raíz cúbica.

Raíz cúbica de un número con menos error de una unidad.

305. *Raíz cúbica de un número es otro número cuyo cubo es el propuesto.* Así, 3 es la raíz cúbica de 27, porque el cubo de 3 es 27. *Raiz cúbica entera es la raiz cúbica del mayor cubo entero contenido en un número.*

La diferencia entre un número y el cubo de su raíz cúbica entera se llama resto de la raíz cúbica.

306. *La raíz cúbica entera de un número cualquiera* (entero, fraccionario, ó incomensurable) *es la raíz cúbica entera de su parte entera.*

La misma demostración que en la raíz cuadrada.

En virtud de este teorema sólo nos ocuparemos, por ahora, de las raíces cúbicas de los numeros enteros.

307. *El cubo de la suma de dos números es igual al cubo del primero, más el triplo del cuadrado del primero por el segundo, más el triplo del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo.*

Sean los números a y b, tendremos:

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b)$$

pero según reglas conocidas

$$(a^2+2ab+b^2)(a+b) = a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3)$$

y por ser $2a^2b+a^2b=3a^2b$ y $ab^2+2ab^2=3ab^2$, tendremos finalmente

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3\,ab^2+b^3$$

Ejemplo: $(4+8)^3 = 4^3+3\,.\,4^2\times 8+3\,.\,4\times 8^2+8^3$

308. Si los sumandos expresan uno decenas y otro unidades se tendrá: *El cubo de la suma de decenas y unidades es igual al cubo de las decenas, mas el triplo del cuadrado de las decenas por las unidades, mas el triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades, mas el cubo de unidades:*

Así: $347^3 = (340+7)^3 = 340^3+3\,.\,340^2\,.\,7+3\,.\,340\,.\,7^2+7^3$

En general,

$$(d\,.\,10+u)^3 = d^3\,.\,1000+3d^2\,.\,100u^2+3d\,.\,10u^2+u^3$$

El cubo de decenas tiene el factor 1000, y por consiguiente es un *número exacto de millares* y el triplo del cuadrado de decenas por unidades es un *número exacto de centenas.*

309. *La diferencia de los cubos de dos números consecutivos es igual al triplo del cuadrado del menor, mas el triplo del menor, mas uno.*

Sean a y $a+1$, los dos números consecutivos, tendremos:

$$(a+1)^3 = a^3+3a^2\,.\,1+3a\,.\,1^2+1^3 = a^3+3a^2+3a+1$$

y restando a^3 del primero y tercer miembro

$$(a+1)^3-a^3 = 3a^2+3a+1$$

310. *El resto de la raiz cúbica entera de un número es menor que el triplo del cuadrado de la raiz, más el triplo de la raiz, mas la unidad.*

Sea el número N, a su raiz cúbica entera y R el resto, tendremos:

$$N = a^3+R$$

pero siendo a^3 el mayor cubo contenido en N, se tendrá $N \angle (a+1)^3$ y como $(a+1)^3 = a^3+3a^2+3a+1$, se debe verificar

$$a^3 + R \angle a^3 + 3a^2 + 3a + 1$$

y restando a^3 de los dos miembros

$$R \angle 3a^2 + 3a + 1$$

Los números a y $a + 1$ son las raíces cúbicas por *defecto* y por *exceso* de N, con menor error cada una de ellas de una unidad.

311. *Los cubos de la unidad seguida de ceros son la unidad seguida de triple número de ceros.*

Así: $10^3 = 1000$; $100^3 = 1000000$; $1000^3 = 1000000000$.....

De esto se deduce que la raíz cúbica de un número *menor* que 1000, será *menor* que 10, y por consiguiente tendrá *una cifra*; la de un número *mayor* que 1000 y *menor* que 1000000, será *mayor* que 10 y *menor* que 100, luego tendrá dos cifras, etc.

En la extracción de la raíz cúbica entera consideraremos dos casos: 1.°, que el número sea menor que 1000; 2.°, que sea mayor que 1000.

312. Primer caso. *Extraer la raíz cúbica entera de un número menor que* 1000.

La tabla de los cubos de los 10 primeros números es

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Si se trata de hallar la raíz cúbica de un número contenido en la segunda fila, el resultado será su correspondiente en la primera. Así $\sqrt[3]{729} = 9$. Si se trata de otro número cualquiera, 814 por ejemplo, la raíz entera será 9, porque 729 es el mayor cubo contenido en 814. El resto será la diferencia entre 814 y 729, es decir, 85.

313. Segundo caso. *Extraer la raíz cúbica entera de un número mayor que* 1000.

Consideremos primero un número mayor que 1000 y menor que 1000000; su raíz cúbica tendrá dos cifras, porque estará comprendida entre 10 y 100.

Sea, pues, el número 76423. Como la raíz de este número se compone de decenas y unidades, si 76423 es cubo perfecto, se compondrá de las cuatro partes enunciadas (núm. 308), y si no es cubo perfecto, contendrá además un resto, que será la diferencia entre dicho número y el cubo de su raíz cúbica entera.

Para hallar la cifra de las decenas de la raíz, recordaremos que el cubo de las decenas es un número exacto de millares (num. 308), luego debe estar contenido en los millares de 76423, ó sea en 76000: la raíz cúbica entera de 76 es 4 (núm. 312), entonces el cubo de 4, que es 64, se puede restar de 76 y por tanto el cubo de 40, que es 64000, se puede restar de 76000 y con más motivo del número 76423; luego la raíz pedida es mayor que 40. Por otra parte, siendo 4 la raíz entera de 76, este número será menor que el cubo de 5, luego 76000 será menor que el cubo de 50 y la diferencia será, *cuando menos*, un millar; entonces también el número 76423 será menor que el cubo de 50, y por consiguiente la raíz cúbica que buscamos estará comprendida entre 40 y 50, de donde se deduce que la cifra de las decenas de la raíz es 4.

En virtud de esto: *para hallar la cifra de las decenas de la raíz cúbica, se extrae la raíz cúbica entera de los millares del número.*

Restando de 76423 el cubo de las decenas de la raíz, que es 64000, la diferencia, que es 12423, contendrá: *el triplo del cuadrado de las decenas por las unidades de la raíz, el triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades, el cubo de las unidades* y si el número no es cubo perfecto, el *resto de la raíz*. Como el triplo del cuadrado de las decenas por las unidades, de la raíz es un número exacto de centenas (núm. 308) tiene que estar contenido en las 124 centenas de 12423. Ahora dividiendo 124 centenas por 48 centenas; que es el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz, *el cociente será la cifra de las unidades, ó un número mayor,* porque en las 124 centenas de 12423 puede haber centenas, que hayan resultado del triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades de la raíz, del cubo de unidades y del resto si le hay. Efectuando la división de 124 entre 64, el cociente es 2, y como puede ser mayor que la cifra de las unidades tenemos que comprobarle: *para esto se une á la cifra de las decenas y se forma el número* 42: *si el cubo de este número se puede restar de* 76423, *la cifra* 2 *es buena, sino será grande y se repetirá la comprobación rebajándola una unidad.* El cubo de 42 es 74088,

	76'423	42
40^3....	64	
	124'23	$4800 = 3.40^2$
42^3....	740 88	
	23 35	

y como este número es menor que 76423, la cifra 2 es buena; efectuando la sustracción según se indica al margen, el resto será 2335.

Pasemos ya á la extracción de la raíz cúbica de un número mayor que 1000000, por ejemplo hallar la raíz cúbica de 386671608.

Si suponemos la raíz cúbica descompuesta en decenas y unidades, las decenas se obtendrán extrayendo la raíz cúbica de los 386671 millares del número propuesto. Pero el número 386671 es mayor que 1000 y menor que 1000000, por tanto su raíz cúbica se compondrá de decenas y unidades que se determinarán como en el ejemplo anterior.

La raíz cúbica de 386671 es 72, por consiguiente las decenas de la raíz de 386671608 son 72: la diferencia entre el cubo de 72 decenas y el número 386671608 es 13423608; por consiguiente dividiendo este número por el triplo del cuadrado de 72 decenas, que es 1555200, se obtendrá el cociente 8, que se comprobará escribiéndole á la derecha de 72 formando el número 728 y elevándole al cubo: como el resultado es 385828352, número menor que el propuesto, la cifra 8 es buena, la raíz entera por defecto es 728 y el resto es 843256.

Las operaciones se disponen del modo siguiente:

			728
		72	728
386'6 71'6 08	72	72	5824
343		144	1456
43 6'71	$147 = 3 \,.\, 7^2$	504	5096
373 2 48		5184	529984
13 4 23 6'08	$15552 = 3 \,.\, 72^2$	72	728
385 8 28 3 52		10368	4239872
8 43 2 56		36288	1059968
		373248	3709888
			385828352

De todo lo expuesto se deduce la siguiente:

REGLA. *Para extraer la raíz cúbica de un número entero con menor error de una unidad, se le divide en secciones de tres cifras comenzando por la derecha, de suerte que la última sección, ó sea la primera de la izquierda, puede tener una, dos ó tres cifras. Se extrae la raíz cúbica de la primera sección de la izquierda y se tendrá la primera cifra de la raíz: el cubo de esta cifra se resta de dicha sección y á la derecha del resto se baja la sección siguiente; del número que se obtenga se separan las dos cifras de la derecha, y lo que queda á la izquierda se divide por el triplo del cuadrado de la raíz hallada; el cociente se une á la primera cifra de la raíz y el número que se forme se eleva al cubo, y si el resultado se puede restar del número formado por las dos primeras secciones de la izquierda, el cociente será la segunda cifra de la raíz y se escribirá á la derecha de la primera; si el cubo formado no se puede restar de las dos primeras secciones de la izquierda se rebaja el cociente, de unidad en unidad, hasta que dicha sustracción sea posible. Después de restar el cubo del número formado por las dos primeras cifras de la raíz de las dos primeras secciones de la izquierda, á la derecha del resto se baja la seccion siguiente, se separan las dos cifras de la derecha y lo que queda á izquierda se divide por el triplo del cuadrado del número formado por las dos cifras halladas de la raíz; el cociente será la tercera cifra de la raíz, ó un número mayor y se comprobará como anteriormente. Se continuará del mismo modo hasta bajar la última sección, que dará la última cifra de la raíz y el resto de la operación si el número no es cubo perfecto.*

314. Cuando un dividendo no contenga al divisor correspondiente, la cifra de la raíz es cero y se pasará á determinar la cifra siguiente considerando este dividendo como un resto.

315. El número de cifras de la raíz es igual al número de secciones, luego será el *tercio* ó *el tercio mas una*, que las que tenga el número.

316. *Si un número se descompone en factores primos, y los exponentes de dichos factores son todos múltiplos de 3 el número tendrá raíz cúbica exacta y no la tendrá en el caso contrario.*

Cuando los exponentes de los factores primos son múltiplos de 3, la raíz cúbica es el producto de los factores con exponentes iguales á la tercera parte de los que tienen en el número.

Así: $\sqrt[3]{2^3 \cdot 3^6 \cdot 5^3} = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

Raiz cúbica de un número con menor error de una unidad fraccionaria dada.

317. *Hallar la raíz cúbica de un número entero, fraccionario, ó incomensurable, con menor error de* $\frac{1}{n}$ *es hallar el mayor número de n-ésimos contenidos en su raíz cúbica.*

Así, si designamos por N un número cualquiera (entero, fraccionario, ó incomensurable) y por x el mayor número de *n-ésimos* contenidos en su raíz cúbica, se debe verificar.

$$\frac{x}{n} \angle \sqrt[3]{N} \angle \frac{x+1}{n}$$

elevando al cubo los tres miembros

$$\frac{x^3}{n^3} \angle N \angle \frac{(x+1)^3}{n^3}$$

multiplicando por n^3 resultará

$$x^3 \angle N \cdot n^3 \angle (x+1)^3$$

de donde se deduce que x^3 es el mayor cubo entero contenido en $N \cdot n^3$ y por consiguente x la raíz cúbica de la parte entera de $N \cdot n^3$ (núm. 305).

Luego: *para extraer la raíz cúbica de un número N, entero, fraccionario ó incomensurable, con menor error de* $\frac{1}{n}$, *se extrae la raíz cúbica entera de la parte entera del producto* $N \cdot n^3$ *y se divide el resultado por n.*

Ejemplo: Hallar la raíz cúbica de $\frac{3}{5}$ con menos de $\frac{1}{12}$ de error.

El cubo de 12 es 1728, luego tendremos que hallar la raíz cúbica entera de la parte entera de $\frac{3 \times 1728}{5} = \frac{5184}{5} = 1036\frac{4}{5}$. La raízcúbica entera de 1036 es 10, luego $\frac{10}{12}$ es la raíz cúbica de $\frac{3}{5}$ con menos erro de $\frac{1}{12}$.

318. *Si se pide la raíz cúbica con un error menor que* $\frac{1}{10^n}$, *se tendrá que multiplicar el número por* 10^{3n}, *extraer la raíz cúbica entera, de la parte entera, del producto y separar* n *cifras decimales en la raíz.*

Ejemplos:

1.° Hallar con menos de 0,001 de error la raíz cúbica del número incomensurable π=3,141592653589.....

Corriendo la coma nueve lugares á la derecha resulta el número 3141592653,589..... y extrayendo la raíz cúbica de la parte entera se obtiene 1464, luego 1,464 es la raíz cúbica pedida, con menos error de 0,001

2.° Hallar la raíz cúbica de 2 con menos error de 0,0001. Se multiplica 2 por la unidad seguida de 12 ceros, se halla la raíz cúbica del producto y se separan 4 decimales. El resultado es 1,2599.

Raíz cúbica de las fracciones ordinarias y decimales.

319. *La raíz cúbica de un quebrado es igual á la raíz cúbica del numerador partida por la raíz cúbica del denominador.*

Es un caso particular del teorema núm. 282. Así,

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

320. *Para que un quebrado irreducible tenga raíz cúbica exacta, se necesita que su numerador y su denominador sean cubos perfectos* (núm. 275).

Así: $$\sqrt[3]{\frac{125}{512}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{512}} = \frac{5}{8}$$

321. Cuando los términos de un quebrado no son cubos perfectos, se le puede transformar en otro cuyo denominador sea cubo perfecto: *para esto basta multiplicar ambos términos por el cuadrado del denominador*. Así tendremos:

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \sqrt[3]{\frac{ab^2}{b^3}} = \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{b^3}} = \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{b}$$

Este resultado es el mismo que se obtendría si se tratase de hallar la raíz cúbica de $\frac{a}{b}$, con menos error de $\frac{1}{b}$ por la regla del núm. 317.

322. Si queremos transformar un quebrado irreducible en otro cuyo denominador sea el *mínimo cubo perfecto*, se descompone el denominador en sus factores primos y se multiplican los dos términos del quebrado por la primera, ó segunda potencia de los factores primos del denominador, cuyos exponentes no sean múltiplos de 3.

Ejemplo: Hallar la $\sqrt[3]{\frac{359}{270}}$. Descomponiendo 270 en factores primos resulta $270 = 2^2 . 3^4 . 5$; luego

$$\frac{359}{1620} = \frac{359}{2^2 . 3^4 . 5} = \frac{359 . 2 . 3^2 . 5^2}{2^3 . 3^6 . 5^3} = \frac{161550}{2^3 . 3^6 . 5^3}$$

y por consiguiente $\sqrt[3]{\frac{359}{1620}} = \frac{\sqrt[3]{161550}}{2 . 3^2 . 5} = \frac{\sqrt[3]{161550}}{90}$

323. *Para extraer la raíz cúbica de una fracción decimal cuando el número de cifras decimales es múltiplo de 3, se prescinde de la coma, se extrae la raíz cúbica como si fuese un número entero y se separan de la raíz tantas cifras decimales como la tercera parte de las que tenga el número dado. Si el número de cifras decimales no es múltiplo de 3, se agregan uno, ó dos ceros para que lo sea, y se aplica después la regla enunciada.*

Esta regla no es más que una aplicación de la del número 318.

Hallar la raíz cúbica de 0,026215. El número de cifras decimales es múltiplo de 3, luego hallaremos la raíz cúbica de 26215 y la dividiremos por 100, ó separaremos dos cifras decimales por ser dos el tercio de seis.

Siendo 29 la raíz cúbica de 26215, la raíz pedida será 0,29

324. *Una fracción decimal tiene raíz cúbica exacta cuando el número de sus cifras decimales es múltiplo de 3 y, prescindiendo de la coma es cubo perfecto; y no la tiene si no se verifican ambas condiciones.* Es decir, tiene raíz cúbica exacta cuando su numerador y denominador son cubos perfectos, *como si se tratase de un quebrado irreducible.*

SECCIÓN SEGUNDA,

Comparación aritmética.

CAPÍTULO PRIMERO.

Las razones geométricas.

325. La *comparación* de dos números se puede hacer por *diferencia, por cociente y por raíz.*

Razón de dos números es el resultado de su comparación por diferencia, por cociente ó por raíz. Si los números son a y b, la razón podrá ser: $a - b$, $\frac{a}{b}$ ó $\sqrt[b]{a}$

La razón por diferencia recibe el nombre de *aritmética*, y la razón por cociente, de *geométrica.*

Sólo nos ocuparemos de las razones geométricas por ser las únicas que tienen importancia por sus aplicaciones.

326. La razón geométrica tiene la forma de un quebrado, ó cociente indicado, en que el numerador, ó dividendo se llama *antecedente*, el denominador, ó divisor, *consecuente*, y ambos juntos, *términos de la razón.* Se escribe bajo una de las formas $\frac{a}{b}$ ó $a : b$, y se lee *a es geométricamente* á *b*, ó simplemente, *a es* á *b*.

Aunque las razones geométricas tienen la misma forma que las fracciones, ó cocientes, son expresiones mucho más generales, porque sus términos pueden ser enteros, fraccionarios ó incomensurables. Por consiguiente aunque tienen las mismas propiedades que las fracciones, se necesita demostrar nuevamente, cuando menos las fundamentales, porque los razonamientos que hacíamos en la teoría de los quebrados suponían que los términos de las fracciones eran enteros.

327. Si designamos por q el valor de la razón $\frac{a}{b}$ de la igualdad $\frac{a}{b} = q$, se deduce, según la definición de la razón, $a = bq$, es decir: *el antecedente es igual al producto del consecuente por la razón.*

328. *Una razón no varía si se multiplican, ó dividen sus dos términos por un número cualquiera.*

Sea la razón $\frac{a}{b} = q$, de donde se deduce

$$a = bq$$

Si multiplicamos por un número cualquiera, n, los dos miembros de esta igualdad, resulta

$$an = bnq$$

y dividiendo ambos miembros por bn

$$\frac{an}{bn} = q = \frac{a}{b}$$

Si en vez de multiplicar, dividimos por n la igualdad $a = bq$, resultará:

$$a : n = (b : n)\, q$$

de donde

$$\frac{a : n}{b : n} = q = \frac{a}{b}$$

En virtud de esto las razones geométricas se pueden *simplificar* y se pueden reducir al mismo *consecuente* (denominador) como las fracciones.

329. *Cuando dos ó más razones tienen el mismo consecuente se suman y restan como las fracciones.*

Sean las razones $\frac{a}{b} = q$; $\frac{a'}{b} = q'$, de donde

$$a = bq \text{ y } a' = bq'$$

sumando miembro á miembro

$$a + a' = b(q + q')$$

y dividiendo ambos miembros por b

$$\frac{a+a'}{b}=q+q'=\frac{a}{b}+\frac{a'}{b}$$

Del mismo modo se demuestra el teorema de la sustracción.

330. *El producto de dos ó más razones es igual á la razón del producto de los antecedentes á los consecuentes.*

Sean las razones $\frac{a}{b}=q$, $\frac{a'}{b'}=q'$, $\frac{a''}{b''}=q''$, tendremos:

$$a=bq,\quad a'=b'q',\quad a''=b''q''$$

multiplicando miembro á miembro, resulta

$$aa'a''=bb'b''qq'q''$$

y dividiendo por $bb'b''$

$$\frac{aa'a''}{bb'b''}=qq'q''=\frac{a}{b}\times\frac{a'}{b'}\times\frac{a''}{b''}$$

Del mismo modo se demostraría para mayor número de razones.

331. *Dos razones son inversas cuando el antecedente de cada una es consecuente en la otra.* Así $\frac{a}{b}$ y $\frac{b}{a}$ son dos razones inversas.

El producto de dos razones inversas es la unidad.

En efecto; $\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=\frac{ab}{ba}=1.$

332. *Para elevar una razón á una potencia, se elevan sus dos términos á dicha potencia.*

Es un caso particular del teorema núm. 330. Así:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$$

333. *Para dividir dos razones se multiplica la razón dividendo por la inversa del divisor, ó también se dividen término á término.*

Si tenemos $\frac{a}{b}=q$ y $\frac{a'}{b'}=q'$, de donde

$$a=bq \text{ y } a'=b'q'$$

multiplicando el primer miembro de la primera igualdad por el segundo de la segunda, y el segundo de la primera por el primero de la segunda, resulta:

$$ab'q' = a'bq$$

y dividiendo ambos miembros por $a'bq'$

$$\frac{ab'}{a'b} = \frac{q}{q'} = \frac{a}{b} : \frac{a'}{b'}.$$

También se tiene (núm. 328).

$$\frac{ab'}{a'b} = \frac{ab' : a'b'}{a'b : a'b'} = \frac{a : a'}{b : b'}$$

ó bien por ser $\frac{ab'}{a'b} = \frac{a}{b} : \frac{a'}{b'}$ se tendrá $\frac{a}{b} : \frac{a'}{b'} = \frac{a : a'}{b : b'}$

334. *Para extraer una raiz de una razón, se extrae dicha raiz de sus dos términos.*

Es decir que tendremos $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

porque las potencias de grado n de los dos miembros son iguales.

CAPÍTULO II.

Las proporciones geométricas.

335. *Proporción geométrica es la igualdad de dos razones geométricas.*

La proporción geométrica se llama simplemente *proporción.*

Se escribe la proporción bajo una de las dos formas

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{ó} \quad a : b :: c : d$$

nosotros adoptaremos la primera por ser más cómoda (*). La proporción anterior se lee a partido por b igual á c partido d, ó mejor a es á b como c es á d.

El primero y el tercer término se llaman *antecedentes;* el segundo y cuarto, *consecuentes,* por serlo así en las razones que forman la proporción. El primero y último tér-

(*) Adoptamos la forma de igualdad fraccionaria y conservamos el tecnicismo de las proporciones porque es más cómodo; pero en lo que insistimos nuevamente es en que los términos de una proporción pueden ser incomensurables y los de una igualdad fraccionaria no.

mino se llaman *extremos*, y el segundo y tercero *medios*. Uno cualquiera de los cuatro se llama *cuarta proporcional* á los otros tres términos.

336. Teorema fundamental.—*En toda proporción el producto* de los extremos es igual al producto de los medios.

Sea la proporción

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

reduciendo al mismo consecuente

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$$

y como las razones son iguales y sus consecuentes también son iguales, se tiene que verificar

$$ad = bc$$

En virtud de esta propiedad se puede hallar un término cualquiera de una proporción cuando se conocen los otros tres.

Dividiendo por a los dos miembros de la igualdad anterior, se tiene: $d = \frac{bc}{a}$. Luego *un extremo es igual al producto de los medios partido por el otro extremo.*

Dividiendo por b los dos miembros de dicha igualdad, se tiene: $c = \frac{ad}{b}$. Luego *un medio es igual al producto de los extremos partido por el otro medio.*

Ejemplo: $$\frac{4}{\left(\frac{2}{5}\right)} = \frac{7}{x}.$$

Se tendrá $$x = \frac{7 \times \left(\frac{2}{5}\right)}{4} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$$

337. Recíproco del teorema fundamental. *Si el producto de dos números es igual al producto de otros dos, con los cuatro se puede formar una proporción tomando por extremos los factores de uno de los productos y por medios los del otro.*

Si tenemos

$$ad = bc$$

dividiendo por bd (un factor de cada producto) los dos miembros de la igualdad, resulta

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$$

y suprimiendo en cada razón el factor común á los dos términos

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

338. En virtud de estas propiedades, una proporción se puede escribir de todos los modos que no alteren la igualdad de los productos de medios y extremos. Luego se puede *cambiar entre sí los medios, ó los extremos* y poner *los medios por extremos y los extremos por medios.* Resulta de esto que una proporción se puede escribir de los *ocho* modos siguientes:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}; \quad \frac{d}{b} = \frac{c}{a}; \quad \frac{d}{c} = \frac{b}{a};$$

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}; \quad \frac{b}{d} = \frac{a}{c}; \quad \frac{c}{a} = \frac{d}{b}; \quad \frac{c}{d} = \frac{a}{b}.$$

339. *Si dos proporciones tienen una razón común con las otras dos, se puede formar una proporción.*

Sean las proporciones

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{y} \quad \frac{a}{b} = \frac{e}{f}$$

dos cosas iguales á una tercera son iguales entre sí, luego

$$\frac{c}{d} = \frac{e}{f}$$

340. *Si dos proporciones tienen iguales antecedentes, ó iguales consecuentes, con los otro cuatro términos se puede formar proporción.*

Sean las proporciones

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{y} \quad \frac{a}{e} = \frac{c}{f}$$

cambiando de lugar los medios (núm. 338)

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d} \quad \text{y} \quad \frac{a}{c}=\frac{e}{f}$$

de donde (núm. 339)

$$\frac{b}{d}=\frac{e}{f}$$

341. *En toda proporción la suma, ó diferencia de los antecedentes, es á la suma ó diferencia de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.*

Sea la proporción

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

Si llamamos q al valor de la razón, tendremos (núm. 327)

$$a = bq \quad \text{y} \quad c = dq$$

sumando y restando ordenadamente

$$a + c = (b + d)\,q \quad \text{y} \quad a - c = (b - d)\,q$$

dividiendo la primera por $b + d$ y la segunda por $b - d$

$$\frac{a+c}{b+d}=q=\frac{a}{b}; \quad \frac{a-c}{b-d}=q=\frac{a}{b}$$

de éstas resulta también

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}$$

y cambiando entre sí los medios

$$\frac{a+c}{a-c}=\frac{b+d}{b-d}$$

El enunciado de esta última proporción es: *La suma de los antecedentes es á su diferencia, como la suma de los consecuentes es á su diferencia.*

342. *En toda proporción la suma, ó diferencia de los términos de la primera razón, es á la suma, ó diferencia de los de la segunda, como un antecedente es á otro, ó como un consecuente es á otro.*

Sea la proporción

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

cambiando entre sí los medios, se tendrá:

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

y en virtud del teorema anterior

$$\frac{a+b}{c+d}=\frac{a}{c}=\frac{b}{d} \quad \text{y} \quad \frac{a-b}{c-d}=\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

También se obtiene

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

de donde: *La suma de los términos de la primera razón, es á su diferencia, como la suma de los términos de la segunda razón, es á su diferencia.*

343. *Si se multiplican término á término varias proporciones, los productos forman una proporción.*

Sean las proporciones

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},\ \frac{a'}{b'}=\frac{c'}{d'},\ \frac{a''}{b''}=\frac{c''}{d''}$$

Multiplicando miembro á miembro resulta

$$\frac{a}{b}\times\frac{a'}{b'}\times\frac{a''}{b''}=\frac{c}{d}\times\frac{c'}{d'}\times\frac{c''}{d''}$$

y efectuando según la regla (núm. 330)

$$\frac{a\,a'\,a''}{b\,b'\,b''}=\frac{c\,c'\,c''}{d\,d'\,d''}.$$

344. *Si los cuatro términos de una proporción se elevan á una misma potencia, los resultados forman proporción.*

Sea la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Elevando los dos miembros á la potencia n

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\left(\frac{c}{d}\right)^n \text{ de donde (núm. 332) } \frac{a^n}{b^n}=\frac{c^n}{d^n}.$$

345. *Si se dividen término á término dos proporciones, los cocientes forman proporción.*

Sean las proporciones

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},\ \frac{a'}{b'}=\frac{c'}{d'}.$$

Dividiendo miembro á miembro resulta

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a'}{b'}:\frac{c'}{d'}$$

y efectuando según la regla (núm. 333)

$$\frac{a:c}{b:d}=\frac{a':c'}{b':d'}.$$

346. *Si de los cuatro términos de una proporción se extrae la misma raíz, los resultados forman proporción.*

Sea la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Extrayendo de los dos miembros la raíz del grado n

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\sqrt[n]{\frac{c}{d}}$$

y efectuando según la regla (núm. 334)

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{d}};$$

347. Se llama proporción *continua* la que tiene los *términos medios iguales*. Así:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$$

es una proporción continua.

El teorema fundamental (núm. 336) en la proporción continua es: *el cuadrado del término medio es igual al producto de los extremos.* Puesto que el producto de los medios es un cuadrado, tendremos, pues,

$$b^2=ac$$

y extrayendo la raíz cuadrada

$$b=\sqrt{ac}$$

luego, *el término medio es igual á la raíz cuadrada del producto de los extremos.*

Los términos desiguales a ó c se llaman *terceras proporcionales* entre b y c ó a, y el término b, *media proporcional* entre a y c.

348. Por extensión se llama *media proporcional*, ó *media geométrica* entre n cantidades, ó números, la raíz *n-ésima* de su producto.

Se llama *media diferencial*, ó *media aritmética*, entre n cantidades, ó números, la *n-ésima* parte de su suma.

Así, la media diferencial entre los números 7,4, 12,05, 8,04, 6,12, es

$$\frac{7,4 + 12,05 + 8,04 + 6,12}{4} = \frac{33,61}{4} = 8,4025$$

Las medias aritméticas tienen muchas aplicaciones en las ciencias físicas y sociales.

Series de razones iguales.

349. Se llama *serie de razones iguales* la expresión de la igualdad de tres ó más razones.

Así: $$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} \ldots\ldots$$

Razón de la serie es el valor común de todas las razones.

350. En toda serie de razones iguales: *la suma de los antecedentes es á la de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.*

Sea la serie de razones iguales

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} \ldots\ldots$$

y sea q el valor de la razón, tendremos:

$$a = bq, \quad a' = b'q \quad a'' = b''q \ldots..$$

sumando miembro á miembro

$$a + a' + a'' + \ldots.. = (b + b' + b'' + \ldots..)q$$

y dividiendo por $b + b' + b'' + \ldots..$ los dos miembros

$$\frac{a + a' + a'' + \ldots..}{b + b' + b'' + \ldots..} = q = \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \ldots$$

351. PROBLEMA. *Dividir un número,* A, *en partes proporcionales á otros números dados,* a, b *y* c.

Sean, x, y, z, las tres partes desconocidas en que se ha de dividir el número A.

Por ser proporcionales á a, b y c, se debe tener

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

de donde (núm. 350)

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x + y + z}{a + b + c}$$

y por ser $x + y + z = A$

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{A}{a + b + c}$$

De las proporciones formadas por la última razón y cada una de las otras, se deduce (núm. 336)

$$x = a \times \frac{A}{a+b+c}, \quad y = b \times \frac{A}{a+b+c}, \quad z = c \times \frac{A}{a+b+c}.$$

Estos resultados se pueden enunciar en la siguiente:

REGLA. *Para dividir un número* A *en partes proporcionales á otros varios*, a, b, c..... *se divide el número* A *por la suma de los números* a, b, c..... *á los cuales han de ser proporcionales las partes de* A *y el cociente obtenido se multiplica por cada uno de dichos números. Los productos son las partes del número* A, *que nos proponemos hallar.* (*)

* Debe observarse que este método no exige más que una división y si á las partes x, y, z les diésemos la forma $x = A \times \frac{a}{a+b+c}$, $y = A \times \frac{b}{a+b+c}$.... la regla resultaría de más fácil enunciado, pero de más difícil aplicación; porque las divisiones serían tantas como partes debe contener el número **A**.

SEGUNDA PARTE.

ARITMÉTICA DE LOS NÚMEROS CONCRETOS.

CAPÍTULO PRIMERO.

Numeración y propiedades de los concretos.

352. Hemos dicho (núm. 3) que *número concreto es el que expresa la naturaleza de la unidad generatriz*. Así, 3 árboles, 7 libros, etc., son números concretos.

Los concretos son *homogéneos* cuando expresan unidades de la misma naturaleza; por ejemplo: 6 varas, 12 varas, 9 pulgadas, etc.; son *heterogéneos* cuando expresan unidades de distinta naturaleza; por ejemplo: 4 pesetas, 3 arrobas, 2 tinteros, etc.

La unidad se impone en los números concretos cuando están formados por una pluralidad de objetos iguales (núm. 5); pero en general la unidad es arbitraria y se debe elegir de modo que no resulten números muy grandes, ni excesivamente pequeños, porque en uno y otro caso es difícil formarse una idea exacta de la cantidad medida, y además las operaciones del cálculo serán bastante complicadas.

Las principales cantidades que se consideran en la Aritmética son de los géneros siguientes: de *longitud*, de *superficie*, de *volumen*, de *peso*, de *tiempo* y de *dinero*.

El conjunto ordenado de unidades relativas á estos géneros de cantidades se llama sistema de medidas, pesas y monedas.

El sistema legal en España es el llamado *Sistema métrico decimal*; pero todavía se usa, aunque menos cada dia, el sistema llamado de *Castilla*.

353. Las unidades de cada género en el sistema métrico decimal se derivan de la unidad principal, multiplicándola y dividiéndola por las potencias sucesivas de *diez*. Los nombres de los múltiplos de la unidad principal en cada género de unidades se forman anteponiendo al nombre de dicha unidad principal las palabras griegas, *deca, hecto, kilo* y *miria*, que significan *diez, ciento, mil* y *diez mil*, y se designan abreviadamente por las letras D, H, K y M: los nombres de los submúltiplos de la unidad principal se forman anteponiendo las palabras latinas *deci*, *centi* y *mili*, que significan *décima, centésima* y *milésima* parte, y se designan abreviadamente por las letras d, c, m.

354. La unidad fundamental del sistema métrico se llama *metro*, y *es la diez-millonésima parte del cuadrante de meridiano terrestre al nivel del mar*. Se designa abreviadamente por la letra *m*.

El sistema de unidades de longitud es:

Múltiplos	1 Miriámetro (*Mm*) =	10000 *m*	= 10 *Km*
	1 Kilómetro (*Km*) =	1000 *m*	= 10 *Hm*
	1 Hectómetro (*Hm*) =	100 *m*	= 10 *Dm*
	1 Decámetro (*Dm*) =	10 *m*	= 10 *m*
Unidad principal	1 metro =	1 *m*	= 10 *dm*
Divisores	1 decímetro (*dm*) =	0,1 *m*	= 10 *cm*
	1 centímetro (*cm*) =	0,01 *m*	= 10 *mm*
	1 milímetro (*mm*) =	0,001 *m*	

Además de estas unidades de longitud han adoptado los físicos el Megámetro (*Meg.m.*) = 1000000 *m*, y el micrómetro (*Hm*)=0,000001 *m*.

355. La unidad principal de las medidas superficiales es el *metro cuadrado*, ó sea un *cuadrado* cuyo lado es un metro: se designa abreviadamente por m^2.

Si se dividen los lados de un metro cuadrado en decímetros y se unen los puntos de división de dos lados opuestos, queda dividido el metro cuadrado en diez fajas rectangulares de un metro de largas por un decímetro de anchas: si después se unen los puntos de división de los otros dos lados opuestos del metro cuadrado, cada faja rectangular queda dividida en *diez decímetros cuadrados*, ó sea en diez cuadrados cuyo lado es un decímetro; de suerte que el metro cuadrado tiene *cien decímetros cuadrados*. Del propio modo se verifica que cualquiera unidad superficial tiene *cien* unidades del orden inmediato inferior.

El sistema de unidades superficiales es:

Múltiplos	1 Miriámetro cuadrado (Mm^2) =	100000000 m^2	$=100 Km^2$
	1 Kilómetro cuadrado (Km^2) =	1000000 m^2	$=100 Hm^2$
	1 Hectómetro cuadrado (Hm^2) =	10000 m^2	$=100 Dm^2$
	1 Decámetro cuadrado (Dm^2) =	100 m^2	$=100\ m^2$
Unidad principal	1 metro cuadrado =	1 m^2	$=100\ dm^2$
Divisores	1 decímetro cuadrado (dm^2) =	0,01 m^2	$=100\ cm^2$
	1 centímetro cuadrado (cm^2) =	0,0001 m^2	$=100\ mm^2$
	1 milímetro cuadrado (mm^2) =	0,000001 m^2	

El decámetro cuadrado también se llama *área* y se designa por la letra *a*: el hectómetro cuadrado se llama entonces *hectárea (Ha)*, y el metro cuadrado *centiárea (ca)*.

Estas unidades se emplean en la medición de las superficies de las propiedades rústicas, por lo cual se llaman *agrarias*.

356. La unidad principal de las medidas de volumen es el *metro cúbico*, ó sea un cubo, cuyo lado es un metro: se designa abreviadamente por m^3. (*)

Si se divide la altura de un metro cúbico en diez partes que serán iguales á un decímetro y por los puntos de división se trazan planos paralelos á la base, queda dividido el metro cúbico en *diez* capas iguales de un metro cuadrado de base y un decímetro de altura. Si cada una de las bases se divide en *cien* decímetros cuadrados y por las rectas de división se trazan dos sistemas de planos paralelos á las otras caras del cubo, quedará cada una de las capas anteriores dividida en *cien decímetros cúbicos*, ó sea en cien cubos cuyo lado es un decímetro; de modo que el metro cúbico quedará dividido en *mil decímetros cúbicos*. Igualmente cualquiera unidad cúbica tiene mil unidades del orden inmediato inferior.

(*) Cubo es el espacio cerrado por seis cuadrados iguales que se llaman caras.

El sistema de unidades cúbicas es:

Múltiplos	1 Miriámetro cúbico ($M\,m^3$) =	$1000000000000\ m^3$	$= 1000\ Km$
	1 Kilómetro cúbico ($K\ m^3$) =	$1000000000\ m^3$	$= 1000\ Hm^3$
	1 Hectómtro cúbico ($H\ m^3$) =	$1000000\ m^3$	$= 1000\ Dm^3$
	1 Decámetro cúbico ($D\ m^3$) =	$1000\ m^3$	$= 1000\ m^3$
Unidad principal	1 metro cúbico =	$1\ m^3$	$= 1000\ dm^3$
Divisores.	1 decímetro cúbico ($d\ m^3$) =	$0{,}001\ m^3$	$= 1000\ cm^3$
	1 centímetro cúbico ($c\ m^3$) =	$0{,}000001\ m^3$	$= 1000\ mm^3$
	1 Milímetro cúbico ($m\,m^3$) =	$0{,}000000001\ m^3$	

357. Las medidas de volumen no se aplican bien á la medición de áridos y líquidos porque, ó son muy grandes, ó demasiado pequeñas y ha sido necesario formar otras medidas llamadas de *capacidad* que se derivan de las anteriores.

La unidad principal de las medidas de capacidad se llama *litro* y se designa por la letra l; es la capacidad de un decímetro cúbico; pero se le da la forma cilíndrica.

El sistema de unidades de capacidad es

Múltiplos	1 Kilolitro (Kl) =	$1000\ l$	$= 10\ Hl$	$= 1\ m^3$
	1 Hectolitro (Hl) =	$100\ l$	$= 10\ Dl$	
	1 Decalitro (Dl) =	$10\ l$	$= 10\ l$	
Unidad principal	1 litro =	$1\ l$	$= 10\ dl$	$= 1\ dm^3$
Divisores	1 decilitro (dl) =	0,1	$= 10\ cl$	
	1 centilitro (cl) =	0,01	$= 10\ ml$	
	1 mililitro (ml) =	0,001		$= 1\ cm^3$

358. La unidad principal de las medidas *ponderales*, ó de peso, es el *gramo*, que se designa por la letra g. El gramo es el peso de un centímetro cúbico de agua destilada á 4° centígrados en el vacío, al nivel del mar y á la latitud O.

El sistema de unidades ponderales es:

Multiplos.	1 Tonelada métrica	(Tm) =	$1000\ Kg$ =	$1000000\ g$	$= 10\ Qm$
	1 Quintal métrico	(Qm) =	$100\ Kg$ =	$100000\ g$	$= 10\ Mg$
	1 Miriagramo	(Mg) =	$10\ Kg$ =	$10000\ g$	$= 10\ Kg$
	1 Kilogramo	(Kg) =	$1\ Kg$ =	$1000\ g$	$= 10\ Hg$
	1 Hectogramo	(Hg)	=	$100\ g$	$= 10\ Dg$
	1 Decagramo	(Dg)	=	$10\ g$	$= 10\ g$
Unidad principal		1 gramo	=	$1\ g$	$= 10\ dg$
Divisores.	1 decigramo	(dg)	=	$0{,}1 g$	$= 10\ cg$
	1 centigramo	(cg)	=	$0{,}01 g$	$= 10\ mg$
	1 miligramo	(mg)	=	$0{,}001 g$	

De la tabla anterior se deduce que la tonelada métrica es el peso de un *metro cúbico*, el kilogramo el de un *decímetro cúbico* y el miligramo el de un *milímetro cúbico* de agua destilada á 4° centígrados, en el vacío, al nivel del mar y á la latitud 0.

La unidad de peso más usual es el kilogramo. (*)

359. La unidad principal del sistema monetario es la *peseta*.

Las monedas son de tres clases: de *oro*, de *plata* y de *cobre*. (*)

Monedas de oro. | **Monedas de plata.**

Doblón de 100 pts.	31 piezas en Kg.	Duro	5	»	40 piezas en Kg.
Doblón de 50 »	62 » »	Doble peseta	2	»	100 » »
Doblón de 20 »	155 » »	Peseta	1	»	200 » »
Doblilla de 10 »	310 » »	Media peseta	0,50	»	400 » »
Escudito de 5 »	620 » »	Doble décima	0,20	»	1000 » »

Monedas de cobre.

Décima	0,10 pesetas	100 piezas en Kg.
Media décima	0,05 »	200 » »
Doble céntimo	0,02 »	500 » »
Céntimo	0,01 »	1000 » »

360. Las unidades de tiempo son:

El siglo, que vale	100 años.
El lustro	5 años.
El año bisiesto	366 días ó 12 meses.
El año común	365 días ó 12 meses.
El mes	28, ó 29, ó 30, ó 31 días.
El día	24 horas.
La hora	60 minutos.
El minuto	60 segundos.

(*) Los alumnos que deseen adquirir algunos conocimientos sobre la historia de la adopción del sistema métrico, forma y tamaño legal de las medidas, etc., pueden consultar la Cartilla métrica del ilustrado profesor del Instituto de Vitoria. D. Félix Eseverri.

(**) Se han acuñado monedas de 100 pesetas del Gobierno provisional, en 1870 y en 1871, con el busto de D. Amadeo I. No se han acuñado monedas de oro de 50, ni de 20, ni de 5 pesetas. Por Real orden de marzo de 1871 se han acuñado monedas de oro de 25 pesetas de 124 pieza en Kg. con el busto de D. Amadeo I. Pero ni éstas ni las de 100 pesetas han circulado apenas. En varias épocas se han acuñado monedas de 25 y de 10 pesetas con el busto de D. Alfonso XII. En la época del Gobierno provisional se acuñó el sistema completo de monedas de plata y de cobre. En la época de D. Amadeo I. no se acuñó moneda de cobre y de las de plata solamente el duro. En la época de D. Alfonso XII se han acuñado todas las monedas de plata excepto la de 20 céntimos y de las de cobre las de 10 y 5 céntimos. Actualmente se acuña muy poco oro y nada de cobre.

22

Los meses de 31 días son enero, marzo, mayo, julio, agosto, octubre y diciembre, los de 30 días, abril, junio, septiembre y noviembre. Febrero tiene 28 dias los años comunes, y 29 los bisiestos.

Además de estas unidades hay la semana, que es un período de siete dias. (*)

361. En el sistemade Castilla, las principales medidas pesas y monedas son:

Unidades de longitud. La *legua* = $6666\frac{2}{3}$ varas, la *vara* = 3 pies, el *pie* = 12 pulgadas, la *pulgada* = 12 líneas y la *línea* = 12 *puntos*.

La *legua marina* = 3 *millas*, la *milla* = $9\frac{7}{30}$ cables, el *cable* = 120 brazas, la *braza* = 6 pies, el *codo de ribera* = 2 pies y 9 líneas.

(*) Las unidades de tiempo, ó cronométricas no están comprendidas en el sistema métrico decimal, pero son las usuales en casi todos los pueblos.

El patron ó unidad principal de longitud es la vara de Burgos.

Unidades superficiales. Son cuadrados que tienen por lados las unidades lineales: por consiguiente, la razón de dos unidades superficiales de distinto orden es la de los cuadrados de las unidades lineales correspondientes. Así una vara cuadrada tiene 9 pies cuadrados, una pulgada cuadrada 144 líneas cuadradas, etc. Además existen las siguientes unidades llamadas *agrarias*.

La *fanega de tierra* = 576 estadales cuadrados. La *aranzada* = 400 estadales cuadrados. El estadal cuadrado es un cuadrado cuyo lado es 4 varas, por consiguiente, tiene 16 varas cuadradas, ó 144 pies cuadrados.

Unidades de volumen. Son cubos cuyos lados son las unidades lineales: por consiguiente, la razón de dos unidades de volumen de distinto orden es la de los cubos de las unidades lineales correspondientes. Así, una vara cúbica tiene 27 pies cúbicos, un pie cúbico 1728 pulgadas cúbicas etc.

Además se emplean distintas medidas cúbicas llamadas de capacidad para *áridos*, para *líquidos* y para *aceite*.

Medidas de capacidad para áridos. El *cahiz* = 12 fanegas; la *fanega* = 12 celemines, el *celemín* = 4 *cuartillos*.

La unidad principal es la media fanega de Ávila.

Medidas de capacidad para líquidos. El *moyo* = 16 cántaras, la *cántara* = 8 azumbres, la *azumbre* = 4 cuartillos, el *cuartillo* = 4 copas.

La unidad principal es la cántara de Toledo.

Medidas de capacidad para el aceite. La *arroba* = 25 libras, la *libra* = 4 *panillas*.

Pesas. La tonelada de peso = 20 quintales, el *quintal* = 4 arrobas, la *arroba* = 25 libras, la *libra* = 16 onzas, la *onza* = 16 adarmes, el *adarme* = 3 tomines, el *tomín* = 12 granos.

La unidad principal es el *marco* (media libra) del Consejo de Castilla.

Monedas del sistema antiguo. (*)

De *oro*. La *onza* = 320 reales, la *media onza* = 160 reales, el *doblón* = 80 reales, la *doblilla* = 40 reales, el *escudito* = 20 reales, el *doblón* de á ciento = 100 reales.

De *plata*. El *duro* = 20 reales, el *medio duro* = 10 reales, la *peseta* = 4 reales, la *media peseta* = 2 reales, el *real*, que era la unidad principal.

De *cobre*. *Pieza de dos cuartos* = 8 maravedises, *pieza de un cuarto* = 4 maravedises, *pieza de un ochavo* = 2 maravedises. Posteriormente. *Pieza de medio real* = 0,50 de real, *pieza de cuartillo* = 0,25 de real, *décima de real* = 0,10 de real, y *media décima* = 0,05 de real.

362. Los números concretos del sistema métrico decimal se expresan por las iniciales de sus nombres, según hemos indicado en los números 353 y siguientes. Los concretos del sistema antiguo de Castilla se expresan, ó con las iniciales, colocadas á continuación de los números, ó

(*) Hoy no circula ninguna de las monedas de cobre de este sistema, porque las ha recogido el Gobierno; tampoco circulan los duros, por la misma razón. En cuanto á las monedas de oro, tampoco circulan, porque el oro tiene por relación á la plata mayor valor que el monetario legal.

con abreviaturas del nombre de las unidades que se quiere expresar.

Los concretos se clasifican en números *incomplejos* y *complejos*.

Número incomplejo es el que consta de unidades de un solo orden, por ejemplo: 4 Km., 8 Dl., 3 @.

Número complejo es el que consta de unidades de distintos órdenes, pero del mismo género; por ejemplo: 4 Kg., 6 Dg., 7', 5 dg., 8 varas, 2 pies, 9 pulgadas, 4 líneas.

Transformaciones de los números concretos.

En los números complejos, las unidades de *cada orden* deben ser *menos* que las que se necesitan para componer una unidad del *orden inmediato superior*.

363. Los números concretos pueden transformarse en otros equivalentes, ya sea del mismo sistema, ya sea de otro sistema. Las transformaciones en cada sistema comprenden los tres casos principales siguientes: *1.º, convertir un número incomplejo en otro incomplejo; 2.º, convertir un complejo en un incomplejo; 3.º, convertir un incomplejo en un complejo.*

364. PRIMER CASO. *Convertir un número incomplejo en otro incomplejo de distinto orden:*

Si a es un incomplejo y b otro incomplejo de distinto orden, equivalente á a, y m el número de veces que la unidad del orden superior contiene á la del inferior, se tendrá:

$$a \cdot m = b, \quad \text{de donde} \quad a = \frac{b}{m}$$

De la primera igualdad se deduce la siguiente:

REGLA 1.ª *Para convertir un número incomplejo en otro incomplejo de orden inferior, se multiplica el número dado por el número de veces que la unidad superior contiene á la inferior.*

Ejemplos. 1.º Reducir 16 fanegas á celemines. Se multiplica el número 16 por 12, que son los celemines que tiene una fanega, y el producto 192 expresa los celemines que contienen 16 fanegas.

2.ª Reducir 17 Hg. á gramos. Se multiplica 17 por 100, que son los gramos que vale 1 Hg., el producto 1700 expresa los gramos equivalentes á 17 Hg.

De la segunda de las igualdades se deduce la siguiente:

REGLA 2.ª *Para convertir un número incomplejo en otro incomplejo de orden superior, se divide el número dado por el número de veces que la unidad inferior está contenida en la superior.*

Ejemplos. 1.º Convertir 268 adarmes en libras. Se divide 268 por 256, que es el número de adarmes que tiene la libra, y el cociente será el número de libras que se pide.

$$238 \text{ ad.} = \frac{268}{256} \text{ lib.} = 1 \frac{12}{256} \text{ lib.} = 1 \frac{3}{64} \text{ lib.}$$

2.º Convertir 26152 m en Km. Dividiendo por 1000, que son los metros que tiene un Km, ó sea separando tres decimales, tendremos:

$$26152 \text{ m.} = 26{,}152 \text{ Km.}$$

365. 2.º CASO. *Convertir un complejo en incomplejo.*

Como un número complejo se compone de varios incomplejos de distintos órdenes, cuya suma es el complejo, es evidente que este problema tiene su fundamento en el problema del número anterior, cuya resolución habrá que repetir varias veces. De estas consideraciones se deducen las siguientes:

REGLA 1.ª *Para convertir un complejo en un incomplejo de su orden inferior, se convierten las unidades de orden superior en las del orden inmediato inferior, al resultado se la añaden las unidades que de este orden tenga el número complejo: se reduce esta suma al orden inmediato inferior, se agregan al resultado las unidades que haya de este orden y se continúa del mismo modo hasta haber operado con las unidades de orden inferior.*

Ejemplo 1.º Convertir 12 días, 16 hs. y 9 m. en minutos. Se tendrá:

$$12 \text{ d} + 16 \text{ h} = (12 \times 24 + 16) \text{ h} = 304 \text{ h}.$$

$304 \text{ h} + 9 \text{ m} = (304 \times 60 + 9) \text{ m} = 18249 \text{ m}.$

2.º Convertir 24 Ha, 78 a y 35 ca en centiáreas. Se tendrá:

$24 \text{ Ha} + 78 \text{ a} = (24 \times 100 + 78) \text{ a} = 2478 \text{ a}.$

$2478 \text{ a} + 35 \text{ ca} = (2478 \times 100 + 35) \text{ ca} = 247835 \text{ ca}$

Observación. Cuando el número complejo es métrico decimal, no se necesita efectuar multiplicaciones. *Si el número métrico es un complejo de unidades de longitud, de capacidad ó de peso, se colocan las unidades de diferentes órdenes, unas á continuación de otras, poniendo un cero en el lugar de cada orden intermedio que falte. Si el número métrico complejo expresa unidades de superficie ó volumen, se procederá del mismo modo, pero teniendo presente que cada orden de unidades superficiales debe ocupar dos lugares, la falta de unidades de algún orden se debe suplir con dos ceros, y la carencia de decenas con uno; y cada orden de unidades de volumen debe ocupar tres lugares, la falta de unidades de algún orden se debe suplir con tres ceros, y la carencia de centenas, ó centenas y decenas de algún orden, con uno, ó dos ceros.*

REGLA 2.ª *Para convertir un complejo en incomplejo de cualquier orden distinto del inferior, se convierte primero en el inferior, y el resultado se convierte en incomplejo del orden que se desea por la regla del problema anterior* (núm. 364, regla 2.ª)

Si el número es métrico, la conversión del incomplejo de orden inferior á otro orden está reducida á colocar la coma á la derecha de las unidades del orden pedido.

Ejemplos. 1.º Convertir 8 cánts., 6 azbs. y 3 cuts. en cántaras. Se tendrá:

$8 \text{ cánts.} + 6 \text{ azbs.} = (8 \times 8 + 6) \text{ azbs.} = 70 \text{ azbs.}$

$70 \text{ azbs.} + 3 \text{ cuts.} = (70 \times 4 + 3) \text{ cuts.} = 283 \text{ cuts.}$

y como la cántara tiene 32 cuartillos

$$283 \text{ cuts.} = \frac{283}{32} \text{ cánts.} = 8\frac{27}{32} \text{ cánts.}$$

Juan Perez Juan Perez

2.° Convertir 16 Kl, 7 Hl y 9 L en Hectolitros. Se tendrá:

16 Kl 7 Hl 9 l = 16709 l = 167,09 Hl

366. Tercer caso. *Convertir un incomplejo en un complejo.*

Cuando un incomplejo, de un orden que no es el superior á todos, contiene más unidades que las necesarias para formar una del orden inmediato superior, se puede transformar en complejo de órdenes superiores. Para hallar las unidades del orden inmediato superior, se divide el incomplejo dado por el número de veces que la unidad inferior está contenida en la superior (núm. 364) y el resto expresará unidades del orden dado, y el cociente, unidades del orden inmediato superior. Con el cociente entero se procede como con el número dado, y así se continúa con los cocientes enteros sucesivos hasta llegar á un cociente del orden superior á todos, ó á un cociente que no contenga ninguna unidad del orden inmediato superior. De todo esto se deduce la siguiente:

Regla. *Para convertir un incomplejo en complejo de órdenes superiores, se reduce á su orden inmediato superior* (núm. 364. Regla 2.ª): *el cociente entero al inmediato superior y así sucesivamente hasta llegar á las unidades superiores, ó á un cociente que no contenga ninguna unidad superior: el último cociente y los restos de las divisiones forman el complejo pedido,*

Observación. *Si el incomplejo es métrico decimal de longitud, capacidad ó peso, se separan sus cifras, de una en una, y se da á cada una la denominación que le corresponda. Si el incomplejo métrico decimal expresa unidades superficiales, ó de volumen, se separan sus cifras, de dos en dos, ó de tres en tres, á derecha é izquierda de la coma, si el número no es entero, y se da á cada grupo de dos ó tres cifras la denominación que le corresponda. Antes de hacer la transformación en las medidas superficiales, se añade un cero á la parte decimal, si el número de cifras* *no es par, y en las de volumen, uno ó dos ceros, si el número de cifras decimales no es múltiplo de tres.*

Ejemplos. 1.° Convertir en complejo el incomplejo 847 líneas. La operación se dispone del modo siguiente:

847 líneas	12		
07 »	70 pulgadas	12	
	10 »	5 pies	3
		2 »	1 varas

luego, 847 líneas = 1 vara 2 pies, 10 pulgadas, 7 líneas.

2.° Convertir en complejo 2636441,12 m³. El número de cifras decimales debe ser múltiplo de tres, por tratarse de unidades de volumen, luego escribiremos 2636441,120 m³ y aplicando la regla 2636441,120 m³ = 2 Hm³ 636 Dm³ 441 m³ 120 dm³.

Si se trata de reducir un incomplejo á complejo de órdenes inferiores, el incomplejo deberá ser una fracción y la operación se llama *valuar una fracción*. De lo dicho en los casos anteriores se deduce la siguiente:

REGLA. *Para reducir un incomplejo á complejo de órdenes inferiores, ó para valuar una fracción, se divide el numerador por el denominador y el cociente entero es el número de unidades del orden del incomplejo: se reduce el resto al orden inmediato inferior, el resultado se divide por el mismo denominador y el cociente entero expresará unidades del orden de su dividendo; con el resto se procede como con el anterior y así se continúa hasta llegar al último orden, ó al que se haya marcado, si antes no se obtiene el resto cero.*

Ejemplo. Reducir á complejo $\frac{2}{5}$ de libra. La operación se dispone del modo siguiente:

2 libras	5	
32 onzas 2	6 onzs. 6 admes. 1 tomín, $2\frac{2}{5}$ grnos.	
32 admes. 2		$\frac{2}{5}$ lbrs. = 6 onzs. 6 adms. 1 tom. $2\frac{2}{5}$ grns.
6 tomns. 1		
12 grns.		

367. La transformación de concretos de un sistema á otro se efectúa con el auxilio de igualdades, ó equivalencias, entre las unidades de ambos sistemas, y se funda en el siguiente:

TEOREMA. *Si se multiplican varias equivalencias tales que el segundo miembro de cada una sea homogéneo y del mismo orden que el primer miembro de la siguiente, el producto es una equivalencia cuyo primer miembro es homogéneo y del mismo orden que el primer miembro de la primera, y cuyo segundo miembro es homogéneo y del mismo orden que el segundo miembro de la última.*

Supongamos primero que las equivalencias son dos y que los subíndices m, n, p, marquen la especie de unidades á que se refieren los números A, B, C.

$$\begin{aligned} A_m &= B_n \\ C_n &= C_p \end{aligned}$$

Multiplicando la primera equivalencia por C y la segunda por B, se tendrá

$$\left.\begin{aligned} (A \,.\, C)_m &= (B \,.\, C)_n \\ (B \,.\, C)_n &= (B \,.\, D)_p \end{aligned}\right\} \text{ de donde se deduce } (A \,.\, C)_m = (B \,.\, D)_p$$

Sea ahora cualquier número de equivalencias. Multiplicando como hemos dicho antes las dos primeras, la equivalencia obtenida por la tercera, lo que resulte por la cuarta y así sucesivamente hasta la última, llegaremos á la equivalencia:

$$\begin{aligned} A_m &= B_n \\ C_n &= D_p \\ E_p &= F_q \\ G_q &= H_r \end{aligned}$$

$$(A \,.\, C \,.\, E \,.\, G)_m = (B \,.\, D \,.\, F \,.\, H)_r$$

conforme se quería demostrar.

Si A fuese un número desconocido, dividiendo los dos miembros de la equivalencia anterior por C . E . G tendríamos:

$$A_m = \left(\frac{B \,.\, D \,.\, F \,.\, H}{C \,.\, E \,.\, G.}\right)_r$$

de cuya igualdad se deduce la siguiente:

REGLA. *Para transformar un concreto en otro equivalente de distinto sistema cuando ambos sistemas están ligados por equivalencias intermedias, se disponen éstas de modo que el primer miembro de la primera sea el número* *que se busca, que designaremos por x y el segundo el concreto conocido equivalente con él, y debajo de esta equivalencia las demás equivalencias dadas, dispuestas de modo que el primer miembro de cada una sea homogéneo y del mismo orden que el segundo miembro de la anterior,* (*) *se multiplican miembro á miembro, el producto de los segundos miembros se divide por el producto de todos los factores del primero á excepción de x, y el cociente obtenido será el número desconocido que se busca.* (**)

Cuando sólo se trata de pasar del sistema antiguo de Castilla al métrico decimal ó viceversa, el problema es muy sencillo, porque para resolverle bastan dos equivalencias.

Las principales equivalencias entre los dos sistemas son:

1 legua	= 5,572705 Km	1 Km	= 0,179446 leguas
1 vara	= 0,835905 m	1 m	= 1,196307 varas
1 vara^2	= 0,698737 m^2	1 m^2	= 1,431153 varas^2
1 fanega	= 0,643956 Ha	1 Ha	= 1,552901 fanegas
1 vara^3	= 0,584078 m^3	1 m^3	= 1,712100 varas^3
1 cuartillo	= 0,50416 l	1 l	= 1,983512 cuartillos
1 fanega	= 0,55501 Hl	1 Hl	= 1,801769 fanegas
1 libra	= 0,460093 Kg	1 Kg	= 2,173474 libras
1 arroba	= 11,502325 Kg	1 Kg	= 0,086939 arrobas

También se suelen utilizar las siguientes equivalencias aunque son menos aproximadas.

51 m = 61 varas; 39 Km = 7 leguas;
7 m^2 = 10 varas^2; 9 Ha = 14 fanegas
7 m^3 = 12 varas^3; 60 l = 119 cuartillos;
5 Hl = 9 fangs.; 46 Kl = 4 arrobas

Ejemplos. 1.° Convertir 165 varas en metros.

De las primeras equivalencias se deduce:

$$\left.\begin{array}{l} x \text{ m} = 165 \text{ varas} \\ 1 \text{ vr.} = 0{,}835905 \text{ m} \end{array}\right\} \text{de donde } x \text{ m} = 165 \times 0{,}835905 \text{ m} = 137{,}924 \text{ m}$$

(*) El segundo miembro de la última resultará homogéneo y del mismo orden que el primero de la primera.

(**) Esta regla se llama **conjunta**; y si tiene por objeto la conversión de monedas ó valores comerciales se llama regla de **cambio** ó de **arbitraje**.

Empleando las segundas equivalencias

$$\left.\begin{array}{l} x \text{ m} = 165 \text{ vr.} \\ 61 \text{ vr.} = 51 \text{ m} \end{array}\right\} \text{de donde } x \text{ m} = \frac{165 \times 51}{61} \text{ m} = 137{,}95 \text{ m.}$$

2.° Convertir 787 Kg. en arrobas y libras.

$$\left.\begin{array}{l} x \text{ @} = 787 \text{ Kg.} \\ 1 \text{ Kg} = 0{,}086939 \text{ @} \end{array}\right\} x \text{ @} = 787 \times 0{,}086939 \text{ @} = 68 \text{ @ } 10 \text{ lb. } 8 \text{ onzs.}$$

Empleando las segundas equivalencias:

$$\left.\begin{array}{l} x \text{ @} = 787 \text{ Kg.} \\ 46 \text{ K.} = 4 \text{ @} \end{array}\right\} x \text{ @} = \frac{787 \times 4}{46} \text{ @} = 68 \text{ @ } 10 \text{ lb. } 13 \text{ onzs.}$$

CAPÍTULO II.

Las operaciones con los números concretos.

368. La definición general de la adición (núm. 211) es aplicable á los números concretos. De dicha definición se deduce que los sumandos deben ser *homogéneos.*

Para sumar números concretos se pueden reducir á incomplejos del mismo orden, sumarlos como abstractos y dar á la suma la denominación de los sumandos.

Ejemplos. 1.° Sumar 6 Ha 12 a y 45 ca, con 9 Ha 7 a y 2 ca

6 Ha 12 a 45 ca = 61245 ca
9 » 7 » 2 » = 90702 »
151947 ca = 15 Ha 19 a 47 ca.

2.° Sumar 4 días 16 h 28 m con 9 dias 21 h 19 m.

4 días 16 h 28 m = 6748 m.
9 » 21 » 19 » = 14239 »
20987 m. = 14 días 13 h 47 m.

Los números complejos se pueden sumar también sin reducirlos á incomplejos, por la siguiente:

REGLA. *Para sumar números complejos se escriben unos debajo de otros de modo que se correspondan las unidades de todos los órdenes, se suman separadamente las unidades de cada orden, comenzando por las de orden inferior, y se deduce de cada suma parcial las unidades que contenga del orden inmediato superior para agregarlas á la suma de este orden.*

Ejemplo. Sumar los números siguientes:

8 cántaras	6 azumbres	2 cuartillos
3 »	4 »	3 »
2 »	» »	1 »
14 cántaras	3 azumbres	2 cuartillos

369. La definición general de sustracción (núm. 317) es aplicable á los números concretos, y supone que el minuendo y el sustraendo son *homogéneos.*

Para restar números concretos se puede reducirlos á incomplejos del mismo orden, restarlos como los abstractos y dar á la diferencia la denominación común á minuendo y sustraendo.

Ejemplos. 1.° Restar de 86 Kg 4 Hg y 5 g; 29 Kg 6 Hg 4 Dg y 8g.

86 Kg 4 Hg 0 Dg 5g = 86405
29 6 4 8 = 29648

56757 g = 56 Kg 7 Hg 5 Dg 7 g

2.° Restar de 2 @ 16 libs. y 2 onzs; 1 @ 4 libs 73 onz

2 @ 16 libs. 9 onzs. = 1065 onzs.
1 4 13 = 477

588 onz = 1 @ 11 libs 12 onz

Los números complejos se pueden restar sin reducirlos á incomplejos por la siguiente:

Regla. *Para restar números complejos se escribe el sustraendo debajo del minuendo de modo que se correspondan las unidades de todos los órdenes: se resta de las unidades de cada orden del minuendo las correspondientes del sustraendo, comenzando por las de orden inferior; si algún minuendo es menor que el sustraendo correspondiente, se le añade una unidad del orden inmediato superior descompuesta en unidades de su orden, y en la sustracción parcial siguiente se añade al sustraendo una unidad para compensar la que se añadió al minuendo.*

Ejemplo. Restar los números siguientes:

8	fanegas	6	celemines	2	cuartillos
5	»	8	»	3	»
2	fanegas	9	celemines	3	cuartillos

370. La regla de las equivalencias, explicada en el número 367, nos proporciona medios de resolver multitud de cuestiones sencillas que se conocen con los nombres de multiplicación y división de concretos.

Las cuestiones á que nos referimos se reducen á tres problemas.

371. PROBLEMA 1.° *Dado el valor de una unidad concreta por su equivalencia con un número concreto, expresado por otras unidades, homogéneas, ó heterogéneas con aquéllas, hallar un número concreto homogéneo con estas últimas unidades, conociendo su equivalencia en unidades homogéneas con la primera.* (*)

Se pueden expresar de un modo general las equivalencias que resuelven este problema, con arreglo á lo dicho en el núm. 367, del modo siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} x_m = a_n \\ 1_n = b_m \end{array}\right\} \text{ de donde } x_m = \left(\frac{a \cdot b}{1}\right)_m = (ab)_m$$

Ejemplos:

1.° Sabiendo que un escudito de oro, de premio, vale 21 reales y cuartillo ¿cuánto valdrán 79 escuditos?

$$\left.\begin{array}{l} x \text{ reales} = 79 \text{ escudts.} \\ 1 \text{ escudo} = 21\frac{1}{4} \text{reales.} \end{array}\right\} x \text{ rs.} = 79 \times 21\ ^1/_4 \text{ rs.} = 1678{,}75 \text{ reales.}$$

2.° Si una fanega de trigo pesa 3 @ y 21 libras ¿cuánto pesarán 7 fanegas 2 celemines y 3 cuartillos.

$$x \text{ libras} = 7 \text{ fanegs. } 2 \text{ celemns. y } 3 \text{ cuartlls.} = \frac{345}{48} \text{ fanegas}$$

$$1 \text{ fanega} = 3 \quad @ \quad 21 \text{ libras} \qquad = 96 \text{ libras}$$

$$\text{de donde} \quad x \text{ libs.} = \frac{345}{48} \times 96 \text{ libs.} = 690 \text{ libs.} = 27\ @\ 15 \text{ libs.}$$

(*) Este problema es el llamado multiplicación de números concretos.

3.° Un hectolitro de trigo cuesta 19 pesetas y 45 céntimos, ¿cuánto costarán 65 Hl y 7 Dl?

$$x \text{ pesetas} = 65{,}7 \text{ hectolitros}$$
$$1 \text{ hectolitro} = 19{,}45 \text{ pesetas}$$

de donde x pts. $= 65{,}7 \times 19{,}45$ pts. $= 1277{,}865$ pts.

Observación. El segundo miembro de la primera equivalencia está generalmente compuesto de cierto número de unidades y partes alícuotas de la unidad expresada en el primer miembro de la segunda equivalencia, pero para multiplicar las equivalencias es necesario que exprese unidades homogéneas y del mismo orden que el primer miembro de la segunda (núm. 367), luego debemos reducirle á incomplejo de dicho orden: la misma observación hacemos respecto del primer miembro de la primera equivalencia y el segundo de la segunda. Esto da lugar, en muchos casos, cuando los números no son métricos decimales, á multiplicaciones complicadas que se pueden evitar por un procedimiento que se llama *método de las partes alícuotas.*

Está reducido este método á sumar los valores de los múltiplos y partes alícuotas de la unidad que componen el segundo miembro de la primera equivalencia.

Así: en el ejemplo 2.° tendremos el peso de 7 fanegas, multiplicando por 7 el peso de una fanega; el de 2 celemines, hallando el peso de la 6.ª parte de una fanega, y el de 2 cuartillos, hallando el de la 4.ª parte de 1 celemín, ó el de la 8.ª parte de 2 celemines, de donde.

7 fanegs.	pesan	21 @ y 147 libs.	ó	26 @	22 libs.
2 celms.	»			»	16
2 cuars.	»			»	2
7 fanegs. 2 celms. y 2 cuars.	pesan			27 @	15 libs.

Este modo de operar va perdiendo importancia á medida que se populariza el sistema métrico decimal, porque en este sistema, no es necesario.

372. PROBLEMA 2.° *Dado el valor de una unidad concreta por su equivalencia con un número concreto, expre-*

sado por otras unidades homogéneas, ó heterogéneas con ella, hallar un número concreto homogéneo con la primera unidad, conociendo su equivalencia en unidades homogéneas con las segundas. (*)

Se expresan de un modo general las equivalencias que resuelven este problema del modo siguiente (núm. 367):

$$\left.\begin{array}{l} x_m = a_n \\ b_n = 1_m \end{array}\right\} \text{ de donde } x_m = \left(\frac{a\,.\,1}{b}\right)_m = \left(\frac{a}{b}\right)_m$$

EJEMPLOS.

1.° ¿Cuántas acciones de una mina se podrán comprar con 8290 pesetas, costando una acción 165 pesetas?

$$x \text{ acciones} = 8290 \text{ pesetas.}$$
$$165 \text{ pesetas} = 1 \text{ acción.}$$

de donde x acciones $= \frac{8290}{165}$ acciones $= 50\frac{40}{165}$ acciones.

luego se podrán comprar 50 acciones y una participación de $\frac{40}{165}$ en otra acción, ó reservarse el sobrante de 40 pesetas en metálico.

2.° Una fuente arroja 1 metro cúbico de agua en 48 minutos ¿cuánta agua arrojará en 9 horas y 37 minutos?

$$\left.\begin{array}{l} x\ m^3 = 9 \text{ horas } 37 \text{ mins.} \\ 48 \text{ mins.} = 1\ m^3 \end{array}\right\} \text{ ó bien } \begin{array}{l} x\ m^3 = 577 \text{ mins.} \\ 48 \text{ mins.} = 1\ m^3 \end{array}$$

de donde $x\ m^3 = \frac{577}{48} m^3 = 11{,}020833\ m.^3$

373. PROBLEMA 3.° *Dado el valor de un número concreto por su equivalencia con otro concreto homogéneo ú heterogéneo con él, hallar en unidades homogéneas con uno de los dos concretos el valor de una unidad homogénea con el otro.* (**)

Se expresan de un modo general las equivalencias que resuelven este problema del modo siguiente (núm. 367):

(*) Este problema es el que se considera como una división de concretos homogéneos.

(**) Este problema es el que se considera como división de concretos heterogéneos.

$$\left.\begin{array}{l} x_m = 1_n \\ a_n = b_m \end{array}\right\} \text{de donde } x_m = \left(\frac{1 \,.\, b}{a}\right)_m = \left(\frac{b}{a}\right)_m$$

Ejemplos. 1.° Si por un solar de 2722 pies cuadrados se han pagado 3745 pesetas, ¿cuál es el valor del pie cuadrado?

$$x \text{ pesetas} = 1 \text{ pie}^2$$
$$2722 \text{ pies}^2 = 3745 \text{ pesetas.}$$

de donde x pesetas $= \frac{3745}{2722}$ pesetas $= 1{,}38$ pesetas, con menor error de $^1/_2$ céntimo, por exceso.

2.° Si un coche ha recorrido 21 leguas y 2840 pies en 9 horas y 45 minutos, ¿cuánto habrá recorrido por hora?

$$x \text{ leguas} = 1 \text{ hora}$$
$$9 \text{ horas } 45 \text{ minutos} = 21 \text{ legs}^s \text{ y } 2840 \text{ pies}$$

ó bien, reduciendo á incomplejos de horas y leguas

$$x \text{ leguas} = 1 \text{ hora}$$
$$\frac{585}{60} \text{ hora} = \frac{422840}{20000} \text{ leguas}$$

de donde x leguas $= \frac{422840}{20000} : \frac{585}{60}$ legs. $=2$ legs. y 3368 pies.

3.° Si por 2437 pesetas se cambian 2365 francos ¿cuántos francos se cambian por una peseta?

$$x \text{ francos} = 1 \text{ peseta.}$$
$$2487 \text{ pesetas.} = 2365 \text{ francos.}$$

de donde x francos $= \frac{2365}{2487}$ francos $= 0{,}97$ francos.

4.° Si por 5249 pesetas se han comprado 125 Hl 4 Dl y 3l de vino ¿á cómo cuesta el hectolitro?

$$x \text{ pesetas} = 1 \text{ Hl}$$
$$125{,}48 \text{ Hl} = 5249 \text{ pesetas.}$$

de donde x pesetas $= \frac{5249}{125{,}48} = 41{,}83$ pesetas.

CAPÍTULO III.

COMPARACIÓN DE LOS NÚMEROS CONCRETOS.

I. La proporcionalidad de los números concretos en general.

374. *La relación de dos cantidades homogéneas es igual á la relación de los números que las miden, con una unidad arbitraria, homogénea con las cantidades.*

Sean A y A' las cantidades; U la unidad adoptada, y a, a' los números que las miden con dicha unidad. Tendremos:

$$\frac{A}{U} = a, \frac{A'}{U} = a'$$

de donde $$A = Ua, A' = Ua'$$

dividiendo miembro y suprimiendo el factor común U resulta

$$\frac{A}{A'} = \frac{a}{a'}$$

375. Dos magnitudes variables pueden depender una de otra de tal modo que á *cada valor* de una de ellas *corresponda un valor* y *sólo una* de la otra.

Dos magnitudes, así enlazadas, *son directamente proporcionales cuando la razón de dos valores de la primera es igual á la razón de los valores correspondientes de la segunda.*

Si A y B son dos magnitudes directamente proporcionales y A_1 A_2 y B_1 B_2 dos pares de valores correspondientes, se tendrá por definición

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

si se miden las magnitudes A y B con unidades arbitrarias, pero homogéneas con ellas, y designamos por a^1, a_2 y b_1, b_2, los números que miden los valores correspondientes de la proporción anterior, se tendrá (núm. 374)

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \qquad (1)$$

cambiando de lugar los medios en la proporción (1)

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \qquad (2)$$

376. De la proporción (2) se deduce: *que la relación de dos valores correspondientes, ó de los números que los miden, en dos cantidades directamente proporcionales es constante.* (*)

Como consecuencia de esta propiedad *si multiplicamos un valor* a *por un número cualquiera, el correspondiente* b, *quedará multiplicado por el mismo número.*

Porque si la razón $\frac{a_1}{b_1}$ ha de permanecer constante, cuando se multiplique el antecedente a_1 por un número m el consecuente se debe multiplicar por el mismo número para que la razón no varíe. Así:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_1\,m}{b_1\,m}$$

377. RECÍPROCAMENTE. *Si multiplicando un valor a_1, por un número cualquiera, m, el correspondiente b, queda multiplicado por el mismo número m, las cantidades son directamente proporcionales.* (**)

Supongamos que $a_1\,m = a_2$, y designemos por b_2 el valor correspondiente á a_2; tendremos, en virtud de la hipótesis $b_1\,m = b_2$ y dividiendo ordenadamente las dos igualdades

$$\frac{a_1\,m}{b_1\,m} = \frac{a_2}{b_2} \quad \text{ó} \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$$

y cambiando de lugar los medios

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

378. La demostración de la proporcionalidad de las magnitudes pertenece á la Ciencia en que se las estudia y no á la Aritmética; pero en muchos casos el sentido común

(*) En lo sucesivo llamaremos proporcionales á las cantidades directamente proporcionales.

(**) En la práctica el multiplicador m siempre es entero y aun suele ser el número 2. Se puede demostrar que si el teorema es cierto cuando m es entero, también lo es, cuando es fraccionario, ó incomensurable.

nos indica esta proporcionalidad ayudándonos de la regla que contiene el teorema del núm. 377.

Así. El camino recorrido por un cuerpo que se mueve con una velocidad constante es proporcional al tiempo que dura el movimiento. El valor de una partida de trigo es proporcional á la cantidad de trigo, etc.

379. *Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando la razón de dos valores de la primera magnitud es igual á la razón inversa de los valores correspondientes de la segunda.*

Si A_1, A_2 son dos valores de la primera magnitud y B_1, B_2 los correspondientes de la segunda, se tendrá:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_2}{B_1}$$

ó bien entre los números que las miden (núm. 374)

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_2}{b_1} \qquad (3)$$

de donde se deduce

$$a_1\, b_1 = a_2\, b_2 \qquad (4)$$

380. De la igualdad (4) se deduce: *que el producto de dos valores correspondientes ó de los números que los miden, en dos cantidades inversamente proporcionales, es constante.* (*)

Como consecuencia de esta propiedad: *Si multiplicamos un valor a_1 por un número cualquiera, el correspondiente b_1 quedará multiplicado por el mismo número.*

En efecto; si el producto $a_1\, b_1$ ha de ser constante cuando a_1 se multiplique por m, el factor b_1 habrá que dividirle por el mismo número para que el producto no varíe. Así:

$$a_1\, b_1 = (a_1\, m)\, \frac{b_1}{m}$$

381. Recíprocamente. *Si multiplicando un valor a_1*

(*) Entre las cantidades se tiene la igualdad $A_1\ B_1 = A_2\ B_2$ y midiéndolas con unidades U y V se tendrá $\frac{A_1}{U} \cdot \frac{B_1}{V} = \frac{A_2}{U} \cdot \frac{B_2}{V}$; ó bien $a_1\ b_1 = a_2\ b_2$

por un número cualquiera m, el correspondiente queda dividido por el mismo número m, las cantidades son inversamente proporcionales. (*)

Supongamos que $a_1 m = a_2$ y sea b_2 el valor correspondiente á a_2 tendremos $\frac{b_1}{m} = b_2$ y multiplicando ordenadamente las dos igualdades

$$a_1 m \frac{b_1}{m} = a_2 b_2 \quad \text{ó} \quad a_1 b_1 = a_2 b_2$$

382. La proposición anterior se utiliza muchas veces para averiguar si dos magnitudes son inversamente proporcionales.

Así: el tiempo empleado, por un cuerpo que se mueve uniformemente, en recorrer una distancia dada, es inversamente proporcional á su velocidad. El tiempo necesario para que varios operarios concluyan una obra es inversamente proporcional al número de operarios, etc.

383. Cuando una magnitud, M, depende de otras varias, A, B, C, D, para saber con cuales es directa y con cuales inversamente proporcional, se supone que varía una de las magnitudes A, B, C, D y que las demás permanecen constantes. A y M serán directamente proporcionales si variando sólo A, la razón de dos valores suyos es igual á la de sus correspondientes de M; y serían inversamente proporcionales si la razón de dos valores de A es igual á la razón inversa de los correspondientes de M.

384. Sea M una magnitud directamente proporcional con A, B, é inversamente proporcional con C y D, y sean

$$\begin{matrix} m_1 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ m_2 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{matrix}$$

dos series de valores correspondientes. (**)

Designemos por m', m'', m''', los valores que toma m

(*) En la práctica el multiplicador m suele ser el número 2. Pero se puede demostrar que si el teorema es cierto cuando m es entero, también lo es cuando m es fraccionario ó incomensurable.

(**) Podemos desde luego suponer que son valores numéricos, pero la propiedad que vamos á demostrar tiene lugar también entre las magnitudes sin referir á unidad alguna.

cuando A, B, C, pasan sucesivamente de los valores a_1, b_1 c_1, á los valores a_2, b_2, c_2, tendremos entre los valores correspondientes (núms. 375 y 379).

$$\left.\begin{array}{lllll} m_1 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ m' & a_2 & b_1 & c_1 & d_1 \\ m'' & a_2 & b_2 & c_1 & d_1 \\ m''' & a_2 & b_2 & c_2 & d_1 \\ m_2 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{m_1}{m'} = \frac{a_1}{a_2} \\ \frac{m'}{m''} = \frac{b_1}{b_2} \\ \frac{m''}{m'''} = \frac{c_2}{c_1} \\ \frac{m'''}{m_1} = \frac{d_2}{d_1} \end{array}$$

y multiplicando ordenadamente y simplificando el primer miembro

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{d_2}{d_1}$$

Esta igualdad manifiesta: *que la razón de dos valores de una magnitud que depende de otras varias, es igual al producto de las razones directas de los valores correspondientes de las magnitudes con las que es directamente proporcional, multiplicado por el producto de las razones inversas de los valores correspondientes de las magnitudes con las que es inversamente proporcional.*

II. Reglas de tres simple y compuesta.

Regla de tres simple.

385. El problema de la rela de tres simple se puede enunciar del modo siguiente:

Conocidos dos valores correspondientes de dos cantidades directa ó inversamente proporcionales, hallar el valor de una de ellas, correspondiente á un nuevo valor dado á la otra.

La regla de tres simple es *directa* cuando las cantidades á que se refiere la cuestión son directamente proporcionales, é *inversa* cuando son inversamente proporcionales.

386. Regla de tres directa. Si A y B son dos canti-

dades proporcionales y a_1, b_1 dos valores correspondientes; nos proponemos hallar el valor x de A, correspondiente al valor b_2 de B. Se tendrá (núm. 375)

$$\frac{x}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} \quad \text{de donde} \quad x = a_1 \times \frac{b_2}{b_1}$$

Luego: *en la regla de tres simple directa, el valor de la incógnita x se obtiene multiplicando el valor conocido del mismo género por la razón directa del nuevo valor de la otra cantidad al que antes tenía.*

Ejemplo. Si un cuerpo, que se mueve uniformemente, recorre en 48 minutos 17 kilómetros ¿cuánto recorrerá en 2 horas y 26 minutos suponiendo que lleva la misma velocidad?

En doble tiempo recorrerá doble espacio, luego el espacio recorrido y el tiempo tardado en recorrerle son directamente proporcionales, (núm. 375), entonces tendremos, reduciendo á minutos las 2 horas y 26 minutos.

$$x Km = 17\, Km \times \frac{146}{48} = 51{,}708\, Km$$

387. Regla de tres inversa. Si A y B son dos cantidades inversamente proporcionales y a_1, b_1, dos valores correspondientes, nos proponemos hallar el valor x de A correspondiente al valor b_2 de B. Se tendrá (núm. 379)

$$\frac{x}{a_1} = \frac{b_1}{b_2} \quad \text{de donde} \quad x = a_1 \times \frac{b_1}{b_2}$$

Luego: *en la regla de tres simple inversa el valor de la incógnita x se obtiene multiplicando el valor conocido del mismo género por la razón inversa del nuevo valor de la otra cantidad al que tenía antes.*

Ejemplo. Si un tren con la velocidad de 36 *Km* por hora ha tardado en recorrer cierta distancia, 27 minutos, ¿cuánto tardará en recorrer la misma distancia cuando su velocidad sea 53 *Km* por hora?

A doble velocidad corresponde la mitad del tiempo para recorrer la misma distancia, luego el tiempo y la velocidad son inversamente proporcionales (núm. 381), entonces tendremos:

$$x \text{ minutos} = 27 \text{ mints.} \times \frac{36}{53} = 18 \text{ mints. } 14{,}7\ 5.$$

Regla de tres compuesta.

386. El problema de la regla de tres compuesta se puede enunciar del modo siguiente: *Si una cantidad M depende de otras varias A, B, C, D y conocemos un valor m_1 de la primera, correspondiente á los valores a_1, b_1, c_1, d_1, de las otras*, hallar un nuevo valor x, de M, que corresponda á los valores a_2, b_2, c_2, d_2, *de las otras cantidades.*

Supongamos que la cantidad M es directamente proporcional con A y B é inversamente proporcional con C y D, tendremos (núm. 384)

$$\frac{x}{m_1} = \frac{a_2}{a_1} \times \frac{b_2}{b_1} \times \frac{c_1}{c_2} \times \frac{d_1}{d_2}$$

de donde

$$x = m_1 \times \frac{a_2}{a_1} \times \frac{b_2}{b_1} \times \frac{c_1}{c_2} \times \frac{d_1}{d_2}$$

Luego: *en la regla de tres compuesta el valor de la incógnita x se obtiene multiplicando el valor conocido del mismo género, por las razones directas de los nuevos valores á los antiguos, para las cantidades directamente proproporcionales con la del mismo género que la incógnita y por las razones inversas de los valores nuevos á los antiguos, para las cantidades inversamente proporcionales con la del mismo género que la incógnita.*

Ejemplo. Si en 124 horas, 65 obreros han abierto una zanja de 845 metros de larga, 2*m* de ancha, 0,75*m* de profunda, en un terreno cuya resistencia está representada por 4, siendo 3 el número que representa la fuerza de cada obrero, ¿cuántas horas tardarán 82 obreros en abrir otra zanja de 1000*m* de larga, 2,50*m* de ancha, 1*m* de profunda, siendo 3 la resistencia del terreno y 3,5 la fuerza de cada obrero?

Dispondremos el ejemplo del modo siguiente:

	i	d	d	d	d	i
Horas	Obreros	Largo	Ancho	Profundo	Resistencia	Fuerza
124	65	845	2	0,75	4	3
x	82	1000	2,50	1	3	3,5

Comparando con las horas cada una de las demás cantidades, se ve que el número de horas necesarias para abrir la zanja es inversamente proporcional al número de obreros y á la fuerza de cada uno y directamente proporcional al largo, ancho y profundidad de la zanja y á la resistencia que opone el terreno; luego

$$x \text{ horas} = 124 \times \frac{65}{82} \times \frac{1000}{845} \times \frac{2,50}{2} \times \frac{1}{0,75} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{3,5} = 124 \text{ hors. } 38 \text{ min.}$$

con un error menor de medio minuto por exceso.

Al hacer las operaciones se deben suprimir los factores comunes del numerador y denominador para simplificar todo lo posible el cálculo.

III, Reglas de interés y descuento.

Regla de interés simple.

387. Cuando se presta un capital durante cierto tiempo, el prestamista se indemniza recibiendo, además del capital prestado, una cierta cantidad que se llama *interés* ó *renta.*

El interés se regula por comparación con un capital de 100 pesetas que se supone prestado durante un año en las mismas condiciones que el capital que se considera. El interés de 100 pesetas en un año se llama *rédito* ó *tanto por ciento. El interés es proporcional al capital prestado.*

Se puede admitir que el interés es *proporcional al tiempo que dura el préstamo*, ó sea que el capital es invariable durante este tiempo, y entonces se llama *interés simple;* ó que por intervalos iguales (generalmente de un año) se acumulan al capital para producir á su vez otro interés, y en este caso se llama *interés compuesto.*

En los casos de interés simple, generalmente, el prestatario paga por intervalos iguales (de un año, de un semestre, etc.) el interés del capital que ha recibido, y al terminar el tiempo estipulado devuelve también el capital.

Por ahora sólo nos ocuparemos de cuestiones de interés simple.

388. Designemos por c el capital que se presta; por t el tiempo que dura el préstamo; por i el interés que produce, y por r la renta, ó tanto por 100, que es, como hemos dicho el interés del capital 100 en un año.

Por ser el interés proporcional al capital y al tiempo, tendremos que resolver un problema de regla de tres compuesta, que dispondremos del modo siguiente:

$$\left.\begin{matrix} r & 1 & 100 \\ i & t & c \end{matrix}\right\} \text{ de donde (núm. 386) } i = r \times \frac{t}{1} \times \frac{c}{100}$$

ó bien

$$i = \frac{c\,t\,r}{100} \quad (1)$$

La *fórmula* (*) se ha obtenido en la hipótesis de que la unidad de tiempo es un año, por consiguiente si el tiempo t se expresa en meses, se tendrá presente que cada mes es $\frac{1}{12}$ de año, y por tanto si $t = p$ meses, será $t = \frac{p}{12}$, luego la fórmula se convertirá en

$$i = \frac{c \cdot \frac{p}{12} \cdot r}{100} = \frac{c\,p\,r}{1200}$$

y si t se expresa en días, será $\frac{p}{360}$, ó $\frac{p}{365}$, según que se admita, como se hace muchas veces en el comercio, que el año tiene 360 días, ó 365, de donde

$$i = \frac{c\,p\,r}{36000} \quad \text{ó} \quad i = \frac{c\,p\,r}{36500}$$

Ejemplo. Hallar el interés de un capital de 3428 pesetas al 6 por $^0/_0$ (se lee al 6 por 100) en 7 meses.

(*) Fórmula es una expresión donde están indicadas las operaciones que se deben efectuar para resolver un problema.

Haremos $c = 3428$; $t = \frac{7}{12}$ y $r = 6$, de donde

$$i = \frac{3428 \times 7 \times 6}{1200} = 119{,}98 \text{ pesetas.}$$

389. De la fórmula (1) se deduce multiplicando por 100 los dos miembros:

$$\left.\begin{aligned} 100\,i &= c\,t\,r \\ c &= \frac{100\,i}{t\,r} \\ t &= \frac{100\,i}{c\,r} \\ r &= \frac{100\,i}{c\,t} \end{aligned}\right\}$$

y dividiendo sucesivamente por tr, cr y ct, se hallan otras tres fórmulas que sirven para resolver las cuestiones en que se trate de hallar el capital c, ó el tiempo t, ó el rédito r. El numerador $100i$, se cambiará en $1200i$, si el tiempo está expresado en meses; y en $36000i$, ó en $36500i$, si está expresado en días.

Ejemplos. 1.º ¿Qué capital se habrá prestado al 5 por % para producir 340 pesetas en 80 días?

$$c = \frac{36000 \times 340}{80 \times 5} = 30600 \text{ pesetas.}$$

2.º ¿Cuánto tiempo habrá estado prestado un capital de 3000 pesetas para producir al 6 ¼ por % un interés de 85 pesetas?

$$t = \frac{100 \times 85}{3000 \times 6\frac{1}{4}} = \frac{100 \times 85 \times 4}{3000 \times 25} = \frac{34}{75} \text{ año}$$

Si se supone el año de 360 días, esta fracción de año será 163 días aproximadamente, y si se supone el año de 365 días, será 165 días tambien aproximadamente.

390. Cuando el tiempo que dura el préstamo es un año, la fórmula (1) es más sencilla porque se hace $t = 1$, y se tendrá

$$i = \frac{c\,r}{100} \text{ de donde } c = \frac{100i}{r} \text{ y } r = \frac{100i}{c}$$

En este caso es cuando el interés suele tomar el nombre de *renta*, sobre todo si se recibe, ó paga anualmente hasta la devolución del capital prestado.

Regla de descuento.

391. *Pagaré es un documento de crédito por el cual una persona se obliga á pagar á otra cierta cantidad en una fecha designada en el documento, que se llama su vencimiento.*

Letra de cambio es un documento de crédito por el cual una persona manda á otra que se sirva pagar á su orden, ó á una tercera persona, cierta cantidad en un plazo, ó fecha designado en el documento.

Valor nominal de una letra, ó pagaré, es el valor que está consignado en el documento. *Valor actual* ó *efectivo* es un valor variable que tiene antes de su vencimiento.

El valor actual es menor que el valor nominal, y la diferencia entre ambos valores se llama *descuento.*

Si el tenedor de un pagaré ó de una letra quiere cobrarla antes de su vencimiento, tiene que pagar al que la toma el interés del valor nominal, ó del valor efectivo del documento. En el primer caso, el interés se llama *descuento comercial*, en el segundo, *descuento matemático ó racional.* (*)

Si designamos por d el descuento y v el valor nominal, siendo r el tanto por ciento y t el tiempo que falta para el vencimiento, tendremos, según la fórmula (1) (número 388)

$$d = \frac{v\,t\,r}{100}$$

Generalmente el tiempo se expresa en días, y suponiendo que sea igual á p y el año de 360 días

$$d = \frac{v\,p\,r}{36000}$$

Ejemplo. ¿Qué descuento tiene una letra de 1247,60 pesetas que vence dentro de 35 días al 6 por %?

$$d = \frac{1247{,}60 \times 35 \times 6}{36000} = 7{,}28 \text{ pesetas.}$$

(*) No explicamos más que el descuento comercial, porque es el único que está en uso, excepto cuando el plazo del vencimiento es más de un año, en cuyo caso se descuenta á interés compuesto el valor efectivo.

Luego el tenedor de la letra deberá recibir 1240,32 pesetas.

IV. Regla de compañía.

392. *La regla de compañía es el procedimiento que se sigue para repartir entre varios socios la ganancia ó pérdida de una sociedad que han fundado con un fin industrial, ó mercantil cualquiera.*

Las ganancias ó pérdidas sociales se reparten entre los socios proporcionalmente á los capitales que aportan á la sociedad y proporcionalmente también á los tiempos que están impuestos.

Si dos socios aportan los capitales c y c', durante los tiempos t y t', designando por g y g' las ganancias, ó pérdidas que les corresponden, tendremos

$$\left.\begin{matrix} g,\ c,\ t \\ g',\ c',\ t' \end{matrix}\right\} \text{de donde (num. 384)}\ \frac{g}{g'} = \frac{c}{c'} \times \frac{t}{t'}$$

ó bien

$$\frac{g}{g'} = \frac{ct}{c't'}$$

Luego las ganancias ó pérdidas de cada socio son proporcionales á los productos de los capitales por los tiempos.

393, Designando por G la ganancia, ó pérdida social, por g, g', g'' las ganancias ó pérdidas de los socios, por c, c', c'', los capitales y por t, t', t'', los tiempos que están impuestos, tendremos que dividir G en partes proporcionales á los productos ct, $c't'$, $c''t''$, (núm. 392). El problema de dividir un número en partes proporcionales á otros números dados, le resolvimos en el núm. 351, y aplicando al caso actual la regla que hallamos entonces tendremos

$$g = ct \times \frac{G}{ct + c't' + c''t''},\ g' = c't' \times \frac{G}{ct + c't' + c''t''},\ g'' = c''t'' \times \frac{G}{ct + c't' + c''t''}$$

Si los tiempos, ó los capitales son iguales, las fórmulas se simplifican por la supresión de un factor común; pero se podrían obtener directamente en virtud de lo dicho en el número anterior.

Ejemplo. Tres personas se asocian para una empresa; la primera con un capital de 6000 pesetas durante 2 años; la segunda, 5000 pesetas durante 16 meses, y la tercera, con un capital de 7000 pesetas durante 9 meses. ¿Qué ganancia corresponde á cada socio siendo la ganancia total 8000 pesetas?

$$1.^{\circ}\quad g=\frac{8000}{6000\times 2+5000\times\frac{16}{12}+7000\times\frac{9}{12}}\times 6000\times 2=4013{,}94 \text{ pts.}$$

$$2.^{\circ}\quad g'=\frac{8000}{6000\times 2+5000\times\frac{16}{12}+7000\times\frac{9}{12}}\times 5000\times\frac{16}{12}=2229{,}96$$

$$3.^{\circ}\quad g''=\frac{8000}{6000\times 2+5000\times\frac{16}{12}+7000\times\frac{9}{12}}\times 7000\times\frac{9}{12}=1756{,}10$$

V. Regla de aligación.

394. REGLA DE ALIGACIÓN es el procedimiento que se sigue para resolver los dos problemas siguientes:

1.° *Dadas las cantidades de varias sustancias que se mezclan y los precios de sus unidades, hallar la cantidad y precio de la mezcla.*

2.° *Dados los precios de la unidad de la mezcla y los precios de las unidades de las sustancias que se han de mezclar, hallar las cantidades que se han de mezclar.*

El primer problema se llama regla de aligación *directa* y el segundo regla de aligación *inversa.*

En uno y otro caso se supone que las sustancias que se mezclan no pierden su valor ni sus propiedades al mezclarse.

395. REGLA DE ALIGACIÓN DIRECTA. Si designamos por c, c', c'' las cantidades que se mezclan y por p, p', p'' los precios de sus unidades. *La cantidad total de mezcla será*, designándola por C

$$C = c + c' + c''$$

y *el valor de la mezcla total* será

$$cp + c'p' + c''p''$$

puesto que cp, $c'p'$, $c''p''$ son evidentemente los valores de las cantidades de las sustancias mezcladas.

Para obtener el precio de la mezcla, ó sea el valor de una unidad, bastará dividir el valor total de la mezcla por su cantidad, de suerte que si designamos por P dicho precio, se tendrá

$$\mathrm{P} = \frac{cp + c'p' + c''p''}{c + c' + c''}$$

De aquí se deduce la siguiente:

Regla. *Para hallar el precio de la mezcla, se multiplica cada una de las cantidades mezcladas por su precio y se suman los productos y esta suma se divide por la de las cantidades mezcladas.*

Ejemplo. Se mezclan 7 Kg. de café moka de 5,50 pesetas el Kg. con 10 de café de Puerto Rico de 5 pesetas y con 8 de café caracolillo de 4,75 pesetas el Kg., se desea saber el precio de la mezcla.

Según la regla anterior se tendrá

$$\mathrm{P} = \frac{7 \times 5{,}50 + 10 \times 5 + 8 \times 4{,}75}{7 + 10 + 8} = 5{,}06 \text{ pesetas.}$$

396. Regla de aligación inversa. Supongamos en primer lugar que son dos las sustancias que se mezclan siendo p y p' sus precios y P el precio de la mezcla. *Si el problema ha de ser posible, el precio de la mezcla ha de ser intermedio entre los precios de las sustancias que se mezclan,* luego si $p \gtrless p'$, se debe tener $p \gtrless P \gtrless p'$.

Esto supuesto, si designamos por c y c' las cantidades que se han de mezclar en cada unidad de la sustancia cuyo precio es p se perderá $p - \mathrm{P}$, luego en c unidades se perderá $c\,(p - \mathrm{P})$; en cada unidad de la sustancia cuyo precio es p' se ganará $\mathrm{P} - p'$, luego en c' unidades se ganará $c'\,(\mathrm{P} - p')$: igualando ahora lo que se pierde en una sustancia con lo que se gana en la otra, se tendrá:

$$c\,(p - \mathrm{P}) = c'\,(\mathrm{P} - p')$$

de donde podremos formar la proporción (núm. 337)

$$\frac{c}{c'} = \frac{\mathrm{P} - p'}{p - \mathrm{P}}$$

luego: *las cantidades que se han de mezclar son inversamente proporcionales á las diferencias entre sus precios respectivos y el precio medio, ó de la mezcla.*

El problema de aligación inversa es indeterminado, puesto que no se halla más que la relacion de las cantidades que se han de mezclar, por tanto se puede fijar arbitrariamente una de las cantidades ó su suma. Podemos, por ejemplo, suponer que la suma de las cantidades c y c' es la unidad, y de la proporción anterior deduciremos (núm. 342)

$$\frac{c+c'}{p-p'}=\frac{c}{\mathrm{P}-p'}=\frac{c'}{p-\mathrm{P}}$$

ó bien por ser $c + c' = 1$

$$\frac{c}{\mathrm{P}-p'}=\frac{1}{p-p'} \quad \text{de donde} \quad c=\frac{\mathrm{P}-p'}{p-p'}$$

$$\frac{c'}{p-\mathrm{P}}=\frac{1}{p-p'} \quad \text{»} \quad c'=\frac{p-\mathrm{P}}{p-p'}$$

Ejemplo. Se desean mezclar dos vinos, uno de 75 y otro de 60 pesetas el *Hl*. ¿Qué cantidad de cada uno debe entrar en un *Hl*, para que el precio de la mezcla sea 72 pesetas?

Según se deduce de las fórmulas anteriores, se tendrá:

$$c=\frac{72-60}{75-60}\ Hl = 0{,}80\ Hl = 80\ l$$

$$c'=\frac{75-72}{75-60}\ Hl = 0{,}20\ Hl = 20\ l$$

Luego en cada *Hl* de mezcla deben entrar 80 litros del vino de 75 pesetas y 20 litros del de 60 pesetas.

397. Si las sustancias que se han de mezclar son más de dos, aumentará la indeterminación del problema (suponiendo siempre que el precio de la mezcla es intermedio entre el precio de la más cara y de la más barata de las sustancias mezcladas, pues en el caso contrario es imposible); pero para hallar una solución: *se opera primero con dos sustancias cuyo precio comprende el de la mezcla, después con otras dos, y así sucesivamente, pudiendo operar*

con una misma sustancia dos ó más veces. La suma de las cantidades de cada mezcla será la cantidad total de mezcla.

Ejemplo. Se desean mezclar trigos de 22, 21 y 16 pesetas el *Hl* ¿Qué cantidad se debe mezclar de cada uno para que el precio de la mezcla sea 20 pesetas el *Hl*?

Operando primero con los trigos de 22 y de 16 pesetas, en cada *Hl* de mezcla entrarán las cantidades (núm. 395)

$$c = \frac{20-16}{22-16}\,Hl = \frac{2}{3}\,Hl = 67\ l \text{ aproximadamente}$$

$$c' = \frac{22-20}{22-16}\,Hl = \frac{1}{3}\,Hl = 33\ l \text{ aproximadamente}$$

Operando ahora con los trigos de 21 y de 16 pesetas, en cada *Hl* de mezcla entrarán las cantidades

$$c'' = \frac{20-16}{21-16}\,Hl = \frac{4}{5}\,Hl = 80\ l$$

$$c''' = \frac{21-20}{21-16}\,Hl = \frac{1}{5}\,Hl = 20\ l$$

Luego en dos *Hl* de mezcla entrarán 67 litros del trigo de 22 pesetas, 80 l del de 21 pesetas y $(33+20)\,l = 53$ litros del de 16 pesetas.

FIN DE LA ARITMÉTICA.

ÁLGEBRA.

PRELIMINARES.

1. Para representar las cantidades ó números conocidos pero cuya relación con la unidad sea indeterminada emplearemos las primeras letras de nuestras alfabeto: cuando sea necesario las afectaremos de acentos ó índices. Por ejemplo: a', a'', a''',... a_1, a_2, a_3..., que se leen *a prima, a segunda, a tercera... a sub uno, a sub dos...* Para designar cantidades y números desconocidos usaremos generalmente las últimas letras del alfabeto. Algunas veces utilizaremos también las letras del alfabeto griego. Conservaremos los signos de operaciones, igualdades y desigualdades que se han empleado en la Aritmética. Por consiguiente ni el sistema de notación, ni la manera de estudiar la cantidad serán completamente nuevos para los alumnos.

2. Las cantidades que en una expresión cualquiera están precedidas del signo $+$, ó no llevan signo, se dicen *positivas* ó *aritméticas*: las que están precedidas del signo $-$ *negativas*.

La formación é interpretación de las cantidades positivas ha sido suficientemente explicada en la Aritmética. Ahora sólo nos ocuparemos de la formación é interpretación de las cantidades negativas.

3. Supongamos que se quiera efectuar la sustracción $a - b$; mientras el valor de a sea mayor que el de b la operación no ofrecerá dificultad alguna, pero si $a < b$, por ejemplo, si $a = 5$, $b = 8$, la sustracción no puede efectuarse. Sin embargo, teniendo presente que para restar de un número 8 unidades se pueden restar primero 5 y despues 3, la diferencia $5 - 8$, será equivalente á $5 - 5 - 3$, que se reduce á -3. Este número 3 precedido del signo $-$ es lo que llamaremos un número negativo. Más generalmente, si en la diferencia $a - b$, hacemos $b = a + c$, para restar b, restaremos sucesivamente a y c y se tendrá

$$a - b = a - a - c,$$

que es igual á $-c$, es decir una *cantidad negativa.*

4. A partir de cero y por adición de cantidades ó número positivos, se forman series de cantidades ó números positivos, cada vez mayores y que podrán llegar á ser mayores que cualquier cantidad, ó número dados: es decir *que podrán crecer sin límites.*

Si á partir de cero restamos cantidades, ó números cada vez mayores, tambien las cantidades ó números que se forman, crecerán sin límites *pero negativamente.*

Así:

$$0, -1, -2, -3, -4, -5.....$$

será la serie natural de números negativos.

El cero es *origen* y *límite* común de las cantidades y números positivos y negativos, que se forman y desarrollan en dos sentidos opuestos, por lo cual unas por relación á otras se designan con el nombre de *cantidades opuestas.*

Representando por el símbolo ∞ el infinito ó la carencia de límites la serie positiva y negativa de los números naturales será:

$$-\infty, ... -n, ... -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 ... n ... \infty$$

5. *Se llama módulo, ó valor absoluto de una cantidad, el valor que tiene considerandola como positiva.*

Dos cantidades son iguales cuando tienen el mismo valor absoluto y el mismo signo. Si tienen el mismo valor absoluto y signos contrarios, se dicen iguales y de signo contrario.

6. Evidentemente toda cantidad ó número positivo es mayor que cero y de dos cantidades positivas es mayor la que tiene mayor valor absoluto. Ahora bien, como el cero es el límite común de las cantidades positivas y negativas, dista menos (núm. 4) de una cantidad positiva, que cualquiera cantidad negativa, por tanto *toda cantidad negativa es menor que cero.* (*) Cómo toda cantidad negativa dista de

(*) De aquí surge una distinción, admitida por todos entre el **cero absoluto**, símbolo de la nada, inferior por tanto á toda cantidad y el **cero límite** de que se habla en el texto.

las positivas tanto más cuanto mayor es su valor absoluto, se deduce que de *dos cantidades negativas es mayor la que tiene menor valor absoluto.*

7. Algunas cantidades concretas pueden ser susceptibles de afectar dos sentidos opuestos, en este caso si se considera como positivas las que afectan un sentido, sus opuestas serán las negativas.

Como ejemplo pueden citarse las distancias contadas en una línea recta. Si admitimos que, á partir de un punto en un *cierto sentido son positivas,* en *el sentido opuesto serán negativas.* En general basta que una distancia sea recorrida en el *sentido positivo* para ser *positivas:* si una distancia es recorrida en el *sentido negativo* será *negativa.*

Si un acontecimiento cualquiera se considera como origen de los tiempos, á partir de él se podrá contar hacia el *pasado,* ó hacia el *porvenir* y serán *opuestas.*

Son también cantidades opuestas: *haberes* y *deudas*; *ganancias* y *pérdidas; avances* y *retrocesos; dilataciones* y *contracciones;* temperaturas superiores é inferiores al *cero de una escala termométrica;* etc.

Si las cantidades concretas que se considere no son susceptibles de afectar dos sentidos opuestos, las negativas no tienen interpretación y se consideran como absurdas.

8. *Se llama valor algebráico de una cantidad á su valor absoluto, precedido del signo que le corresponda.*

Se llama cantidad algebráica la cantidad considerada bajo su doble aspecto de magnitud y signo.

9. Con las cantidades algebráicas se efectuan operaciones análogas á las del cálculo aritmético, el conjunto de estas operaciones recibe el nombre de *cálculo algebráico.*

10. *Álgebra es la ciencia fundamental de la cantidad, que estudia el sistema de operaciones que deben efectuarse con cantidades dadas, para deducir por medio de ellas otras cantidades desconocidas, é investiga además las propiedades de la cantidad.*

Difiere esencialmente de la Aritmética porque estudia la cantidad bajo su doble aspecto de magnitud y signo:

pero no están tan claramente deslindados los dominios de ambas ciencias que no tengan alguna parte común. (*)

11. *Fórmula es una relación constante que enlaza varias cantidades.*

Estudiaremos dos clases de fórmulas: unas queindican el procedimiento que se debe seguir en la resolución de un problema y otras que si bien se podrán considerar como el resultado de resolver un problema, expresarán generalmente una propiedad de la cantidad.

La fórmula $d = \frac{bc}{a}$, que sirve para hallar el cuarto término de una proporción conocidos los otros tres, pertenece á las primeras. La fórmula $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ que sirve para hallar el cuadrado de una suma, es una identidad que expresa una propiedad de las cantidades y de los números.

Traducir una fórmula al lenguage vulgar es deducir de ella un teorema ó regla para resolver todas las cuestiones análogas á la que dá origen á la fórmula.

Así la primera de las fórmulas anteriores dice: *En toda proporción un extremo es igual al producto de los medios dividido por el otro extremo.*

Definiciones de las operaciones algebráicas.

12. *Suma algebráica de dos cantidades del mismo signo es la suma de sus valores absolutos precedida del signo común. Suma algebráica de dos cantidades de signo contrario es la diferencia de sus valores absolutos procedido del signo de la mayor.*

Adición algebráica es una operación que tiene por objeto efectuar la suma algebráica de dos ó más cantidades. Las cantidades se llaman *sumandos*, el resultado *suma*; el *signo* de la adición es el mismo que en la Aritmética y como allí se coloca entre cada dos sumandos, *pero cada*

(*) Muchos estudian las progresiones, logaritmos, cuestiones de intereses, fracciones continuas, etc., en la Aritmética. Tampoco se puede deslindar donde termina el Algebra y comienza el Cálculo infinitesimal, pues en una y otra ciencia se estudian la variación de las funciones, derivadas, máximos y mínimos etc., *una de éstos se encierra en un paréntesis con el signo que tenga.*

La adición de dos cantidades afectará pues la forma general:

$$(\pm a) + (\pm b)$$

combinando los signos de a y b de todas las maneras posibles tendremos:

$$(+a) + (+b) = a + b \qquad (-a) + (+b) = -a + b$$
$$(+a) + (-b) = a - b \qquad (-a) + (-b) = -a - b$$

Si los sumandos son más de dos, se suman los dos primeros, al resultado se le suma el tercero y así sucesivamente hasta el último.

Ejemplo: $(+5)+(-9)+(+11)=(5-9)+(+11)=5-9+11=7$

13. Comprende la adición algebráica las dos operaciones inversas adición y sustracción aritméticas: por tanto el resultado puede ser *positivo* ó *negativo*: en general: *el valor absoluto de la suma es menor que la suma de los valores absolutos de los sumandos y en algunos casos es cero.*

Ejemplos.
$$(+3) + (-7) + (+2) = 3 - 7 + 2 = -3$$
$$(+3) + (-5) + (+2) = 3 - 5 + 2 = 0$$

14. Para dar mas generalidad á las fórmulas, se acostumbra á representar cada cantidad (positiva ó negativa) por una letra precedida del signo + ó sin signo. Y solamente cuando se deben hacer todas las hipótesis posibles sobre los valores de las cantidades, ó cuando reciben valores particulares, se les afecta de los signos correspondientes. Las ventajas de este convenio se irán notando á medida que se avance en el estudio Por ahora sólo diremos que para indicar que se deben sumar los valores, positivos ó negativos, de las cantidades a, b, c..... bastará escribir $a + b + c$.....

15. De las propiedades de la adición aritmética se conservan en la algebráica las siguientes.

1.ª *La suma de varias igualdades es una igualdad.*

2.ª *Una suma no se altera aunque se altere el orden de los sumandos.*

3.ª *La suma indicada de dos ó más sumandos se puede sustituir por su suma efectuada.*

4.ª *El resultado de sumar con cero cualquiera cantidad es la misma cantidad.*

COROLARIO. *Si se cambia el signo de todos los sumandos de una suma, la suma cambia de signo.*

Si A es la suma de los sumandos positivos y B la de los negativos, la suma algebráica será A — B, que tendrá el signo de la mayor de las cantidades A y B: pero si cambiamos el signo á todos los sumandos, la suma algebráica será – A + B, que evidentemente tiene el mismo valor absoluto y signo contrario que A — B.

16. *Sustracción algebráica es una operación que tiene por objeto dados una suma de dos sumandos y uno de ellos hallar el otro.* Las cantidades se llaman, como en Aritmética *minuendo* la suma dada, *sustraendo* el sumando dado y *resto* el sumando desconocido: el signo de la sustracción es el mismo que en Aritmética y se coloca entre el minuendo y el sustraendo, que se deben escribir cada uno en un paréntisis con su signo propio.

La sustracción de dos cantidades afectará pues la forma general:

$$(\pm a) - (\pm b)$$

17. *Para restar algebráicamente dos cantidades, se suman el minuendo, con su signo propio y el sustraendo con signo contrario.*

Supongamos que sea $+a$ el minuendo y $-b$ el sustraendo, decimos que

$$(+a) - (-b) = a + b$$

Porque la suma de $-b$ con $a + b$ es igual al minuendo a, como debe ser según la definición de sustracción.

18. Combinando de todos los modos posibles los signos de los datos en la sustracción se tiene.

$$(+a) - (+b) = a - b \qquad (-a) - (+b) = -a - b$$
$$(+a) - (-b) = a + b \qquad (-a) - (-b) = -a + b$$

Estas igualdades manifiestan que el *valor absoluto* del resto no es siempre igual á la diferencia de los valores absolutos del minuendo y sustraendo y aun puede ser igual á su suma.

Ejemplo: $(+8)-(-7)=8+7=15$

19. De las propiedades de la sustracción algebráica utilizaremos muchas veces la siguiente: *La diferencia de dos igualdades es una igualdad.*

20. *Multiplicación algebráica es una operación que tiene por objeto, dadas dos cantidades* (positivas, ó negativas, ó una positiva y otra negativa) *hallar una tercera cantidad que sea en magnitud y en signo, respecto de la primera, lo que la segunda es respecto de la unidad positiva.* Las cantidades que se multiplican reciben, como en la Aritmética, los nombres de *multiplicando* y *multiplicador*, y ambas juntas factores del *producto*, que es el nombre de la tercera. Se indica la multiplicación con el mismo signo que en Aritmética colocado entre los factores; pero en muchos casos se pueden suprimir los paréntesis de los factores y casi nunca se escribe el signo de multiplicar.

Así el producto $(+a)\times(+b)$ se escribe ab.

21. De la definición de la multiplicación se deduce la regla que se debe seguir para hallar el signo del producto. En efecto; si el *multiplicador* es positivo, tendrá el *mismo signo* que la *unidad positiva* y por tanto el producto deberá tener el *mismo signo* que el *multiplicador*; si el multiplicador es *negativo*, tendrá *signo contrario* al de la *unidad positiva* y, por consiguiente, el producto deberá tener *signo contrario* al del *multiplicando.*

Combinando los signos de todas las maneras posibles, tendremos:

$(+a)\times(+b)=+ab$		$+\times+$ da $+$
$(+a)\times(-b)=-ab$	ó bien	$+\times-$ da $-$
$(-a)\times(+b)=-ab$		$-\times+$ da $-$
$(-a)\times(-b)=+ab$		$-\times-$ da $+$

que se enuncia brevemente diciendo: signos iguales dan + en el producto y signos contrarios —.

22. Si cambiamos el signo á uno de los factores de un

producto, cambia de signo el producto; porque si los signos eran iguales se convertirán en contrarios, y si eran contrarios, en iguales. Si cambiamos el signo á los dos factores, el producto no cambia de signo, pues si eran iguales, iguales quedarán después del cambio, y contrarios si eran contrarios.

23. Un producto de varios factores se efectúa multiplicando el primero por el segundo, lo que resulte por el tercero y así sucesivamente. *El producto final será positivo ó negativo, según que el número de factores negativo, sea par ó impar.* Porque al formar el producto obtendremos el signo — cuando hayamos multiplicado por el primer factor negativo; el signo + cuando hayamos multiplicado por el segundo, y estos pares de cambios se repetirán hasta multiplicar por el último de los factores negativos, que dará el signo final y será + ó —, según que abra ó cierre uno de los cambios, es decir, según que el número de factores negativos sea par ó impar.

24. Las propiedades de la multiplicación aritmética que se conservan en la multiplicación algebráica son:

1.ª *El producto de varias igualdades es una igualdad.*

2.ª *Un producto no varía aunque se altere el orden de sus factores.*

3.ª *El producto indicado de dos, ó más factores, se puede sustituir por su producto efectuado.*

4.ª *El producto de una cantidad por cero es cero.*

5.ª *El producto es igual á uno de los factores cuando el otro es la unidad.*

En Aritmética se ha demostrado la generalidad de estas propiedades para los números positivos, y ahora es fácil convencerse que son ciertas también algebráicamente. En efecto; si se verifica, por ejemplo, que los valores absolutos de los productos abc, cab, cba..... son iguales, como sus signos también son iguales (núm. 23), se tendrá algebráicamente.

$$abc = cab = cba = ...$$

De estas propiedades resultan, como en Aritmética, las consecuencias siguientes: *Para multiplicar una cantidad por un producto, se la multiplica sucesivamente por cada uno de los factores del producto. Para multiplicar un producto por una cantidad se multiplica uno de los factores por dicha cantidad. Para multiplicar dos productos se forma un producto compuesto de todos los factores de ambos en el orden que se quiera.*

25. División es una operación que tiene por objeto, dados un producto y uno de los factores hallar, el otro. El producto conocido se llama *dividendo*, el factor conocido *divisor* y el factor desconocido *cociente*. El dividendo y divisor juntos se llaman términos de la división. Se indica la operación con el mismo signo que en la Aritmética, ó bien poniendo el cociente bajo forma fraccionaria, siendo el numerador el dividendo y el denominador el divisor.

26. El signo del cociente se halla observando que si el *dividendo* es *positivo*, como es el producto del divisor por el cociente, los factores deberán tener signos iguales (número 21); luego si el divisor es *positivo*, el cociente será *positivo*, y si el divisor es *negativo*, el cociente será *negativo*. Si el dividendo es *negativo* el divisor y el cociente tendrán signos contrarios (núm. 21).

Estos resultados se suelen expresar en la siguiente regla:

$$+ : + \text{ da } + \qquad - : + \text{ da } -$$
$$+ : - \text{ da } - \qquad - : - \text{ da } +$$

ó más brevemente, signos iguales dan + en el cociente y signos contrarios dan —.

27. El cociente cambia evidentemente de signo si cambia uno de sus términos (dividendo ó divisor) y conserva el signo cuando cambian los de ambos términos.

28. Las propiedades de la división algebráica son:

1.ª *Si se dividen miembro á miembro dos igualdades, los cocientes forman una igualdad.*

2.ª *Si el dividendo se multiplica, ó divide por una cantidad, el cociente queda multiplicado, ó dividido por la misma cantidad.*

3.ª *Si el divisor se multiplica, ó divide por una cantidad, el cociente queda dividido, ó multiplicado por la misma cantidad.*

4.ª *Si el dividendo y el divisor se multiplican ó dividen por una cantidad el cociente no varía.*

La generalidad de estas propiedades se ha demostrado en Aritmética para los números positivos. Para convencerse que son ciertas algebráicamente, consideremos una cualquiera, la primera, por ejemplo. Si se tiene $a = a'$, $b = b'$, los signos de a y a' serán iguales y lo mismo los de b y b', luego $\frac{a}{b}$ y $\frac{a'}{b'}$ tendrán los mismos signos (núm. 26), y como por Aritmética se sabe que sus valores absolutos son iguales, tendremos:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

29. *Si el dividendo es igual á cero, el cociente es también igual á cero.*

Porque si el cociente fuese distinto de cero, multiplicado por el divisor, no podría ser cero el producto; es decir, no podría ser el producto igual al dividendo, lo cual es contra la definición dada en el núm. 25.

30. *Si el divisor tiende es cero, el cociente es infinito.*

En efecto, sea $\frac{a}{b} = c$; si damos á b, los valores 0, 1; 0, 01; 0, 001; 0, 0001;....... cada vez menores y que disminuyan indefinidamente, el cociente c será sucesivamente $10a$; $100a$, $1000\ a$; $10000\ a$;..... pero los valores absolutos de estas cantidades son cada vez mayores y crecerán sin límites cuando b disminuya indefinidamente; luego suponiendo que a puede ser positiva, ó negativa, tendremos:

$$\frac{a}{0} = \infty \quad \text{y} \quad \frac{-a}{0} = -\infty$$

31. *Si el dividendo y el divisor se anulan, el cociente será en general indeterminado.*

En efecto; como el producto de cero por cualquiera cantidad positiva, ó negativa, es cero, el cociente $\frac{0}{0}$ se podrá igualar á cualquiera cantidad.

El símbolo $\frac{0}{0}$ nos servirá generalmente para expresar la indeterminación de una cantidad; pero en muchos casos se puede hallar el verdadero valor de las expresiones, que se presentan bajo la forma $\frac{0}{0}$, pues depende la determinación de la ley, según la cual decrecen los términos que se anulan: ahora nos concretaremos á advertir que si se tiene un cociente de la forma $\frac{am}{bm}$ y hacemos $m = 0$, afecta la forma $\frac{0}{0}$, pero si antes de hacer $m = 0$ suprimimos dicho factor, se reduce el cociente á $\frac{a}{b}$, que es una cantidad determinada cuando a y b no son ceros.

32. *Escolio.* Hemos visto que si $a = a$, $b = b'$, se tiene $ab = a'b'$; pero si a y b crecen sin límites, la igualdad $ab = a'b'$ carece de sentido, porque la propiedad del producto se refiere á *cantidades finitas*. Lo mismo advertimos de la igualdad $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ cuando las cantidades crecen sin límites ó b y b' se anulan.

33. Dividiremos el Álgebra en dos partes, la primera es una continuación de la Aritmética, aunque se distingue de esta ciencia en que estudia la cantidad numérica dejando indeterminada la unidad, por lo cual no se pueden terminar completamente las operaciones, y en los resultados finales se encuentra indicado todo el cálculo que se debe efectuar para obtenerlos. Esto constituye una ventaja inestimable sobre la Aritmética; pero además ofrece el Álgebra otra ventaja, que es estudiar la cantidad y el número bajo su doble aspecto de magnitud y signo. La segunda parte del Álgebra tiene por objeto capital la resolución de ecuaciones, pero sólo estudiaremos los casos más elementales.

La primera parte se puede dividir en dos secciones, cálculo algebráico y comparación algebráica; pero no estudiaremos la segunda sección hasta después de la segunda parte del Algebra, porque su conveniente desarrollo exige algunos conocimientos de la teoría de ecuaciones, y por consiguiente la primera parte sólo comprenderá el cálculo algebráico.

PRIMERA PARTE.

CÁLCULO ALGEBRÁICO.

LIBRO PRIMERO.

LAS OPERACIONES FUNDAMENTALES.

CAPÍTULO PRIMERO

DEFINICIONES.

34. *Expresión algebráica* es un conjunto de cantidades enlazadas por los signos + y —, por ejemplo $4ab - 5cd + 3ac$. Se llama *término* á cada parte separada de las otras por los signos + y —.

Así, los términos de la expresión anterior son $4ab$, $-5cd$, $3ac$.

La expresión que consta de un sólo término se llama *monomio;* si consta de dos, *binomio;* si de tres, *trinomio*, y en general cuando consta de cualquier número de términos, *polinomio*.

Coeficiente es un factor numérico colocado en cada término delante de la parte literal: cuando es la unidad, no se suele escribir.

El coeficiente de $4ab$ es 4 y como en este ejemplo es un número entero, indica que ab está repetida 4 veces por sumando; así, $4ab = ab + ab + ab + ab$.

La cantidad ab, que no lleva coeficiente, es igual á $1ab$.

Exponente es un número que indica las veces que una cantidad se toma por factor. Se escribe á la derecha y á la parte superior de la cantidad: cuando el exponente es la unidad, se suele suprimir.

En la expresión $3a^2x$, el exponente de a es 2 y el de x es 1, por lo cual se ha suprimido.

35. La idea de coeficiente se puede generalizar *considerando como coeficiente de una cantidad al monomio, ó polinomio que la multiplica.*

En la expresión $3a^2x$, el coeficiente de a^2x es 3, y el de x es $3a^2$. En $(2a^2 + b)x$, el coeficiente de x es $2a^2 + b$.

36. *Se llaman términos semejantes los que tienen la misma parte literal, es decir, las mismas letras con los mismos exponentes.*

Así: $2a^2b$, $-7a^2b$, $+5a^2b$,
son términos semejantes, porque tienen la misma parte literal a^2b. Los términos semejantes sólo pueden diferir en los coeficientes y en los signos, por consiguiente, cuando los coeficientes son literales, ciertos términos pueden ser semejantes por relación á una letra y no serlo por relación á todas las letras.

En la expresión $a^2x - 2abx + b^2x$, no hay términos semejantes por relación á todas las letras, pero sí son semejantes por relación á x, considerando como coeficientes, a^2, $-2ab$, b^2.

Por ahora sólo nos ocuparemos de los términos semejantes por relación á todas sus letras.

37. Como cada monomio es el producto de sus factores en los términos semejantes, se puede sacar en factor común la parte literal, que multiplicará á la suma algebráica de los coeficientes.

Así: $3ab^2 - 7ab^2 - 2ab^2 + 4ab^2 = (3 - 7 - 2 + 4)ab^2$

Efectuando la suma algebráica $3 - 7 - 2 + 4$ (número 13) de los coeficientes, se tendrá $3 - 7 - 2 + 4 = -2$, de donde

$$3ab^2 - 7ab^2 - 2ab^2 + 4ab^2 = -2ab^2$$

Luego: *para reducir varios términos semejantes á uno solo, se suman algebráicamente sus coeficientes y el resultado se escribe como coeficiente de la parte literal común á todos ellos.*

Para verificar la adición algebráica de los coeficientes, *se suman separadamente los que tienen el signo + y los que tienen el signo —, afectando cada suma del signo de los sumandos, se restan después ambas sumas y se afecta el resultado del signo de la mayor de las dos.*

Así: $3ab^2 - 7ab^2 - 2ab^2 + 4ab^2 = 7ab^2 - 9ab^2 = -2ab^2$

38. *Valor numérico de un polimonio es el resultado que se obtiene efectuando todas las operaciones indicadas, cuando se sustituye cada letra por un valor numérico.*

Si en la expresióu $a^3b - abc + 2a^2c + b^3 - 2c^3$, hacemos $a = 2$, $b = -3$, $c = -1$, se tendrá:

$$2^3(-3) - 2(-3)(-1) + 2 \,.\, 2^2(-1) + (-3)^3 - 2(-1)^3 = -55$$

39. Un polinomio *es entero, por relación á una letra,* cuando esta letra no entra *en ningún denominador, ni bajo el signo radical.*

Los polinomios $3x^2 + 5x - 7$; $7\frac{a}{b}x^3 - 2\sqrt{c}\,x - 5$, son enteros por relación á x; pero el segundo tiene el coeficiente fraccionario $\frac{a}{b}$, y el radical $2\sqrt{c}$

El polinomio $2x^2 - 6xy + 3y^2 + 4x - 5y + 9$ es entero por relación á sus dos letras x é y.

Grado de un monomio entero, por relación á una letra, es el exponente de esta letra. Grado de un monomio entero, por relación á todas sus letras, es la suma de los exponentes de todas ellas.

El monomio $3a^2bx^2$ es de segundo grado por relación á x, y de quinto grado por relación á todas sus letras.

Un polinomio es homogéneo cuando todos sus términos son del mismo grado.

$3a^2x^2 + 5bx^2 + 6x^2$, es homogéneo y de segundo grado por relación á x.

$a^2 + 2ab + b^2$ es homogéneo y de segundo grado por relación á a y b.

Grado de un polinomio cualquiera es el grado del término más elevado.

El polinomio $5a^3b^2c - 7a^4b + 12a^4$ es heterogéneo y de sexto grado.

Un polinomio está *ordenado* con relación á una letra, *que se llama ordenatriz*, cuando los exponentes de dicha letra *van aumentando ó disminuyendo gradualmente* á partir del primer término.

Ejemplos: 1.° $7 - 5x + 3x^2 - 2x^3 + x^4$

2.° $x^3 - (a + b)x^2 + (a + b)^2x + (a + b)^3$

Un polinomio es *completo* cuando tiene todos los exponentes de la letra ordenatriz y un término en que no entra dicha letra: incompleto, en el caso contrario.

El polinomio $x^4 - 2x^2 + 6x$, es incompleto, pues faltan el término en x^3 y uno que no contenga x.

40. *Un polinomio es fraccionario* por relación á una letra, cuando esta entra como denominador en algún término, pero no bajo el signo radical.

El polimonio $\frac{3}{x} - 4x^2 + 5$ es fraccionario.

41. Un polinomio es *irracional* por relación á una letra cuando ésta entra bajo el signo radical en algún término.

El polinomio $3\sqrt{x} - 2x + 7$ es irracional por relación á x.

CAPÍTULO II.

LAS OPERACIONES FUNDAMENTALES.

I. La adición y la sustracción.

42. En el núm. 12 hemos definido la adición algebráica y ahora sólo nos falta considerar el caso en que los sumandos son monomios y polimonios. *Pero el valor numérico de la suma debe ser igual á la suma algebráica de los valores numéricos de los sumandos; luego la suma de dos ó más polimonios, será el polinomio que se obtenga escribiendo unos á continuación de otros todos los sumandos con los signos que tengan.*

Así: la suma de los polimonios, $a + b - c$, $d - e - f$, $g + h$ será:

$(a+b-c)+(d-e-f)+(g+)h=a+b-c+d-e-f+g+h$

43. Si los sumandos contienen términos semejantes, conviene escribirlos de modo que se correspondan dichos términos para facilitar su reducción.

Ejemplo. Sumar los polinomios, $4a^3 -5a^2b+7ab^2+3b^3$, y $-2a^3+3a^2b+3ab^2-5b^3$, $-ab^2-b^3$.

La operación se dispondrá del modo siguiente:

$$\begin{array}{r}
4a^3-5a^2b+7ab^2+3b^3\\
-2a^3+3a^2b+3ab^2-5b^3\\
-ab^2-b^3\\
\hline
2a^3-2a^2b+9ab^2-3b^3
\end{array}$$

$2a^3-2a^2b+9ab^2$
$-3b^3$

44. En el número 16 hemos definido la sustracción algebráica y hemos visto que para efectuar la operación se escribe el minuento y *á continuación el sustraendo cambiándole el signo.*

Ahora, si el sustraendo es un polinomio, *para cambiarle el signo se cambian de signo todos sus términos.*

Así: para restar los polinomios $a+b-c, d-e-f+g+h$ escribiremos

$(a+b-c)-(d-e-f+g+h)=a+b-c-d+e+f-g-h.$

45. Si los polinomios tienen términos semejantes conviene escribir el sustraendo con los signos cambiados, debajo del minuendo, de modo que se correspondan dichos términos.

Ejemplo. Restar los polinomios, $3a^3-6a^2b+4ab^2-3b^3$ y $3a^3-7a^2b-4b^3$.

Se escribirá el sustraendo, con los signos cambiados, debajo del minuendo, del modo siguiente:

$$\begin{array}{r}
3a^3-6a^2b+4ab^2-3b^3\\
-3a^3+7a^2b\qquad\quad+4b^3\\
\hline
a^2b+4ab^2+\ b^3
\end{array}$$

Los términos $3a^3$ y $-3a^3$ de coeficientes iguales y de signo contrario se destruyen.

II. La multiplicación.

46. En los números 24 y siguientes hemos dado la defi-

nición y propiedades de la multiplicación algebráica y la regla para hallar el signo del producto, y ahora nos ocuparemos de los casos que ocurren en la multiplicación de cantidades enteras, que son: 1.º *Multiplicar dos monomios.* 2.º *Multiplicar un polinomio por un monomio.* 3.º *Multiplicar dos polinomios.*

47. 1.º MULTIPLICAR DOS MONOMIOS.—*El producto de dos monomios es un monomio cuyo signo es + ó —, según que los factores tengan signos iguales ó contrarios, cuyo coeficiente es el producto de los coeficientes y cuya parte literal contiene las letras comunes con exponente igual á la suma de los que tienen en los factores, y las no comunes con el mismo exponente que tienen en el factor en que entren.*

Sean los dos monomios $-4a^2b^2ce$ y $6a^2bd^2e^2$. Su producto indicado será

$$-4a^2b^2ce \times 6a^2bd^2e^2$$

y cambiando el orden de los factores (núm. 24)

$$-4 \,.\, 6a^2a^2b^2bcd^2ee^2$$

sustituyendo el producto indicado $-4 \,.\, 6$, por -24 (número 21) y a^2a^2, b^2b, ee^2, por sus productos efectuados $a^{2+2} = a^4$, $b^{2+1} = b^3$ y $e^{1+2} = e^3$ (Arit. 74), tendremos

$$-4a^2b^2ce \times 6a^2bd^2e^2 = -24a^4b^3cd^2e^3$$

conforme habíamos enunciado.

48. Si los monomios son más de dos, se formará el producto de los dos primeros, lo que resulte se multiplicará por el tercero y así sucesivamente hasta el último.

Ejemplo:

$$3ab^2c \times -4a^3b^2 \times 5cd^3 = -12a^3b^4c \times 5cd^3 = -60a^4b^4c^2d^3$$

Es fácil ver que el producto tiene el signo + si el número de factores negativos es *par* (núm. 23) y el signo — si es *impar*: que el *coeficiente es el producto de los coeficientes*: que los exponentes de las letras *comunes á dos, ó más factores, son las sumas de los que tienen en los factores* y que las letras *no comunes entran en el producto como en los factores.*

49. 2.° MULTIPLICAR UN POLINOMIO POR UN MONOMIO. *Para multiplicar un polinomio por un monomio se multiplican todos los términos del polinomio por el monomio y se suman algebráicamente los productos parciales.*

Sea el polimonio $a + b - c$ y m el monomio por el cual queremos multiplicarle, decimos que

$$(a + b - c)\,m = am + bm - cm.$$

Si el polinomio y el monomio son positivos, el teorema se ha demostrado (Aritmética 57, 58, 247, 248, 268 y 269), luego sólo tenemos que considerar los casos en que el polinomio, el monomio, ó ambos son negativos.

Si el polinomio es negativo, cambiándole de signo se convertirá en positivo y cambiará de signo el producto (núm. 22) pero conservará su valor absoluto; luego volviendo á cambiar de signo el resultado de la multiplicación tendremos el producto pedido.

Siendo $a + b - c$ negativos, $-a - b + c$, será positivo y por consiguiente

$$(-a - b + c)\,m = -am - bm + cm$$

y como este producto es de signo contrario al pedido, cambiando nuevamente se tendrá

$$(a + b - c)\,m = am + bm - cm.$$

De un modo análogo se demuestra el teorema cuando el monomio, ó el monomio y el polinomio son negativos.

50. Conviene observar que como se puede invertir el orden de los factores (núm. 24), la misma regla se sigue para multiplicar un polinomio por un monomio, que un monomio por un polinomio.

51. 3.° MULTIPLICAR DOS POLINOMIOS. *Para multiplicar dos polimonios se multiplican todos los términos del multiplicando por cada uno de los del multiplicador y se suman algebráicamente los productos parciales.*

Sean los polinomios $a + b - c$ y $m - n$. Si efectuamos las operaciones indicadas en el primero y llamamos A al resultado, tendremos

$$(a + b - c)\,(m - n) = \mathrm{A}\,(m - n)$$

pero $A(m-n)$ es igual (núm. 50) á $Am - An$, luego poniendo en vez de A otra vez su valor, resultará:

$$(a+b-c)(m-n)=(a+b-c)\,m+(a+b-c)(-n)$$

lo cual demuestra el teorema.

Efectuando todas las operaciones indicadas, se tiene también

$$(a+b-c)(m-n)=am+bm-cm-an-bn+cn$$

cuya igualdad manifiesta: *que el producto está formado por los productos que se obtienen al multiplicar cada término del multiplicador por cada término del multiplicando, afectando los productos del signo que les corresponda según la regla conocida.*

52. La regla de la multiplicación de un polinomio por un monomio nos enseña también á sacar un factor común á varios términos de un polinomio.

Así, los términos del polinomio $a^2x - 2abx + b^2x$, tienen el factor común x y se podrá escribir

$$a^2x - 2ab\,x + b^2x = (a^2 - 2ab + b^2)x.$$

En algunos casos la operación se efectúa en grupos de términos que resultan después con un factor polinomio común, que permite repetir la operación.

En el polinomio $ab - bc + ad - cd$ los dos primeros términos tienen el factor común b y los dos últimos d, luego será igual á $(a-c)\,b + (a-c)d$, en el cual b y d tienen el factor común $a - c$ y por consiguiente será igual á $(a-c)(b+d)$.

Producto de dos polinomios ordenados.

53. Cuando se han de multiplicar dos polinomios enteros conviene ordenarlos del *mismo modo* por relación á la *misma letra*, escribir el multiplicador debajo del multiplicando, y colocar los productos parciales de cada término del multiplicador por todo el multiplicando, en filas hori-

zontales, cuidando además de que los términos semejantes se correspondan en columnas verticales.

Ejemplo:

$$
\begin{array}{l}
3a^3 - 5a^2b + 4ab^2 - 7b^3 \\
2a^2 + 3ab - 5b^2 \\
\hline
6a^5 - 10a^4b + 8a^3b^2 - 14a^2b^3 \\
\qquad + 9a^4b - 15a^3b^2 + 12a^2b^3 - 21ab^4 \\
\qquad\qquad - 15a^3b^2 + 25a^2b^3 - 20ab^4 + 35b^5 \\
\hline
6a^5 - a^4b - 22a^3b^2 + 23a^2b^3 - 41ab^4 + 35b^5
\end{array}
$$

Cada término contiene una potencia de la letra ordenatríz, cuyo exponente es la suma de los exponentes de sus factores. De aquí resulta:

1.° *Que el producto es un polinomio ordenado del mismo modo que los factores.*

2.° *Que el grado de cada término es la suma de los grados de sus factores y por consiguiente el grado del polinomio producto es la suma de los grados del multiplicando y multiplicador.*

3.° *Que si los factores son homogéneos el producto también lo será.*

4.° *Que el primero y el último término del producto son sin reducción los productos de los dos primeros* y *de los dos últimos términos de los factores*, puesto que si los factores están ordenados por relación á las potencias descendentes de la letra ordenatríz, el primer término del producto contendrá el producto de las dos potencias más elevadas de dicha letra y el último el de las dos menos elevadas; luego ni uno ni otro podrán tener semejantes: lo mismo se demuestra si los factores están ordenados por relación á las potencias descendentes de la letra ordenatríz.

54. El producto de dos polinomios tiene, cuando menos, dos términos, según lo que acabamos de decir, y tendrá sólo dos cuando se destruyan los intermedios, como en el ejemplo siguiente.

$$
\begin{array}{l}
x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4 \\
\quad x - a \\
\hline
x^5 + ax^4 + a^2x^3 + a^3x^2 + a^4x \\
\quad - ax^4 - a^2x^3 - a^3x^2 - a^4x - a^5 \\
\hline
x^5 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - a^5
\end{array}
$$

55. Como ejemplos notables de multiplicación podemos considerar los siguientes:

1.° $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$
2.° $(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
3.° $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$
4.° $(a-b)^3 = (a-b)^2(a-b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
5.° $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Cada uno de los ejemplos anteriores es una *fórmula* que se puede traducir al lenguaje vulgar. La primera y la tercera expresan que: *el cuadrado de un binomio es igual á la suma algebráica del cuadrado del primer término, el doble del producto del primero por el segundo y el cuadrado del segundo.* La segunda y cuarta expresan que: *el cubo de un binomio es igual á la suma algebráica del cubo del primer término, el triplo del cuadrado del primero por el segundo, el triplo del primero por el cuadrado del segundo y el cubo del segundo.* La quinta fórmula expresa que: *el producto de la suma de dos cantidades por su diferencia es igual á la diferencia de los cuadrados de dichas cantidades.*

III. La división.

56. En los números 26 y siguientes se han dado la definición, regla de los signos y las propiedades de la división algebráica; pero antes de aplicarlas á la división de cantidades enteras hallaremos el cociente de dos potencias de una misma cantidad en los diversos casos que pueden ocurrir.

57. *El cociente de dos potencias de una cantidad es otra potencia de la misma cantidad, cuyo exponente es la diferencia de los exponentes.*

Si $m > n$ se tendrá, como en la Aritmética (núm. 102).

$$a^{m-n} \times a^n = a^m \text{ de donde } a^m : a^n = a^{m-n}$$

Si $m=n$, la regla anterior conduce á la forma $a^{m-n} = a^o$

Pero sabemos que $a^m : a^m = 1$, luego debemos admitir

$$a^o = 1$$

Es decir: *Toda cantidad con exponente cero es igual á la unidad.*

Si $m < n$, por ejemplo $n = m + p$, siguiendo la regla anterior tendremos:

$$a^m : a^{m+p} = a^{-p}$$

por otra parte sabemos que el dividendo y el divisor se pueden dividir por una misma cantidad (núm. 28. 4.ª), luego dividiéndolos por a^m se tendrá

$$a^m : a^{m+p} = 1 : a^p$$

lo cual nos conduce á admitir la igualdad

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

Luego: *toda cantidad con exponente negativo es igual á la unidad partida por la misma cantidad con el exponente hecho positivo.*

58. Los casos que ocurren en la división de cantidades enteras son: 1.° *Dividir dos monomios.* 2.° *Dividir un polinomio por un monomio,* 3.° *Dividir dos polinomios.*

59. 1.° DIVIDIR DOS MONOMIOS. El cociente de dos monomios es un monomio, puesto que si fuere un polinomio, multiplicándole por el divisor el producto sería un polinomio y no podría ser igual al dividendo, que en la hipótesis actual es un monomio. El signo del cociente se halla por la regla (núm. 26) aplicable á cantidades algebráicas cualesquiera y por consiguiente á los monomios.

Ahora bien, si siendo A el dividendo y B el divisor, hay un monomio entero que multiplicado por B de por producto A, este monomio será el cociente y tendremos, designándole por C.

$$A = B \times C.$$

Pero en este caso el coeficiente del dividendo debe ser igual al producto de los coeficientes del divisor y del cociente, luego recíprocamente, el coeficiente del cociente debe obtenerse dividiendo los coeficientes de dividendo y divisor. El exponente de cada letra debe ser en el dividendo igual á la suma de los exponentes de la misma letra en divisor y cociente, por consiguiente el exponente de una letra, común á dividendo y divisor, debe ser en el cociente igual á la diferencia de los exponentes de dicha letra en el dividendo y el divisor y las letras que contenga el dividendo y el divisor no, deberán entrar en el cociente con el mismo exponente que en el dividendo.

De estos razonamientos se deduce que para que el cociente de dos monomios sea un monomio entero (*), se necesita que el dividendo contenga todas las letras del divisor con un exponente cuando menos igual al que tengan en el divisor.

Suponiendo que se cumplan estas condiciones: *El cociente de dos monomios es un monomio cuyo signo es +, ó —, según que el dividendo y el divisor tengan signos iguales ó contrarios, cuyo coeficiente se obtiene dividiendo los coeficientes del dividendo y el divisor y cuya parte literal contiene las letras comunes á ambos términos, con un exponente igual á la diferencia entre el exponente del dividendo y el del divisor y las letras que sólo entran en el dividendo, con el mismo exponente que en este término.*

Ejemplos. 1.° $-12a^2b^3c^4d^2e^3 : 4ab^2c^4e^3 = -3abd^2$.

2.° $-7a^5b^3de^2 : -5a^4de = +\frac{7}{5}ab^3e$

60. La división de dos monomios no da cociente entero ó, como se suele decir, no es exacta, cuando en el divisor hay alguna letra que no entra en el dividendo ó entra con menor exponente. En este caso se pueden suprimir los factores comunes á dividendo y divisor (núm. 28. 4.ª)

Ejemplo. $-5a^6bd^2f : 15a^3b^2ce^2 = -a^3d^2f : 3bce^2$.

61. 2.° DIVIDIR UN POLINOMIO POR UN MONOMIO. El co-

(*) Suponemos que el coeficiente de un monomio entero puede no ser entero.

ciente de un polinomio por un monomio es un polinomio, porque si fuera un monomio su producto por el divisor sería otro monomio y no podría ser igual al dividendo. Ahora si se multiplica el polinomio cociente por el monomio divisor, el producto será igual al polinomio dividendo; pero esta multiplicación se efectúa multiplicando por el divisor los diferentes términos del cociente (núm. 49) y los productos serán iguales á los términos del dividendo, luego deduciremos la siguiente:

REGLA: *Para dividir un polinomio por un monomio se dividen todos los términos del polinomio por el monomio, y se suman algebráicamente los cocientes obtenidos.*

Ejemplo:

$$(27a^3b_4c^3 - 12a^2b^3d + 15a^4b^5cd^2) : 3a^2b^2 = 9ab^2c^3 - 4bd + 5a^2b^3cd^2$$

Es evidente que el cociente será un polinomio entero, ó como suele decirse, la división será exacta, si todos los términos del dividendo son divisibles por el divisor y no lo será en el caso contrario.

62. 3.ª DIVIDIR DOS POLINOMIOS. El cociente de dos polinomios enteros no siempre es un polinomio entero, del mismo modo que no es siempre entero, el cociente de dos números enteros. Cuando el cociente de dos polinomios es entero, la división es exacta y el dividendo es divisible por el divisor.

Representemos por A el polinomio dividendo, por B el polinomio divisor y por C el cociente, suponiendo la división exacta, tendremos, por definición

$$A = B.C$$

Hagamos, para fijar ideas

$$A = 6x^5 - x^4 - 22x^3 + 23x^2 - 41x + 35$$

$$B = 3x^3 - 5x^2 + 4x - 7$$

que son dos polinomios enteros y ordenados por relación á x y supondremos que el cociente desconocido es también un polinomio entero en x.

Ahora bien, el primer término del producto de dos polinomios es, sin reducción, el producto de los dos primeros términos del multiplicando y multiplicador, (núm. 53) luego el primer término del dividendo es, sin reducción, el producto de los dos primeros términos del divisor y del cociente y por tanto si se divide el primer término del dividendo por el primero del divisor, se obtendrá el primer término del cociente. En nuestro ejemplo será el término más elevado porque los polinomios A y B están ordenados por relación á las potencias descendentes de x. Dividiendo, pues, $6x^5$ por $3x^3$, el cociente, $2x^2$, será el primer término del cociente.

Multipliquémosle por todo el divisor, y restemos del dividendo el producto que se obtiene, que es, $6x^5 - 10x^4 + 8x^3 - 14x^2$, nos resultará un resto, que designaremos por R_1, y que será

$R_1 = 9x^5 - x^4 - 22x^3 + 23x^2 - 41x + 35 - (6x^5 - 10x^4 + 8x^3 - 14x^2)$

y efectuando la reducción de términos semejantes.

$R_1 = 9x^4 - 30x^3 + 37x^2 - 41x + 35$

El resto R_1 debe contener el producto del divisor por todos los términos del cociente excepto el primero, luego su primer término será, sin reducción el producto del primer término del divisor, por el segundo término del cociente (el más elevado después del primero) y por consiguiente se obtendrá dividiendo $9x^4$ por $3x^3$: luego el segundo término del cociente será $3x$.

Multiplicaremos este término por todo el divisor y el producto, que es, $9x^4 - 15x^3 + 12x^2 - 21x$ le restaremos de R_1 y obtendremos el segundo resto, que designaremos por R_2, y que será

$R_2 = 9x^4 - 30x^3 + 37x^2 - 41x + 35 - (9x^4 - 15x^3 + 12x^2 - 12x)$

y reduciendo términos semejantes

$$R_2 = -15x^3 + 25x^2 - 20x + 35$$

que contendrá el producto del divisor por todos los términos del cociente excepto los dos primeros. Dividiendo $-15x^3$, primer término de R_2, por $3x^3$ obtendremos -5 que será el tercer término del cociente. Procediendo con él como con los dos anteriores se hallará un tercer resto

$R_3 = -15x^3 + 25x^2 - 20x + 35 - (-15x^3 + 25x^2 - 20x + 35) = 0$

Como este resto es cero la operación estará terminada y el cociente será

$$C = 2x^2 + 3x - 5$$

El cuadro de las operaciones se dispone así:

$$\begin{array}{ll|l}
\text{A.}\;.\;.\;.\;. & 6x^5 - x^4 - 22x^3 + 23x^2 - 41x + 35 & B = 3x^3 - 5x^2 + 4x - 7 \\
\cline{3-3}
-\text{B}.\,2x^2 .. & -6x^5 + 10x^4 - 8x^3 + 14x^2 & Q = 2x^2 + 3x - 5 \\
\cline{2-2}
\text{R}_1 \ldots\ldots & 9x^4 - 30x^3 + 37x^2 - 41x + 35 & \\
-\text{B}.\,3x \ldots\ldots & -9x^4 + 15x^3 - 12x^2 + 21x & \\
\cline{2-2}
\text{R}_2 \ldots\ldots & -15x^3 + 25x^2 - 20x + 35 & \\
-\text{B}. -5 \ldots\ldots & 15x^3 - 25x^2 + 20x - 35 & \\
\cline{2-2}
\text{R}_3 \ldots\ldots & o &
\end{array}$$

En la práctica de la división se efectuan á un tiempo la multiplicación de cada término del cociente por el divisor y la sustracción, para lo cual basta cambiar el signo á cada producto parcial que se obtenga, y se escribe debajo de su semejante para que la reducción sea más facil. El producto del primer término del divisor por cada uno de los términos del cociente se destruye con el primer término del dividendo correspondiente por lo cual es inútil escribirle.

Ejemplo:

$$\begin{array}{r|l}
6a^5 - a^4b - 22a^3b^2 + 23a^2b^3 - 41ab^4 + 35b^5 & 3a^3 - 5a^2b + 4ab^2 - 7b^3 \\
\cline{2-2}
+10a^4b - 8a^3b^2 + 14a^2b^3 & 2a^2 + 3ab - 5b^2 \\
\cline{1-1}
9a^4b - 30a^3b^2 + 37a^2b^3 - 41ab^4 + 46b^5 & \\
+15a^3b^2 - 12a^2b^3 + 21ab^4 & \\
\cline{1-1}
-15a^3b^2 + 25a^2b^3 - 20ab^4 + 35b^5 & \\
-25a^2b^3 + 20ab^4 - 35b^5 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

63. Cuando el cociente de dos cantidades enteras (monomios, ó polinomios) es entero, *su grado es igual á la diferencia de los grados del dividendo y divisor*. Puesto que por ser el dividendo el producto del divisor por el cociente su grado será igual á la suma de los grados de sus factores (núm. 52. 2.°)

Si dos factores son homogéneos su producto es homogéneo, (núm.53. 3.°) luego cuando la división es exacta, *si el* *dividendo y divisor son polinomios homogéneos tambien lo será el cociente.* (*)

64. Cuando el dividendo y el divisor están ordenados por relación á las potencias descendentes de una letra, *el exponente de dicha letra en el primer término de cada resto es inferior, cuando menos en una unidad, al que tiene en el primer término del resto, ó dividendo anterior.* Porque el primer término de un dividendo cualquiera, que es el más elevado, se destruye necesariamente con el producto del primer término del divisor por el término que se considera, del cociente.

65. El cociente de dos polinomios es entero cuando el primer término del dividendo y los de cada uno de los restos sucesivos son divisibles por el primero del divisor y al cabo de cierto número de divisiones se llega al resto cero. Luego debe verificarse además que: *el último término del dividendo sea exactamente divisible por el último término del divisor.*

66. Cuando el divisor tenga una letra que no entre en el dividendo, no se necesita intentar la operación para convencerse de su imposibilidad, si el cociente ha de ser entero.

Cuando no se conozca á primera vista si el cociente será entero, se podrá intentar la operación, y para fijar ideas supondremos que se trate de dos polinomios ordenados según las potencias *descendentes* de una letra. (**)

En este caso los grados de los restos y de los términos del cociente van *disminuyendo* por relación á dicha letra, luego si llegamos á un resto menos elevado que el divisor y distinto de cero, podremos afirmar que la división no se-

(*) El teorema es cierto aunque la división no sea exacta, pero la demostración no es propia de esta obra.

(**) Si los polinomios están ordenados por relación á las potencias ascendentes de una letra los grados de los términos del cociente y de los primeros términos de los restos irán creciendo y podría prolongarse indefidamente la operación. Sin embargo, para que la división sea exacta se necesita que el último término del cociente sea el mismo que se obtendría dividiendo los dos últimos términos del dividendo y del divisor (núm. 65) luego si llegamos á un término del cociente, cuyo exponente sea la diferencia entre los de los dos últimos términos citados sin que el resto correspondiente sea cero, podemos afirmar que la división no es exacta.

rá exacta, porque ya el primer término del resto no es divisible por el primero del divisor.

Ejemplo:

$$\begin{array}{l|l}
x^7+8x^6+18x^5+13x^4+2x^3+x^2+3x+2 & x^6+3x^5+2x^4 \\ \cline{2-2}
\quad -3x^6- 2.^5 & x+5 \\ \cline{1-1}
\quad 5x^6+16x^5+13x^4+2x^3+x^2+3x+2 & \\
\qquad 15x^5-10x^4 & \\ \cline{1-1}
\qquad x^5+\ 3x^4+2x^3+x^2+3x+2 &
\end{array}$$

El primer término de este último resto no es divisible por x^6 porque es menos elevado, luego la división no es exacta.

67. Cuando la división no es exacta, pero el primer término del dividendo es divisible por el primero del divisor, se puede efectuar la división hasta hallar el término del cociente cuyo grado sea la diferencia de los grados de los últimos términos del dividendo y divisor; á dicho término le llamaremos último término del cociente entero. Esto supuesto demostraremos el teorema siguiente:

68. *El cociente completo de una división se compone del cociente entero más una fraccion cuyo numerador es el resto y el denominador el divisor.*

En efecto, si designamos por A el dividendo B el divisor C el cociente y R el resto, es evidente que el resto proviene de restar del dividendo el producto del divisor por todos los términos obtenidos del cociente, luego se tendrá

$$A-B\,.\,C=R$$

añadiendo B . C á los dos miembros

$$A=B\,.\,C+R$$

y dividiendo por B se tendrá

$$\frac{A}{B}=C+\frac{R}{B}$$

cuya igualdad demuestra el teorema

En el ejemplo del núm. 66 tendremos.

$$\frac{x^7+8x^6+18x^5+13x^4+2x^3+x^2+3x+2}{x^6+3x^5+2x^4}=x+5+\frac{x^5+3x^4+2x^3+x^2+3x+2}{x^6+3x^5+2x^4}$$

69. De lo expuesto en los párrafos anteriores se deduce la siguiente:

REGLA. *Para dividir dos polinomios ordenados del mismo modo por relación á una letra, se divide el primer término del dividendo por el primero del divisor y se tendrá el primer término del cociente; se multiplica este por todo el divisor y el producto se resta del dividendo: el primer término del resto ordenado se divide por el primero del divisor y se tendrá el segundo término del cociente, que se multiplica por todo el divisor: el producto se resta del primer resto y se obtendrá el segundo resto: con este resto se procede como con el primero y se continúa la operación hasta obtener el último término del cociente.*

Si el resto correspondiente al último término del cociente es cero, la división es exacta: en el caso contrario ya hemos dicho, en el núm. anterior, como se puede completar el cociente.

Consecuencias de la división.

70. TEOREMA. *Cuando se divide un polinomio entero en x y ordenado por relación á las potencias descendentes de x, por el binomio $x - a$, el resto de la división es el mismo polinomio sustituyendo en vez de x, a.*

Sea el polinomio propuesto

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A^2 x^{m-2} + \ldots\ldots + A_{m-1} x + A_m. \quad (*)$$

Como el divisor $x - a$ es de primer grado, la división se hará hasta llegar á un resto que no contenga x: luego, *si este resto existe es independiente* de x. Designemos por C el cociente y por R el resto de la división y tendremos (núm. 68).

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = (x - a) C + R$$

Esta igualdad se verifica para todos los valores que se atribuya á x y por consiguiente si hacemos $x = a$ tendremos:

$$A_0 a^m + A_1 a^{m-1} + A_2 a^{m-2} + \ldots\ldots + A_{m-1} a + A_m = (a - a) C + R$$

pero $(a-a)C = 0$, luego el primer miembro es el polinomio propuesto sustituyendo en vez de x al valor a, y el segundo miembro el resto R, conforme queríamos demostrar.

(*) Los puntos indican los términos intermedios entre el tercero y el penúltimo.

Si la sustitución de x por a, anula el polinomio el resto será cero y por consiguiente la división *será exacta*.

Recíprocamente si la división es exacta el resto $R=0$, luego sustituyendo x por a el polinomio se anulará.

De esto se deduce que: *la condición necesaria y suficiente para que un polinomio entero, y ordenado en x, sea divisible por $x-a$, es que el polinomio se anule haciendo $x=a$.*

71. *El binomio x^m-a^m es divisible por $x-a$.*

En efecto, el resto es el resultado de hacer en el dividendo $x=a$ (núm. 70) luego el resto será $a^m-a^m=0$.

Hallemos el cociente de x^m-a^m por $x-a$.

$$\begin{array}{ll|l}
 & x^m \quad -a^m & x-a \\ \cline{3-3}
\text{Primer resto} & a\,x^{m-1}-a^m & x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\ldots+a^{m-2}x+a^{m-1} \\
\text{Segúndo resto} & a^2x^{m-2}-a^m & \\
 & \cdots\cdots\cdots & \\
 & \cdots\cdots\cdots & \\
\text{penúltimo resto} & a^{m-1}x-a^m & \\
\text{último resto} & a^m \quad -a^m=0 &
\end{array}$$

El cociente es del grado $m-1$; sus términos son todos positivos; los exponentes de x van disminuyendo y los de a aumentando, de unidad en unidad, hasta el último término, que es a^{m-1} y el último resto es cero; luego la división es exacta. Tendremos pues

$$\frac{x^m-a^m}{x-a}=x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}\ldots\ldots a^{m-2}x+a^{m-1} \qquad (1)$$

Ejemplo: $$\frac{x^6-a^6}{x-a}=x^5+ax^4+a^2x^3+a^3x^2+a^4x+a^5$$

72. *El binomio x^m+a^m no es divisible por $x-a$*

En efecto, el resto es (núm. 70) $a^m+a^m=2a^m$. En cuanto al cociente entero es el mismo de la división anterior, como lo prueba la identidad

$$\frac{x^m+a^m}{x-a}=\frac{x^m-a^m}{x-a}+\frac{2a^m}{x-a}$$

luego se tendrá

$$\frac{x^m+a^m}{x-a}=x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\ldots+a^{m-2}x+a^{m-1}+\frac{2a^m}{x-a} \quad (2)$$

Ejemplo: $$\frac{x^5+a^5}{x-a}=x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4$$

73. *El binomio x^m-a^m es divisible por $x+a$ si m es par, y no lo es si m es impar, dejando por resto en este caso $-2a^m$.*

En efecto, $x+a=x-(-a)$, luego el cociente se obtendrá sustituyendo en la igualdad (1) en vez de a, $-a$ y el resto será el resultado de sustituir $(-a)$ en vez de x en el binomio x^m-a^m; luego el resto será $(-a)^m-a^m$.

Pero si m es par, el número de factores negativos de $(-a)^m$ es par y el resultado será positivo (núm. 23), es decir, $(-a)^m=a^m$, luego en este caso el resto será cero: y si m es impar $(-a)^m$ será negativo (núm. 23) é igual á $-a^m$; luego el resto será $-a^m-a^m=-2a^m$. Tendremos, pues

$$\frac{x^m-a^m}{x+a}=x^{m-1}-ax^{m-2}+a^2x^{m-3}-\ldots\pm a^{m-1}+\frac{(-a)^m-a^m}{x+a} \quad (3)$$

Los términos que contienen potencias pares de a son positivos, los que contienen potencias impares negativos, luego son alternativamente positivos y negativos.

Ejemplos. 1.° $$\frac{x^6-a^6}{x+a}=x^5-ax^4+a^2x^3-a^3x^2+a^4x-a^5$$

2.° $$\frac{x^5-a^5}{x+a}=x^4-ax^3+a^2x^2-a^3x+a^4-\frac{2a^5}{x+a}$$

74. *El binomio x^m+a^m es divisible por $x+a$, si m es impar, y no lo es cuando m es par, dejando en este caso por resto $2a^m$.*

Del mismo modo que en el caso anterior se deduce

$$\frac{x^m+a^m}{x+a}=x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}-\ldots+a^{m-1}+\frac{(-a)^m+a^m}{x+a} \quad (4)$$

Ejemplos. 1.° $$\frac{x^5+a^5}{x+a}=x^4-ax^3+a^2x^2-a^3x+a^4$$

2.° $$\frac{x^4+a^4}{x+a}=x^3-ax^2+a^2x-a^3+\frac{2a^4}{x+a}$$

LIBRO II.

LAS FRACCIONES ALGEBRÁICAS.

CAPÍTULO PRIMERO

CÁLCULO DE LAS FRACCIONES.

I. División y propiedades de las fracciones.

75. *Fracción algebráica es el cociente indicado de dos cantidades. El dividendo se llama numerador, el divisor denominador y ambos juntos términos de la fracción.*

Las fracciones algebráicas se escriben como las aritméticas, pero son expresiones mucho más generales, porque sus términos pueden ser enteros, fraccionarios, ó inconmensurables, y en todos estos casos positivos ó negativos.

Las propiedades de las fracciones aritméticas son extensivas á las fracciones algebráicas, porque son las mismas de los cocientes que ya se demostraron (núm. 28) y ahora no tendremos más que cambiar las palabras *dividendo, divisor* y *cociente*, en *numerador*, *denominador* y *fracción*.

Por otra parte, si quisiéramos demostrarlas nuevamente, no tendríamos más que repetir lo dicho al tratar de las razones geométricas (Arit., 328).

76. Como los dos términos de una fracción se pueden dividir por una misma cantidad, se podrán suprimir los factores comunes á numerador y denominador cuando los haya.

Ejemplos. $\frac{6a^2b}{4abc}=\frac{3a}{2c}$, $\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2}=\frac{(a-b)(a-b)}{(a-b)(a+b)}=\frac{a-b}{a+b}$

en el primer ejemplo el factor común suprimido es el monomio $2ab$, en el segundo el binomio $a-b$.

El método general para simplificar una fracción algebráica es hallar el máximo común divisor de sus dos términos y dividir por él. Cuando los términos son monomios, el *m. c. d* se halla como si se tratase de números descompuestos en factores primos (Arit., 170); pero si los términos son polinomios, la operación de hallar el *m. c. d.* no es del dominio de estos elementos y sólo se halla en algunos casos particulares, análogos al segundo de los ejemplos anteriores.

77. Los términos de una fracción se pueden multiplicar por una misma cantidad sin que la fracción se altere, por consiguiente varias fracciones se podrán reducir á un común denominador por los mismos procedimientos que en Aritmética.

Según esto, habrá un método que consistirá en simplificar las fracciones, si es posible, y *multiplicar los dos términos de cada una por el producto de los denominadores de las demás.* (Arit. 193)

Ejemplo. Reducir á un común denominador las fracciones

$$\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}.$$

Multiplicando los dos términos de la primera por $b'b''$, los de la segunda por bb'' y los de la tercera por bb' resultará

$$\frac{a}{b} = \frac{ab'b''}{bb'b''}, \frac{a'}{b'} = \frac{a'bb''}{bb'b''}, \frac{a''}{b''} = \frac{a''bb'}{bb'b''}$$

El segundo método consistirá *en simplificar las fracciones, hallar el mínimo común múltiplo de los denominadores y multiplicar los dos términos de cada fracción por el cociente de dividir, dicho mínimo común múltiplo, por su denominador.*

Este método general no le podemos aplicar sino en los casos en que los términos de las fracciones se puedan descomponer en factores primos.

Ejemplo. Reducir á un común denominador las fracciones

$$\frac{m}{3c^2d(a+b)} \quad \frac{n}{6c^2(a-b)} \quad \frac{p}{4de(a^2-b^2)}$$

El mínimo común múltiplo de los denominadores es $12c^2de(a^2-b^2)$. Los cocientes de dividirle por los denominadores de las fracciones son $4e(a-b)$, $2de(a+b)$, $3c^2$, luego tendremos:

$$\frac{m}{3c^2d(a+b)} = \frac{4em(a-b)}{12c^2de(a^2-b^2)}, \quad \frac{n}{6c^2(a-b)} = \frac{2den(a+b)}{12c^2de(a^2-b^2)}$$

$$\frac{p}{4de(a^2-b^2)} = \frac{3c^2p}{12c^2de(a^2-b^2)}$$

II. Las operaciones con las fracciones.

78. *Para sumar ó restar fracciones de igual denominador se suman ó restan los numeradores y se parte el resultado por el denominador común: si no tienen igual denominador se reducen previamente á un común denominador.*

Se demuestra como en la Aritmética (núm. 329).

Ejemplos. 1.° Sumar las fracciones

$$\frac{m}{3c^2d(a+b)}, \quad \frac{n}{6c^2(a-b)}, \quad \frac{p}{4de(a^2-b^2)},$$

Reduciendo á un común denominador (núm. 77) tendremos:

$$\frac{m}{3c^2d(a+b)} + \frac{n}{6c^2(a-b)} + \frac{p}{4de(a^2-b^2)}$$

$$= \frac{4em(a-b)}{12c^2de(a^2-b^2)} + \frac{2den(a+b)}{12c^2de(a^2-b^2)} + \frac{3c^2p}{12c^2de(a^2-b^2)}$$

$$= \frac{4em(a+b) + 2den(a+b) + 3c^2p}{12e^2de(a^2-b^2)}$$

2.° Restar las fracciones $\frac{m}{3c^2d(a+b)}$, $\frac{n}{6c^2(a-b)}$

Reduciendo á un común denominador

$$\frac{m}{3c^2d(a+b)} - \frac{n}{6c^2(a-b)} = \frac{2(a-b)m}{6c^2d(a^2-b^2)} - \frac{d(a+b)n}{6c^2d(a^2-b^2)}$$

$$= \frac{2(a-b)m - d(a+b)n}{6c^2d(a^2-b^2)}$$

Si el sustraendo es un polinomio, se cambian los signos á todos sus términos.

79. *Para multiplicar dos ó más fracciones se forma el producto de los numeradores y se parte por el producto de los denominadores.*

Se demuestra como en la Aritmética (núm. 330).

Ejemplo. Multiplicar las fracciones $\frac{a-b}{a+b}, \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}$

$$\frac{a-b}{a+b} \times \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} = \frac{(a-b)(a+b)^2}{(a+b)(a^2+b^2)}$$

y simplificando

$$\frac{a-b}{a+b} \times \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} = \frac{(a-b)(a+b)}{a^2+b^2}$$

80. *Para dividir dos fracciones, se multiplica el dividendo por la fracción divisor invertida.*

Se demuestra como en la Aritmética (núm. 333).

Ejemplo. Dividir las fracciones $\frac{a+b}{a-b}$ y $\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}$

$$\frac{a+b}{a-b} : \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} = \frac{(a+b)(a^2+b^2)}{(a-b)(a+b)^2}$$

y simplificando

$$\frac{a+b}{a-b} : \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$$

CAPÍTULO II.

CÁLCULO DE LAS CANTIDADES CON EXPONENTES NEGATIVOS.

81. *El producto de dos potencias, de exponente negativo ambas, ó una de exponente positivo y otra negativo, de una cantidad, es otra potencia de la misma cantidad, cuyo exponente es la suma algebráica de los exponentes de los factores.*

Sean las cantidades a^{-m} y a^{-n} tendremos (núm. 57)

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \text{ y } a^{-n} = \frac{1}{a^{-n}}$$

multiplicando ordenadamente estas igualdades

$$a^{-m} \times a^{-n} = \frac{1}{a^m} \times \frac{1}{a^n}$$

aplicando al segundo miembro la regla de multiplicar dos fracciones, será igual á $\frac{1}{a^{m+n}}$ y poniendo esta última bajo la forma de cantidad entera con exponente negativo, será a^{-m-n}; luego

$$a^{-m} \times a^{-n} = a^{-m-n}$$

Si una de las cantidades tiene exponente positivo, tendremos:

$$a^{-m} \times a^{n} = \frac{1}{a^{m}} \times a^{n} = \frac{a^{n}}{a^{m}}$$

y aplicando á la última la regla de la división de dos potencias de exponente positivo (núm. 57), será igual á a^{n-m} ó bien a^{-m+n} de donde

$$a^{-m} \times a^{n} = a^{-m+n}$$

Del mismo modo $a^{m} \times a^{-n} = a^{m-n}$

82. *El cociente de dos potencias, de exponente negativo ambas, ó una de exponente positivo y otra negativo, de una cantidad, es otra potencia de la misma cantidad, cuyo exponente es la diferencia algebráica entre los exponentes del dividendo y del divisor.*

Dividiendo las igualdades $a^{-m} = \frac{1}{a^{m}}$, $a^{-n} = \frac{1}{a^{n}}$ tendremos:

$$a^{-m} : a^{-n} = \frac{1}{a^{m}} : \frac{1}{a^{n}} = \frac{a^{n}}{a^{m}}.$$

pero $\frac{a^{n}}{a^{m}} = a^{n-m}$, ó bien igual á a^{-m+n}, luego resultará

$$a^{-m} : a^{-n} = a^{-m+n}$$

conforme á la regla, enunciada puesto que para restar el exponente $-n$ hay que cambiarle el signo.

Del mismo modo se obtiene por sucesivas transformaciones

$$a^{-m} : a^{n} = \frac{1}{a^{m}} : a^{n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-m-n}$$

$$a^{m} : a^{-n} = a^{m} : \frac{1}{a^{n}} = \frac{a^{m+n}}{1} = a^{m+n}$$

83. Cuando se efectúa la división de dos polinomios ordenados por relación á las potencias descendentes de la letra ordenatríz y el cociente no es exacto, se da por terminada la operación cuando se llega á un resto menos elevado que el divisor; pero haciendo uso de los exponentes negativos se puede continuar la operación y en muchos casos se llega al resto cero.

Ejemplo;

$$\begin{array}{r|l}
a^7+8a^6+18a^5+13a^4+2a^3+a^2+3a+2 & a^6+3a^5+2a^4 \\ \cline{2-2}
-3a^6-2a^5 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & a+5+a^{-1}+a^{-4} \\ \cline{1-1}
5a^6+16a^5+13a^4+2a^3+a^2+3a+2 & \\
-15a^5-10a^4 \qquad\qquad\qquad\qquad & \\ \cline{1-1}
\text{Resto del cociente entero} \quad a^5+3a^4+2a^3+a^2+3a+2 & \\
-3a^4-2a^3 \qquad\qquad\quad & \\ \cline{1-1}
a^2+3a+2 & \\
-3a-2 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Conviene advertir que el último término del cociente es el cociente de los dos últimos términos del dividiendo y divisor, así $a^{-4}=2:2\,a^4$. Por consiguiente si cuando se llegue á un término en que la letra ordenatríz tenga por exponente la diferencia entre los exponentes de los últimos términos del dividendo y divisor no se obtiene el resto cero, la operación se prolongará indefinidamente.

Ejemplo:

$$\begin{array}{r|l}
a & a-b \\ \cline{2-2}
+b & 1+a^{-1}b+a^{-2}b^2+a^{-3}b^3+\ldots \\
+a^{-1}b & \\
+a^{-2}b^2 & \\
+\ldots &
\end{array}$$

Desde el segundo término del cociente los exponentes de a son negativos y van creciendo, negativamente, de unidad en unidad, mientras que los de b son positivos y crecen de unidad en unidad; pero es evidente que la operación no se terminará nunca. Este resultado debíamos preverle, porque siendo el dividendo un monomio, el cociente no puede ser ni un monomio ni un polinomio.

LIBRO III.

LAS POTENCIAS Y RAÍCES DE LAS CANTIDADES ALGEBRÁICAS.

CAPÍTULO PRIMERO.

POTENCIAS Y RAÍCES DE LOS MONOMIOS.

I. Potencias de los monomios.

84. *Potencia de una cantidad es*, como en Aritmética, *el producto que resulta de tomarla varias veces por factor.* El número de veces que se la toma por factor se llama *exponente* y se escribe á la derecha y á la parte superior de la cantidad. Así la *m-ésima* potencia de a es a^m.

85. *Las potencias de grado par, de cualquiera cantidad, son positivas, las de grado impar, del signo de la cantidad.*

Es una consecuencia de la regla de los signos (número 23). (*)

Así, $(\pm a)^{2m} = + a^{2m}$; $(\pm a)^{2m+1} = \pm a^{2m+1}$

86. *La potencia de un producto es igual al producto de las potencias del mismo grado de sus factores.*

La misma demostración que en la Aritmética (núm. 76)

Así, $(abc)^n = (abc)(abc)... = aaa... bbb... ccc... = a^n b^n c^n$

87. *La potencia de un cociente es igual al cociente de las potencias del mismo grado de sus términos.*

Arit. 232.

$$\text{Así, } \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}..... = \frac{aaa...}{bbb...} = \frac{a^m}{b^m}$$

Este teorema se suele enunciar así: *para elevar una fracción á una potencia se elevan numerador y denominador á dicha potencia*

(*) La forma $2m$ expresa cualquier número par, puesto que $2m$ es múltiplo de 2, y la forma $2m+1$ es un número impar cualquiera.

88. *La potencia de una potencia es otra potencia, de la misma cantidad, cuyo exponente es el producto de los exponentes.*

Arit. 75.

Así, $(a^n)^m = a^n a^n a^n \ldots\ldots = a^{n+n+n\ldots} = a^{nm}$

Del mismo modo se demuestra en general

$$((a^m)^n)^{p\ldots} = a^{mnp\ldots}$$

89. Todos estos teoremas son ciertos cuando los exponentes son negativos, y se demuestran reduciendo á la forma fraccionaria.

$$\text{Así, } (a^n)^{-m} = \frac{1}{(a^n)^m} = \frac{1}{a^{nm}} = a^{-nm}$$

$$(a^{-n})^m = \frac{1}{(a^n)^m} = \frac{1}{a^{nm}} = a^{-nm}$$

$$(a^{-n})^{-m} = \left(\frac{1}{a^n}\right)^{-m} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^n}\right)^m} = \frac{1}{\frac{1}{a^{nm}}} = a^{nm}$$

90 *Para elevar un monomio á una potencia se pone el signo $+$, si la potencia es de grado par, y el signo de la cantidad si es de grado impar; se eleva el coeficiente á dicha potencia y se multiplican los exponentes de sus letras por el de la potencia.*

Es una consecuencia inmediata de la regla de los signos (núm. 85) y de los teoremas (núms. 86 y 88).

Así, $(-3a^2bc^3d^4)^3 = -3^3(a^2)^3b^3(c^3)^3(d^4)^3 = -27a^6b^3c^9d^{12}$

Si el monomio es fraccionario se aplicarán los teoremas (núms. 87 ó 89).

$\left(\frac{-4b^2}{ac^2}\right)^2 = +\frac{16b^4}{a^2c^2}$, ó bien $(-4a^{-1}b^2c^{-2})^2 = +16a^{-2}b^4c^{-4}$

II.—Raíces de los monomios.—Cálculo de radicales.

91. *Se llama raíz m-ésima de una cantidad á otra cantidad que elevada á la m-ésima potencia reproduce la primera.*

La raíz *m-ésima*, ó del grado *m*, recibe el nombre de *cantidad radical* y se indica, como ya sabemos, por $\sqrt[m]{a}$, en la cual el número m se llama índice de la raíz, ó del radical.

92. *La cantidad* a^{2m} *tiene dos raíces del grado m, una positiva y otra negativa.*

En efecto, tenemos (núm. 38)

$$(\pm a)^{2m} = a^{2m}$$

de donde, según la definición de raíz, resultará:

$$\sqrt{a^{2m}} = \pm a$$

La cantidad $\pm a^{2m+1}$ *tiene una raíz del grado* $2m+1$, que será del mismo signo que la cantidad a^{2m+1}.

En efecto, se tiene

$$(\pm a)^{2m+1} = \pm a^{2m+1}$$

luego en virtud de la definición de raíz

$$\sqrt[2m+1]{\pm a^{2m+1}} = \pm a$$

Las raíces de grado par de una cantidad negativa no son ni positivas ni negativas.

Porque una cantidad positiva ó negativa elevada á una potencia de grado par da un resultado positivo. Las cantidades positivas y negativas se llaman *cantidades reales.* Por oposición á éstas, las raíces de grado par de las cantidades negativas se llaman *imaginarias;* hoy se designan también con el nombre de cantidades *complejas.* (*)

93. En lo que va á seguir supondremos que las cantidades subradicales son positivas y sólo nos ocuparemos de los valores positivos de los radicales, á los cuales se designa con el nombre de *radicales aritméticos.* Por consiguiente como cada cantidad positiva tiene una sola raíz aritmética, si suponemos que $\sqrt[m]{a} = \alpha$, es la raíz aritméti-

(*) El nombre de cantidades complejas es más propio, porque en algunos casos tienen existencia real y se pueden interpretar. En el Álgebra superior se demuestra que toda cantidad positiva, negativa ó compleja, tiene m raíces del grado m y que todas son imaginarias á excepción de una ó dos, en algunos casos.

ca, razonaremos como si el primer miembro de esta igualdad tuviese un solo valor.

94. *Si la cantidad subradical tiene un exponente múltiplo del indice de la raíz, se extrae la raíz dividendo el exponente de la cantidad subradical por el indice de la raíz.*

Decimos que

$$\sqrt[m]{a^{mn}} = a^n$$

En efecto, se tiene $(a^n)^m = a^{mn}$ (núm. 88), pero como admitimos que $\sqrt[m]{a^{mn}}$ tiene un solo valor y su potencia del grado m es por definición a^{mn}, las dos cantidades $\sqrt[m]{a^{mn}}$ y a^n serán iguales, por tener la misma potencia de grado m.

Ejemplos: $\sqrt[m]{a^m} = a$, $\sqrt[m]{a^{2m}} = a^2$, $\sqrt[3]{a^6} = a^2$.

95. Adición y sustracción de radicales. La adición y sustracción de radicales están sometidas á las mismas reglas que la adición y sustracción ordinarias. En cuanto á las simplificaciones que pueden hacerse en los resultados, casi siempre dependen de las operaciones que vamos á estudiar.

96. Multiplicación de radicales del mismo índice. *Para multiplicar radicales del mismo indice se multiplican las cantidades subradicales y el producto se escribe bajo el indice común.*

Decimos que

$$\sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b} \times \sqrt[m]{c} = \sqrt[m]{abc}. \qquad (1)$$

En efecto, hemos demostrado (núm. 86) que la potencia de un producto es igual al producto de las potencias del mismo grado de sus factores, luego

$$(\sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b} \times \sqrt[m]{c})^m = (\sqrt[m]{a})^m (\sqrt[m]{b})^m (\sqrt[m]{c})^m$$

pero, por definición, $(\sqrt[m]{a})^m = a$, $(\sqrt[m]{b})^m = b$, $(\sqrt[m]{c})^m = c$ entonces tendremos

$$(\sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b} \times \sqrt[m]{c})^m = abc$$

Como tratamos sólo de los valores aritméticos y por consiguiente cada cantidad tiene una sola raíz, puesto que la potencia del grado m del primer miembro de la igualdad (1) es abc y la del segundo miembro tambien es abc, la referida igualdad (1) será cierta.

97. La igualdad (1) prueba también el teorema recíproco de la multiplicación de radicales: dicho teorema, que es muy importante, se enuncia así: *La raíz de un producto es igual al producto de las raíces del mismo grado de sus factores.*

Cuando la cantidad subradical se puede descomponer en dos factores, *uno de los cuales es potencia exacta del grado marcado por el índice, dicho factor se puede sacar fuera del radical, extrayendo la raíz indicada.*

En efecto, tenemos (núm. 96)

$$\sqrt[m]{a^{3m}b} = \sqrt[m]{a^{3m}} \times \sqrt[m]{b}$$

pero, $\sqrt[m]{a^{3m}} = a^3$ (núm. 94)

luego sustituyendo este valor en la igualdad anterior

$$\sqrt[m]{a^{3m}b} = a^3\sqrt[m]{b} \qquad (2)$$

Cuando, al contrario, *se quiere introducir un factor bajo el signo radical se le eleva á la potencia indicada por el índice.*

Lo prueba la igualdad (2)

Ejemplos: $7ab\sqrt{2acd} = \sqrt{49a^2b^2.2acd} = \sqrt{98a^3b^2cd}$

$$(ab + c)\sqrt[3]{3ad} = \sqrt[3]{3(ab + c)^3ad}$$

98. El teorema del número anterior se aplica inmediatamente á la extracción de raíces de los monomios, porque estos son productos de varios factores. Por consiguiente si los exponentes de sus letras son múltiplos del índice de la raíz, tendremos la siguiente:

Regla. *Para extraer una raíz de un monomio, se extrae dicha raíz del coeficiente y se afecta cada letra de un exponente igual al cociente de dividir, el que tiene bajo el signo radical, por el índice de la raíz.*

Ejemplos: $\sqrt[m]{a^m b^{3m} c^{2m}} = ab^3c^2$

$$\sqrt[3]{8a^3b^3c^6} = 2abc^2$$

Si el monomio tiene letras cuyos exponentes no son múltiplos del índice de la raíz, *se dividen todavía por el índice de la raíz; los cocientes son los exponentes del factor que sale fuera del radical y los restos los exponentes en el factor que queda bajo el radical.*

Porque esta operación equivale á descomponer el radical en dos factores (núm. 97), uno de los cuales tiene raíz exacta y se extrae aplicando la regla anterior.

Ejemplo: $\sqrt[3]{24a^3c^5d^7} = \sqrt[3]{8a^3c^3d^6 \cdot 2c^2d} = 2acd^2\sqrt[3]{2c^2d}$

$$\sqrt{72a^3b^5c^4} = 6ab^2c^2\sqrt{2ab}.$$

99. División de radicales del mismo índice. *Para dividir dos radicales del mismo índice se dividen las cantidades subradicales y el cociente se escribe bajo el índice común.*

En efecto, tenemos la identidad

$$a = \frac{a}{b} \times b$$

y extrayendo de ambos miembros la raíz m

$$\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}} \times \sqrt[m]{b}$$

y dividendo ambos miembros por $\sqrt[m]{b}$

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$$

100. Del teorema anterior se deduce que: *la raíz de un cociente es el cociente de las raíces del mismo grado de sus términos*, ó bien la siguiente:

Regla. *Para extraer una raíz de un grado cualquiera de una fracción, se extrae la raíz del mismo grado del numerador y se parte por la del denominador.*

Ejemplo: $\sqrt[3]{\dfrac{125a^3b^6}{216c^9d^3}} = \dfrac{5ab^2}{6c^3d}$

$$\sqrt[3]{\dfrac{12a^7b^8c^9}{16d^4e^5}} = \dfrac{a^2b^2c^3\sqrt[3]{12ab^2}}{2de\sqrt[3]{2de^2}}$$

101. Elevación á potencias de los radicales.—*Para elevar un radical á una potencia, se eleva á dicha potencia la cantidad subradical.*

En efecto; se tiene en virtud de lo dicho (núm. 96)

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{a} \ldots\ldots = \sqrt[m]{a^n}$$

102. Extracción de raíces de los radicales.—*Para extraer una raíz de un radical, se multiplican los índices, dejando la misma cantidad subradical.*

Según el enunciado, debemos demostrar que

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \qquad (3)$$

En efecto; si elevamos el primer miembro á la potencia m y después á la n, lo cual equivale á elevar de una vez á la potencia mn (núm. 88), tendremos:

$$\left(\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

pero la potencia del grado mn de $\sqrt[mn]{a}$ es igual á a, luego la igualdad (3) será verdadera.

En virtud de este teorema se tendrá también

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$$

puesto que ambas cantidades son iguales á $\sqrt[mn]{a}$

103. Se puede inversamente descomponer el índice de un radical en sus factores simples, lo cual se aplica á la extracción de raíces de grado superiores cuando el índice no tiene más factores primos que 2 y 3.

Ejemplo:

$$\sqrt[6]{15625} = \sqrt[3]{\sqrt{15625}} = \sqrt[3]{125} = 5$$

104. *Un radical no se altera cuando se multiplica su índice por un número, si al mismo tiempo se eleva la cantidad subradical á la potencia indicada por este número..*

En efecto, tenemos la igualdad

$$a^p = \left(\sqrt[n]{a^p}\right)^n \text{ ó bien } a^p = \sqrt[n]{a^{np}}$$

y extrayendo la raíz del grado m de los dos miembros de la última igualdad se tendrá (núm. 102)

$$\sqrt[m]{a^p} = \sqrt[mn]{a^{np}} \qquad (4)$$

105. *Un radical no se altera si su índice se divide por uno de sus factores y de la cantidad subradical se extrae la raíz del grado que marca dicho índice.*

Lo demuestra la misma igualdad (4) pasando del segundo miembro al primero.

106. SIMPLIFICACIÓN DE RADICALES. *Simplificar un radical es una operación que consiste en suprimir todos los factores comunes al índice y al exponente de la cantidad subradical.*

Esta operación no altera el valor del radical, porque suprimir un factor en el exponente de la cantidad subradical equivale á extraer la raíz del grado indicado por dicho factor.

Ejemplos: $\sqrt[12]{a^{15}} = \sqrt[4]{a^5}$, $\sqrt[6]{a^2b^4c^2} = \sqrt[3]{ab^2c}$

107. REDUCCIÓN DE RADICALES Á UN ÍNDICE COMÚN. *Para reducir radicales á un índice común, se simplifican si se puede, se forma el mínimo común múltiplo de los índices, que será el índice común, y cada cantidad subradical se eleva á la potencia cuyo exponente es el cociente de dividir el índice común por el índice correspondiente.* (*)

Por el enunciado se comprende que ningún radical se habrá alterado (núm. 104), puesto que el factor, por el cual

(*) Estos enunciados se pueden deducir de los correspondientes en la simplificación y reducción de quebrados á un común denominador, cambiando las palabras numerador, en exponente de la cantidad subradical y denominador, en índice de la raíz.

se multiplica el índice, es el mismo que multiplica al exponente de la cantidad subradical.

Ejemplo. Reducir á un índice común los radicales

$$\sqrt[12]{a^7},\ \sqrt{a},\ \sqrt[8]{a^3}$$

Los radicales propuestos no se pueden simplificar: el mínimo común múltiplo de los índices es 24, luego este número será el índice común y habrá que elevar las cantidades subradicales á las potencias 2, 12, 3, que son los cocientes de dividir 24 por los índices respectivos 12, 2, 8. Por consiguiente

$$\sqrt[12]{a^7} = \sqrt[12.2]{a^{7.2}} = \sqrt[24]{a^{14}},\quad \sqrt{a} = \sqrt[12.2]{a^{12}} = \sqrt[24]{a^{12}},$$

$$\sqrt[8]{a^3} = \sqrt[8.3]{a^{3.3}} = \sqrt[34]{a^9}$$

108. Multiplicación y división de radicales de distinto índice.—*Para multiplicar ó dividir radicales de distinto índice, se reducen á un índice común y se efectúa la operación según la regla correspondiente al caso en que los índices son iguales.*

Ejemplos:

$$\sqrt[12]{a^7} \,.\, \sqrt{a} \,.\, \sqrt[8]{a^3} = \sqrt[24]{a^{14}} \,.\, \sqrt[24]{a^{12}} \,.\, \sqrt[24]{a^9} = \sqrt[24]{a^{35}}$$

$$\frac{\sqrt[15]{a^{11}}}{\sqrt[9]{a^4}} = \frac{\sqrt[45]{a^{33}}}{\sqrt[45]{a^{20}}} = \sqrt[45]{a^{13}}$$

109. *Dos radicales, del mismo índice, son semejantes, cuando tienen la misma cantidad subradical, ó se pueden transformar de modo que la tengan.*

$3\sqrt{ab}$, $5\sqrt{ab}$, $2a\sqrt{ab}$, $7b\sqrt{ab}$, son radicales semejantes. Los factores 3, 5, $2a$, $7b$, de los radicales, se consideran como coeficientes.

Los radicales $2\sqrt[3]{a^4b}$, $-\sqrt[3]{ab}$, $\sqrt[3]{7ab^4}$, se pueden transformar en los siguientes $2a\sqrt[3]{ab}$, $-\sqrt[3]{ab}$, $b\sqrt[3]{7} \times \sqrt[3]{ab}$, que son también semejantes, siendo sus coeficientes $2a$, -1, $b\sqrt[3]{7}$.

110. Aplicaciones.

$$(a + \sqrt{b}) + (a - \sqrt{b}) = 2a$$

$$(a + \sqrt{b}) - (a - \sqrt{b}) = 2\sqrt{b}$$

$$(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - b$$

$$(a + \sqrt{b})^2 = a^2 + b + 2a\sqrt{b}$$

$$\frac{a + \sqrt{b}}{a - \sqrt{b}} = \frac{(a + \sqrt{b})(a + \sqrt{b})}{(a - \sqrt{b})(a + \sqrt{b})} = \frac{a^2 + b}{a^2 - b} + \frac{2a}{a^2 - b}\sqrt{b}$$

CAPÍTULO II.

Cálculo de las cantidades con exponentes fraccionarios.

111 Hemos dicho (núm. 98) que para extraer la raíz de un monomio se divide el exponente de cada una de sus letras por el índice de la raíz y que los cocientes son los exponentes de las letras, fuera de la radical, y los restos los exponentes de las mismas, dentro del radical. Si ahora convenimos en dejar indicada la división, cuando el exponente no sea múltiplo del índice de la raíz, podremos dar á un radical la forma de una cantidad entera con exponente fraccionario, del modo siguiente:

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$

De suerte que: *toda cantidad con exponente fraccionario es una raíz, de la misma cantidad, siendo su índice el denominador y su exponente el numerador del exponente fraccionario.*

112. *Para multiplicar dos potencias de exponente fraccionario de una cantidad se sigue la misma regla que si los exponentes fuesen enteros, es decir, se suman los exponentes.*

En efecto, se tiene

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$

$$a^{\frac{q}{p}} = \sqrt[p]{a^q}$$

multiplicando ordenadamente

$$a^{\frac{n}{m}} \times a^{\frac{q}{p}} = \sqrt[m]{a^n} \times \sqrt[p]{a^q}$$

pero reduciendo á un índice común los radicales del segundo miembro y multiplicándolos después (núm. 96) tendremos, por transformaciones sucesivas

$$\sqrt[m]{a^n} \times \sqrt[p]{a^p} = \sqrt[mp]{a^{np}} \times \sqrt[mp]{a^{mq}} = \sqrt[mp]{a^{np+mq}}$$

y dando á la última la forma de cantidad entera con exponente fraccionario será $a^{\frac{np+mq}{mp}}$, ó bien, $a^{\frac{n}{m}+\frac{q}{p}}$, de donde

$$a^{\frac{n}{m}} \times a^{\frac{q}{p}} = a^{\frac{n}{m}+\frac{q}{p}}$$

113. *Para dividir dos potencias de exponente fraccionario de una cantidad, se restan los exponentes.*

Dividiendo las dos igualdades del número anterior tendremos:

$$a^{\frac{n}{m}} : a^{\frac{q}{p}} = \sqrt[m]{a^n} : \sqrt[p]{a^q}$$

reduciendo á un índice común y dividiendo después (número 99) resultará

$$\sqrt[m]{a^n} : \sqrt[p]{a^q} = \sqrt[mp]{a^{np}} : \sqrt[mp]{a^{mq}} = \sqrt[mp]{a^{np-mq}}$$

y volviendo á los exponentes fraccionarios, la última será $a^{\frac{np-mq}{mp}}$ ó bien $a^{\frac{n}{m}-\frac{q}{p}}$ de donde

$$a^{\frac{n}{m}} : a^{\frac{q}{p}} = a^{\frac{n}{m}-\frac{q}{p}}$$

114. *Para elevar una potencia á otra potencia se multiplican los exponentes, aunque uno ó los dos exponentes sean fraccionarios.*

En efecto, tenemos

$$\left(a^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{q}{p}} = \left(\sqrt[m]{a^n}\right)^{\frac{q}{p}} = \sqrt[p]{\left(\sqrt[m]{a^n}\right)^q}$$

pero la última expresión es igual á $\sqrt[mp]{a^{nq}}$ (núm. 102) luego volviendo á los exponentes fraccionarios será $a^{\frac{nq}{mp}}$, ó bien, $a^{\frac{n}{m} \cdot \frac{q}{n}}$, de donde

$$\left(a^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{q}{p}} = a^{\frac{n}{m} \cdot \frac{q}{p}}$$

115. Escolio. *Si los exponentes son fraccionarios negativos, todavía se aplican las mismas reglas.*

Para demostrarlas basta recordar la significación del exponente negativo.

Así, $a^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{a^{\frac{n}{m}}}$, y el procedimiento de la demostración es el mismo que seguimos en los números 81 y 82.

CAPÍTULO III.

CÁLCULOS DE LAS CANTIDADES IMAGINARIAS Ó COMPLEJAS.

116. En el núm. 92 hemos dicho que las raíces de grado par de las cantidades negativas no son ni positivas, ni negativas, y que han recibido el nombre de cantidades *imaginarias* por oposición al de *reales*, que reciben las primeras.

Como el nombre de imaginarias parece indicar que son un producto de la imaginación y que jamás tienen existencia real, se ha adoptado modernamente el nombre de *cantidades complejas*, porque en muchos casos tienen interpretación, aunque nosotros no podemos ocuparnos de estudiarla.

Toda cantidad compleja de segundo grado, $\sqrt{-\mathrm{A}}$, se puede escribir así $\sqrt{\mathrm{A} \times -1} = \sqrt{\mathrm{A}} \times \sqrt{-1}$, y si los valores de $\sqrt{\mathrm{A}}$ son $\pm a$, se tendrá: $\sqrt{-\mathrm{A}} = \pm a \sqrt{-1}$

En Álgebra superior se demuestra que toda cantidad compleja $\sqrt[2m]{-\mathrm{A}}$, tiene $2m$ valores de la forma $a + b\sqrt{-1}$, por lo cual sólo nos proponemos ocuparnos de las cantidades de esta forma.

117. Para abreviar haremos $\sqrt{-1} = i$ y tendremos por definición $i^2 = -1$, de donde se deducen las potencias de i

$$i^1 = i$$
$$i^2 = -1$$
$$i^3 = i^2 \times i = -i$$
$$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$$

En general

$$i^{4n} = (i^4)^n = 1^n = 1$$
$$i^{4n+1} = i^{4n} \times i = i$$
$$i^{4n+2} = i^{4n} \times i_2 = i^2$$
$$i^{4n+3} = i^{4n} \times i^3 = i^3$$

De lo cual resulta que *para hallar una potencia de cualquier grado de i, ó sea de* $\sqrt{-1}$ *se divide el exponente de la potencia por 4 y la potencia pedida será igual á la que tenga por exponente el resto de la división.*

118. Dos cantidades $a + bi$, $a - bi$, que tienen la misma parte real é iguales y de signo contrario los coeficientes de i se llaman *imaginarias, ó complejas* conjugadas. El *valor aritmético* del radical $\sqrt{a^2+b^2}$, se llama *módulo* de las expresiones $\pm a \pm bi$.

De esta definición se deduce que el módulo de la cantidad real $\pm a$ es a, porque siendo $b = 0$, se reduce al valor aritmético del radical $\sqrt{a^2}$, que es a.

119. *La suma de dos binomios complejos conjugados es un monomio real.*

En efecto, es evidente que

$$(a + bi) + (a - bi) = 2a$$

120. *La diferencia de dos binomios complejos conjugados es un monomio imaginario.*

$$(a + bi) - (a - bi) = a + bi - a + bi = 2\,bi$$

121. *El producto de dos binomios complejos conjugados es un binomio real.*

Teniendo presente que $i^2 = -1$, y aplicando la regla de la multiplicación de dos polinomios, tendremos:

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + abi - abi - b^2i^2 = a^2 + b^2$$

122. *El cuadrado de un binomio complejo es otro binomio de la misma forma.*

Tendremos:

$$(a + bi)^2 = (a + bi)(a + bi) = a^2 + abi + abi + b^2i^2$$

reduciendo y teniendo presente que $i^2 = -1$

$$(a + bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$$

Del mismo modo se halla

$$(a - bi)^2 = (a^2 - b^2) - 2abi$$

De esta igualdad y la anterior se deduce que: *los cuadrados de dos binomios complejos conjugados son otros dos binomios complejos conjugados.*

123. *El cociente de dos binomios complejos conjugados es un binomio complejo.*

Multiplicando los dos términos del cociente por el binomio conjugado del divisor, tendremos (*)

$$\frac{a + bi}{a - bi} = \frac{(a + bi)(a + bi)}{(a - bi)(a - bi)} = \frac{a^2 - b^2 + 2abi}{a^2 + b^2}$$

y separando en el último miembro la parte real de la imaginaria.

$$\frac{a + bi}{a - bi} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} + \frac{2ab}{a^2 + b^2}i$$

CAPÍTULO IV.

POTENCIAS Y RAÍCES DE LOS POLINOMIOS.

I. Nociones de combinatoria.

124. Varios objetos, ó entidades, á que llamaremos *elementos*, pueden estar enlazados entre sí según una ley cualquiera y formar *grupos* independientes del valor cuantitativo y cualitativo de los elementos que los constituyen, pero dependientes del número, ó colocación de los elementos en cada grupo.

La doctrina de la formación de los grupos que han de estar relacionados según leyes dadas, constituye una ciencia llamada *combinatoria*, de la cual algunos teoremas tie-

(*) Si se multiplican los dos términos de una fracción $\frac{A}{B}$ por una cantidad cualquiera M, la fracción no varía, aunque A, B y M sean cantidades complejas. Se demuestra absolutamente lo mismo que el teorema núm. 328 de la Aritmética.

nen inmediata aplicación á muchas teorías aritméticas y algebráicas. Nosotros nos concretaremos á los más indispensables para hallar elementalmente la potencia del grado m de un binomio, siendo m un número entero y positivo.

125. Representaremos por las letras de nuestro alfabeto los diversos elementos que entran en la formación de cada grupo, y aun diremos *letras* en vez de elementos; pero sin olvidar que no representan las letras cantidades, supondremos también que todos los elementos ó letras son distintos, y que ninguno entra más de una vez en cada grupo.

126. *Coordinaciones, ó arreglos de m letras son los diferentes grupos que se pueden formar con las m letras, tomándolas de una en una, ó de dos en dos, ó en general de n en n, de todas las maneras posibles.*

Grado de una coordinación es el número de letras que la componen. Las coordinaciones de primer grado se llaman *unarias*; las de segundo, *binarias*; las de tercero, *ternarias*, etc.

De la definición se deduce que las coordinaciones de cualquier grado difieren unas de otras, ó por alguna letra ó por el orden de su colocación.

Por ejemplo, con las tres letras a, b, c, se pueden formar las siguientes coordinaciones binarias.

$$ab,\ ac,\ ba,\ bc,\ ca,\ cb$$

las ab y ba difieren por el orden de las letras, las ab y ac difieren por una letra.

En lo que va á seguir supondremos que las m letras son

$$a,\ b,\ c,\ d, \ldots\ l$$

y representaremos el número de coordinaciones del grado n, por la notación A_m^n.

127. Las coordinaciones *unarias* de m letras, son las m letras, tomadas una á una, luego su número será m y tendremos:

$$A_m^1 = m$$

ab. ac, ad,.....al,
ba, bc, bd,.....bl,
ca, cb, cd......cl,
. . . .
la, lb, lc,........lk,

Las coordinaciones *binarias* se forman colocando al lado de cada una de las m letras, las $m-1$, letras restantes, una á una, según se indica en el adjunto cuadro: luego el número de coordinaciones binarias se obtendrá multiplicando por $m-1$ el número de coordinaciones unarias y será

$$A_m^2 = m(m-1)$$

abc, 'abd,.....abl,
abc, acd,.....acl,
. . . .
bac, bad,.....bal,
. . . .
lka, lkb,.......lkh,

Las coordinaciones *ternarias* se formarán agregando al lado de cada una de las coordinaciones binarias las $m-2$ letras restantes una á una, como se manifiesta al margen; según esto el número de coordinaciones ternarias se obtendrá multiplicando por $m-2$ el número de las binarias, de donde

$$A_m^3 = m(m-1)(m-2)$$

Continuando del mismo modo formaríamos las coordinaciones *cuaternarias*, y así sucesivamente. De suerte, que si hubiéramos formado ya las coordinaciones del *grado* $n-1$, formaríamos las del *grado* n, agregando, al lado de cada una de las del grado $n-1$, las letras que no entran en ella una á una; pero en cada coordinación del grado $n-1$ dejan de entrar $m-(n-1)$ letras, ó sea, efectuando la sustracción, $m-n+1$; luego el número de las coordinaciones del grado n, se obtendrá multiplicando por $m-n+1$ el de las del grado $n-1$, y tendremos:

$$A_m^n = m(m-1)(m-2).....(m-n+1) \quad (1)$$

Ejemplos: $A_5^1 = 5$

$$A_5^2 = 5(5-1) = 5 \times 4 = 20$$

$$A_5^3 = 5(5-1)(5-2) = 5 . 4 . 3 = 60$$

128. *Permutaciones de n letras son las diferentes coordinaciones que se pueden formar con las n letras entrando todas las letras en cada coordinación.* O lo que es lo mis-

mo, *permutaciones de n letras son las coordinaciones del grado n de las n letras.*

De esta definición se deduce que las permutaciones de n letras sólo difieren unas de otras por el orden de colocación de las letras.

129. Representaremos por P_n el número de permutaciones del grado n y obtendremos su valor haciendo $n = m$ en la fórmula (1) del núm. 127, de donde

$$P_n = n(n-1)(n-2).....(n-n+1) \qquad (2)$$

ó invirtiendo el orden de factores

$$P_n = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 ..... n$$

el producto $1 \,.\, 2 \,.\, 3 ..... n$ se suele llamar factorial *n-ésima* y se representa por la notación $n!$

Ejemplos: $P_4 = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 = 24$

$P_8 = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7 \,.\, 8 = 40320$

130. *Combinaciones del grado n, de m letras, son las coordinaciones que difieren unas de otras, no por el orden de colocación, sino por una ó más letras* (*)

De la definición de combinaciones se deduce que si suponemos formadas todas las combinaciones del grado n y cada una la permutamos de todas las maneras posibles, se formarán todas las coordinaciones. Según esto, designando por C_m^n el número de combinaciones de m letras n á n tendremos:

$$C_m^n \times P_n = A_m^n$$

de donde se deduce, dividiendo por P_n

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n}$$

y poniendo en vez de A_m^n y P_n sus valores (1) y (2)

$$C_m^n = \frac{m(m-1)(m-2).....(m-n+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 ..... n} \qquad (3)$$

abreviadamente también se escribe

$$C_m^n = \binom{m}{n}$$

(*) Las combinaciones se suelen llamar también, aunque impropiamente, productos diferentes.

Ejemplos: $C_4^2 = \frac{4\ .\ 3}{1\ .\ 2} = 6 \quad C_6^4 = \frac{6\ .\ 5\ .\ 4\ .\ 3}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4} = 15$

131. *El número de combinaciones del grado n, de m letras, es igual al número de combinaciones del grado $m - n$ de las mismas letras.*

En efecto, si de las m letras se separan n para formar una combinación, quedarán $m - n$, que formarán otra combinación del grado $m - n$ y recíprocamente. Entonces tendremos

$$C_m^n = C_m^{m-n}$$

II. Potencia de un binomio.

132. Si elevamos al cuadrado, cubo, cuarta potencia... el binomio $x + a$, hallaremos

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$
$$(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$
$$(x + a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$$
$$(x + a)^5 = x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5$$

. . . .

que son polinomios homogéneos de 2.°, 3.°, 4.°, 5.°..... grado, ordenados y completos en x y en a, cuyo primer término tiene por coeficiente la unidad, cuyo segundo término tiene por coeficiente el exponente de la potencia. También se advierte que los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos son iguales; pero en los ejemplos particulares no se ve la ley que siguen en su formación. Con objeto de hallarla, formaremos el producto de m binomios que tengan igual el primer término y distinto el segundo.

138. Sean los m factores binomios $x + a, x + b ... x + l$, decimos que se tendrá

$$(x + a)(x + b)(x + c)....... (x + k)(x + l) =$$
$$\begin{array}{r|r|r|l}
x^m + a & x^{m-1} + ab & x^{m-2} + abc & x^{m-3} + ... + abc ... kl \ (^*) \\
+ b & + ac & + abd & \qquad\qquad\qquad\qquad (1) \\
+ c & + bc & + acd & \\
+ & + & + & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \\
+ l & + kl & + hkl &
\end{array}$$

(*) Las potencias de x escritas á la derecha de las líneas verticales multiplican á los polinomios escritos inmediatamente á la izquierda de las líneas.

Ante todo debemos observar que el producto de dos polinomios contiene los productos de cada uno de los términos del multiplicando por cada uno de los del multiplicador; que si multiplicamos el producto total por un tercer polinomio, el resultado contendrá los productos de cada uno de los términos, por cada uno de los del nuevo factor, ó sea la suma de los productos que se obtienen tomando, de todas las maneras posibles, un término en cada uno de los polinomios; y lo que decimos de tres se aplica, por igual razonamiento, á cualquier número de polinomios.

Según esto, si se toma el primer término en todos los factores binomios, se tendrá el primer término x^m, del producto.

Si en el primer binomio se toma el término a y en todos los demás x, el producto será ax^{m-1}; si en el segundo binomio se toma el término b y en todos los demás x, el producto será bx^{m-1}; y del mismo modo se obtendrán los términos cx^{m-1}.....lx^{m-1}, luego el coeficiente de x^{m-1} es la suma de las combinaciones unarias de los segundos términos de los binomios. Estos términos, reunidos, son el segundo del desarrollo anterior.

Si ahora tomamos los segundos términos en dos factores binomios y los primeros en todos los demás, los productos serán abx^{m-2}, acx^{m-2}, bcx^{m-2}..... y se podrán formar tantos como combinaciones binarias con los segundos términos de los binomios: reunidos todos, forman el tercer término del anterior desarrollo.

Si tomamos los segundos términos en tres factores binomios y los primeros en los demás, los productos serán $abcx^{m-3}$, $abdx^{m-3}$, $acdx^{m-3}$..... siendo el número de estos términos igual al de combinaciones ternarias de los segundos términos de los binomios. Juntos forman el cuarto término del desarrollo.

Si en general se toma en n binomios los segundos términos y los primeros en los $m - n$ binomios restantes, se formarán productos que tendrán el factor x^{m-n}, y en que los coeficientes de x serán todas las combinaciones de grado n de las m letras.

Por último, habrá un término que contendrá el producto de todos los segundos términos de los factores binomios, ó sea la única combinación del grado m de las m letras a, b, c,.... kl.

134. Suponiendo ahora $a = b = c = ... = l$, el producto de los m binomios del primer miembro de la fórmula (1) será igual á $(x+a)^m$: el coeficiente $a + b + c ..... + l$ del segundo término será ma, ó sea a repetida tantas veces como combinaciones unarias se pueden formar con m letras: el coeficiente $ab + ac + bc + ...$ será $\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2$, ó sea a^2 repetido tantas veces como combinaciones binarias se pueden formar con m letras. Del mismo modo el coeficiente del cuarto término será $\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3$ ó sea a^3 repetido tantas veces como combinaciones ternarias se pueden formar con n letras.

El coeficiente del término que ocupa el lugar $n + 1$, será $\frac{m(m-1)(m-2)...(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 ... n} a^n$, ó sea a^n repetido tantas veces como combinaciones del grado n se pueden formar con m letras; y por último, el término $abc...kl$ se convierte en a^m.

Tendremos, pues, la siguiente importante fórmula, llamada del *binomio de Newton*, que sirve para hallar el desarrollo de una potencia de un binomio.

$$(x + a)^m = x^m + \frac{m}{1} ax^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2x^{m-2}$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3x^{m-3} + ... a^m \quad (2)$$

El término general que ocupa el lugar $n + 1$ es

$$\frac{m(m-1)(m-2).....(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 ..... n} a^n x^{m-n}$$

135. En la fórmula (2) los exponentes de x van disminuyendo y los de a aumentando de unidad en unidad á

partir del primer término, de suerte que, por relación á ambas letras, el polinomio es homogéneo.

El número de términos es $m + l$, porque los exponentes de x son los m primeros números y el cero, es decir $m, m - 1, m - 2 ..... 1, 0$.

136. *Los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos son iguales.*

En efecto, si se escribe la fórmula poniendo en vez de dichos coeficientes los símbolos que marcan el número de las combinaciones correspondientes, tendremos:

$$(x + a)^m = x^m + C_m^1 \, ax^{m-1} + C_m^2 \, a^2x^{m-2} + ...$$
$$..... + C_m^{m-2} \, a^{m-2}x^2 + C_m^{m-1}a^{m-1}x + a^m$$

El primero y el último término tienen por coeficiente la unidad: los términos que ocupan los lugares $n + 1$, contando desde el primero y desde el último, son $C_m^n a^n x^{m-n}$ y $C_m^{m-n} a^{m-n} x^n$, luego sus coeficientes C_m^n y C_m^{m-n} serán iguales en virtud de lo demostrado en el núm. 131. En particular se tendrá, $C_m^1 = C_m^{m-1}$; $C_m^2 = C_m^{m-2}$, etc. Es decir que los coeficientes del segundo y penúltimo término son iguales; los de los terceros términos, á partir de los extremos, también, y así sucesivamente.

137. *Si se multiplica el coeficiente de un término cualquiera por el exponente que lleva x en dicho término y se divide por el número que indica el lugar que ocupa, se forma el coeficiente del término siguiente:*

En efecto, si del término

$$\frac{m(m-1)1 .... (m-n+1)}{1 \, . \, 2 ..... n} a^n x^{m-n}$$

queremos pasar al siguiente, el coeficiente será el número de combinaciones de m letras $n+1$ á $n + 1$, es decir, $\frac{m(m-1) ..... (m-n+1)(m-n)}{1 \, . \, 2 ..... n(n+1)}$, luego se multiplica el coeficiente del término dado por $m - n$, que es el exponente de x y se divide por $n + 1$, que es el lugar que ocupa el primero.

138. Si en la fórmula del binomio cambiamos a en $-a$, tendremos:

$$(x-a)^m = x^m - \frac{m}{1}ax^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \,.\, 2}a^2x^{m-2} - \ldots\ldots \pm a^m \quad (3)$$

Los términos de esta fórmula son alternativamente positivos y negativos, según que el exponente de a es par ó impar.

139. Aplicaciones.—Teniendo presente lo dicho en los párrafos anteriores sobre la formación y propiedades de los coeficientes, se podrán hallar fácilmente las potencias particulares del binomio $x + a$

Ejemplos:

1.° $(x+a)^6 = x^6 + 6ax^5 + 15a^2x^4 + 20a^3x^3 + 15a^4x^2 + 6a^5x + a^6$

El desarrollo es un polinomio homogéneo de sexto grado; los exponentes de x disminuyen desde 6 hasta 0 y los de a aumentan desde 0 hasta 6. Los coeficientes se forman según la ley enunciada en el núm. 137; así, el del segundo término será $\frac{1 \times 6}{1} = 6$; el del tercero $\frac{6 \times 5}{2} = 15$; el del cuarto $\frac{15 \times 4}{3} = 20$; el del quinto $\frac{20 \times 3}{4} = 15$, etc. El número de términos del desarrollo es 7, y como los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos son iguales (número 136), el quinto tendrá igual coeficiente que el tercero, el sexto igual que el segundo y el séptimo igual que el primero: el cuarto será igual á sí mismo porque equidista de ambos extremos.

De suerte que en nuestro ejemplo hay que formar la mitad más uno de los coeficientes, los demás se forman por la ley de simetría arriba anunciada. Si el número de términos fuese par, bastaría formar la mitad.

2.° $(x-a)^7 = x^7 - 7ax^6 + 21a^2x^5 - 35a^3x^4 + 35a^4x^3 - 21a^5x^2 + 7a^6x - a^7$

En este ejemplo se ha tenido presente, además de lo dicho en el anterior, la ley de los signos que se enuncia en el núm. 138.

3.° $(3a^2b + 2c)^5 = (3a^2b)^5 + 5(3a^2b)^4 2c + 10(3a^2b)^3(2c)^2$
$+10(3a^2b)^2(2c)^3 + 5(3a^2b)(2c)^4 + (2c)^5$
$= 243a^{10}b^5 + 810a^8b^4c + 1080a^6b^3c + 720a^4b^2c^3$
$+240a^2bc^4 + 32c_5$

En este ejemplo se verifica la ley de los coeficientes; pero cuando se efectúan todos los desarrollos, los coeficientes finales resultan de multiplicar los coeficientes binómicos por los de las potencias de los términos. También los exponentes de a son dobles, porque en el primer término del binomio entra el factor a^2.

III. Potencias de los polinomios.

140. Tratemos ahora de elevar á la potencia m un polinomio $a + b + c + d$; si consideramos como un sólo término la suma de todos, excepto el primero, tendremos, según la fórmula (2) (núm. 134)

$$(a+b+c+d)^m = a_m + \frac{m}{1}a^{m-1}(b+c+d) + \frac{m(m-1)}{1 \,.\, 2}a^{m-2}(b+c+d)^2$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}a^{m-3}(b+c+d)^3 + \ldots..$$

los términos de esta fórmula se desarrollan del mismo modo, é igualmente los que resulten en las siguientes; y efectuando todas las operaciones, tendremos la potencia de grado m del polinomio (*)

Ejemplos:

1.° $(a+b+c+d)^2 = a^2 + 2a(b+c+d) + (b+c+d)^2$
$= a^2 + 2a(b+c+d) + b^2 + 2b(c+d) + (c+d)^2$
$= a^2 + 2ab + 2ac + 2ad + b^2 + 2bc + 2bd + c^2 + 2cd + d^2$

2.° $(a+b+c)^3 = a^3 + 3a^2(b+c) + 3a(b+c)^2 + (b+c)^3$
$= a^3 + 3a^2(b+c) + 3a(b^2 + 2bc + c^2) + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$
$= a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3b^2c) + 3ac^2 + 3b^2c$
$+6abc$

(*) No exponemos el método para hallar la fórmula general porque es impropio de esta obra, destinada á la segunda enseñanza.

IV. Raíces de los polinomios.

141. Un polinomio, que representaremos por P, tiene por raíz del grado m otro polinomio, que representaremos por Q, cuando se verifica la igualdad

$$P=Q^m$$

Supongamos, pues, que el polinomio P es potencia exacta de Q, que ambos estén ordenados según las potencias descendentes de x, y representemos por $a+b+c+....$ la raíz ordenada que tratamos de hallar.

Si consideramos $b+c+.....$ como un solo término, tendremos:

$$P=(a+b+c+..)^m=a^m+ma^{m-1}(b+c+..)+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}a^{m-2}(b+c+..)^2+...$$

El término más elevado es a^m, luego será igual al primer término de P y por tanto el primer término de la raíz se debe obtener extrayendo la raíz del grado m del primer término del polimonio, lo cual nos hará conocer la expresión de a. Si del polinomio P restamos a^m, potencia m de a, obtendremos un primer resto R_1, que ordenado tendrá por expresión

$$R_1=ma^{m-1}(b+c+....)+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}a^{m-2}....(b+c+....)^2$$

En el segundo miembro el término más elevado es $ma^{m-1}b$, luego éste será el primer término de R_1, por tanto si le dividimos por ma^{m-1}, que es ya una expresión conocida, se obtendrá el término b, que es el segundo de la raíz.

Conocidos los dos primeros términos a y b, de la raíz, si se los considera como uno solo y $c+d+....$ como otro, se tendrá

$$P=(a+b)^m+m(a+b)^{m-1}(c+d+.....)$$
$$+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}(a+b)^{m-2}(c+d+.....)^2+........$$

y restando $(a+b)^m$ el resto, R_2, será

$$R_2=m(a+b)^{m-1}(c+d+....)+m(m-1)(a+b)^{m-2}(c+d+....)^2.+...$$

El término más elevado de este resto es $ma^{m-1}c$, luego dividiéndole por ma^{m-1} se obtendrá por cociente c, que es el tercer término de la raíz. Se resta después del polimonio P la potencia $(a + b + c)^m$, el primer término del resto se divide por ma^{m-1} y se obtendrá el cuarto término de la raíz, con el cual se procede como con los anteriores, continuando así la operación hasta llegar al resto cero.

142. Si el polinomio no tiene raíz exacta, se dará por terminada la operación cuando se llegue á un resto de grado inferior á la raíz. En este caso el polinomio queda descompuesto en dos partes; una, potencia exacta del grado m, y otra de grado inferior á la raíz.

Así, $P = Q^m + R_n$

Cuando el exponente del primer término del polinomio es múltiplo de m, la raíz es de grado m veces menor que dicho polinomio; porque para obtener el primer término, que es el más elevado, hay que dividir por m el exponente del primer término del polinomio.

142 bis. Lo expuesto en los números anteriores se aplica á las raíces de todos los grados, y por consiguiente á la raíz cuadrada.

Sea P el polinomio cuya raíz cuadrada ordenada en x representaremos por $a + b + c + \ldots.$, tendremos:

$$P = (a+b+c+\ldots.)^2 = a^2 + 2a(b+c+\ldots.) + (b+c+\ldots.)^2$$

Extrayendo la raíz cuadrada de a^2, término más elevado de P, tendremos el primer término, a, de la raíz: elevándole al cuadrado y restándole del polinomio P, tendremos:

$$R_1 = 2a(b + c + \ldots..) + (b + c + \ldots..)^2$$

Dividiendo por $2a$ el término $2ab$, que es el primer término (el más elevado del resto) el cociente b, será el segundo término de la raíz.

Conocidos a y b, el segundo resto se halla restando de P el cuadrado de $a + b$ y resultará

$$P - (a + b)^2 = R_2$$

ó sea

$$R_2 = 2(a + b)(c + d + \ldots..) + (c + d + \ldots\ldots)^2$$

El término $2ac$ es el más elevado de este resto; luego dividiéndole por $2a$ se obtendrá por cociente c, que será el tercer término de la raíz. Restando del polinomio P el cuadrado $(a + b + c)^2$ se obtendrá el tercer resto, cuyo primer término se divide por $2a$ y el cociente será el cuarto término de la raíz, con el cual se procede como con los anteriores hasta llegar al resto cero.

El procedimiento indicado se puede abreviar en la extracción de la raíz cuadrada. En efecto, para restar del polinomio P, $(a + b)^2$, después de haber restado a^2, sólo falta restar $2ab + b^2$, ó sea $(2a + b)b$; luego el segundo resto, R_2, se puede obtener *restando del primero*, R_1, *el duplo del primer término de la raíz por el segundo, mas el cuadrado del segundo, ó sea el producto que resulta de multiplicar por el segundo la suma del doble del primero con el segundo.* Del mismo modo, para restar del polinomio P, $(a + b + c)^2$, después de haber restado $(a + b)^2$, sólo falta restar del segundo resto, R_2, la cantidad $2ac + 2bc + c^2$, ó sea $(2a + 2b + c)\,c$; *luego el tercer resto se obtiene restando del segundo el producto que resulta de multiplicar el tercer término de la raíz, por la suma de los duplos de los dos primeros con el tercero*, etc.

143. Si el polinomio no tiene raíz exacta, se dará por terminada la operación cuando se llegue á un resto de grado inferior á la raíz. Designando por R_n este resto, se tendrá

$$P = Q^2 + R_n$$

Para que en la raíz cuadrada de un polinomio no haya radicales se necesita que su primer término sea de grado par; y como para extraer la raíz cuadrada se divide por 2 el exponente, resultará que: *el grado de la raíz cuadrada de un polinomio de grado par, es igual á la mitad del grado del polinomio.*

Ejemplo. Hallar la raíz cuadrada del polinomio.

$$9x^6 + 12x^5 - 26x^4 - 8x^3 + 33x^2 - 20x + 4.$$

dispondremos la operación del modo siguiente:

P	$-9x^6+12x^5-26x^4-8x^3+33x^2-20x+4$	$3x^3+2x^2-5x+2$
	$-9x^6$	
R_1	$12x^5-26x^4-8x^3+33x^2-20x+4$	$(6x^3+2x^2)2x^2$
	$-12x^5-4x^4$	
R_2	$-30x^4-8x^3+33x^2-20x+4$	$(6x^3+4x^2-5x)(-5x)$
	$+30x^4+20x^3-25x^2$	
R_3	$12x^3+8x^2-20x+4$	$(6x^3+4x^2-10x+2)2$
	$-12x^3-8x^2+20x-4$	
	0	

Se ha extraído la raíz cuadrada del primer término, $9x^6$, y se ha obtenido el primer término, $3x^3$, de la raíz: el cuadrado de este término se ha restado del polinomio propuesto y ha destruído su primer término; después hemos dividido $12x^5$, primer término del resto, por $6x^3$, duplo del primero de la raíz, y el cociente, $2x^2$, segundo término de la raíz, le hemos sumado con $6x^3$; hemos multiplicado el binomio obtenido por $2x^2$ y hemos restado el producto del primer resto. Con el segundo resto se ha procedido como con el primero y así hemos continuado hasta obtener el último término de la raíz.

Como desde el segundo término en adelante se obtienen los términos de la raíz por medio de divisiones, se pueden hacer en los cálculos simplificaciones análogas á las citadas en aquella operación (núm. 62).

SEGUNDA PARTE.

APLICACIÓN DEL CÁLCULO ALGEBRÁICO Á LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES.

LIBRO PRIMERO.

LAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO.

CAPITULO PRIMERO.

TRANSFORMACIONES DE LAS ECUACIONES.

I. Definiciones.

144. *Una cantidad cuyo valor no depende de otra y que puede variar, al menos entre ciertos límites, se llama variable independiente*, ó simplemente *variable*. Para designar las variables, generalmente se emplean las últimas letras del alfabeto.

Una cantidad cuyo valor depende de otra, ó de otras cantidades, se llama función.

Por ejemplo: un polinomio es función de sus letras. (*) La función es *entera, fraccionaria* ó *irracional*, según que el polinomio correspondiente sea entero, fraccionario ó irracional.

Función lineal es un polinomio de primer grado con respecto á cada una de sus variables.

La forma de la función lineal es

$$ax + by + cz + \ldots\ldots k$$

en la cual x, y, z..... son las variables, a, b, c...... k, son coeficientes constantes.

---

*) El polinomio puede contener cantidades constantes y variables, su valor depende de todas á la vez.

145. Se llama *identidad* ó *ecuación idéntica* una igualdad que contiene cantidades *indeterminadas* y se verifica para todos los valores que se quiera atribuir á las indeterminadas.

Tales son las igualdades propias de las operaciones algebráicas.

Así, $(a^2 + ab + b^2)(a - b) = a^3 - b^3$

es una identidad que tiene lugar para todos los valores que se atribuyan á a y b.

Se llama *ecuación problemática*, ó *simplemente ecuación, una igualdad que contiene una ó muchas cantidades desconocidas y que generalmente sólo se verifica para ciertos valores de las cantidades desconocidas.*

Las cantidades desconocidas de una ecuación se llaman *incógnitas*. Para representarlas emplearemos, según se dijo al principio del Álgebra, las últimas letras del alfabeto. Las cantidades conocidas de una ecuación se llaman *datos*; los datos se consideran como *coeficientes* de las incógnitas.

Cuando todos los coeficientes de una ecuación son números *determinados*, la ecuación se llama *numérica:* cuando hay algún coeficiente *indeterminado*, se llama *literal*.

Las ecuaciones en que las incógnitas no están combinadas entre sí y con los datos más que por las operaciones del cálculo algebráico se llaman *algebráicas;* en todos los demás casos se llaman *trascendentes*.

Las ecuaciones algebráicas son *racionales* cuando ninguda incógnita está bajo el signo $\sqrt{}$ ni tiene exponente fraccionario. Las ecuaciones racionales son *enteras* cuando ninguna incógnita figura como denominador ni tiene exponente negativo; y son *fraccionarias* en el caso contrario.

Se llama *grado* de una ecuación entera con una incógnita el mayor exponente de dicha incógnita.

Así, la ecuación

$$3x^2 - 5x + 7 = 0$$

es de segundo grado.

Grado de una ecuación con varias incógnitas es la suma de los exponentes de las incógnitas en el término en que esta suma sea mayor.

$$3x^2y - 2x^2 + 5xy^3 - 2y^2 + 4xy + 9 = 0$$

es una ecuación de cuarto grado.

146. *Resolver una ecuación es determinar los valores que sustituídos en vez de las incógnitas la convierten en una igualdad.*

Los valores de las incógnitas se llaman *soluciones* ó *raíces* de la ecuación.

Una ecuación es *determinada* cuando tiene un número *limitado* de soluciones, ó raíces; es *indeterminada* cuando tiene un número *ilimitado* de soluciones, y es *absurda* cuando no tiene ninguna *solución*.

Dos ecuaciones son *equivalentes* cuando admiten las *mismas soluciones*.

II. Preparación de las ecuaciones.

147. *Si á los dos miembros de una ecuación se suma ó resta una misma cantidad, la ecuación que resulta es equivalente con la primera.*

Sea la ecuación

$$A = B \qquad (1)$$

se trata de demostrar que siendo m una cantidad cualquiera, la ecuación

$$A \pm m = B \pm m \qquad (2)$$

tiene las mismas soluciones que la (1)

Siendo A y B funciones de las incógnitas, si en vez de éstas sustituímos en A y B ciertos valores que formen solución de la ecuación (1), la convertirán en una igualdad; pero á los dos miembros de una igualdad se puede sumar ó restar una misma cantidad; luego tendremos la igualdad $A \pm m = B \pm m$.

Por otra parte, esta última se puede considerar como el resultado de sustituir en la ecuacion (2) los valores de las incógnitas que han sido soluciones en la ecuación (1); luego toda solución de la ecuación (1) satisface á la (2).

Recíprocamente: si en la ecuación (2) sustituímos una solución cualquiera, la convertirá en una igualdad, y si después sumamos ó restamos de los dos miembros la cantidad $-m$, tendremos la igualdad $A = B$, que es precisamente el resultado de sustituir en la ecuación (1) los valores que forman solución de la ecuación (2); luego toda solución de la ecuación (2) satisface á la (1).

Del teorema directo y del recíproco se deduce, entonces, la equivalencia de las ecuaciones (1) y (2).

Esta demostración supone que m es una cantidad finita, pues si se hiciera infinita deja de ser cantidad.

148. El teorema anterior tiene una aplicación importante que consiste en pasar ciertos términos de un miembro á otro en una ecuación.

Sea la ecuación

$$ax + b = cx + cd.$$

en la cual queremos pasar los términos que contienen la incógnita al primer miembro y los que no la contienen al segundo. Para conseguirlo sumemos con los dos miembros la cantidad $-cx - b$ y tendremos:

$$ax + b - cx - b = cx + d - cx - b$$

en el primer miembro se destruyen las cantidades $+b$ y $-b$ y en el segundo las $+cx$ y $-cx$; luego resultará

$$ax + cx = d - b$$

La operación de pasar los términos de un miembro á otro se llama *transposición*, y de lo que acabamos de demostrar se deduce la siguiente

REGLA. *Para efectuar la transposición, ó sea para pasar un término de un miembro á otro se le cambia de signo.*

Ejemplo: $7x - 12 = 6x + 15$

pasando $6x$ al primer miembro y -12 al segundo resulta

$$7x - 6x = 15 + 12, \text{ ó bien } x = 27$$

149. *Si los dos miembros de una ecuación se multi-*

plican ó dividen por una misma cantidad, la ecuación que resulta es equivalente con la primera.

1.° Sea la ecuación

$$A = B \qquad (1)$$

decimos que la ecuación

$$A \times m = B \times m \qquad (3)$$

tiene las mismas soluciones que la (1)

En efecto, si en la ecuación (1) se sustituyen en vez de las incógnitas valores que formen solución, la convertirán en una igualdad, y como los dos miembros de una igualdad se pueden multiplicar por una misma cantidad, los productos Am y Bm serán iguales, lo cual prueba que las soluciones de lo ecuación (1) satisfacen á la (3).

Recíprocamente; si sustituímos en la ecuación (3) una solución, se convertirá en una igualdad, y como los dos miembros de una igualdad se pueden dividir por una misma cantidad, los cocientes A y B serán iguales, y por tanto las soluciones de la ecuación (3) satisfarán á la (1)

2.° Sea la ecuación

$$A = B \qquad (1)$$

decimos que la ecuación

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{m} \qquad (4)$$

es equivalente con la (1)

Esto es evidente, porque dividir por m equivale á multiplicar por $\frac{1}{m}$

150. Escolio. Si $m=0$, la ecuación (3) es idéntica, porque $A \times m$ y $B \times m$ son iguales á cero; luego son iguales entre sí, aunque A y B no sean iguales; por consiguiente, en este caso las ecuaciones (1) y (3) no son equivalentes.

Igual observación, si $m = \infty$, porque las expresiones $A \times \infty$ y $B \times \infty$ dejan de ser definidas algebráicamente.

Por las mismas razones no son equivalentes las ecuaciones (1) y (4) cuando $m = 0$, ó $m = \infty$.

151. Los teoremas precedentes se utilizan para trans-

formar las ecuaciones que tengan términos fraccionarios en otras equivalentes cuyos términos sean enteros.

Sea la ecuación

$$\frac{4x}{5} + \frac{3}{10} = \frac{2x}{7} - \frac{9}{35} + 2$$

Si multiplicamos todos los términos de la ecuación por 70, que es el mínimo común múltiplo de los denominadores, la ecuación que resulta será equivalente con la propuesta (núm. 149); luego tendremos:

$$\frac{4 \,.\, 70x}{5} + \frac{3 \,.\, 70}{10} = \frac{2 \,.\, 70x}{7} - \frac{9 \,.\, 70}{35} + 2 \,.\, 70$$

y efectuando las operaciones indicadas en cada término

$$56x + 21 = 20\,x - 18 + 140$$

pasando todos los términos que tienen incógnita al primer miembro y los que no la tienen al segundo, resulta (número 148)

$$56x - 20x = -21 - 18 + 140$$

ó reduciendo términos semejantes

$$36x = 101$$

Como hemos multiplicado toda la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores, esta operación se puede explicar por la siguiente:

REGLA. *Para quitar denominadores en una ecuación, se multiplica el numerador de cada término fraccionario por el cociente de dividir por su denominador dicho mínimo común múltiplo, suprimiendo después el denominador: en cuanto á los términos enteros, se los puede considerar como fracciones cuyo denominador es la unidad, por lo cual basta multiplicarlos por el mínimo común múltiplo de los denominadores.*

Cuando no se quiera ó no se pueda formar el mínimo común múltiplo de los denominadores, se aplica la siguiente:

REGLA. *Para quitar denominadores en una ecuación, se multiplican los numeradores de cada fracción por el producto de los denominadores de las demás y se suprime el* *denominador; y los términos enteros se multiplican por el producto de todos los denominadores.*

152. *Cuando todos los términos de una ecuación tienen un factor común, la ecuación se puede simplificar dividiéndola por dicho factor.*

No es más que una consecuencia de lo dicho en el número 149.

Sea la ecuación

$$(a - b)x + (a^2 - b^2) = a - b$$

dividiendo por $a - b$, factor común á todos los términos, resulta

$$x + a + b = 1$$

y pasando $a + b$ al segundo miembro

$$x = 1 - a - b$$

153. Debemos advertir que el factor común que se suprima *no ha de contener incógnitas, porque se pueden perder soluciones.*

En efecto, sea la ecuación

$$(x - 2)x + (x - 2)(x + 2) - (x - 2) = 0$$

sacando $x - 2$ en factor común, resulta

$$(x - 2)(x + x + 2 - 1) = 0$$

para que el producto indicado en el primer miembro sea cero, se necesita que uno de los factores se anule; pero si igualamos á cero separadamente cada uno de los dos, se tendrán las dos ecuaciones

$$x - 2 = 0, \qquad \text{y} \qquad x + x + 2 - 1 = 0$$

la primera queda resuelta pasando el 2 al segundo miembro, pues se tendrá

$$x = 2$$

pero si sustituímos este valor en la otra, se tiene

$$2 + 2 + 2 - 1 = 0$$

cuyo resultado es absurdo; luego el valor $x = 2$, no es solución de la ecuación $x + x + 2 - 1 = 0$. Ahora bien; si en la ecuación primitiva se sustituye en vez de x el número 2, resulta

$$(2 - 2)2 + (2 - 2)(2 + 2) - (2 - 2) = 0$$

igualdad verdadera, porque todos los términos del primer miembro son nulos; luego el valor $x = 2$ era una solución de la ecuación propuesta, que se habría perdido si no igualásemos á cero el factor $x - 2$. (*)

154. *Las soluciones de una ecuación no se alteran cuando se cambia el signo á todos los términos.*

Sea la ecuación

$$-A = -B$$

multiplicando ambos miembros por -1 (núm. 149), resulta

$$A = B$$

155. Las transformaciones y aplicaciones que acabamos de exponer reciben el nombre genérico de *preparación de las ecuaciones*. Se pueden reducir á las siguientes: 1.ª *Quitar denominadores, para que los términos de las ecuaciones sean enteros.* 2.ª *La simplificación; consiste en suprimir los factores comunes á todos los términos, siempre que sean independientes de las incógnitas.* 3.ª *La transposición; consiste en pasar al primer miembro todos los términos que contengan incógnitas, y al segundo los que no las contengan.* 4.ª *La reducción; consiste en reducir los términos que sean semejantes por relación á las incógnitas.* (**)

La preparación de las ecuaciones se hace del mismo modo cualesquiera que sean sus grados y el número de las incógnitas; pero la resolución ofrece muy distintas dificultades, según los casos: nosotros sólo estudiaremos los más fáciles.

CAPÍTULO II.

Resolución de la ecuación de primer grado con una incógnita.

156. La ecuación de primer grado con una incógnita,

(*) Todavía se considera como una solución perdida $x = 2$, aunque satisficiese á la ecuación $x + x + 2 - 1 = 0$, si no se igualase á cero el factor $x - 2$; porque entonces el valor $x = 2$ sería una raiz doble. El teorema general es que si se multiplican dos ecuaciones $A = 0$, $B = 0$, la ecuación $AB = 0$ tiene todas las raíces de las propuestas.

(**) Hay otras transformaciones menos elementales, de que no nos ocupamos en esta obra, como quitar radicales, por ejemplo.

después de preparada, presenta en general dos clases de términos: en el primer miembro, términos que contienen la incógnita; en el segundo, términos que no la contienen. Representaremos el conjunto de los primeros por Ax y el de los segundos por B; siendo A y B números, ó monomios ó polinomios independientes de x

Según esto, la forma general de la ecuación de primer grado después de reducida será

$$Ax = B \qquad (1)$$

Diviendo por A los dos miembros, tendremos:

$$x = \frac{B}{A} \qquad (2)$$

pero esta ecuación es equivalente á la (1) y puede ser satisfecha únicamente por el valor $x = \frac{B}{A}$, *luego la ecuación de primer grado tiene esta misma solución, ó raiz.*

157. La fórmula (2) traducida al lenguaje, dice así: *para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita, después de preparada, se divide el segundo miembro por el coeficiente de la incógnita.*

Ejemplos: 1.° Resolver la ecuación

$$\frac{3x}{5} - \frac{7}{8} + \frac{3x}{20} = \frac{2}{15} - 3x + 7$$

quitando denominadores resulta

$$72x - 105 + 18x = 16 - 360x + 840$$

haciendo la transposición y reduciendo

$$450x = 961 \qquad \text{de donde} \qquad x = \frac{961}{450}$$

2.° Resolver la ecuación

$$\frac{x}{a-b} - \frac{1}{a^2-b^2} = \frac{x}{a+b} + 1$$

quitando denominadores se tendrá

$$(a+b)\,x - 1 = (a-b)\,x + a^2 - b^2$$

efectuando la transposición

$$(a+b)\,x - (a-b)\,x = a^2 - b^2 + 1$$

efectuando operaciones y reduciendo

$$2bx = a^2 - b^2 + 1 \quad \text{de donde} \quad x = \frac{a^2 - b^2 + 1}{2b}$$

158. Discusión de la fórmula. Volviendo á tomar la ecuación $Ax = B$ de la cual se obtiene

$$x = \frac{B}{A} \quad (2)$$

advertimos que x puede ser un *valor positivo* ó *negativo*, según que A y B sean del mismo signo ó de signos contrarios: en uno y otro caso x puede ser *entera*, ó *fraccionaria*, según que B sea ó no divisible por A; pero x no puede ser *incomensurable* si no lo son A ó B, ó ambas cantidades.

Mientras A y B son cantidades finitas y distintas de cero, la ecuación de primer grado *tiene siempre una solución y sólo tiene una.*

Examinemos ahora los casos en que A, ó B, ó ambas cantidades son nulas.

1.° $\quad B=0, \ A \gtrless 0, \quad x = \frac{0}{A} = 0$

2.° $\quad B \gtrless 0, \ A = 0, \quad x = \frac{B}{0} = \infty$

El valor de x se hace infinito (núm. 30), porque el denominador se anula: este resultado nos indica que no hay ninguna cantidad que pueda ser raíz de la ecuación, luego ésta debe ser absurda. Así es en efecto, puesto que haciendo en la ecuación la hipótesis $A = 0$, resulta

$$0 \, . \, x = B$$

y como no hay ninguna cantidad que multiplicada por cero, dé un producto distinto de cero, la ecuación anterior será *absurda* ó *imposible.*

3.° $\quad B = 0, \ A = 0, \quad x = \frac{0}{0}$

El valor de x es indeterminado (núm. 31), luego la ecuación será indeterminada, es decir, tendrá infinidad de soluciones. Al mismo resultado se llega haciendo directamente en la ecuación las hipótesis $A = 0$, $B = 0$, porque entonces será

$$0 \,.\, x = 0$$

y como el producto de cualquiera cantidad por cero es cero, se puede dar á x infinidad de valores.

Ejemplo de ecuación absurda

$$x = \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{6} + 2$$

quitando denominadores y efectuando todas las demás operaciones de la preparación, resulta

$$0 \,.\, x = 2, \qquad \text{de donde} \qquad x = \frac{2}{0} = \infty$$

Ejemplo de ecuación indeterminada

$$x = \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{6}$$

preparándola resulta

$$0 \,.\, x = 0, \qquad \text{de donde} \qquad x = \frac{0}{0}$$

159. Escolio. Cuando las cantidades A y B tienen un factor común que se anula por alguna hipótesis particular, se debe suprimir el factor común antes de hacer esta hipótesis, pues de lo contrario aparecería como indeterminado el valor de x sin serlo realmente.

Ejemplos. 1.° $(a^2 - b^2)\, x = a^3 - b^3$

de donde $$x = \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}$$

si hacemos $a = b$, se anulan el numerador y denominador; pero advirtiendo que uno y otro son divisibles por $a - b$ (núm. 71), tendremos, suprimiendo el factor común

$$x = \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}$$

y haciendo $a = b$ $$x = \frac{3a^2}{2a} = \frac{3a}{2}$$

2.° $(a^2 - b^2)x = (a - b)^2$ de donde $x = \dfrac{(a - b)^2}{a^2 - b^2}$

haciendo $a = b$, resulta $x = \frac{0}{0}$; pero suprimiendo antes de hacer esta hipóteses el factor común $a - b$, resulta

$$x = \frac{a - b}{a + b}$$

y haciendo ahora $a = b$, $x = \frac{0}{2a} = 0$

3.° $(a - b^2)x = a^2 - b^2$ de donde $x = \frac{a^2 - b^2}{(a - b)^2}$

haciendo $a = b$, resulta $x = \frac{0}{0}$; pero si antes de hacer esta hipótesis suprimimos el factor común, será

$$x = \frac{a + b}{a - b}$$

y haciendo $a = b$, $x = \frac{2a}{0} = \infty$

CAPÍTULO III.

Definiciones y teoremas sobre los sistemas de ecuaciones.

160. *Se llama sistema un conjunto de ecuaciones que deben ser satisfechas por los mismos valores de las incógnitas.*

Solución de un sistema de ecuaciones es un conjunto de valores de las incógnitas, capaz de satisfacer á todas las ecuaciones.

Un sistema de ecuaciones es *determinado* cuando tiene *una solución* ó *un número limitado de soluciones:* es *indeterminado* cuando tiene un número *ilimitado de soluciones:* es *incompatible* cuando no tiene *ninguna solución.*

Dos sistemas de ecuaciones son *equivalentes* cuando tienen las *mismas soluciones.*

161. *Despejar una incógnita, en una ecuación que tiene varias, es resolverla por relación á dicha incógnita, como si las demás fuesen conocidas.*

Así, si tenemos la ecuación

$$ax + by + cz = k$$

despejar x es resolverla como si z é y fuesen cantidades conocidas, de donde

$$x = \frac{k - by - cz}{a}$$

esta fórmula nos prueba al mismo tiempo que si atribuímos á z é y valores arbitrarios, se obtendrán otros correspondientes para x: *por consiguiente, una ecuación con varias incógnitas es indeterminada.*

162. *Si en un sistema de ecuaciones se despeja una incógnita en una de las ecuaciones y se sustituye su valor en las demás, las ecuaciones resultantes, juntas con la ecuación en que se despejó la incógnita, forman un sistema equivalente con el primero.*

Sea, para fijar ideas, el sistema

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= k \\ a'x + b'y &= k' \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

despejando x en la primera y sustituyendo en la otra, resulta

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{k - by}{a} \\ a' \frac{k - by}{a} + b'y &= k' \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

si $x = \alpha$, $y = \beta$, es una solución del sistema (1), se tendrán las igualdades

$$\left.\begin{aligned} a\alpha + b\beta &= k \\ a'\alpha + b'\beta &= k' \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

de la primera se deduce $\alpha = \frac{k - b\beta}{a}$, y como sustituyendo en la otra, los resultados seguirán siendo iguales, se tendrá

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{k - b\beta}{a} \\ a' \frac{k - b\beta}{a} + b'\beta &= k' \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

este sistema de igualdades manifiesta que toda solución del sistema (1) satisface al (2)

Recíprocamente, si $x = \alpha$, $y = \beta$, forman una solución del sistema (2), se tendrá el sistema de igualdades (4); pero de la primera se deduce la primera igualdad del sistema

(3) y sustituyendo en la segunda igualdad (4) en vez de $\frac{k - b\beta}{a}$ su igual α, se obtiene la segunda igualdad (3); lo cual prueba que toda solución del sistema (2) satisface al (1).

Luego los sistemas (1) y (2) son equivalentes.

Los razonamientos que hemos hecho para demostrar este teorema cuando el sistema consta de dos ecuaciones son aplicables á cualquier sistema, porque toda la demostración estriba en que se despeje una incógnita en una de las ecuaciones y se sustituya su valor en todas las demás.

163. *Si las ecuaciones de un sistema se multiplican, cada una, por una cantidad arbitraria pero constante y distinta de cero, el sistema de ecuaciones formado por una de ellas y las que resulten de sumarla, ó restarla con las demás, es equivalente al propuesto.*

Supondremos que en cada ecuación todos los términos se han pasado al primer miembro; entonces los segundos miembros serán iguales á cero, y un sistema de m ecuaciones se podrá representar por

$$\left.\begin{array}{r} A_1 = 0 \\ A_2 = 0 \\ A_3 = 0 \\ \cdots\cdots \\ A_m = 0 \end{array}\right\} \quad (5)$$

Si designamos por $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots a_m$, los multiplicadores, formaremos el sistema

$$\left.\begin{array}{r} A_1 a_1 = 0 \\ A_1 a_2 \pm A_2 a_1 = 0 \\ A_1 a_3 \pm A_3 a_1 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_1 a_m \pm A_m a_1 = 0 \end{array}\right\} \quad (6)$$

Ahora bien; toda solución del sistema de ecuaciones (5) satisface al sistema (6), porque los términos

A_1a_1, A_1a_2,...... A_1a_m, A_2a_1, A_3a_1,...... A_ma, se anulan; luego sus sumas ó diferencias también se anulan.

Recíprocamente, decimos que toda solución del sistema (6) satisface al (5). En efecto, la primera ecuación del sistema (6) es $A_1a_1 = 0$; pero el multiplicador a_1 es distinto de cero; luego se debe tener $A_1 = 0$; entonces los primeros términos de las demás ecuaciones (6) se anulan, y por consiguiente se tendrá $\pm A_2a_1 = 0$, $\pm A_3a_1 = 0$....... $\pm A_ma_1 = 0$, de donde $A_2 = 0$, $A_3 = 0$...... $A_m = 0$, y como también teníamos $A_1 = 0$, el sistema de ecuaciones (5) será satisfecho por la solución del sistema (6); luego ambos sistemas serán equivalentes.

CAPÍTULO IV.

RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES CON IGUAL NÚMERO DE INCÓGNITAS.

164. *Eliminar una incógnita en un sistema de ecuaciones es deducir de éste un segundo sistema que no contenga dicha incógnita y en el cual las demás tengan los mismos valores que en el primitivo.*

Cuando esto se verifica, el sistema derivado unido á una de las ecuaciones del sistema primitivo (que contenga la incógnita eliminada) formará un sistema equivalente con él.

Expondremos los métodos de eliminación más elementales que se emplean en las ecuaciones de primer grado, suponiendo, por ahora, que el número de ecuaciones y el de incógnitas son iguales.

I. Método de eliminación por sustitución.

Caso de dos ecuaciones.

165. *El método de eliminación por sustitución, entre dos ecuaciones con dos incógnitas, consiste en despejar una incógnita en una ecuación y sustituir su valor en la otra,*

que después de esta operación sólo tendrá una incógnita.

Sean las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} ax + b'y &= k \\ a'x + b'y &= k' \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

despejando x en la primera y sustituyendo en la segunda, resulta

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{k - by}{a} \\ a'\frac{k - by}{a} + b'y &= k' \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Los sistemas (1) y (2) son equivalentes (núm. 162).

La segunda ecuación del sistema (2) no tiene más incógnita que la y; luego podremos resolverla preparándola antes según los métodos expuestos en el capítulo II. Quitando el denominador y efectuando la transposición y reducción, resulta

$$(ab' - ba')y = ak' - ka'$$

de donde

$$\left.y = \frac{ak' - ka'}{ab' - ba'}\right\} \quad (3)$$

sustituyendo este valor en la primera ecuación (2), se tendrá

$$x = \frac{k - \dfrac{ak' - ka'}{ab' - ba'}}{a}$$

y multiplicando los dos términos de la fracción por $ab' - ba'$ y simplificando

$$x = \frac{kb' - bk'}{ab' - ba'} \qquad (4)$$

Las fórmulas (3) y (4) forman un sistema equivalente con el propuesto (núm. 162); *luego un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas tiene una solución y sólo tiene una en el caso general de que no se anulen el denominador, ó el denominador y los numeradores de las fórmulas.* (*)

(*) No estudiamos la discusión general de las formulas (3) y (4) por no hacer demasiado extensa esta obra.

Ejemplos: 1.° $3x - 2y = 2$

$7x + 6y = 58$

De la primera se deduce

$$x = \frac{2 + 2y}{3}$$

y sustituyendo en la segunda

$$7 \cdot \frac{2 + 2y}{3} + 6y = 58$$

resolviéndola, se obtiene $y = 5$, y sustituyendo en el valor de x, resulta $x = 4$.

Luego $x = 4$, $y = 5$ es la solución pedida.

2.° $5x - 4y = 11$

$15x - 12y = 20$

despejando x en la primera

$$x = \frac{11 + 4y}{5}$$

sustituyendo en la segunda

$$15 \cdot \frac{11 + 4y}{5} - 12y = 20$$

en vez de hacer la multiplicación indicada podremos dividir 15 por 5, y resultará

$$3(11 + 4y) - 12y = 20$$

efectuando la multiplicación y la transposición

$12y - 12y = 20 - 33$ ó bien $0 \cdot y = -13$

de donde

$$y = \frac{-13}{0} = -\infty$$

como el valor de y se hace infinito, sustituyéndole en el de x, también x se hace infinito; luego el sistema propuesto es absurdo.

Es fácil convencerse de la incompatibilidad de las ecuaciones, porque si multiplicamos la primera por 3, resulta $15x - 12y = 33$, que tiene el mismo primer miembro que la segunda y distinto segundo miembro; luego es imposible que las dos ecuaciones se satisfagan por la misma solución.

3.ª
$$6x + 2y = 13$$
$$12x + 4y = 26$$

despejando x en la primera

$$x = \frac{13 - 2y}{6}$$

sustituyendo en la segunda

$$12 \,.\, \frac{13 - 2y}{6} + 4y = 26 \qquad \text{ó} \qquad 2(13 - 2y) + 4y = 26$$

efectuando y reduciendo

$$0 \,.\, y = 0, \qquad \text{de donde} \qquad y = \frac{0}{0}$$

como el valor de y es indeterminado (núm. 31), el valor $x = \frac{13 - 2y}{6}$, también será indeterminado, porque á cada valor de y corresponde otro valor de x; luego el sistema propuesto es indeterminado.

Es fácil convencerse de la indeterminación, porque si multiplicamos la primera ecuación por 2, resultará $12\,x + 4y = 26$, que es la segunda del sistema; entonces las dos ecuaciones son equivalentes y en vez de un sistema no teníamos, realmente, más que una ecuación con dos incógnitas, la cual es indeterminada (núm. 161).

Caso de un sistema cualquiera.

166. El método de eliminación por sustitución es aplicable á cualquier sistema de ecuaciones con igual número de incógnitas.

Para esto se despeja una incógnita en una ecuación y se sustituye su valor en las demás y se formará un sistema con una ecuación y una incógnita menos, que unido á la ecuación en que se despejó la incógnita, formará un sistema equivalente con el primitivo (núm. 162).

En el sistema que contiene una ecuación y una incógnita menos, se despeja otra incógnita en una de las ecuaciones y se sustituye en las demás y se formará un sistema con dos ecuaciones y dos incógnitas menos que el primero, que unido á las dos ecuaciones en que se ha despejado incógnita, formará un sistema equivalente con el primitivo.

Continuando de este modo se llegará á formar un sistema, llamado *resolvente*, que es equivalente con el propuesto y consta del mismo número de ecuaciones, pero de tal modo que la última sólo tiene una incógnita y las demás son los valores de las incógnitas despejadas.

Para resolver este sistema se halla el valor de la incógnita en la última ecuación, que sólo tiene una incógnita; se sustituye en la penúltima y se obtendrá el valor de una segunda incógnita; se sustituyen ambas en la anterior y se obtendrá el valor de una tercera incógnita; continuando así estas operaciones hasta obtener el valor de la última incógnita, que es la primera que se despejó.

Aplicaremos al siguiente ejemplo de tres ecuaciones con tres incógnitas

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 5z &= 6 \\ 3x + 4y - 3z &= 18 \\ 4x - 7y - 2z &= -42 \end{aligned}$$

despejando x en la primera y sustituyendo en las otras dos, resulta, después de quitar denominadores

$$\begin{aligned} x &= \frac{6 + 3y - 5z}{2} \\ 17y - 21z &= 18 \\ y + 12z &= 54 \end{aligned}$$

sistema equivalente al propuesto y cuyas dos últimas ecuaciones sólo tienen dos incógnitas. Despejando y en la tercera y sustituyendo en la segunda, resulta, después de hechas las reducciones

$$\begin{aligned} x &= \frac{6 + 3y - 5z}{2} \\ y &= 54 - 12z \\ 225z &= 900 \end{aligned}$$

sistema equivalente con el anterior y por lo tanto con el propuesto.

De la última se deduce $z = 4$; sustituyendo en la anterior, resulta $y=6$; y sustituyendo ambas en la primera, $x=2$.

Luego la solución es $x=2$, $y=6$, $z=4$.

II. Método de eliminación por reducción.

Caso de dos ecuaciones.

167. *El método de eliminación por reducción, entre dos ecuaciones con dos incógnitas, consiste en multiplicar las ecuaciones por factores convenientes para que los coeficientes de una misma incógnita resulten iguales en ambas ecuaciones; sumar los resultados si los coeficientes tienen signos contrarios, ó restarlos si tienen signos iguales.* La ecuación resultante no contendrá la incógnita cuyos coeficientes se han hecho iguales.

Sean las dos ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} ax+by=k \\ a'x+b'y=k' \end{array}\right\} \quad (1)$$

multiplicando la primera por a' y la segunda por a, quedan igualados los coeficientes de x: restando en seguida la primera, resultará la siguiente ecuación que no contiene la x.

$$(ab'-ba')y=ak'-ka' \qquad (5)$$

esta ecuación, unida á una de las del sistema (1), forma otro sistema equivalente con él (núm. 163). Pero resolviendo la ecuación (5) tenemos:

$$y=\frac{ak'-ka'}{ab'-ba'} \qquad (6)$$

sustituyendo este valor en una de las ecuaciones (1) se podrá obtener el valor de x. Así:

$$ax+b\frac{ak'-ka'}{ab'-ba'}=k$$

multiplicando por el denominador $ab'-ba'$, y efectuando el producto indicado en el numerador del segundo término, se tiene

$$a(ab'-ba')x+abk'-bka'=akb'-bka'$$

haciendo la transposición y reducción y suprimiendo el factor a, que resulta en todos los términos

$$(ab' - ba')x = kb' - bk'$$

Como la ecuación (7) no es más que una transformación de la primera de las ecuaciones (1), el sistema (5) y (7) es equivalente al (1); pero de la (7) se deduce

$$x = \frac{kb' - bk'}{ab' - ba'} \quad (8)$$

luego las fórmulas (6) y (8) resuelven las ecuaciones (1)

Debemos observar que siendo igualmente legítimos los dos métodos de eliminación que llevamos expuestos, las fórmulas á que conducen al resolver el sistema (1) deben ser las mismas, como puede comprobarse comparando las (3) y (4) con las (6) y (8).

Ejemplo:
$$5x + 4y = 31$$
$$7x - 3y = 22$$

multiplicando la primera por 7, la segunda por 5 y restando de la primera la segunda, se destruyen los términos en x y resultará

$$43y = 107 \qquad \text{de donde} \qquad y = \frac{107}{43}$$

sustituyendo este valor de y en una de las eeuaciones propuestas, en la primera por ejemplo, da

$$5x + \frac{4 \,.\, 107}{43} = 31$$

y resolviéndola se obtiene $x = \dfrac{181}{43}$ luego la solución pedida es

$$x = \frac{181}{43}, \qquad y = \frac{107}{43}$$

168. Se puede resolver directamente por medio de las fórmulas (3) y (4) un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas; para esto se escribe el cuadro $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ de los coeficientes y se restan los productos en cruz; el resultado $ab' - ba'$ es el denominador común. En cuanto á los numeradores, se forma el de cada incógnita sustituyendo sus

coeficientes por los términos independientes: así, el numerador de x será $\begin{vmatrix} k & b \\ k' & b' \end{vmatrix} = kb' - bk'$ y el de $y \begin{vmatrix} a & k \\ a' & k' \end{vmatrix} = ak' - ka'$

Aplicando el ejemplo anterior

$$5x + 4y = 31$$
$$7x - 3y = 22$$

tendremos

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 31 & 4 \\ 22 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{31 . -3 - 4 . 22}{5 . -3 - 4 . 7} = \frac{-93 - 88}{-15 - 28} = \frac{181}{43}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 31 \\ 7 & 22 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{5 . 22 - 31 . 7}{5 . -3 - 4 . 7} = \frac{110 - 217}{-15 - 28} = \frac{107}{43}$$

Caso de un sistema cualquiera.

169. Sea un sistema cualquiera de m ecuaciones con m incógnitas.

$$\left.\begin{array}{r} A_1 = 0 \\ A_2 = 0 \\ A_3 = 0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ A_m = 0 \end{array}\right\} \quad (9)$$

Si a_1, a_2, a_3,...... a_m son los coeficientes de x, se podrá eliminar esta incógnita entre la primera ecuación y cada una de las demás, como se ha hecho en el caso anterior, y resultará el siguiente sistema, que es equivalente con el (9) (núm. 163).

$$\left.\begin{array}{r} A_1 = 0 \\ A_2 a_1 \pm A_1 a_2 = 0 \\ A_3 a_1 \pm A_1 a_3 = 0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ A_m a_1 \pm A_1 a_m = 0 \end{array}\right\} \quad (10)$$

las $m - 1$ últimas ecuaciones no contienen la incógnita x, de suerte que forman un sistema con una ecuación y una incógnita menos que el propuesto.

Representemos por B_2, B_3,...... B_m los primeros miembros de las $m-1$ últimas ecuaciones del sistema (10) y tendremos

$$\left.\begin{array}{r} A_1 = 0 \\ B_2 = 0 \\ B_3 = 0 \\ \ldots\ldots \\ B_m = 0 \end{array}\right\} \quad (10)$$

suponiendo ahora que los coeficientes de y en las $m-1$ ecuaciones son b_2, b_3..... b_m formaremos el sistema

$$\left.\begin{array}{r} A_1 = 0 \\ B_1 = 0 \\ B_3 b_2 - B_2 b_3 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_m b_2 - B_2 b_m = 0 \end{array}\right\} \quad (11)$$

que será equivalente con el (10) y cuyas $m-2$ últimas ecuaciones no contienen las incógnitas x é y. Eliminando entre éstas una tercera incógnita z, y continuando de este modo las eliminaciones, se llegará por fin al sistema resolvente

$$\left.\begin{array}{r} A_1 = 0 \\ B_2 = 0 \\ C_3 = 0 \\ L_{m-1} = 0 \\ M_m = 0 \end{array}\right\} \quad (12)$$

en el cual la última ecuación sólo tiene una incógnita, la anterior dos, y así sucesivamente hasta la primera, que tiene todas las incógnitas.

Por el procedimiento que hemos seguido para formar los sistemas de ecuaciones hasta el (12), cada uno es equivalente con el que le sigue; luego el último será equivalente con el primero.

El sistema (12) se resuelve como se indicó en el método por sustitución. *La última ecuación sirve para hallar una incógnita; su valor se sustituye en la penúltima y se hallará el valor de otra incógnita; ambas se sustituyen en la* *anterior y se hallará una tercera incógnita; continuando del mismo modo hasta llegar á la primera ecuación, que sirve para hallar la última incógnita, ó sea la que primero se eliminó.*

Aplicaremos al ejemplo siguiente, que ya resolvimos en el núm. 166.

$$2x - 3y + 5z = 6$$
$$3x + 4y - 3z = 18$$
$$4x - 7y - 2z = -42$$

Si multiplicamos la primera por 3, la segunda por 2 y restamos, resulta

$$17y - 12z = 18$$

multiplicando la primera por 2 y restando del producto la tercera, se obtiene

$$y + 21z = 54$$

Entonces el sistema

$$2x - 3y + 5z = 6$$
$$17y - 21z = 8$$
$$y + 12z = 54$$

será equivalente al propuesto y sus dos últimas ecuaciones tienen dos incógnitas. Para eliminar y, multiplicaremos la tercera por 17 y restando del producto la segunda, resultará

$$225z = 900$$

luego el sistema resolvente es

$$2x + 3y + 5z = 6$$
$$y + 12z = 54$$
$$225z = 900$$

La última da el valor $z = 4$, sustituyendo en la anterior se obtiene $y = 6$ y sustituyendo en la primera $x = 2$, que es la misma solución que obtuvimos arriba.

170. En la práctica no se acostumbra á escribir las ecuaciones repetidas que sólo tienen objeto en la demostración de los teoremas sobre la equivalencia de los sistemas que se van formando por la eliminación de las incógnitas.

Además se aprovechan todas las circunstancias particulares que permitan simplificar los cálculos.

Ejemplo:
$$\begin{aligned} x + y + z - u &= -7 \\ x + y - z + u &= 15 \\ x - y + z + u &= 1 \\ -x + y + z + u &= 5 \end{aligned}$$

sumando la primera con cada una de las demás y dividiendo por 2 los resultados, se obtiene

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ x + z &= -3 \\ y + z &= -1 \end{aligned}$$

restando de la primera la segunda, resulta

$$y - z = 7$$

y sumando ésta con la tercera, se obtiene

$$2y = 6 \qquad \text{de donde} \qquad y = 3$$

y por sustituciones sucesivas en las anteriores

$$z = -4, \qquad x = 1, \qquad u = 7$$

CAPÍTULO IV.

Resolución de un sistema con más ó menos ecuaciones que incógnitas.

171. *Si el número de ecuaciones es mayor que el de incógnitas, el sistema es incompatible, en general.*

En efecto, si el número de ecuaciones es $m + n$ y el de incógnitas m, resolveremos un sistema formado por m de las ecuaciones con m incógnitas y sustituiremos los valores que se determinan en las n ecuaciones restantes: para que formen solución deberían ser satisfechas por ellos; pero en general no sucederá esto porque serán n relaciones entre los coeficientes.

Ejemplo:
$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 2 \\ 6x + 3y &= 39 \\ 5x - 4y &= 11 \end{aligned}$$

si resolvemos las dos primeras, resulta $x = 4$, $y = 5$.

Sustituyendo estos valores en la tercera, el primer miembro es $5 \,.\, 4 - 4 \,.\, 5$, que es igual á cero; luego no puede ser igual á 11, como debería ser para que el sistema fuese compatible.

172. *Si el número de ecuaciones es inferior al de incógnitas, el sistema es, en general, indeterminado.*

En efecto, si el número de ecuaciones es m y el de incógnitas $m + n$, eliminando $m - 1$ incógnitas, nos quedará una ecuación con $n + 1$ incógnitas. Resolviéndola por relación á una de ellas, podrán darse valores arbitrarios á las demás, y cada sistema de valores que se obtenga se sustituirá en las $m - 1$ ecuaciones que han servido para la eliminación y se obtendrán otros tantos sistemas de valores correspondientes de las incógnitas eliminadas.

Si el número de incógnitas excede en una unidad al de ecuaciones, la ecuación final será de la forma

$$ax + by = k \qquad \text{de donde} \qquad y = \frac{k - ax}{b}$$

á cada valor arbitrario de x corresponde uno de y: el sistema presenta lo que se llama indeterminación de *primer género, ó es simplemente indeterminado.*

Si la ecuación final es de la forma

$$ax + by + cz = k \qquad \text{de donde} \qquad z = \frac{k - ax - by}{c}$$

dando á x un valor arbitrario se pueden atribuir á y infinidad de valores, arbitrarios también, que darán para z infinidad de valores: el sistema presenta entonces una indeterminación de *segundo género*, etc.

CAPÍTULO V.

PROBLEMAS.

I. Preliminares sobre la resolución de problemas.

173. Una de las aplicaciones más útiles de la teoría de las ecuaciones es la resolución de problemas, *que generalmente tienen por objeto determinar una ó muchas cantidades desconocidas, ó incógnitas, por medio de otras conocidas, ó datos, enlazándolas entre sí por las condiciones que deben expresarse en el enunciado.*

Resolver un problema es determinar las incógnitas.

La primera operación para resolver un problema es plantearle, esto es, *traducir al lenguaje algebráico las condiciones expresadas en el enunciado.* El planteo exige en muchos casos el conocimiento de la ciencia á que pertenece el problema: en otros basta una explicación sucinta acerca de las relaciones entre las cantidades que figuran en el enunciado; y en otros es una cuestión puramente numérica y basta el sentido común para desentrañarla.

Para *plantear* un problema se examina con cuidado cuales son las cantidades de cuya determinación depende el conocimiento de *todas las incógnitas;* se forma la expresión de dichas cantidades en *función de los datos y las incógnitas*, representando cada incógnita por una letra distinta, y esto nos conducirá á escribir *una* ó *muchas ecuaciones* en las cuales *datos é incógnitas estarán enlazados por las mismas operaciones que se deberían efectuar para comprobar los resultados, ó valores de las incógnitas, si fuesen ya conocidos.*

La segunda parte de la resolución de un problema es puramente algebráica, pues consiste en resolver las ecuaciones obtenidas al plantearle.

Se debe observar que si las ecuaciones han de dar todas las soluciones del problema y no han de dar ninguna solución extraña, es absolutamente necesario que *expresen solamente las condiciones del problema y que las expresen todas.*

Si las ecuaciones no expresan todas las condiciones del enunciado, pueden dar soluciones *extrañas* y *aun ser indeterminadas, sin serlo el problema:* si expresan alguna condición que no esté en el enunciado, se pueden *perder soluciones y hasta ser incompatibles, sin ser absurdo el problema.*

Pero hay casos en que las ecuaciones no pueden expresar exactamente el enunciado del problema por la gran generalidad que tienen los símbolos algebráicos.

Esto sucederá cuando se hallen valores negativos ó fraccionarios, para cantidades que por su naturaleza deban ser positivas ó enteras; ó cuando la índole del problema exija que estén comprendidas entre ciertos límites.

II. Problemas que originan ecuaciones de primer grado.

174. Para aclaración de los razonamientos anteriores presentaremos algunos ejemplos.

PROBLEMA 1.ª *Sabiendo que el minutero y el horario de un reloj se superponen á las doce, hallar á qué horas volverán á superponerse.*

Es evidente, dada la marcha de las agujas, que el primer encuentro ó superposición tendrá lugar después de la una y cinco minutos, el segundo después de las dos y diez minutos y así sucesivamente. Además hasta que transcurran doce horas, ó vuelvan á ser las doce, deben superponerse once veces; luego si tomamos por unidad la hora y designamos por x el tiempo que debe transcurrir entre dos superposiciones sucesivas, la ecuación del problema será

$$11x = 12 \qquad \text{de donde} \qquad x = \frac{12}{11}$$

como la unidad es la hora, podremos reducir el quebrado $\frac{12}{11}$ á complejo de horas, minutos y segundos, y tendremos:

$$x = \frac{12}{11} \text{ de hora} = 1\ h\ 5\ m\ 27\frac{3}{11}s$$

la superposición de agujas tendrá, pues, lugar á las

$$1h\ 5m\ 27\frac{3}{11}s,\ 2h\ 10m\ 54\frac{6}{11}s,\ 3h\ 16m\ 21\frac{9}{11}s.......$$

PROBLEMA. 2.º *Dadas la suma y diferencia de dos cantidades, hallarlas.*

Designemos por x é y las cantidades desconocidas y por s, su suma, y evidentemente una de las ecuaciones del problema será $x + y = s$: designando por d la diferencia de ambas cantidades, la otra ecuación del problema será $x - y = d$. Luego tenemos que resolver el sistema

$$x + y = s$$
$$x - y = d$$

sumando y restando estas ecuaciones se halla inmediatamente

$$2x = s + d, 2y = s - d$$

de donde

$$x = \frac{s}{2} + \frac{d}{2} \qquad y = \frac{s}{2} - \frac{d}{2}$$

Estas fórmulas son tan importantes que se deben traducir al lenguaje vulgar y se obtendrá la siguiente regla para resolver este problema.

175. Dadas la suma y la diferencia de dos cantidades, *la mayor es igual á la mitad de la suma más la mitad de la diferencia, y la menor igual á la mitad de la suma menos la mitad de la diferencia.*

Ejemplo. Si la suma de dos números es 28 y su diferencia 12, los números serán

$$x = \frac{28}{2} + \frac{12}{2} = 20 \qquad y = \frac{28}{2} - \frac{12}{2} = 8$$

176. Las soluciones negativas en las ecuaciones no indican ningún absurdo; pero en los problemas sobre cantidades concretas suelen indicar que el problema, tal como está enunciado, no tiene solución. En unos casos las soluciones negativas indican la imposibilidad, y en otros se pueden interpretar por un cambio ó generalización del enunciado.

PROBLEMA 3.º *Un padre tiene 60 años, su hijo 34, ¿cuándo la edad del padre será doble de la del hijo?*

Sea x el tiempo que debe transcurrir para que la edad del padre sea doble que la del hijo: al cabo de este tiempo su edad será $60 + x$ y la del hijo $34 + x$; pero según el enunciado, la primera debe ser doble de la segunda; luego tendremos

$$60 + x = 2(34 + x)$$

resolviendo esta ecuación se halla $x = -8$.

Este valor negativo indica que el problema, tal como se ha enunciado, no tiene solución; es decir, que nunca la edad del padre *será* doble de la del hijo

Pero, si convenimos en contar las fechas anteriores al momento actual como negativas, el resultado á que hemos llegado indicará que *hace ocho años* la edad del padre *fué* doble que la del hijo.

Por tanto podremos enunciar así el problema. *La edad de un padre es 60 años, la de su hijo 34, ¿cuánto tiempo hace que la edad del padre fué doble de la de su hijo?*

Designando por x' el tiempo que ha transcurrido desde entonces, la edad del padre era $60 - x'$ y la del hijo $34 - x'$; luego la ecuación del problema será

$$60 - x' = 2(34 - x')$$

Resolviéndola se obtiene $x' = 8$; es decir, que hace ocho años la edad del padre fué doble que la del hijo.

Comparando la ecuación correspondiente al último enunciado con la del primero, vemos que se puede obtener haciendo en la primera $x = -x'$; de donde se deduce $x = -8$, que fué la solución hallada antes.

Hay un medio de generalizar el problema de modo que tan aceptable sea la solución positiva como la negativa: para esto basta suponer que el valor de x puede responder lo mismo á un tiempo pasado que á un tiempo futuro.

Si x representa un tiempo futuro, deberá ser positiva, y por tanto se *sumará aritméticamente* con la edad de las personas: si representa un tiempo pasado, será negativa, y por tanto se *restará aritméticamente*. El enunciado generalizado se podrá hacer en los siguientes términos.

Un padre tiene 60 años, su hijo 34, *¿cuándo será, ó cuando ha sido la edad del padre doble que la de su hijo?*

$$60 + x = 2(34 + x) \qquad x = -8$$

luego x representa un tiempo pasado, y por tanto *hace ocho años* se verificó.

Contaban entonces 52 y 26 años respectivamente.

177. Cuando las fórmulas de las incógnitas de un problema tienen la forma fraccionaria y el denominador es

cero, ó se anula para ciertos valores de los datos sin anularse el numerador, es decir, cuando se presentan bajo la forma $\frac{a}{0}$, hay en general imposibilidad, puesto que las incógnitas toman valores mayores que toda cantidad asignable.

PROBLEMA 4.° *Hallar un número igual á su mitad, más su tercera, más su sexta parte, más uno.*

Designando por x el número, su mitad, tercera y sexta parte serán $\frac{x}{2}, \frac{x}{3}, \frac{x}{6}$; luego la ecuación del problema es

$$x = \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{6} + 1$$

resolviéndola, resulta $x = \frac{1}{0}$, que indica la imposibilidad.

178. Cuando las fórmulas que dan las soluciones de un problema se presentan bajo formas fraccionarias y se anulan el numerador y el denominador, ó se anulan, al menos para ciertos valores de los datos, el problema es en general indeterminado para dichos valores.

PROBLEMA 5.° *Hallar un número igual á su mitad, más su tercera, más su sexta parte.*

Sea x el número pedido, la ecuación del problema será

$$x = \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{6}$$

resolviéndola se halla $x = \frac{0}{0}$

Es fácil convencerse de que el problema es realmente indeterminado, porque las condiciones del enunciado las cumplen todos los números.

179. Para recapitular lo dicho en los problemas anteriores nos serviremos de un ejemplo, llamado *problema de los móviles*, que ofrece todos los casos que pueden ocurrir en la resolución de problemas de primer grado.

PROBLEMA 6.° *Dos móviles cuyas velocidades son* V *y* V' *caminan con movimiento uniforme sobre la recta* XY, *par-*

tiendo en un mismo instante, respectivamente, de los puntos A *y* B, *cuya distancia es* d: *se quiere determinar el tiempo que tardarán en encontrarse y las distancias del punto de encuentro á los puntos* A *y* B.

$$\begin{array}{cccccccccc} & & M' & & A & & B & & M & \\ X & \text{———} & | & \text{———} & | & \text{———} & | & \text{———} & | & \text{———}\ Y \\ & & & & v & & v' & & & \end{array}$$

Para resolver este problema se debe saber que en el movimiento uniforme los espacios ó distancias recorridos en *tiempos iguales* son *iguales*, y que en un tiempo *doble*, *triple*, etc. de otro, el espacio recorrido será *doble*, *triple*, etc. del otro.

Velocidad es el espacio recorrido en la unidad de tiempo; por consiguiente, designando por v la velocidad, los espacios recorridos en una, dos, tres...... unidades de tiempo serán v, $2v$, $3v$..... y en general en t unidades de tiempo, el espacio recorrido será vt.

Desde luego se comprende que, sobre el sentido del movimiento, se pueden hacer varias hipótesis, pues los móviles se pueden dirigir ambos hacia la derecha, ambos hacia la izquierda, ó uno hacia la derecha y otro hacia la izquierda. Para nuestro objeto es suficiente el primer caso, es decir, que supondremos que los móviles se dirigen en el sentido XY.

Por las condiciones del enunciado se comprende que el punto de encuentro estará situado á la derecha del punto B, en M, por ejemplo.

Designemos por x la distancia AM y por t el tiempo que tarda en recorrerla el primer móvil, cuya velocidad es v; tendremos, según lo dicho arriba, $x = vt$. Del mismo modo, si se designa por y la distancia BM, como el segundo móvil, cuya velocidad es v', debe recorrerla en el tiempo t, se tendrá $y = v't$.

Además la diferencia AM — BM = AB; luego $x - y = d$. Entonces las ecuaciones que resuelven el problema son

$$x = vt$$
$$y = v't$$
$$x - y = d$$

sustituyendo los valores de x é y tomados de las dos primeras ecuaciones en la tercera, se tendrá

$$vt - v't = d$$

de donde

$$t = \frac{d}{v - v'}$$

y por consiguiente

$$x = \frac{vd}{v - v'} \qquad y = \frac{v'd}{v - v'}$$

Discusión de las fórmulas.—Podemos hacer sobre los valores de v y v' las siguientes hipótesis:

1.ª $v > v'$, 2.ª $v = v'$, 3.ª $v < v'$

PRIMER CASO, $v > v'$. En este caso $v - v' > 0$; luego t, x é y son positivas, lo cual significa que el encuentro *tendrá* lugar en un punto situado á la *derecha* de A y de B.

Este resultado está conforme con el enunciado, porque siendo mayor la velocidad del móvil que parte de A que la del que parte de B, tenía que llegar á alcanzarle en un punto tal como el M, al cabo de cierto tiempo después del momento de la partida.

SEGUNDO CASO, $v = v'$. De esta hipótesis se deduce $v - v' = 0$, y por consiguiente

$$t = \frac{d}{0} = \infty \qquad x = \frac{vd}{0} = \infty \qquad y = \frac{v'd}{0} = \infty$$

El problema es imposible, como debíamos presumir antes de resolverle, pues siendo las velocidades iguales y marchando un móvil delante del otro en la misma dirección, es imposible que se encuentren.

Si además de $v = v'$ suponemos $d = 0$, en cuyo caso los puntos A y B se confunden, se tendrá:

$$t = \frac{0}{0} \qquad x = \frac{0}{0} \qquad y = \frac{0}{0}$$

lo cual significa que si los móviles parten de un primo punto, en una misma dirección, con iguales velocidades, todos los momentos y todos los puntos de la recta XY son de encuentro, lo cual es cierto, porque en las condiciones indicadas van siempre juntos.

TERCER CASO, $v < v'$. De aquí se deduce $v - v' < 0$; luego t, x é y son negativos.

Tal como se ha enunciado el problema, esta solución no es admisible, porque indica que los móviles se encuentran *antes* de su salida de los puntos A y B y en un punto situado á la *izquierda* de B y de A. Pero el problema se hace posible y la solución á que hemos llegado admisible, suponiendo que el movimiento comenzó desde hace un tiempo indefinido y que los móviles pasan al mismo tiempo por los puntos A y B. Entonces el valor $t < 0$ indica que el encuentro *ha tenido lugar* antes de pasar los móviles por A y B: los valores $x < 0$, $y < 0$, indican que el punto de encuentro será tal como M', situado á la izquierda de B y de A.

Este resultado está conforme con el último enunciado del problema, pues siendo mayor la velocidad del móvil que va delante, es imposible que el encuentro tenga lugar en un tiempo venidero, pero puede haber tenido lugar en un punto tal como M', situado á la izquierda de B y A, de tal modo que las distancias M'A y M'B sean recorridas por los móviles en tiempos iguales.

LIBRO II

LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

CAPITULO PRIMERO

Resolución de la ecuación de segundo grado con una incógnita

180. Las transformaciones de las ecuaciones explicadas en los números 147 á 155 son aplicables á las ecuaciones de todos los grados; pero la resolución de la ecuación de segundo grado exige que estudiemos una transformación que consiste en extraer la raíz cuadrada de los dos miembros de una ecuación.

181. *Si de los dos miembros de una ecuación se extrae la raíz cuadrada, se obtienen todas las soluciones dando á los resultados el doble signo* $\pm$

Sea la ecuación

$$A = B \qquad (\alpha)$$

decimos que es equivalente á

$$\sqrt{A} = \pm \sqrt{B} \qquad (*)$$

ó sea al sistema

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{A} &= \sqrt{B} \\ \sqrt{A} &= -\sqrt{B} \end{aligned}\right\} \quad (\beta)$$

En efecto, las ecuaciones (α) y (β) se pueden escribir así

$$A - B = 0, \qquad \sqrt{A} - \sqrt{B} = 0, \qquad \sqrt{A} + \sqrt{B} = 0$$

y como el producto de la suma de dos cantidades por su diferencia es igual á la diferencia de los cuadrados de dichas cantidades, se tendrá

(*) Es inútil escribir $\pm\sqrt{A} = \pm\sqrt{B}$, porque $-\sqrt{A} = \pm\sqrt{B}$, se obtiene cambiando los signos á los dos miembros de $\sqrt{A} = \mp\sqrt{B}$ y por consiguiente será equivalente con ella (núm. 154).

$$(\sqrt{A} - \sqrt{B})(\sqrt{A} + \sqrt{B}) = A - B$$

donde el primero y el segundo miembro deben ser nulos. Pero el primer miembro se puede anular siendo $\sqrt{A} = \sqrt{B}$ ó $\sqrt{A} = -\sqrt{B}$; es decir, con las soluciones de las ecuaciones (β) y el segundo siendo $A = B$, es decir, con las soluciones de la ecuación (α).

Luego la ecuación (α) se satisface con todas las soluciones de las ecuaciones (β), y recíprocamente las ecuaciones (β) son todas las soluciones de la ecuación (α).

182. Una ecuación de segundo grado con una incógnita puede tener tres clases de términos, á saber: con el cuadrado, con la primera potencia é independientes de la incógnita; luego después de preparada y pasando todos los términos al primer miembro, tendrá la forma

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

en la cual a, b, c, son números, ó monomios, ó polinomios, pudiendo ser nulos b y c; pero a tiene que ser distinto de cero, sin lo cual la ecuación no sería de segundo grado.

Para resolver la ecuación (1) pasaremos c al segundo miembro y multiplicaremos por $4a$, tendremos:

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

el primer miembro de esta ecuación está formado por los dos primeros términos del cuadrado del binomio $2ax + b$; luego sumando á los dos miembros la cantidad b^2, cuadrado de dicho segundo término, resultará

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

ó bien

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros y dando al segundo el signo $\pm$, para obtener todas las soluciones (núm. 181), se tendrá

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \qquad (2)$$

pasando b al segundo miembro y dividiendo por $2a$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (3)$$

Esta fórmula, traducida al lenguaje vulgar, dice: *En la ecuación general de segundo grado, la incógnita es igual al coeficiente del segundo término con signo contrario, más y menos la raíz cuadrada del cuadrado de dicho coeficiente, menos el cuádruplo del producto del término independiente por el coeficiente del primer término, dividido todo por el duplo de este coeficiente.*

183. Separando en la fórmula (3) los dos valores correspondientes á los signos + y — del radical y designándose por x' y x'', se tendrá:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (4)$$

de modo que la ecuación de segundo grado tiene dos soluciones ó raíces, y sólo tiene dos, puesto que la fórmula (3) se ha deducido resolviendo las dos ecuaciones de primer grado comprendidas en la (2), que es equivalente á la ecuación propuesta (núm. 181).

184. Sumando las fórmulas (4) quedan los valores de las raíces resulta

$$x' + x'' = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

multiplicándolas, para lo cual se tiene presente que la suma de dos cantidades por su diferencia es la diferencia de los cuadrados de las mismas cantidades, se obtiene

$$x'x'' = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

De donde se deduce que: *en toda ecuación de segundo grado, la suma de las raíces es igual al coeficiente del segundo término cambiado de signo y dividido por el coeficiente del primero; y el producto de las raíces es igual al tercer término dividido por el coeficiente del primero.*

185. APLICACIONES.

1.ª Resolver la ecuación

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

haciendo $a = 1$, $b = -4$, $c = 3$, en la fórmula (3), resulta

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = 2 \pm 1$$

y separando las raíces

$$x' = 2 + 1 = 3, \qquad x'' = 2 - 1 = 1$$

En este ejemplo las raíces son positivas y enteras.

2.ª Resolver la ecuación

$$7x^2 - 12x - 4 = 0$$

haciendo $a = 7$, $b = -12$, $c = -4$, se tendrá

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 112}}{14} = \frac{12 \pm 16}{14}$$

y separando las raíces

$$x' = \frac{12 + 16}{14} = 2, \qquad x'' = \frac{12 - 16}{14} = -\frac{2}{7}$$

las raíces son comensurables, una entera y otra fraccionaria, y una positiva y otra negativa.

3.ª Resolver la ecuación

$$3x^2 + 15x + 14 = 0$$

haciendo $a = 3$, $b = 15$, $c = 14$, resulta

$$x = \frac{-15 \pm \sqrt{225 - 168}}{6} = \frac{-15 \pm \sqrt{57}}{6}$$

$$x' = \frac{-15 + \sqrt{57}}{6}, \qquad x'' = \frac{-15 - \sqrt{57}}{6}$$

las raíces son incomensurables y ambas negativas.

4.ª Resolver la ecuación

$$x^2 + 8x + 25 = 0$$

de donde

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 100}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{-36}}{2}$$

hemos visto (núm. 116) que $\sqrt{-36} = \sqrt{36}\,.\,\sqrt{-1} = 6\sqrt{-1}$, ó bien $6i$; luego

$$x = \frac{-8 \pm 6i}{2} = -4 \pm 3i$$

y separando las raíces

$$x' = -4 + 3i, \qquad x'' = -4 - 3i$$

las raíces son ahora dos cantidades imaginarias conjugadas (núm. 118).

En todos los ejemplos podemos sumar y multiplicar las raíces, y veremos comprobadas las propiedades demostradas en el núm. 184.

5.ª Resolver la ecuación

$$4x^2 - 12x + 9 = 0$$

haciendo $a = 4$, $b = -12$, $c = 9$, resulta

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{8} = \frac{12 \pm 0}{8} = \frac{3}{2}$$

á primera vista parece que la ecuación tiene una sola raíz, pero consiste en que como el radical se anula, las dos raíces se hacen iguales, como veremos más abajo en la discusión de la fórmula general. De todos modos, ahora podemos comprobar las propiedades de las raíces (núm. 184), porque haciendo $x' = x'' = \frac{3}{2}$, se tendrá

$$x' + x'' = \frac{6}{2} = -\left(\frac{-12}{4}\right) \qquad x'x'' = \frac{9}{4}$$

6.ª Resolver la ecuación

$$\frac{1}{x-m} + \frac{1}{x-n} - \frac{1}{x-p} = 0$$

quitando denominadores se tendrá

$$(x-n)(x-p) + (x-m)(x-p) - (x-m)(x-n) = 0$$

efectuando las multiplicaciones indicadas y reduciendo los términos semejantes, resulta

$$x^2 - 2px + mp + np - mn = 0$$

haciendo ahora $a = 1$, $b = -2p$, $c = mp + np - mn$, en la fórmula (3) se obtendrá

$$x = \frac{2p \pm \sqrt{4(mp + np - mn)}}{2}$$

sacando el factor 4 del radical y dividiendo ambos términos por 2

$$x' = p + \sqrt{mp + np - mn} \qquad x'' = p - \sqrt{mp + np - mn}$$

186. *Discusión de la fórmula.*—Sea la ecuación general de segundo grado

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

de la cual hemos deducido las raíces

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (4)$$

Podemos suponer $a > 0$, porque si fuese negativa, cambiaríamos de signo toda la ecuación. En cuanto á la cantidad $b^2 - 4ac$ puede ser positiva, nula ó negativa, por lo cual distinguiremos tres casos principales en la discusión.

PRIMER CASO. $b^2 - 4ac > 0$

Las raíces serán *reales*, porque la cantidad subradical es positiva: si $b^2 - 4ac$ tiene raíz exacta, serán *comensurables*, y no lo serán en el caso contrario.

Para hallar los signos de las raíces tenemos que hacer todas las hipótesis posibles sobre los signos de b y c, que dan lugar á las cuatro combinaciones

$$b > 0 \text{ y } c > 0, \qquad b > 0 \text{ y } c < 0,$$
$$b < 0 \text{ y } c > 0, \qquad b < 0 \text{ y } c < 0,$$

En la primera hipótesis $-b$ será una cantidad negativa, á la cual hay que sumar y restar el radical $\sqrt{b^2 - 4ac}$; pero por ser c positiva, $b^2 - 4ac < b^2$ y en consecuencia $\sqrt{b^2 - 4ac} < b$; luego los signos de los numeradores de las raíces los da la cantidad $-b$, y puesto que el denominador $2a$ es positivo, los signos de los valores de las raíces los dan los numeradores; entonces en la hipótesis actual, las dos raíces son negativas.

Razonando en las demás hipótesis como en ésta, obtendremos los siguientes resultados:

$b > 0,\ c > 0,$	$b^2 - 4ac < b^2$	$\sqrt{b^2 - 4ac} < b$	$x' < 0,$	$x'' < 0$
$b < 0,\ c > 0,$	$b^2 - 4ac < b^2$	$\sqrt{b^2 - 4ac} < b$	$x' > 0,$	$x'' > 0$
$b > 0,\ c < 0,$	$b^2 - 4ac > b^2$	$\sqrt{b^2 - 4ac} > b$	$x' > 0,$	$x'' < 0$
$b < 0,\ c < 0,$	$b^2 - 4ac > b^2$	$\sqrt{b^2 - 4ac} > b$	$x' > 0,$	$x'' < 0$

Luego cuando $b^2 - 4ac > 0$, las raíces son *reales* y *desiguales, ambas positivas* ó *ambas negativas*, ó *una positiva y otra negativa.*

SEGUNDO CASO. $b^2 - 4ac = 0$

Las fórmulas de las raíces dan ahora

$$x' = x'' = -\frac{b}{2a}$$

por consiguiente las raíces son *reales* é *iguales; positivas* si $b \angle 0$, y negativas si $b \searrow 0$

TERCER CASO. $b^2 - 4ac \angle 0$

Puesto que $b^2 - 4ac$ es una cantidad negativa, las raíces no pueden ser reales, porque contienen un término imaginario.

Si convenimos en hacer $b^2 - 4ac = -k^2$, tendremos

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{-k^2}}{2a}.$$

y como $\sqrt{-k^2} = \sqrt{k^2(-1)} = k\sqrt{-1} = ki$

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{k}{2a}i$$

y haciendo $-\frac{b}{2a} = \alpha, \quad \frac{k}{2a} = \beta$

$$x = \alpha \pm \beta i$$

y separando las raíces

$$x' = \alpha + \beta i, \quad x'' = \alpha - \beta i$$

luego en este caso las raíces son dos cantidades imaginarias, ó complejas conjugadas.

187. ESCOLIO. La ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + = c = 0$, multiplicada por $4a$ es

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

sumando y restando b^2, resulta

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 + 4ac - b^2 = 0$$

pero los tres primeros términos forman el cuadrado del binomio $2ax + b$; luego tendremos

$$(2ax + b)^2 + (4ac - b^2) = 0$$

El primer término es un cuadrado; luego no puede ser nunca negativo: si $b^2 - 4ac \searrow 0$, $4ac - b^2 \angle 0$; entonces la ecuación anterior puede ser satisfecha: si $b^2 - 4ac = 0$, el término $(2ax + b)^2$ se debe anular para satisfacerla: si $b^2 - 4ac \angle 0$, entonces $4ac - b^2 \searrow 0$, y el primer miembro se compondrá de dos cantidades positivas; luego es *impo-*

sible que haya valores *reales* de x que satisfagan la ecuación.

188. CASOS PARTICULARES.

1.° $b=0$. La fórmula general se reduce á

$$x=\frac{\pm\sqrt{-4ac}}{2a}=\pm\sqrt{-\frac{4ac}{4a^2}}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}} \qquad (5)$$

que da dos raíces reales ó imaginarias, pero iguales y de signo contrario.

La resolución de la ecuación general no exige que b sea distinto de cero, porque nunca se multiplica ni divide por b; luego la fórmula debe ser aplicable á este caso. Así es, en efecto, porque haciendo $b=0$, en la ecuación general tendremos

$$ax^2+c=0$$

pasando c al segundo miembro, dividiendo por a, y extrayendo la raíz cuadrada, resulta

$$x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}} \qquad (5)$$

conforme hallamos antes.

2.° $c=0$. La fórmula general da

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2}}{2a}=\frac{-b\pm b}{2a}$$

ó separando las raíces

$$x'=\frac{-b+b}{2a}=0, \quad x''=\frac{-b-b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

Por las mismas razones que antes debemos presumir que la fórmula general es aplicable á este caso, y en efecto, haciendo $c=0$ en la ecuación general se tiene.

$$ax^2+bx=0$$

sacando x en factor común

$$(ax+b)x=0$$

y como para hallar todas las soluciones debemos igualar á cero sucesivamente los dos factores del primer miembro, tendremos:

$$ax+b=0 \quad \text{de donde} \quad x=-\frac{b}{a} \qquad (6)$$

$$x = 0 \qquad (7)$$

que son las raíces obtenidas por la fórmula general.

3.° $a = 0$. La fórmula general de

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2}}{0} = \frac{-b + b}{0}$$

ó separando las raíces

$$x' = \frac{-b + b}{0} = \frac{0}{0}, \quad x'' = \frac{-b - b}{0} = -\frac{2b}{0} = \pm \infty$$

Pero la resolución de la ecuación de segundo grado exige que a sea distinta de cero; luego se debe presumir que la fórmula general no es aplicable á este caso; y en efecto, si llevamos á la ecuación la hipótesis $a = 0$ tendremos:

$$bx + c = 0, \quad \text{de donde} \quad x = -\frac{c}{b}$$

Para poder aplicar la fórmula general á este caso, vamos á prepararla de modo que en el numerador y denominador resulte el factor a, y le suprimiremos.

Tomemos la primera raíz, tendremos:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

multiplicando los dos términos por $-b - \sqrt{b^2 - 4ac}$ se tendrá sucesivamente

$$x' = \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{2a(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}$$

$$= \frac{2c}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

y si hacemos $a = 0$, en la última expresión

$$x' = -\frac{c}{b} \qquad (8)$$

que es el valor obtenido directamente por la ecuación $bx + c = 0$.

Tomando la segunda raíz

$$x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

multiplicando ambos términos por $-b+\sqrt{b^2-4ac}$, se tendrá de un modo análogo al de la primera raíz

$$x'' = \frac{2c}{-b+\sqrt{b^2-4ac}}$$

y haciendo $a=0$, resulta

$$x'' = \frac{2c}{0} = \pm\infty \qquad (9)$$

luego en este caso una raíz es $-\frac{c}{b}$, y la otra se hace infinita.

4.ª $b=0$, $c=0$. Lo mismo por la fórmula que por la ecuación general se obtiene

$$x'=0,\ x''=0$$

5.º $a=0$, $c=0$, las fórmulas (8) y (9) dan

$$x'=0, \qquad x''=\frac{0}{0}$$

Sólo satisface la primera, puesto que la ecuación es $bx=0$

6.º $a=0$, $b=0$. Las fórmulas (8) y (9) dan

$$x'=-\frac{c}{0}=\pm\infty \qquad x''=\frac{2c}{0}=\mp\infty$$

7.º $a=0$, $b=0$, $c=0$. Lo mismo las fórmulas que la ecuación dan $x=\frac{0}{0}$, como debe ser, puesto que realmente no existe la ecuación.

CAPÍTULO II.

Resolución de algunos sistemas de ecuaciones de segundo grado.

*189. La ecuación completa de segundo grado con dos incógnitas tiene la forma

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

La resolución de un sistema de dos ecuaciones completas de segundo grado con dos incógnitas, no es propia del Álgebra elemental, porque eliminando una de las incógnitas, resulta una ecuación de cuarto grado: por lo tanto, sólo nos proponemos resolver algunos sistemas sencillos de ecuaciones incompletas, siendo en muchos casos una de ellas de primer grado.

Ejemplos: 1.° Resolver el sistema

$$x + y = s$$
$$xy = p$$

de la primera se deduce

$$y = s - x$$

y sustituyendo en la segunda

$$x(s - x) = p$$

efectuando operaciones y cambiando de signo

$$x^2 - sx + p = o$$

de donde

$$x = \frac{s \pm \sqrt{s^2 - 4p}}{2}$$

Los valores de x é y son las dos raices, pero de tal modo que si se toma para valor de x la primera, el valor de y es la segunda y al contrario.

El sistema de ecuaciones que hemos resuelto, responde al problema de *hallar dos números cuando se conocen la suma y el producto de dichos números.*

Este problema se puede resolver directamente formando una ecuación de segundo grado en que el coeficiente del segundo término sea la suma dada cambiada de signo, el tercer término el producto dado y el coeficiente del primer término la unidad. Basta para esto recordar las propiedades de las raíces de la ecuación de segundo grado (número. 184.)

2.° Resolver el sistema de ecuaciones

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a + \sqrt{b}}$$
$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \sqrt{a - \sqrt{b}}$$

siendo, a y b, cantidades racionales y $\sqrt{b}$ irracional.

Elevando al cuadrado la primera resulta

$$x + y + 2\sqrt{xy} = a + \sqrt{b} \qquad (1)$$

antes de seguir adelante debemos demostrar que si se tiene $a' + \sqrt{b'} = a + \sqrt{b}$ siendo racionales a, a', b y b', é irracionales $\sqrt{b}$ y $\sqrt{b'}$, se debe tener $a = a'$, $b = b'$, en efecto de la igualdad $a' + \sqrt{b'} = a + \sqrt{b}$ se deduce $\sqrt{b'} = (a - a') + \sqrt{b}$, y elevado al cuadrado

$$b' = (a - a')^2 + b + 2(a - a')\sqrt{b}$$

de donde

$$2(a - a')\sqrt{b} = (a - a')^2 + (b - b')$$

como el segundo miembro es racional, el primero también tiene que serlo, lo cual es imposible si no se tiene $a = a'$; pero entonces, puesto que el primer miembro se anula, el segundo también se tiene que anular, luego $b = b'$.

Esto supuesto, de la ecuación (1) se deduce

$$x + y = a, \qquad x\,y = \frac{b}{4}$$

luego x é y son las raíces de la ecuación (núm. 184)

$$z^2 - az + \frac{b}{4} = o$$

de donde

$$x = \frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}, \qquad y = \frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}$$

y extrayendo la raíz cuadrada

$$\sqrt{x} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}}, \qquad \sqrt{y} = \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

de donde

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}}, \quad \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}} \quad (2)$$

Estas fórmulas son muy importantes en muchas aplicaciones de la Geometría y Trigonometría porque sirven para transformar radicales dobles en radicales simples, cuando $a^2 - b$ es cuadrado perfecto.

Así, $$\sqrt{18 \pm 6\sqrt{5}} = \sqrt{15} \pm \sqrt{3}$$

Para llegar á este resultado basta hacer en las fórmulas

$a = 18$, $b = 180$ de donde $a^2 - b = 144$, $\sqrt{a^2 - b} = 12$

3.° Resolver el sistema

$$x + y = 2a$$
$$x^2 + y^2 = 4b^2$$

Elevando al cuadrado la primera ecuación y restando del resultado la segunda se tiene

$$4xy = 4(a^2 - b^2) \quad \text{ó bien} \quad xy = a^2 - b^2$$

luego esta ecuación y la primera nos dan la suma y el producto de dos números, entonces (Ejemplo 1.°)

$$x = a \pm \sqrt{2b^2 - a^2},\ y = a \mp \sqrt{2b^2 - a^2}$$

4.° Resolver el sistema

$$xy = a^2$$
$$x^2 + y^2 = b^2$$

elevando al cuadrado la primera se tiene

$$x^2y^2 = a^4$$

de donde (Ejemplo 1.°)

$$x^2 = \frac{b^2 \pm \sqrt{b^4 - 4a^4}}{2}, \qquad y^2 = \frac{b^2 \mp \sqrt{b^4 - 4a^4}}{2}$$

y por consiguiente

$$x = \pm \sqrt{\frac{b^2 \pm \sqrt{b^4 - 4a^4}}{2}}, \qquad y = \pm \sqrt{\frac{b^2 \mp \sqrt{b^4 - 4a^4}}{2}}$$

Por las fórmulas(2)del ejemplo 2.° esta solución se transforma en

$$x = \frac{1}{2}\left(\pm \sqrt{b^2+2a^2} \pm \sqrt{b^2-2a^2}\right), \quad y = \frac{1}{2}\left(\pm \sqrt{b^2+2a^2} \mp \sqrt{b^2-2a^2}\right)$$

5.° Resolver la ecuación llamada bicuadrada

$$ax^4 + bx^2 + c = o$$

haciendo $x^2 = y$, de donde $x = \pm \sqrt{y}$, se tiene

$$ay^2 + by + c = o$$

que es una ecuación de segundo grado de cual resulta

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ luego } x = \pm \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

CAPÍTULO III.

Problemas que conducen á ecuaciones de segundo grado

190. Problema 1.° *Un padre al morir deja una suma de 46800 pesetas, que se han de repartir por partes iguales entre sus hijos; antes de repartirlas mueren dos de sus hijos y á causa de esto los otros reciben cada uno 1950 pesetas más. ¿Cuántos eran los hijos?*

Designemos por x el número de hijos, la parte que cada uno recibiría no muriendo ninguno sería $\frac{46800}{x}$ y la que recibe efectivamente á causa de la muerte de dos de ellos es $\frac{76800}{x-2}$: pero esta última es 1950 pesetas más que lo primera, luego la ecuación del problema es

$$\frac{46800}{x-2} = \frac{46800}{x} + 1950$$

antes de quitar denominadores podemos dividir todos los términos de la ecuación por 1950 y resultará

$$\frac{24}{x-2} = \frac{24}{x} + 1$$

quitando denominadores y simplificando

$$x^2 - 2x - 48 = o$$

de donde

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+192}}{2} = \frac{2 \pm 14}{2}$$

y separando las raíces

$$x' = 8, \quad x'' = -6$$

La segunda raíz no es admisible en el problema actual, que por su naturaleza debe tener solución entera y positiva, luego no podemos aceptar más que $x = 8$. Que satisface al problema, como se puede comprobar.

192. Problema 2.° *Colocando en los puntos A y B dos*

focos luminosos, hallar qué puntos de la recta AB reciben iguales cantidades de luz de ambos focos.

$$\overset{}{X}\text{———}\overset{A}{|}\text{———}\overset{I}{|}\text{——}\overset{M}{|}\text{——}\overset{B}{|}\text{————}\overset{M'}{|}\text{———}Y$$

En la Física se aprende que las intensidades de la luz emitida por un foco luminoso á dos puntos distintos, están en *razón inversa de los cuadrados de las distancias del foco á los puntos.*

Esto supuesto, sea AB $= d$, la distancia conocida de los focos luminosos: sean a^2 y b^2, las intensidades respectivas de las luces de ambos focos á la unidad de distancia y sea M, un punto igualmente iluminado por las dos luces. Hagamos MA $= x$, y tendremos MB $= d - x$,

Designando por i^2 la intensidad de la luz que recibe el punto M, del foco colocado en A, tendremos, en virtud de la ley citada

$$\frac{a^2}{i^2} = \frac{x^2}{1} \quad \text{de donde} \quad i^2 = \frac{a^2}{x^2}$$

La intensidad de la luz que recibe el punto M, del foco colocado en B, es también i^2, según la hipótesis, luego tendremos:

$$\frac{b^2}{i^2} = \frac{(d-x)^2}{1} \quad \text{de donde} \quad i^2 = \frac{b^2}{(d-x)^2}$$

iguaalndo estas dos expresiónes de i^2, tendremos la ecuación del problema que no tendrá mas incognita que x

$$\frac{a^2}{x^2} = \frac{b^2}{(d-x)^2}$$

Se puede preparar esta ecuación quitando denominadores y resolviendo por el método general, pero es más sencillo extraer de ambos miembros la raiz cuadrada, dando á uno de ellos el doble signo $\pm$ para no perder soluciones.

$$\frac{a}{x} = \pm \frac{b}{d-x} \qquad (1)$$

quitando denominadores y resolviendo

$$x = d. \frac{a}{a \pm b} \qquad (2)$$

de donde

$$x' = d.\frac{a}{a+b}, \quad x'' = d.\frac{a}{a-b}$$

Discusión de las raíces

Primer caso. $a^2 > b^2$, de donde $a > b$

En este caso el denominador $a + b$, es mayor que a y menor que $2a$, luego la fracción $\frac{a}{a+b}$, será menor qué $\frac{a}{a}$ y mayor que $\frac{a}{2a}$, entonces tendremos

$$1 > \frac{a}{a+b} > \frac{1}{2}$$

de donde multiplicando por d

$$d > d.\frac{a}{a+b} > \frac{d}{2}$$

luego la primera raíz, ó sea el valor de x' está comprendido entre d, y $\frac{d}{2}$: por tanto existe un punto M, igualmente iluminado por ambas luces, colocado entre A y B, á una distancia de A (luz más intensa) mayor que de B (luz menos intensa) como se manifiesta en la figura, porque I es el punto medio de AB.

El denominador $a - b$ es menor que a, luego $\frac{a}{a-b} > 1$ y multiplicando por d,

$$d.\frac{a}{a-b} > d$$

luego la segunda raíz, ó sea el valor de x'' es mayor que d: por consiguiente existe otro punto M', igualmente iluminado por ambas luces, colocado á la derecha de A, por ser $x'' > o$, y á la derecha de B, por ser $x'' > d$.

Segundo caso. $a^2 = b^2$, de donde $a = b$.

Ahora tenemos

$$x' = d.\frac{a}{2a} = \frac{d}{2}$$

luego el punto I medio de la recta AB está igualmente iluminado por ambas luees

$$x'' = d.\frac{a}{a-a} = \frac{d}{o} = \infty$$

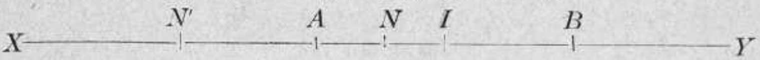
luego no existe un segundo punto igualmente iluminado por ambas luces.

Si en la hipótesis $a = b$, hacemos $d = o$, la raíces serán

$$x' = o, \quad x'' = \frac{o}{o}$$

luego cualquier punto de la recta X y estará igualmente iluminado por las dos luces.

TERCER CASO. $a^2 < b^2$, de donde $a < b$



En este caso el denominador $a + b$ es mayor que $2a$, luego $\frac{a}{a+b}$ será menor que $\frac{a}{2a}$ y como evidentemente $\frac{a}{a+b} > o$, tendremos

$$\frac{1}{2} > \frac{a}{a+b} > o$$

y multiplicando por d

$$\frac{d}{2} > d.\frac{a}{a+b} > o$$

luego el valor x' es positivo, pero menor que $\frac{d}{2}$: por consiguiente existe un punto N, igualmente iluminado por ambas luces, colocado entre A y B, á una distancia de A, menor que de B; como manifiesta la figura porque I es el punto medio de AB.

El denominador $a - b$, es negativo luego $x'' < o$, por tanto existe á la izquierda de A, un punto N' igualmente iluminado, por las dos luces.

193. PROBLEMA 3.° *Hallar un número de tres cifras tal que la una de los cuadrados de las tres cifras sea 104 que el cuadrado de la cifra de las decenas sea igual al duplo de la de las centenas por las unidades más 4, y que restando de él, el número formado por las mismas cifras invirtiendo su orden la diferencia sea 594.* (Ritt)

Designando por x la cifra de las centenas por y la de las decenas y por z la de las unidades, la expresión del número en el sistema decimal será $10^2x + 10y + z$. Sentado esto es fácil ver que las condiciones dadas en el enunciado son

$$x^2 + y^2 + z^2 = 104$$
$$y^2 = 2xz + 4$$
$$100x + 10y + z - (100z + 10y + x) = 594$$

Sustituyendo en la primera el valor de y^2, tomado de la segunda, resulta

$$x^2 + 2xz + z^2 = 104 - 4, \quad \text{ó bien} \quad (x + z)^2 = 100$$

y extrayendo la raíz cuadrada

$$x + z = 10$$

desechamos la solución negativa $x + z = -10$, porque las cifras del número tienen que tener valores positivos.

De la tercera ecuación se deduce inmediatamente

$$99x - 99z = 594$$

y dividiendo ambos miembros por 99

$$x - z = 6$$

de esta y de lo $x + z = 10$, se deduce, $x = 8$, $z = 2$. Sustituyendo en la $y^2 = 2xz + 4$, tendremos $y^2 = 36$, de donde $y = 6$, pues la solución $y = -6$, no es aceptable.

El número pedido será, pues, 862.

TERCERA PARTE.

PROGRESIONES Y LOGARITMOS.

LIBRO PRIMERO.

LAS PROGRESIONES.

CAPÍTULO PRIMERO.

Las progresiones aritméticas.

194. *Se llama progresión aritmética, ó por diferencia, á una serie de términos tales que restando de cada uno el anterior dan siempre una misma diferencia, que se llama razón de la progresión.*

De esta definición se deduce que cada término es igual al anterior sumado con la razón.

Para indicar una progresión se escribe delante de sus términos el signo $\div$ y entre cada dos de ellos se coloca un punto

Ejemplos: $\div 1 . 3 . 5 . 7 . 9 . 11 \ldots\ldots$

$\div 20 . 14 . 8 . 2 . 4 \ldots\ldots$

Si la razón es *positiva*, como en el primer ejemplo, los términos aumentarán á partir del primero: en este caso la progresión es *creciente*. Si la razón es *negativa*, como en el segundo ejemplo, la progresión será *decreciente*.

Dada la naturaleza de la progresión se comprende que se puede prolongar indefinidamente: pero para estudiar sus propiedades, supondremos que tiene un número limitado de términos.

195. *Cualquier término de una progresión aritmética es igual al primero más tantas veces la razón, como términos le preceden.*

En efecto, sea la progresión general

$$\div a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \ldots\ldots \,.\, h \,.\, k \,.\, l$$

Designemos por r la razón y tendremos por definición

$$b = a + r, \quad c = b + r, \quad d = c + r \ldots\ldots$$

sustituyendo en la segunda el valor que tiene b, en la primera; en la tercera el valor que resulta para c y así sucesivamente, se tendrá

$$b = a + r, \quad c = a + 2r, \quad d = a + 3r$$

lo que prueba que el teorema es cierto para los primeros términos.

Vamos á demostrar que si es cierto para un término cualquiera, lo será para el siguiente, en cuyo caso como se verifica hasta el cuarto término, también se verificará para el quinto; verificándose para el quinto, también para el sexto y así sucesivamente, luego será general.

Sea, pues, t un término que ocupa el lugar $m + 1$, ó al cual preceden m; t' el término siguiente y admitamos que el teorema tiene lugar para el término t, tendremos:

$$t = a + mr$$

y como por definición

$$t' = t + r$$

tendremos

$$t' = a + (m + 1)\, r$$

igualdad que demuestra el teorema.

Siendo n el número de términos de la progresión y l su último término, se tendrá

$$l = a + (n - 1)\, r \qquad (1)$$

196. *Un término cualquiera de una progresión aritmética es igual al último, menos tantas veces la razón como términos le siguen.*

Despejando a en la fórmula (1) tendremos:

$$a = l - (n - 1)\, r \qquad (2)$$

que demuestra el teorema, pues siendo cierto para el primer término, para otro término cualquiera se puede suponer que la progresión comienza en dicho término y termina en l.

197. *Si una progresión aritmética creciente se continúa indefinidamente, sus términos llegarán á ser mayores que cualquiera cantidad dada por grande que esta sea.*

Sea A la cantidad dada, decimos que si n es suficientemente grande se podrá satisfacer siempre la relación

$$a + (n - 1)\, r > A$$

En efecto, pasando a al segundo miembro resulta

$$(n - 1)\, r > A - a$$

y como ambos miembros son positivos y r también es positiva se deducirá por una propiedad puramente aritmética

$$n - 1 > \frac{A - a}{r} \quad \text{ó bien} \quad n > 1 + \frac{A - a}{r}$$

luego cuando el número de términos sea mayor que el segundo miembro de la desigualdad anterior habremos conseguido formar un término mayor que A.

198. *Interpolar $n - 2$ medios aritméticos, entre dos números dados es formar una progresión aritmética en la cual los números dados sean los extremos y que por consiguiente tendrá n términos.*

Si conociésemos la razón podríamos formar la progresión considerando como primer término el menor, si la razón es positiva y el mayor, si es negativa.

Ahora bien, designando por a y l los números dados y por r la razón desconocida tendremos (núm. 195)

$$l = a + (n - 1)\, r$$

y despejando r

$$r = \frac{l - a}{n - 1} \qquad (3)$$

y como $n - 1$ es el número de terminos que se interpolan mas uno, podremos enunciar la siguiente:

Regla. *Para interpolar medios aritméticos entre dos números dados, se halla la razón de la progresión dividiendo la diferencia de los números dados por el número de términos que se han de interpolar mas uno.*

Ejemplo: Interpolar entre 1 y 29, veinte medios aritméticos.

De la fórmula (3) se deduce

$$r = \frac{29 - 1}{20 + 1} = \frac{28}{21} = \frac{4}{3}$$

luego la progresión pedida será

$$\div\, 1 \,.\, 2\tfrac{1}{3} \,.\, 3\tfrac{2}{3} \,.\, 5 \,.\, 6\tfrac{1}{3} \,.\, 7\tfrac{2}{3} \,.\, 9 \ldots\ldots 29$$

199. *Si entre cada dos términos de una progresión aritmética se interpolan $p - 1$, medios aritméticos, se forma otra progresión cuya razón es el cociente de la razón de la primera progresión por el número p de medios interpolados mas uno.*

Sea la progresión

$$\div\, a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \ldots\, h \,.\, k \,.\, l$$

cuya razón es r.

Si se interpolan entre, a y b, entre b y c, etc., $p - 1$ medios aritméticos los valores de las respectivas razones serán (núm. 198)

$$\frac{b - a}{p},\quad \frac{c - b}{p},\quad \frac{d - c}{p} \ldots \frac{l - k}{p}$$

pero todos los numeradores son iguales á r, luego todas tendrán por expresión $\frac{r}{p}$ y en consecuencia resultará una progresión única cuya razón será $\frac{r}{p}$.

200. Escolio. *Cuando el número de términos que se interpola crece indefinidamente, la razón $\frac{r}{p}$ y por consiguiente la diferencia entre dos términos consecutivos de la progresión tiene por límite cero.*

201. *La suma de dos términos equidistantes de los extremos* (primero y último términos) *es igual á la suma de los extremos.*

Sean t y t' dos términos precedido y seguido de m términos respectivamente, tendremos:

$$\left.\begin{aligned} t &= a + mr \\ t' &= l - mr \end{aligned}\right\} \text{ y sumando miembro á miembro}$$

$$t + t' = a + l$$

202. *La suma de los términos de una progresión aritmética es igual á la mitad del producto de la suma de los extremos, por el número de términos.*

Sea siempre la progresión

$$\div a . b . c . d ..... h . k . l$$

Designando por S la suma de sus términos tendremos:

$$S = a + b + c + ... + h + k + l$$

invirtiendo el orden

$$S = l + k + h + ... + c + b + a$$

y sumando ordenadamente

$$2S = (a+l) + (b+k) + (c+h) + ... (h+c) + (k+b) + (l+a)$$

pero siendo n el número de términos de la progresión, en el segundo miembro hay n paréntesis iguales todos á $(a + l)$ puesto que son, ó sumas de los extremos, ó de términos equidistantes de los extremos: por tanto

$$2S = (a + l)\,n$$

de donde

$$S = \frac{(a + l)\,n}{2} \qquad (4)$$

A veces conviene sustituir en vez de l su valor (número 195) y tendremos

$$S = \frac{(2a + (n - 1r)\,n}{2} \qquad (5)\ (*)$$

203. Como casos particulares notables conviene estudiar las siguientes sumas.

1.ª *Suma de los n primeros números enteros.*

Es una progresión cuya razón es la unidad y cuyo número de tèrminos es igual al último término, luego tendremos $a = 1$, $r = 1$, $l = n$, en la fórmula (4) del número anterior, y se tendrá

$$S = \frac{(n + 1)n}{2}$$

2.ª *Suma de los n primeros números impares.*

(*) Entre las cantidades a, l, r, n, S, existen dos relaciones distintas, $l = a + (n - 1)\,r$, $S = \frac{(a + l)n}{2}$ por lo cual, se necesita conocer tres de estas cantidades para hallar las otras dos. Combinando los datos de todas las maneras posibles se pueden resolver 10 problemas.

Es una progresión cuya razón es 2 y cuyo primer término es 1, luego la fórmula (5) del número anterior dará, haciendo $a = 1$, $r = 2$

$$S = \frac{(2 + (n - 1)2)n}{2} = n^2$$

Luego: *la suma de cualquier número de impares consecutivos á partir de 1, es un cuadrado perfecto igual al cuadrado del número de términos.*

CAPÍTULO II

Las progresiones geométricas.

204. *Se llama progresión geométrica ó por cociente una serie de términos tales que, dividiendo cada uno por el anterior, dan siempre un mismo cociente que se llama razón de la progresión.*

De aquí se deduce inmediatamente que cada término es igual al anterior multiplicado por la razón.

Para indicar una progresión geométrica se escribe delante de sus términos el signo $\div\!\div$ y entre cada dos de ellos se colocan dos puntos.

Ejemplos: $\div\!\div\ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 :\ldots\ldots$

$\div\!\div\ 100 : 50 : 25 : 12{,}5 : 6{,}25 : 3{,}125 :\ldots\ldots$

Si la razón es mayor que la unidad, los términos irán *aumentando* y la progresión se dice *creciente;* el primer ejemplo es una progresión creciente cuya razón es 2. Si la razón es menor que la unidad, los términos irán *disminuyendo* y la progresión será *decreciente;* el segundo ejemplo es una progresión decreciente cuya razón es $\frac{1}{2}$ (*)

La progresión geométrica es por su naturaleza indefinida; pero para estudiar sus propiedades supondremos que tiene un número limitado de términos.

205. *Cualquier término de una progresión geométrica es*

(*) Suponemos la razón positiva, porque si fuese negativa, no habría progresión, sino una justa posición de dos progresiones; una de términos positivos y otra de términos negativos, siendo la razón positiva é igual en ambas, pero comenzando una con término positivo y la otra con negativo. Toda la teoría del texto se refiere á progresiones positivas.

igual al primero multiplicado por una potencia de la razón cuyo exponente sea igual al número de términos que le preceden.

En efecto, sea la progresión

$$\div\!\div a : b : c\ d : \ldots\ldots h : k : l$$

designemos por q la razón y tendremos por definición

$$b = aq,\ c = bq,\ d = cq \ldots\ldots$$

sustituyendo en la segunda el valor de b dado por la primera; en la tercera el valor que resulte por c, y así sucesivamente, se obtiene

$$b = aq, \quad c = aq^2, \quad d = aq^3 \ldots\ldots$$

que prueban que el teorema es cierto para los primeros términos.

Vamos á demostrar que si es cierto para un término cualquiera, lo será para el siguiente, en cuyo caso como se verifica hasta el cuarto término, también se verificará para el quinto; verificándose para el quinto, también para el sexto y así sucesivamente, luego será general.

Sea, pues, t un término al cual preceden otros m; t' el término siguiente y admitamos que el teorema tiene lugar para el término t, tendremos:

$$t = aq^m$$

y como por definición

$$t' = qt$$

tendremos

$$t' = aq^{m+1}$$

igualdad que demuestra el teorema.

Siendo n el número de términos y l el último, se tendrá:

$$l = aq^{n-1} \qquad (1)$$

206. *Cualquier término de una progresión geométrica es igual al último dividido por una potencia de la razón, cuyo exponente sea igual al número de términos que le siguen.*

Despejando a en la fórmula (1), tendremos

$$a = \frac{l}{q^{n-1}} \qquad (2)$$

que demuestra el teorema para el primer término; para aplicarle á otro cualquiera, basta suponer que la progresión comienza en dicho término y termina en l.

207. *Si una progresión geométrica creciente se continúa indefinidamente, sus términos llegarán á ser mayores que cualquiera cantidad dada, por grande que sea.*

En efecto, sea la progresión

$$\div\!\div\ a : aq : aq^2 : aq^3 .... : aq^n ....$$

en la cual $q > 1$, podremos, pues, hacer $q = 1 + \alpha$, y la progresión anterior será

$$\div\!\div\ a : a(1+\alpha) : a(1+\alpha)^2 : a(1+\alpha)^3 \ .... \ a(1+\alpha)^n .....$$

pero por la fórmula del binomio de Newton (núm. 134) se tiene

$$(1+\alpha)^n = 1 + \frac{n}{1}\alpha + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\alpha^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\alpha^3 + ...$$

de donde se deduce

$$(1+\alpha)^n > 1 + n\alpha$$

y por tanto los términos de la progresión anterior serán, á partir del tercer término, mayores que los de la progresión aritmética.

$$\div\ a \,.\, a(1+\alpha) \,.\, a(1+2\alpha) \,.\, a(1+3\alpha) \ ..... \ a(1+n\alpha) .....$$

cuya razón $a\alpha$ es positiva y que por consiguiente crecerán indefinidamente (núm. 197) luego esta propiedad subsistirá *á fortiori* en la progresión geométrica, como queríamos demostrar.

De este teorema se deduce como corolario importante que: *las potencias de los números mayores que la unidad, son mayores que la unidad, crecen con el exponente y pueden llegar á ser mayores que cualquiera cantidad dada.*

Porque todo número mayor que la unidad se puede poner bajo la forma $1 + \alpha$, y tendremos

$$1 < 1 + \alpha < (1+\alpha)^2 < (1+\alpha)^3 < ...... < (1+\alpha)^n$$

y por ser los términos anteriores los de una progresión geométrica cuya razón es $1 + \alpha$, tendrán las propiedades enunciadas.

208. *Si una progresión geométrica decreciente se continúa indefinidamente, sus términos llegarán á ser menores que toda cantidad dada por pequeña que sea.*

Siendo $q \angle 1$, se puede hacer $q = \frac{1}{1+\alpha}$ luego la progresión será

$$\div a : \frac{a}{1+\alpha} : \frac{a}{(1+\alpha)^2} : \ldots\ldots \frac{a}{(1+\alpha)^n} \ldots\ldots$$

pero los denominadores aumentan con el exponente y pueden llegar á ser mayores que toda cantidad dada, luego evidentemente las fracciones disminuirán y llegarán á ser menores que toda cantidad dada por pequeña sea.

De este teorema se deduce el siguiente importante corolario: *las potencias de los números positivos menores que la unidad son menores que la unidad, disminuyen con el exponente y tienen por límite cero cuando el exponente crece indefinidamente.*

Porque todo número menor que la unidad se puede poner bajo la forma $\frac{1}{1+\alpha}$ y tendremos

$$1 \searrow \frac{1}{1+\alpha} \searrow \frac{1}{(1+\alpha)^3} \searrow \frac{1}{(1+\alpha)^2} \searrow \ldots\ldots \searrow \frac{1}{(1+\alpha)^n}$$

y por ser los términos anteriores los de una progresión geométrica cuya razón es $\frac{1}{1+\alpha}$, tendrán las propiedades enunciadas.

209. *Interpolar $n-2$ medios proporcionales ó geométricos entre dos números dados es formar una progresión geométrica de n términos y en que los números dados sean los extremos.*

Si conociéramos la razón podríamos formarla considerando como primer término el menor, si la razón es mayor que la unidad, y el mayor si es menor que la unidad.

Sean, pues, a y l los números dados, q la razón que queremos hallar, y tendremos (núm. 205.)

$$l = aq^{n-1}$$

de la cual se deduce

$$q^{n-1} = \frac{l}{a}$$

y extrayendo la raíz del grado $n-1$

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{l}{a}} \qquad (3)$$

como $n - 1$ es el número de términos que se interpolan más 1, tendremos la siguiente:

Regla. *Para interpolar medios geométricos entre dos números dados, se halla la razón de la progresión, dividiendo los números dados y extrayendo, del cociente, la raiz cuyo índice es el número de medios que se han de interpolar mas uno.*

Ejemplo. Interpolar 8 medios geométricos entre los números $\frac{1}{64}$ y 4. La razón de la progresión será

$\sqrt[9]{4 : \frac{1}{64}} = \sqrt[9]{256} = \sqrt[3]{8} = 2$; luego la progresión que resuelve el problema será

$$\div\!\div \frac{1}{64} : \frac{1}{32} : \frac{1}{16} : \frac{1}{8} : \frac{1}{4} : \frac{1}{2} : 1 : 2 : 4$$

210. *Si entre cada dos términos de una progresión se interpolan $p - 1$, medios geométricos, todas las progresiones resultantes forman una sola, cuya razón es la raiz del grado p* (número de términos interpolados mas uno) *de la razón de la primera progresión.*

Sea la progresión cuya razón designaremos por q

$$\div\!\div a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, \ldots\ldots \,h \,.\, k \,.\, l$$

Interpolando $p - 1$, medios geométricos, entre a y b, entre b y c, etc., las razones respectivas serán, según el teorema anterior.

$$\sqrt[p]{\frac{b}{a}},\ \sqrt[p]{\frac{c}{b}},\ \sqrt[p]{\frac{d}{c}},\ldots\ldots\ \sqrt[p]{\frac{l}{k}}$$

pero las cantidades subradicales son iguales á q por definición, luego todas tienen por expresión $\sqrt[p]{q}$, luego ésta será la razón de la progresión única resultante.

211. *Las raíces de los números mayores que la unidad son mayores que la unidad, decrecen cuando crece el índice*

y tienen por límite inferior la unidad cuando el índice crece indefinidamente.

En efecto; sea q un número mayor que 1, tendremos $\sqrt[p]{q} > 1$, porque si $\sqrt[p]{q}$ fuese igual ó menor que 1, elevando á la potencia de grado p se tendría q menor ó igual que 1 (núm. 208.)

En segundo lugar decimos que $\sqrt[p]{q} > \sqrt[p+1]{q}$

Reduciendo á un índice común ambos radicales (número 107) se tendrá

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt[p]{q} = \sqrt[p(p+1)]{q^{p+1}} \\ \sqrt[p+1]{q} = \sqrt[p(p+1)]{q^{p}} \end{array}\right\} \text{ de donde } \sqrt[p]{q} > \sqrt[p+1]{q}$$

puesto que $q^{p+1} > q^p$ (núm. 207)

En tercer lugar, si suponemos que d es una cantidad que tiene por límite cero, se puede hacer

$$\sqrt[p]{q} < 1 + \delta$$

en efecto; elevando á la potencia p se tendrá

$$q < (1 + \delta)^p$$

esta desigualdad y la anterior se verifican, *a fortiori*, si determinamos p de modo que se tenga

$$q < 1 + p\delta$$

pero de esta se deduce $p > \dfrac{q-1}{\delta}$, luego

$$\text{lím. } \sqrt[p]{q} = 1$$

212. *Las raíces de los números positivos menores que la unidad son menores que la unidad, crecen con el índice y tienen por límite superior la unidad cuando el índice aumenta indefinidamente.*

Si hacemos $q = \dfrac{1}{q'}$, siendo $q' > 1$, se tendrá

$$\sqrt[p]{q} = \frac{1}{\sqrt[p]{q'}}$$

igualdad que demuestra el teorema en todas sus partes, porque el denominador del segundo miembro es mayor que la unidad, disminuye cuando crece el índice p y tiene por límite la unidad cuando p crece indefinidamente (número 211.)

213. *Cuando el número de medios geométricos que se interpolan entre cada dos términos de una progresión geométrica crece indefinidamente, la diferencia entre dos consecutivos tiene por límite cero.*

Sea q la razón de la progresión y $p - 1$ el número de medios que se interpolan. Si se designa por A un término cualquiera en la progresión resultante, el siguiente será $A\sqrt[p]{q}$ y la diferencia entre ambos

$$A\sqrt[p]{q} - A = A\left(\sqrt[p]{q} - 1\right)$$

El segundo miembro es un producto que tiene por límite cero, porque uno de los factores $\sqrt[p]{q} - 1$ tiene por límite cero cuando p crece indefinidamente (211 y 212) (*) y el otro factor A no se hace infinito, puesto que está comprendido entre los extremos de la progresión; luego la diferencia entre A y $A\sqrt[p]{q}$ tiene por límite cero.

214. *El producto de dos términos equidistantes de los extremos en una progresión geométrica es igual al producto de los extremos.*

Sea t un término precedido de otros, m y t', uno seguido de otros, m, se tendrá

$$\left.\begin{aligned} t &= aq^m \\ t' &= \frac{l}{q^m} \end{aligned}\right\} \text{y multiplicando } tt' = al$$

(*) Si $q > 1$, $\sqrt[p]{q} - 1$ será positiva, y si $q < 1$, será negativa; pero en uno y otro caso tiene por límite cero cuando p crece indefinidamente.

215. *El producto de los términos de una progresión geométrica es igual á la raíz cuadrada del producto de los extremos elevado á la potencia que indique el número de términos.*

Sea la progresión

$$\div\!\div\, a : b : c : d : \ldots\ldots : h : k : l$$

Designando por P el producto se tendrán las dos expresiones

$$\mathrm{P} = abc \ldots\ldots hkl$$
$$\mathrm{P} = lkh \ldots\ldots cba$$

y multiplicando una por otra

$$\mathrm{P}^2 = (al)\,(bk)\,(ch) \ldots\ldots (hc)\,(kb)\,(la)$$

pero siendo n el número de términos de la progresión, en el segundo miembro hay n paréntesis iguales todos á (al) puesto que son, ó productos de los extremos, ó de términos equidistantes de los extremos, y por consiguiente

$$\mathrm{P}^2 = (al)^n \qquad \text{de donde} \qquad \mathrm{P} = \sqrt{(al)^n} \qquad (4)$$

216. *La suma de los términos de una progresión geométrica es igual al producto del último término por la razón menos el primer término, dividido todo por la razón menos la unidad.*

Siendo la progresión la del número anterior, designaremos por S la suma de sus términos y se tendrá

$$\mathrm{S} = a + b + c + \ldots\ldots h + k + l$$

y multiplicando ambos miembros por la razón q

$$\mathrm{S}q = b + c + d + \ldots\ldots k + l + lq$$

restando de la segunda la primera

$$\mathrm{S}q - \mathrm{S} = lq - a \qquad \text{ó bien} \qquad \mathrm{S}(q-1) = lq - a$$

de donde se deduce

$$\mathrm{S} = \frac{lq - a}{q - 1} \qquad (5)$$

Si la progresión es decreciente, se prefiere invertir los términos de la sustracción anterior y se tendrá

$$\mathrm{S} = \frac{a - lq}{1 - q} \qquad (6)$$

idéntica con la (5) y fácil de enunciar en el lenguaje ordinario. (*)

Si en las fórmulas (5) y (6) se sustituye en lugar de l su igual aq^{n-1} se obtiene

$$S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} \quad (7) \qquad S = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q} \quad (8)$$

217. *La suma de los términos de una progresión geométrica decreciente, continuada indefinidamente, tiene por límite el primer término dividido por la unidad menos la razón.*

En efecto; separando los términos del numerador en la fórmula (8) tendremos:

$$S = \frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q}$$

pero por ser $q \angle 1$, q^n tiene por límite cero cuando n crece indefinidamente (núm. 208), luego el valor de la expresión $\frac{aq^n}{1 - q}$ tendrá también por límite cero, puesto que a y $1 - q$ son finitos y por tanto

$$\text{lim. } S = \frac{a}{1 - q}$$

Ejemplos:

1.° $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\ldots\ldots$

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

2.° $0{,}24242424 \ldots\ldots = 0{,}24 + 0{,}0024 + 0{,}000024 + \ldots\ldots$

$$S = \frac{0{,}24}{1 - 0{,}01} = \frac{24}{100 - 1} = \frac{24}{99}$$

este último resultado es el mismo que hubiéramos encontrado siguiendo la regla (Arit. 208) para hallar la generatriz de una fracción periódica pura.

(*) Entre a, l, n, q, S, hay dos relaciones distintas $l = aq^{n-1}$, $S = \frac{lq - a}{q - 1}$ y como en las progresiones aritméticas dan lugar á 10 problemas, que se pueden resolver elementalmente, pero después de conocer la teoría de logaritmos. Si las fórmulas anteriores se combinan con la del producto, darán lugar á 20 problemas.

LIBRO II.

LOS LOGARITMOS.

CAPÍTULO PRIMERO.

DEFINICIÓN Y PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS.

I. Definiciones.

218. Si consideramos las dos progresiones, geométrica y aritmética

$$\div\div 1 : q : q^2 : q^3 \,..... : q^n$$
$$\div 0 \,.\, r \,.\, 2r \,.\, 3r \,.....\, . \, nr$$

tales que la primera comienza por 1, la segunda por 0 y cuyos términos se corresponden, ambas progresiones forman un *sistema de logaritmos*.

Logaritmo de cada término de la progresión geométrica es el término correspondiente de la progresión aritmética.

Así el logaritmo de q es r, el de q^2, $2r$, el de q^n, nr.......

De esta definición se deduce que pudiendo variar indefinidamente la razón de la progresión geométrica, cada logaritmo corresponde á infinidad de números en distintos sistemas, y si varía indefinidamente la razón de la progresión aritmética, cada número tiene infinidad de logaritmos en distintos sistemas.

Fijándonos en un sistema, suponiendo las dos progresiones *crecientes* y prolongándolas á la izquierda, se obtiene

$$\div\div .... \frac{1}{q^n} .... \frac{1}{q^3} : \frac{1}{q^2} : \frac{1}{q} : 1 : q : q^2 : q^3 ...... q^n ....$$
$$\div ..... -nr ..... -3r \,.\, -2r \,.\, -r \,.\, 0 \,.\, r \,.\, 2r \,.\, 3r ...... nr ....$$

en las cuales observamos que el *logaritmo de la unidad es* *cero;* que los términos q, q^2, q^3...... que son mayores que la *unidad y crecientes*, tienen *logaritmos positivos, crecientes también;* que haciéndose infinitos q^n y nr, cuando n se hace infinito (números 207 y 197), el logaritmo de ∞ es ∞. Además, los números $\frac{1}{q}$, $\frac{1}{q^2}$, $\frac{1}{q^3}$...... que son menores que la *unidad* y *decrecientes* (núm. 208) *tienen logaritmos negativos* ($-r$, $-2r$, $-3r$.......) *decrecientes* (crecientes en valor absoluto), el límite de $\frac{1}{q^n}$ cuando n se hace infinito es cero (núm. 208) y el de $-nr$ es $-\infty$, en la misma hipótesis (núm. 197), luego el logaritmo de 0 es $-\infty$.

219. La anterior definición de logaritmos se refiere á los números contenidos en la progresión geométrica, pero se puede generalizar demostrando que todo *número positivo tiene en cada sistema de logaritmos un logaritmo y uno solo.*

Si entre cada dos términos de las progresiones interpolamos un número, $p-1$, de medios proporcionales en la progresión geométrica y diferenciales en la aritmética, según las reglas dadas en los números 209 y 198, los números obtenidos por interpolación en la progresión geométrica tienen por logaritmos los correspondientes de la progresión aritmética (*), *luego todo número que se pueda obtener por interpolación en la progresión geométrica tiene un logaritmo, que es el término que le corresponda por la misma interpolación en la progresión aritmética.*

Sea en segundo lugar A un número que no se puede obtener por interpolación en la progresión geométrica. Si interpolamos un número $p-1$ de medios indefinidamente grande y designamos por q' el valor de la nueva razón, se tendrá $q' = \sqrt[p]{q}$ (núm. 209), y en la nueva progresión

(*) Se puede demostrar que si por interpolaciones de diferente número de medios se obtiene dos veces un número en la progresión geométrica y si en la progresión aritmética se hacen las mismas interpolaciones, los dos logaritmos que correspondan á un mismo número son iguales. La demostración se funda en teoremas que no hemos demostrado en la teoría de las progresiones por no hacer más extenso este libro.

habrá dos términos tales que se verifique la limitación

$$q'^m \angle A \angle q'^{m+1}$$

pero la diferencia $q'^{m+1} - q'^m$ tiene por *límite cero* (número 213) cuando q' tiene por *límite la unidad,* es decir, cuando p *crece indefinidamente* (núm. 212) luego en estas condiciones, A podrá considerarse como límite superior de q'^m é inferior de q'^{m+1} (*)

Ahora, si en la progresión aritmética hacemos las mismas interpolaciones, siendo $r' = \frac{r}{p}$, los logaritmos de q'^m y q'^{m+1} serán mr' y $(m+1)r'$, y por tanto el logaritmo de A será un número comprendido entre ellos: pero $(m+1)r' - mr' = r'$, tiene por límite cero cuando p crece indefinidamente; luego en estas condiciones el *logaritmo de A es límite superior* de mr' é *inferior* de $(m+1)r'$.

Luego en este caso también A tiene un logaritmo.

220. Supongamos que se haya interpolado un número tan grande de términos que las diferencias entre dos consecutivos tengan por límite cero: designemos por α y β las razones respectivas, que serán $\alpha = \sqrt[p]{q}$, $\beta = \frac{r}{p}$ siendo p una cantidad que crece sin límites, y supongamos tambien ambas progresiones *crecientes* y continuadas indefinidamente en uno y otro sentido, serán de la forma

$$\div\!\div\ 0 \ldots\ldots \frac{1}{\alpha^n} \ldots\ldots \frac{1}{\alpha^2} : \frac{1}{\alpha} : 1 : \alpha : \alpha^2 \ldots\ldots\ldots \alpha^n \ldots\ldots\ldots \infty$$

$$\div -\infty \ldots\ldots -n\beta \ldots\ldots -2\alpha. -\beta\ .\ 0\ .\ \beta\ .\ 2\beta \ldots\ldots\ldots n\beta \ldots\ldots\ldots \infty$$

de las cuales se deduce que los términos de la progresión geométrica son todos positivos, crecientes desde 0 hasta ∞: los de la progresión aritmética, crecientes desde $-\infty$ á 0 y desde 0 á ∞, y por consiguiente:

1.° *Los logaritmos crecen con los números.*

2.° *Los números negativos no tienen logaritmos.*

(*) Si suponemos $A \angle 1$ estará comprendida entre dos números tales que $\frac{1}{q'^{m+1}} \angle A \angle \frac{1}{q'^m}$ en los cuales $\lim\left(\frac{1}{q'^{m+1}} - \frac{1}{q'^m}\right) = 0$; y por consiguiente son aplicables los razonamientos del texto.

3.° *Los números positivos menores que la unidad tienen logaritmos negativos.*

4.° *Los números mayores que la unidad tienen logaritmos positivos.*

5.° *El logaritmo de cero es el infinito negativo.*

6.° *El logaritmo de la unidad es cero.*

7.° *El logaritmo de infinito es infinito.*

221. Hemos supuesto que las progresiones son crecientes, pero es fácil estudiar lo que sucede en los demás casos.

En efecto; si se invierten las dos progresiones, se convertirán en decrecientes y todas las anteriores conclusiones serán idénticas. Si se invierte sólo una, en cuyo caso una progresión será creciente y otra decreciente, es evidente que de las conclusiones anteriores sólo quedará, *que los números negativos no tienen logaritmos y que el logaritmo de la unidad es cero.*

Es fácil ver, sin nuevos razonamientos, que en este caso: *Los logaritmos decrecen cuando crecen los números; que los números positivos menores que la unidad tienen logaritmos positivos, que los números mayores que la unidad tienen logaritmos negativos; que el logaritmo de cero es infinito y que el logaritmo de infinito es infinito negativo.*

En lo sucesivo supondremos que son las progresiones crecientes por ser así las que se usan en las aplicaciones.

II.—Propiedades de los logaritmos.

222. *El logaritmo de un producto es igual á la suma de los logaritmos de sus factores.*

Sean en primer lugar los números α^m y α^n comprendidos en la progresión geométrica del núm. 220; su producto α^{m+n} tambien estará comprendido en dicha progresión y se tendrá, designando por la notación log A, el logaritmo de un número cualquiera A.

$$\log \alpha^m = m\beta, \quad \log \alpha^n = n\beta, \quad \log \alpha^{m+n} = (m+n)\beta = m\beta + n\beta$$

pero por ser $\alpha^{m+n} = \alpha^m \,.\, \alpha^n$, tendremos:

$$\log (\alpha^m \,.\, \alpha^n) = m\beta + n\beta = \log \alpha^m + \log \alpha^n$$

Si se trata de dos números A y B, no comprendidos en la progresión geométrica, siempre se podrán buscar en la progresión dos pares de números que verifiquen las limitaciones

$$\alpha^m < A < \alpha^{m+1}, \qquad \alpha_n < B < \alpha^{n+1}$$

de donde

$$\alpha^{m+n} < AB < \alpha^{m+n+2}$$

y tomando logaritmos

$$(m+n)\delta < \log(AB) < (m+n+2)\delta$$

pero también se tiene

$$m\delta < \log A < (m+1)\delta, \quad n\delta < \log B < (n+1)\delta$$

de donde, sumando

$$(m+n)\delta < \log A + \log B < (m+n+2)\delta.$$

luego $\log(AB)$ y $\log A + \log B$, son dos constantes que están comprendidas entre dos variables cuya diferencia 2δ, tiene por límite cero, entonces (Arit. 256)

$$\log(AB) = \log A + \log B$$

Este teorema se puede extender á cualquier número de factores, pues considerando el producto de todos los factores, menos uno, como un solo factor, se tendrá

$$\log(ABC....K) = \log A + \log(BC....K)$$

luego si el teorema es cierto para $n-1$ factores lo será para n; pero es cierto para dos, luego lo será para tres, siéndolo para tres lo será para cuatro, etc.

Así: $\log(ABCD) = \log A + \log B + \log C + \log D$

223. *El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.*

En efecto; se tiene evidentemente

$$A = \frac{A}{B} \times B$$

y tomando logaritmos

$$\log A = \log \frac{A}{B} + \log B$$

de donde se deduce

$$\log \frac{A}{B} = \log A - \log B.$$

224. *El logaritmo de una potencia es igual al logaritmo*

de la cantidad multiplicado por el exponente de la potencia.

Sea la potencia A^p, como es un producto de p factores iguales á A se tendrá (núm. 222),

$$\log A^p = \log A + \log A + \log A \,.....\, p \text{ veces}$$

luego

$$\log A^p = p \log A.$$

225. *El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo de la cantidad subradical dividido por el índice de la raíz.*

Tenemos la identidad

$$\left(\sqrt[p]{A}\right)^p = A$$

y tomando logaritmos, por ser el primer miembro una potencia, tendremos:

$$p \log \sqrt[p]{A} = \log A$$

de donde

$$\log \sqrt[p]{A} = \frac{\log A}{p}$$

CAPÍTULO II

LOS LOGARITMOS VULGARES.

226. Se llama sistema de logaritmos vulgares ó de *Briggs* el sistema formado por las progresiones

$$\div\!\div \,.........\, 10^{-n} \,.....\, : 10^{-2} : 10^{-1} : 1 : 10 : 10^2 : 10^3 \,.....\, : 10^n \,.....$$
$$\div \,.........\, -n \,.....\, -2 \,.\, -1 \,.\, 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.....\,.\; n \,.....$$

Desde luego se advierte que las potencias de 10 tienen por logaritmos números enteros, iguales á sus exponentes (positivos ó negativos), y que los demás números no podrán tener logaritmos enteros. Los logaritmos que no sean enteros los supondremos convertidos aproximadamente en fracciones decimales: la parte entera de un logaritmo se llama *característica* y la decimal *mantisa.*

227. *La característica del logaritmo de un número mayor que la unidad tiene tantas unidades como cifras, menos una, la parte entera del número.*

En efecto; si el número está comprendido entre 1 y 10, su parte entera tiene una cifra, pero su logaritmo está comprendido entre 0 y 1; luego su característica será cero, conforme se dice en el enunciado. Si el número está comprendido entre 10 y 100, su parte entera tendrá dos cifras, pero su logaritmo estará comprendido entre 1 y 2, luego la característica será 1; conforme á la regla. En general si el número está comprendido entre 10^{n-1} y 10^n, tendrá n cifras en su parte entera, y como su logaritmo está comprendido entre $n-1$ y n, tendrá $n-1$ por característica; es decir, siempre una unidad menos que cifras la parte entera del número.

228 *Si un número se multiplica ó divide por una potencia de 10* (por la unidad seguida de ceros), *la mantisa de su logaritmo no varía y la característica aumenta ó disminuye en tantas unidades como tiene el exponente de 10* (como ceros siguen á la unidad).

En efecto; en virtud de las propiedades demostradas en los números 222 á 224 tenemos las igualdades

$$\log(N \cdot 10^n) = \log N + n \log 10 = \log N + n$$
$$\log(N : 10^n) = \log N - n \log 10 = \log N - n$$

que demuestran el enunciado siempre que el exponente n sea un número entero y positivo, es decir, cuando 10^n es la unidad seguida de ceros.

Ejemplos. Suponiendo que log. 221,43 = 2,345236

En virtud del teorema que se acaba de demostrar, tendremos:

$$\begin{aligned}
&\log 2214{,}3 &&= 3{,}345236\\
&\log 22143 &&= 4{,}345236\\
&\log 2214300 &&= 6{,}345236\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\log 22{,}143 &&= 1{,}345236\\
&\log 2{,}2143 &&= 0{,}345236\\
&\log 0{,}22143 &&= 0{,}345236 - 1\\
&\log 0{,}00022143 &&= 0{,}345236 - 4
\end{aligned}$$

Para aplicar el teorema á los últimos ejemplos se conserva la mantisa positiva, y la característica negativa se indica poniendo encima de ella el signo —.

Así: $0{,}345236 - 1 = \bar{1}{,}345236$

$0{,}345236 - 4 = \bar{4}{,}345236$

luego $\log\ 0{,}22143 = \bar{1}{,}345236$

$\log\ 0{,}00022143 = \bar{4}{,}345236$

229. El examen de estos ejemplos, unido al de las progresiones del núm. 226, nos enseña que los números positivos menores que la unidad tienen logaritmos que se pueden expresar con característica negativa y mantisa positiva; reduciéndolos exacta ó aproximadamente á decimales se deduce la siguiente:

Regla. *El logaritmo de un número decimal menor que la unidad es negativo, y se compone: de una característica negativa, que tiene tantas unidades como indique el lugar ocupado por la primera decimal significativa de la izquierda y de una mantisa positiva, que es la misma que coresponde al número sin la coma.*

230. Para la descripción y uso de las Tablas de logaritmos, pueden consultarse los números 14 y 15, 18 á 21 y 23 á 26 de las Tablas de Sánchez Ramos.

Las propiedades del complemento logarítmico, operaciones con los logaritmos y operaciones con los números efectuadas por medio de logaritmos, pueden estudiarse en los números 28 á 37 de las mismas Tablas, donde se hallan expuestas con todos los detalles necesarios.

LIBRO III

EL INTERÉS COMPUESTO Y LAS ANUALIDADES

CAPÍTULO PRIMERO

Interés compuesto

231. En la Aritmética (núm. 387) digimos que el interés se llama *compuesto* cuando por intervalos iguales (generalmente de un año) se acumula al capital para producir á su vez otro interés.

El interés compuesto se regula por el *tanto por uno* ó *tanto,* que es el interés producido por la unidad monetaria (la peseta) prestada durante un año en las mismas condiciones que el capital. Se admite que el interés compuesto es proporcional al capital, pero no es proporcional al tiempo, porque el capital variable aumenta con el tiempo.

El capital formado por el primitivo y sus intereses compuestos se llama *capital acumulado* ó *capital compuesto* ó *montante.*

Si designamos por c el *capital primitivo*, por C el *capital compuesto,* por r el *tanto por uno* y por n el número de años que dura el préstamo, tendremos: (1)

$$C = c\,(1 + r)^n$$

En efecto; una unidad produce r en un año, luego c unidades producirán cr, luego el capital formado al final del primer año será $c + cr = c(1 + r)$. El interés de este capital en un año será $cr(1 + r)$, luego el capital formado al final del segundo año será

$$c(1 + r) + cr(1 + r) = c(1 + r)\,(1 + r) = c(1 + r)^2$$

Del mismo modo el interés de este capital en un año será $cr(1 + r)^2$, luego el capital formado al final del tercer año será

$$c(1 + r)^2 + cr(1 + r)^2 = c(1 + r)^2 (1 + r) = c(1 + r)^3$$

y así sucesivamente, al cabo de n años se tendrá

$$C = c(1 + r)^n$$

Admitiremos esta fórmula aunque n no sea un número exacto de años. (*)

232. La fórmula (1) resuelve cuatro cuestiones, porque cada una de las cantidades que figuran en ella puede ser la incógnita.

1.ª CUESTIÓN. *Hallar el capital compuesto conociendo el capital primitivo, el tanto por uno y el tiempo.*

$$C = c(1 + r)^n \qquad (1)$$

y tomando logaritmos

$$\log C = \log c + n \log (1 + r) \qquad (1)'$$

Ejemplo. Hallar el capital compuesto por 27242 pesetas al 5 por 100 en 7 años.

Haremos $c = 27242$; $r = 0{,}05$; $n = 7$, y se tendrá por la fórmula (1)'

$$\begin{array}{r}
\log c = 4{,}435239 \\
7 \log (1 + r) = 0{,}148325 \quad (^{**}) \\
\hline
\log C = 4{,}583564 = \log 38332{,}2
\end{array}$$

El capital compuesto será, pues, 38332,20 pesetas con menos error de 10 céntimos de peseta.

2.ª CUESTIÓN. *Hallar el capital primitivo conociendo el capital compuesto, el tanto por uno y el tiempo.*

De la fórmula (1) se deduce despejando c

$$c = \frac{C}{(1 + r)^n} \qquad (2)$$

(*) La demostración para todos los casos puede verse en las Tablas de logaritmos citadas, núm. 39, nota.

(**) Hemos buscado el log. $(1 + r)$ en la tabla V, pág. 70, que contiene los logaritmos de $1 + r$ para diversos tantos con 11 decimales, porque si le hubiésemos buscado en las tablas ordinarias donde se encuentra con seis decimales, al multiplicarle por 7, perderíamos la sexta decimal que se haría ilusoria. En el ejemplo actual hubiéramos hallado $C = 38322{,}0$.

Cuando el tiempo es un número entero de años se puede operar en muchos casos empleando la fórmula (1) por las tablas de cálculos directos de interés compuesto y anualidades (pág. 72 á 97). En el ejemplo actual hubiésemos multiplicado el número 27242 por 1,40710042, que es el número que en las tablas corresponde al capital compuesto por 1 peseta al 5 por 100 en 7 años y hubiésemos hallado 38332,23, con menos error de 1 céntimo de peseta.

y tomando logaritmos

$$\log c = \log C - n \log (1 + r) \qquad (2)'$$

Ejemplo. ¿Qué capital se ha colocado á interés compuesto al 6 por 100 para que en 47 años se haya convertido en 245000 pesetas?

Haremos $C = 245000$, $r = 0{,}06$, $n = 47$ y se tendrá por la fórmula (2)'

$$\begin{array}{r} \log C = 5{,}389166 \\ n \log (1 + r) = 1{,}189376 \\ \hline \log c = 4{,}199790 = \log 15841{,}26 \ (*) \end{array}$$

El capital primitivo será $c = 15841{,}26$ pesetas.

3.ª Cuestión. *Hallar el tiempo conociendo el capital primitivo, el capital compuesto y el tanto por uno.*

De la fórmula (1) se deduce

$$(1 + r)^n = \frac{C}{c} \qquad (3)$$

tomando logaritmos y dividiendo por $\log (1 + r)$

$$n = \frac{\log C - \log c}{\log (1 + r)} \qquad (3)'$$

Ejemplo. *¿Qué tiempo debe estar prestado un capital para que al 6 por 100 se duplique?*

Haciendo en la fórmula (3)' $C = 2c$, se tendrá

$$\log C = \log c + \log 2$$

de donde

$$\log C - \log c = \log 2$$

luego la cuestión que nos proponemos es independiente del valor del capital, deduciremos pues

$$n = \frac{\log 2}{\log 1{,}06}$$

Efectuando el cociente de los dos logaritmos se halla

$$n = 11{,}895 \text{ años}$$

y reduciendo la fracción 0,895 años á meses y días contan-

(*) Si hubiésemos empleado las tablas ordinarias para hallar $\log (1 + r)$ hubiésemos hallado $c = 15841{,}03$. Si empleamos la fórmula (2) haciendo uso de las tablas de cálculos directos hallaremos con más aproximación $c = 15841{,}28$ pesetas.

do 12 meses por valor del año y 30 días por valor del mes se halla

$$n = 11 \textit{ años } 10 \textit{ meses } 22 \textit{ días}$$

Resultado conforme con el de la tabla VII, pág. 98.

4.ª Cuestión. *Hallar el tanto por uno conociendo el tiempo, el capital primitivo y el capital compuesto.*

De la fórmula (3) se deduce extrayendo la raíz *n-ésima*

$$1 + r = \sqrt[n]{\frac{C}{c}} \quad (4)$$

y tomando logaritmos

$$\log (1 + r) = \frac{\log C - \log c}{n} \quad (4)'$$

Ejemplo. ¿A qué tanto por uno se deben prestar 8425 pesetas para que en 7 años se forme un capital de 12500 pesetas?

Haciendo $C = 12500$, $c = 8425$, $n = 7$ en la fórmula (4)' tendremos:

$$\begin{array}{r} \log C = 4{,}096910 \\ \log c = 3{,}925570 \\ \hline \log C - \log c = 0{,}171340 \end{array}$$

de donde

$$\log (1 + r) = \frac{0{,}171340}{7} = 0{,}024477 = \log 1{,}05798$$

de donde $\quad r = 0{,}05798$

CAPÍTULO II

Problemas sobre anualidades.

I. Formación de un capital por anualidades.

233. Nos proponemos hallar el capital que se formará colocando durante n años consecutivos y al final de cada uno una suma de a pesetas á interés compuesto.

La primera anualidad estará colocada durante $n - 1$ años; la segunda, durante $n - 2$ años; la tercera, durante

$n - 3$, y así sucesivamente hasta la última. Las expresiones de estas anualidades serán (núm. 231)

primera anualidad.. . . . . $a(1 + r)^{n-1}$
segunda » .. . . . . $a(1 + r)^{n-2}$
tercera » .. . . . . $a(1 + r)^{n-3}$
. . . .
última. . . . . a

Sumándolas se obtiene la expresión del capital C

$$C = a + a(1 + r) + \ldots\ldots a(1 + r)^{n-2} + a(1 + r)^{n-1}$$

y como el segundo miembro es la suma de los términos de una progresión geométrica cuya razón es $1 + r$, aplicando la fórmula de la suma de estas progresiones (número 216), tendremos:

$$C = \frac{a\left((1 + r)^n - 1\right)}{r} \qquad (1)$$

Esta fórmula resuelve cuatro problemas, siendo los más importantes hallar el capital y hallar la anualidad.

1.ª CUESTIÓN. *Hallar el capital formado por anualidades conociendo la anualidad, el tiempo y el tanto por uno.*

Resuelve este problema la fórmula (1). Si queremos efectuar el cálculo por medio de logaritmos, haremos $b = (1 + r)^n$, de donde

$$\log b = n \ \log (1 + r)$$

la fórmula (1) será

$$C = \frac{a(b - 1)}{r}$$

y tomando logaritmos

$$\log C = \log a + \log (b - 1) - \log r$$

Ejemplo. ¿Qué capital se formará con 15 anualidades de 1000 pesetas impuestas al $5\frac{1}{2}$ por 100?

Haremos $a = 1000$, $n = 15$, $r = 0{,}055$, y tendremos:

$$\log b = 15 \ \log 1{,}055 = 0{,}348787 = \log 2{,}23247$$

luego $b = 2{,}23247$, de donde $b - 1 = 1{,}23247$

$$\begin{aligned} \log a &= 3{,}000000 \\ \log (b - 1) &= 0{,}090777 \\ \text{colog } r &= 1{,}259637 \\ \hline \log C &= 4{,}350414 = \log 22408{,}6 \end{aligned}$$

El capital formado por las 15 anualidades de 1000 pesetas será 22408,60 pesetas con menos error de 10 céntimos de peseta.

2.ª Cuestión. *Hallar el valor de la anualidad conociendo el valor del capital que se ha de formar, el tiempo y el tanto por uno.*

De la fórmula (1) se deduce

$$a = \frac{Cr}{(1+r)^n - 1} \qquad (2)$$

haciendo como antes $b = (1+r)^n$

$$a = \frac{Cr}{b-1}$$

y tomando logaritmos

$$\log a = \log C + \log r - \log (b-1)$$

Ejemplo. ¿Què anualidad se debe imponer para formar en 20 años al 6 por 100 un capital de 25000 pesetas?

Haremos $C = 25000$, $r = 0{,}06$, $n = 20$, y tendremos:

$$\log b = 20 \log 1{,}06 = 0{,}506117 = \log 3{,}20713$$

luego $b = 3{,}20713$, de donde $b - 1 = 2{,}20713$

$$\begin{aligned} \log C &= 4{,}397940 \\ \log r &= \bar{2}{,}778151 \\ \operatorname{colog}(b-1) &= \bar{1}{,}656172 \\ \hline \log a &= 2{,}832263 = \log 679{,}62 \end{aligned}$$

La anualidad pedida es 679,62 pesetas, con menos error de medio céntimo de peseta.

II. Amortización de una deuda por anualidades.

234. La anualidad que se aplica á la amortización de una deuda ó de un empréstito reciba el nombre de *renta.* La renta es *limitada* cuando el número de años que dura la amortización es limitado: *perpetua* cuando el plazo de amortización es ilimitado: *vitalicia* cuando el plazo es la vida probable del acreedor.

Para resolver el problema de la amortización de una deuda por anualidades se debe tener presente que la suma de todas las anualidades ha de ser igual al valor de la deuda y sus intereses compuestos, durante el plazo de la amortización.

Si designamos por v el valor de la deuda al comenzar el primer año y por C el capital que representa al finalizar los n años, tendremos (núm. 232)

$$C = v\,(1 + r)^n$$

Pero el valor de las n anualidades necesarias para extinguir la deuda es (núm. 233)

$$C = \frac{a\left((1 + r)^n - 1\right)}{r}$$

luego igualando ambas expresiones, tendremos:

$$v\,(1 + r)^n = \frac{a\left((1 + r)^n - 1\right)}{r}$$

de la cual se deduce

$$a = \frac{vr\,(1 + r)^n}{(1 + r)^n - 1} \qquad (3)$$

Haciendo $b = (1 + r)^n$, de donde $\log b = n \log (1 + r)$, tendremos:

$$a = \frac{vrb}{b - 1}$$

y tomando logaritmos

$$\log a = \log v + \log r + \log b - \log (b - 1)$$

Ejemplo. Hallar la anualidad que debe pagarse para amortizar en 75 años un empréstito de 6000000 de pesetas al 6 por 100.

Haremos $v = 6000000$, $r = 0{,}06$, $n = 75$, de donde

$$\log b = 75 \log 1{,}06 = 1{,}897940 = \log 79{,}0569$$

luego $b = 79{,}0569$, de donde $b - 1 = 78{,}0569$

$$\begin{aligned} \log v &= 6{,}778151 \\ \log r &= \bar{2}{,}778151 \\ \log b &= 1{,}897940 \\ \operatorname{colog} (b - 1) &= \bar{2}{,}107588 \\ \hline \log a &= 5{,}561830 = \log 364611 \end{aligned}$$

luego la anualidad pedida es 364611 pesetas.

235. Si en la fórmula (3) del número anterior dividimos

el numerador y denominador del segundo miembro por $(1+r)^n$, resulta

$$a = \frac{vr}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}$$

Si ahora hacemos crecer á n indefinidamente, el límite de $\frac{1}{(1+r)^n}$ es cero (núm. 208), luego el límite de la expresión anterior cuando $n = \infty$, es

$$a = vr$$

Esta expresión es el valor del interés simple del capital c. (*)

(*) Otras muchas cuestiones se pueden resolver sobre el problema de la amortización, y no todas son elementales: de algunas se indica la resolución directa y por logaritmos en las Tablas de Sánchez Ramos.

FIN DEL ÁLGEBRA

FE DE ERRATAS

Página	Línea	Dice	Debe decir
7	14	se pueda	se puede
13	—10	*se llamen*	*se llaman*
20	17	sustrayendo	sustraendo
47	— 6	del dividiendo	del dividendo
53	— 4	pueden seceder	pueden suceder
58	8	$20 = 5\ 4$	$20 = 5 . 4$
66	— 9	*dúmeros*	*números*
72	11	m. c. d.	m. c. m.
72	— 2	representamos	representemos
80	21	su igual al	su igual el
81	15 y 16	N″ es es	N′″ es
82	16 y 17	las las	las
82	24 y 25	descomposicién	descomposición
83	— 4	55|3	55|5
87	6	$2^3 . 2^2 . 5$	$2^3 . 3^2 . 5$
87	20	$2^3 . 3^3 . 5$	$2^3 . 3^2 . 5$
90	4	por quebrado	por quebrados
90	— 4	vecer mayor	veces mayor
99	13	4536	6048
116	— 2	$\frac{3^3}{5_3}$, luego	$\frac{3}{5^3}$, luego
126	— 6	$L \angle L_,$	$L \angle L'$
141	8	$(a + 1)^{\bullet} - a^2$	$(a + 1)^2 - a^2$
155	— 2	entre 64	entre 48
160	15 y 16	270	1620
193	— 4	a^1	a_1
194	15	277. RECÍPROCAMENTE	377. RECÍPROCAMENTE
196	—15	y serían	y serán
197	—11	de la rela	de la regla
211	5	nuestras	nuestro
215	19	$3 - 7 + 2 = -3$	$3 - 7 + 2 = -2$
220	—J2	*tiende es*	*tiende hacia*
221	17	cantidades crecen	cantidades a y a' crecen
227	11	$- 9ab^2$	$+ 9ab^2$
228	— 8	$- 12a^3b^4c$	$- 12a^4b^4c$
237	—13	$46b^5$	$35b^5$
243	5	*División*	*Definición*
243	— 3	$\frac{(a-b)\ (a-b)}{(a-b)\ (a-b)}$	$\frac{(a-b)\ (a-b)}{(a-b)\ (a+b)}$
245	— 7	$4em\ (a + b)$	$4em\ (a - b)$
246	— 3	$\frac{1}{a^{-n}}$	$\frac{1}{a^n}$
250	— 5	$\frac{16b^4}{a^2c^2}$	$\frac{16b^4}{a^2c^4}$

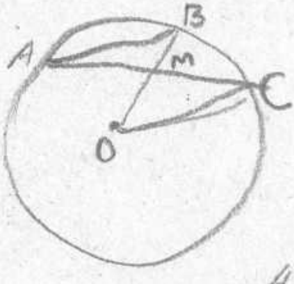
Página	Línea	Dice	Debe decir
257	12	$\sqrt[34]{a^9}$	$\sqrt[24]{a^9}$
262	13	$\dfrac{(a+bi)(a+bi)}{(a-bi)\ (a-bi)}$	$\dfrac{(a+bi)(a+bi)}{(a-bi)(a+bi)}$
269	3	$m+l$	$m+1$
280	18	$cx+cd$	$cx+d$
287	7	$0\,.\,x=2,\quad x=\dfrac{2}{0}$	$0\,.\,x=12,\quad x=\dfrac{12}{0}$
300	12	$17y-12z=18$	$17y-21z=18$
300	15	$y+21z=54$	$y+12z=54$
300	18	$17y-21z=8$	$17y-21z=18$
317	−13	$ax^2+bx+=c=0$	$ax^2+bx+c=0$
324	12	76800	46800

Nota.—En el libro primero de la segunda parte del *Álgebra* hay dos capítulos que llevan el título *Capítulo IV*.

$$\begin{array}{r}
264'533 \\
\times\ 4222 \\
\hline
529266 \\
529266 \\
529266 \\
1058532 \\
\hline
1115728'0126
\end{array}$$

$264'633 \times 4'2'22 =$

$$\frac{264'633}{1000} \times \frac{42'22}{100} = \frac{1}{100000}$$



$\cancel{AB < BM + MO}$

$\cancel{OC < MO + MC}$

$\cancel{AB + OC < (BM + MO) + (MA + OC)}$

$AB < AM + MB$

$OC < OM + MC$

$AB + OC < (AM + MC) + (BM + MO)$

$AM + MC = AC$

$BM + MO = OB = OC$

$OB + OC < AC + OC$

$AB < AC$

$\cancel{a+}$

a^2-b^2

$a+b$

$\cancel{a^2b-b^3}$

$\frac{x}{a-b}-\frac{1}{a^2-b^2}=\frac{x}{a+b}+1 \quad a^3-\cancel{ab^2}$

$\cancel{a^2b-b^3}\; a^3-ab^3$

$x(a^2-b^2\times a+b)-1=x(a-b\times a^2-b^2)+1$

$xa^2-b^2x\; xa+xb \qquad xa^2-xb^2x\; xa+xb$

$x(a^2-b^2\times a+b) \qquad x(a^2+b^2\times a+b)$

a^2-b^2

$x(a+b)$

6824	2
3412	2
1701	3
567	3
189	3
63	3
21	3
7	

$6824=2\times2\times3\times3\times3\times3\times3\times7$

$6824=2^2\times3^5\times7$

$\frac{x}{a-b}-\frac{1}{a^2-b^2}=\frac{x}{a+b}+1$

$\cancel{x(a^2-b^2)(a+b)}$

$x(a^2-b^2+a+b)-(a-b)\times(a+b)=x(a-b+a^2+b^2)+1$

$1\times a-b\times a^2-b^2+a+b$

$x(a-b)-1=(a+b)x+a^2+b^2+1$

$a^2 - b^2$

$a + b$

$a^2 b - b^2$

$1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 11 \quad \frac{x}{p} = N \frac{1}{a^2 - b} - \frac{x}{a - b}$

$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \quad p+1 = N+1$

$N+1$

$1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 11 \quad p = N$

$1+1 < p$

$(p+1) - N$

$N+1$

$21 =$

$N = M \, q$

$24 \quad N = n \times q$

$x(\sigma - p) - 1 = (\sigma + p) x + \sigma_1 \quad p_1 + 1$

$n = n \times q$

$1 \times \sigma - p \times \sigma_1 - p_1 + \sigma + p$

$(N+1) - N = 1$

$x(\sigma_1 - p_1 + \sigma + p) - (\sigma - p)(\sigma + p) = x(\sigma - p + \sigma_1 + p_1)$

$\frac{\sigma - p}{\sigma} - \frac{\sigma_1 - p_1}{1} - \frac{\sigma + p}{x} = 1$

88
5
440
6
40
4
264
3300
3
5940
490
50
440
300
140

3114
231
3178
9342
6228
779334

1100

ıcios prestados desde su ingre-
estar los datos de su media
padres, disposicion y bole-
, de destino y ascensos y
ı concisa y lacónica.

ı será entregada en la
a las 11 de la mañana

Juan Escalona

Francisco Olmedo

285
285

1425
2280
570
81225

81225 | 3
27075 | 3
9025 | 5
1805 | 5
361

119,486

Juan Pérez

Juan Pérez

$e = \frac{1}{2} v t^2$

$v = \frac{t}{e} \times \frac{1}{2}$

$12 = 6 + 6$

$6 = 2 \times 3$

$2 + 4 + 8 + 10 = 2 + ($

$= 2 + 12 + 10 =$

SANCHEZ RAMOS
Y
SABRÁS

ARITMÉTICA
Y
ÁLGEBRA