TRATADO

DE

ARITMÉTICA TEÓRICO-PRÁCTICA

RAZONADA Y DEMOSTRADA

POR

D. Anastasio Prieto San Pedro,

DIRECTOR DE LA ESCUELA NORMAL DE MAESTROS

DE

LOGROÑO.

OBRA APROBADA PARA SERVIR DE TEXTO EN LAS ESCUELAS NORMALES

POR REAL ORDEN DE 8 DE ENERO DE 1880.

Y PREMIADA CON MEDALLA
DE BRONCE EN LA EXPOSICIÓN REGIONAL LEONESA Y CON DIPLOMA
DE 1.ª CLASE EN LA PROVINCIAL DE LOGROÑO.

3.ª EDICIÓN

CORREGIDA Y AUMENTADA.

1885

...GROÑO:
...ico Sa...

COPIA DE LOS DIPLOMAS.

EXPOSICIÓN REGIONAL LEONESA.

EXPOSICIÓN REGIONAL LEONESA AÑO 1876. OCTUBRE.

EL JURADO
ADJUDICA Á
DON ANASTASIO PRIETO,
LOGROÑO.

POR INICIATIVA DE LA SOCIEDAD ECONÓMICA DE AMIGOS DEL PAÍS, LEON PREMIO AL MÉRITO 1876.

UNA MEDALLA DE BRONCE

(1.ª SÉRIE.—CIENCIAS Y ARTES LIBERALES.) GRUPO 1.º (CLASE 2.ª)
TRATADO DE ARITMÉTICA.

El Presidente de la Junta Directiva,
VICENTE DIEZ CANSECO.

El Presidente del Jurado,
RAMÓN MARTINEZ.

El Secretario,
JUAN PUYOL Y MARIN.

León 15 de Julio de 1877.

Registrado al f.º 26 vt.º con el n.º 92.

AL MÉRITO. AÑO DE 1880.

EXPOSICIÓN PROVINCIAL LOGROÑESA.

AGRICULTURA.—INDUSTRIA.—ARTES.—CIENCIAS.

DIPLOMA
DE
PRIMERA CLASE
Á
D. ANASTASIO PRIETO,
LOGROÑO.

... 7.ª

CLASE 66.

PRODUC...

... ARITMÉTICA Y ...

Lo...

PRÓLOGO.

Excitado por varios de mis apreciables compañeros en el Magisterio y por los alumnos de ambos sexos de estas Escuelas Normales, que me han manifestado deseos de poseer un texto en un todo conforme con mis explicaciones en esta materia, doy á luz el presente tratado sin pretensiones de originalidad.

Confieso desde luego que para su confección he tenido que consultar las obras de otros autores más peritos que yo en este asunto y que gozan de justa y merecida reputación en la república de las letras. Así que sólamente el método que en la exposición de las verdades he adoptado, y la novedad de considerar á los decimales como continuación del sistema de numeración que en él he introducido, es lo que en rigor puede pertenecerme.

Si con este trabajo he conseguido facilitar el estudio de la Aritmética á los jóvenes alumnos que asisten á nuestros establecimientos de enseñanza, me consideraré sobradamente recompensado.

Esto decía al publicar la primera edición de esta obra que, acogida con benevolencia suma por alumnos y maestros y por mis dignos compañeros de profesión, ha sido adoptada de texto en muchas de las Escuelas Normales de Maestros y Maestras y en las Academias militares de cabos y sargentos de algunos regimientos de Infantería.

Hoy tengo la satisfacción de consignar que en la Exposición Regional Leonesa fué premiada con medalla de bronce y en la Logroñesa, con Diploma de primera clase; habiendo sido también aprobada para servir de texto en las Escuelas Normales por Real orden de 8 de Enero de 1880.

Agotada la primera edición, doy á luz esta segunda en la que he procurado corregir los defectos que en aquella he notado, y he aumentado ésta con la explicación de las reglas de divisibilidad de los números por *siete,* aplicaciones de las reglas de tres al *cambio* de monedas extranjeras y resolución de problemas relativos á la *deuda pública;* y con un apéndice sobre los diferentes sistemas de numeración, introduciendo además algunas mejoras tanto en la parte literaria como en la tipográfica.

Sale hoy á luz la tercera edición que he procurado mejorar para que nada desmerezca de las anteriores.

Si con esto he logrado complacer á Maestros y discípulos, y consigo obtener tan favorable acogida como en la primera y segunda edición, quedaré sobradamente satisfecho.

Anastasio Prieto.

ARITMÉTICA.

PRIMERA PARTE.

NUMERACIÓN, OPERACIONES FUNDAMENTALES Y SUS APLICACIONES Á LOS USOS COMUNES DE LA VIDA.

CAPÍTULO I.

Nociones preliminares.

1. Qué son las matemáticas? La ciencia que nos enseña á resolver los problemas relativos á la cantidad.

2. Qué es ciencia? La colección de verdades dependientes unas de otras y que se apoyan en principios fijos y fundamentales, que se llaman axiomas, postulados, teoremas, corolarios, etc.

3. Qué es axioma? Una verdad tan universal y evidente por sí que no necesita demostración: v. gr. Un todo es mayor que cualquiera de sus partes.

4. Qué es postulado? Una verdad particular evidente por sí que tampoco necesita demostración: v. gr. Si á cantidades iguales se les añade ó quita una misma cantidad, los resultados serán iguales.

5. Qué es teorema? Una verdad poco evidente por cuya razón necesita demostrarse. Consta de dos partes: *enunciado* y *demostración*. El enunciado es la proposición que se presenta y la demostración es el razonamiento que se sigue para manifestar la evidencia de la verdad enunciada en el teorema.

6. De cuántas partes consta el enunciado de un teorema? De dos, *hipótesis* y *tésis*. La hipótesis es todo lo que se supone como cierto y puede servirnos de base para la demostración, y tésis es la parte que nos expresa la verdad que

queremos demostrar: v. gr. *Si un número se compone de más de dos cifras, es igual á un múltiplo de 9 más el valor absoluto de sus cifras*: TEOREMA. *Si un número se compone de más de dos cifras* es la *hipótesis* y lo demás la *tésis*.

7. Qué es corolario? Es un teorema que se deduce inmediatamente de otro sin necesidad de nueva demostración, ó á lo más por medio de un razonamiento sencillo.

8. Qué es lema? Un teorema poco interesante por sí; pero que se antepone algunas veces á la demostración de un teorema para evitar la repetición de un mismo razonamiento.

9. Qué es problema? Es una proposición en que se pide hallar una ó más cosas desconocidas ó *incógnitas* por medio de la relación que tienen con otra ú otras que se nos dan conocidas y se llaman *datos*. Resolver un problema es hallar las cosas desconocidas, y el procedimiento que para ello se sigue se llama *resolución*.

10. En cuántas partes se dividen las matemáticas? En varias, según las diferentes maneras de considerar la cantidad; pero las principales para nuestro objeto son: Aritmética, Algebra y Geometría.

11. Qué es ARITMÉTICA? La parte de las matemáticas que tiene por objeto resolver los problemas de la composición y descomposición de los números.

12. Qué es número? El resultado de comparar la cantidad con la unidad.

13. Pues qué es cantidad y qué unidad? Cantidad es todo aquello que puede recibir aumento ó disminución, como el dinero, el espacio, el tiempo, etc. y unidad es el término ó tipo de comparación: v. gr. Si yo me propongo medir el tiempo que ha pasado desde mi nacimiento hasta el día, elijo el tipo que me ha de servir de comparación, que supongo sea el año, en cuyo caso tendré que el tiempo es la *cantidad*, el año la *unidad* y el resultado que me dé la comparación, v. gr. 40, será el número.

14. Qué división podemos hacer de los números? Primeramente en *enteros*, *quebrados* y *mistos*. 2.° en *simples* ó *díjitos* y *compuestos* ó *polidíjitos*. 3.° en *abstractos* y *concretos*, *homogéneos* y *heterogéneos*. *Complejos* é *incomplejos*.

15. Sírvase V. definirme todas estas clases de números? Se llama número *entero* la expresión ó representación de una

ó varias cosas iguales, como 3 litros: *quebrado*, la expresión ó representación de una ó varias partes de la unidad, como $^1/_8$, $^3/_5$: *misto*, la reunión de un entero y un quebrado, como 4 $^3/_8$: *simple* ó *díjito*, el que se representa con un solo guarismo, como 3, 8; *compuesto* ó *polidíjito* el que consta de dos ó más guarismos, como 26, 564. Número *abstracto* es el que no determina la especie de unidad á que se refiere, como 20, 30 y *concreto* cuando la determina, como 20 metros, 30 litros. *Homogéneos* son los números que se refieren á unidades de la misma especie, como 3 años y 5 años, y *heterogéneos*, los que se refieren á unidades de diferente especie, como 3 libros y 7 plumas. Finalmente, se llaman *complejos* cuando constan de unidades de diferentes especies, aunque de la misma naturaleza, como 15 años, 9 meses y 15 días, é *incomplejos*, los que constan de unidades de una sola especie, como 12 cántaras, 15 fanegas.

16. Sabido ya lo que es el número y sus divisiones, qué operaciones se hacen en la Aritmética con los números? Tres principales, que son: expresarlos, componerlos y descomponerlos.

17. Qué parte de la Aritmética nos enseña á expresarlos? La numeración.

18. Cuáles son las operaciones de composición? Sumar, multiplicar y elevar á potencias.

19. Cuáles son las de descomposición? Restar, dividir y extraer raíces.

20. Qué signos empléa la Aritmética para indicar y resolver estos problemas, y simplificar los razonamientos? Además de los llamados cifras ó guarismos empléa los siguientes:

$+$	se lee	mas
$-$	»	menos
$\times$ ó $.$	»	multiplicado por
$:$	»	dividido por
$=$	»	igual á
$>$	»	mayor que
$<$	»	menor que
$\pm$	»	mas-menos
$\mp$	»	menos-mas
$\sqrt{}$	»	signo radical
∞	»	infinito

También se hace uso del paréntesis y de las letras del alfabeto en la forma que dirémos más adelante.

CAPITULO II.

De la numeración

21. Qué es numeración? Una parte de la Aritmética que nos enseña á expresar todos los números con un corto número de palabras y á representarlos por medio de pocos signos llamados cifras ó guarismos. De donde se deduce que la numeración puede ser hablada y escrita.

22. Hay muchos sistemas de numeración? Muchos, según sea la base que se adopte; así, si la base es dos, el sistema se llama *binario*, si tres, *ternario* etc., el que nosotros usamos toma por base el diez y por eso se llama décuplo ó decimal.

23. Sírvase V. explicarme la númeración verbal según este sistema. Para la formación de los números según el sistema decimal tomaremos por punto de partida el *uno*; la reunión de uno y uno se expresa con la palabra *dos*; la reunión de dos y uno, con la palabra *tres*; la de tres y uno, con la palabra *cuatro*; la de cuatro y uno, con la palabra *cinco*; la de cinco y uno, con la palabra *seis*; la de seis y uno, con la palabra *siete*; la de siete y uno, con la palabra *ocho*; la de ocho y uno, con la palabra *nueve*; la de nueve y uno, con la palabra DIEZ.

Todos los números comprendidos de uno á diez constituyen el primer orden de unidades, llamándose por lo tanto unidades de primer orden y también simples ó sencillas.

La palabra *diez* representa ya la primera unidad de otro orden que se llama segundo y también *decena*, por donde se vé que una unidad de segundo orden ó decena tiene diez de primer orden.

Para formar los números siguientes se agregan á la palabra diez los nueve primeros números y resultará diez y uno *(once)*, diez y dos *(doce)*, diez y tres *(trece)*, diez y cuatro *(catorce)*, diez y cinco *(quince)*, diez y seis, diez y siete, diez y ocho, diez y nueve y añadiendo uno tendrémos diez y diez, ó sea dos decenas ó veinte unidades. Así se vá continuando añadiendo á cada série de decenas los nueve primeros números hasta completar diez dieces, ó decenas, cuya reunión constituye una nueva unidad de tercer orden llamada *ciento* ó *centena*.

De la misma manera se vá contando por centenas añadiendo á cada una los noventa y nueve primeros números hasta constituir diez cientos ó centenas, á cuya reunión se dá el nombre de *mil*, *millar* ó unidad de cuarto orden.

Finalmente y para terminar la numeración en orden ascendente se vá contando por miles, decenas y centenas de mil hasta llegar á un *millón* repitiendo sucesivamente todos los números anteriores con su palabra correspondiente. Las *decenas* y *centenas* de *mil* se llaman respectivamente unidades de *quinto* y *sexto* orden. Del mismo modo se cuenta por *millones* etc.

Volviendo ahora al uno que hemos tomado por punto de partida y siguiendo el orden descendente, observarémos que si dividimos ese uno en diez partes iguales á las que damos el nombre de *décimas*, podrémos también contar diciendo una décima, dos décimas, tres décimas, etc., hasta llegar á diez que constituyen la unidad de primer orden. Así mismo, si consideramos dividida una décima en diez partes iguales, que llamamos *centésimas*, podrémos contar del mismo modo una centésima, dos, tres, etc. centésimas, hasta llegar á diez que constituyen una décima, y así sucesivamente dividiendo las centésimas, nos darán *milésimas*, dividiendo éstas, *diezmilésimas*, *cienmilésimas*, *millonésimas*, etc.

De todo lo expuesto, se deduce: *que en el sistema de numeración decimal cada unidad de un orden contiene diez unidades del orden inmediatamente inferior y es una decima del inmediato superior.*

Numeración escrita.

24. ¿Qué es numeración escrita? La parte que nos enseña á representar los números por medio de ciertos signos que llamamos *cifras ó guarismos*.

25. ¿Cuáles son éstos? Los siguientes:

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	0,
uno,	dos,	tres,	cuatro,	cinco,	seis,	siete,	ocho,	nueve,	cero,

Los nueve primeros se llaman significativos, y el *cero* no significativo.

26. ¿Por qué se llaman significativas las nueve primeras cifras é insignificativo el cero? Porque las primeras tienen

siempre el valor absoluto que se les dá por su figura, y el cero carece de este valor, y sólo sirve para indicar la falta de unidades del orden cuyo lugar ocupa.

27. ¿Cómo es posible con estas diez cifras representar todos los números? Admitiendo en cada una dos valores, que llamamos *absoluto* uno y *relativo* otro. El absoluto es el que cada figura representa, de manera que el 1 siempre representa uno, y el 2 siempre 2, y así de los demás. El *relativo* es el que cada cifra adquiere, según el lugar que está ocupando.

28. Se servirá V. explicarme estos dos valores de los guarismos? El valor absoluto de las cifras siempre es el mismo, ya se encuentren solas ó ya acompañadas de otras; pero el valor relativo debe entenderse de esta manera: Tomemos por punto de partida, como hemos hecho en la numeración verbal, las unidades simples, y siguiendo el orden ascendente, esto es, de derecha á izquierda, tenemos que un guarismo cualquiera, el 4 por ejemplo, representa 4 (*valor absoluto*), unidades sencillas ó de primer orden (*relativo*): en el segundo lugar representará cuatro también, pero decenas ó unidades de 2.° orden, en el 3.° 4 centenas, en el 4.° 4 millares ó unidades de 4.° orden, en el 5.° 4 decenas de millar ó unidades de 5.° orden, en el 6.° 4 centenas de millar ó unidades de 6.° orden, y así sucesivamente, unidades, decenas, centenas, etc. de millón.

Volviendo al punto de partida, y siguiendo el orden descendente, esto es, hácia la derecha, tenemos que el mismo 4, en el primer lugar, representa 4 décimas, en el segundo 4 centésimas, en el 3.° 4 milésimas, en el cuarto, 4 diezmilésimas, en el quinto, 4 cienmilésimas, etc. (1).

29. ¿Qué se deduce de esto? 1.° Que cada cifra puesta á la izquierda representa unidades diez veces mayores que su inmediata de la derecha: y *vice versa*, á la derecha, unidades diez veces menores que la de su izquierda. 2.° Que una cifra no cambia de valor si no cambia de lugar. 3.° Que si una cifra cambia un lugar hácia la derecha se hace su valor 10 veces menor, si dos, 100 y así sucesivamente, y al contrario si lo cambia marchando hácia la izquierda.

---

(1) Háganse muchas preguntas sobre el valor relativo de cada guarismo, hasta que se comprenda bien el que representa en los diferentes lugares.

30. Y ¿cómo sabremos cuál es el punto de partida para separar la parte entera de la decimal? Poniendo una virgulita á la derecha de las unidades de primer orden para separar la parte entera de la decimal.

Para más claridad en el asunto, véase, el siguiente cuadro:

PARTE ENTERA.										PARTE DECIMAL.					
	3	4	6	8	7	5	2	'	3	7	6	4	3	2	
etc.	unidades de millón.	centenas de mil.	decenas de mil.	unidades de mil.	centenas.	decenas.	unidades.	Punto de partida.	décimas.	centésimas.	milésimas.	diezmilésimas.	cienmilésimas.	millonésimas.	etc.

31. Cuando un número esté compuesto de muchas cifras, ¿será fácil comprender su valor? Sí, para lo cual conviene saber ántes qué se entiende por período y qué por clase.

32. ¿Pues qué entiende V. por período? Período es el conjunto ó reunión de seis órdenes de unidades diferentes que se repiten sucesivamente con los mismos nombres, y se distinguen con los nombres de 1.°, 2.°, 3.°, etc., principiando á contar desde la vírgula hácia la izquierda, ó desde el último guarismo, si no hubiere decimales. Así, pues, las unidades, decenas, centenas sencillas y las unidades, decenas y centenas de mil constituyen el primer período; estas mismas unidades, decenas, centenas sencillas y de mil, pero con referencia á millones el segundo etc.

De modo que el primer período contiene los primeros seis órdenes de unidades, el segundo seis órdenes de unidades con referencia á *millones*, el tercero otros seis órdenes de unidades que se refieren á *billones*, y así sucesivamente.

33. ¿Qué se entiende por clase? La reunión de tres órdenes de unidades diferentes que se repiten sucesivamente con los mismos nombres, y que se distinguen con los de 1.ª y 2.ª. La 1.ª que contiene las unidades, decenas y centenas sencillas, y la 2.ª las unidades, decenas y cente-

nas de mil. De donde se deduce que cada período se compone de dos clases.

34. Según esto, ¿cómo leeremos un número compuesto de muchas cifras?

Distinguiremos dos casos: 1.º Que el número contenga solo la parte entera: 2.º que contenga también parte decimal.

En el primer caso se divide el número en períodos de á seis guarismos, contando de derecha á izquierda, y señalando estas divisiones con un 1, un 2, un 3, etc. de menor tamaño, y colocado un poco más alto que los demás, y luego cada período en dos clases, separándolas con una coma por la parte inferior. Hecho esto, se vé qué orden de unidades representa el primer guarismo de la izquierda por el lugar que ocupa, y se principia á leer por él dando á éste y los demás sus valores respectivos. Ejemplo.

Sea el número 73584325768654, que dividido en períodos y clases, como acabamos de indicar, tomará la siguiente forma: $73.^{2}584,325.^{1}768,654$.

En esta disposición observo que el primer guarismo de la izquierda, esto es, el 7, ocupa el 2.º lugar del tercer período, y que por lo tanto, representa decenas de billón; principiaré, pues, por él, y continuaré dando á cada uno de los demás sus respectivos valores, y diré: *setenta y tres billones quinientos ochenta y cuatro mil trescientos veinticinco millones setecientos sesenta y ocho mil seiscientas cincuenta y cuatro* UNIDADES.

En el segundo caso se lee como en el primero la parte entera ó sea hasta la vírgula, y luego del mismo modo la parte decimal, dándole el nombre de su última cifra. Ejemplo:

Sea el número 8567642'5796432, que dividido en la forma expresada será $8^{1}567,642'5^{1}796,432$, y leyendo ahora la parte entera y luego la decimal como se ha dicho, tendremos: *ocho millones quinientas sesenta y siete mil seiscientas cuarenta y dos* UNIDADES *y cinco millones setecientas noventa y seis mil cuatrocientas treinta y dos* DIEZMILLONÉSIMAS.

35. ¿Cómo se escriben los números para que nos representen con exactitud las cantidades?

Distinguiremos tres casos: 1.º Que el número tenga solo la parte entera. 2.º Que tenga parte entera y decimal. 3.º Que tenga sólamente la parte decimal.

En el primer caso se principia á escribir por las unidades de orden superior, que son las primeras que se nombran al hablar, colocando en su lugar correspondiente el guarismo que las ha de representar, á continuación las unidades de orden inmediatamente inferior, escribiendo del mismo modo la cifra correspondiente, y así se continúa de izquierda á derecha hasta llegar á las unidades sencillas ó de primer orden, advirtiendo que si en la cantidad que queremos representar faltasen unidades de algún orden, debemos escribir la cifra *cero* en su lugar correspondiente. Ejemplo.

Escribir la cantidad *veinticuatro millones trescientas siete mil cuarenta y seis* UNIDADES.

En este ejemplo observo que las unidades de orden superior son veinte millones, ó sea dos unidades de segundo orden del segundo período; escribiré, pues, la cifra 2; á continuación, y siguiendo el orden descendente, veo que en la expresada cantidad hay cuatro millones ó unidades de primer orden del expresado período, por cuya razón escribiré la cifra 4 á la derecha del 2, y pasaré al primer período á su sexto orden de unidades, de las cuales contiene tres, por lo que escribiré la cifra 3: paso ahora á las unidades de quinto orden, y como no hay ninguna en la cantidad propuesta, escribiré *cero* en su lugar correspondiente: paso en seguida á las de 4.° orden, de las cuales hay siete, y por lo tanto escribo la cifra 7. Del mismo modo iré continuando con las unidades de 3.°, 2.° y 1.° orden, y la cantidad quedará representada en esta forma:

24307046.

En el 2.° caso se escribe primero la parte entera, como se acaba de decir, y á continuación se pone la vírgula en la parte superior, siguiendo en el orden descendente las décimas, centésimas, milésimas, etc., hasta su terminación, escribiendo también *ceros* en los lugares correspondientes, si la cantidad carece de unidades de algún orden. Ejemplo.

Escribir trescientas ocho *unidades* y cuarenta y seis *milésimas*.

Escribiré 1.° la parte entera 308‘ con su vírgula correspondiente, y en seguida paso á escribir las décimas, y como la cantidad propuesta no contiene ninguna, pondré *cero* en su lugar, paso á las centésimas de las que contiene cuatro, y por lo tanto escribo la cifra 4: paso á las milésimas y observo que contiene seis, por cuya razón escribo la cifra 6, resultando el número 308'046.

En el tercer caso escribiré *cero* con su vírgula para expresar que no hay enteros, y á continuación la parte decimal, como en el caso anterior. Ejemplo:

Escribir cuatrocientas sesenta y ocho milésimas.

Escribiré 0'468.

36. ¿Qué será conveniente hacer para cerciorarse de si se ha comprendido ó nó esta teoría? Ejercitarse mucho en el análisis de los números, indicando los diferentes órdenes de unidades que contienen, y dando las razones convenientes.

Veámos un ejemplo de análisis: Sea el siguiente: manifestar los diferentes órdenes de unidades que contiene el número 64307'354.

Este número se compone de seis unidades de 5.º orden ó sea 60000 de 1.º porque el 6 está ocupando el 5.º lugar á la izquierda de la vírgula; 4 unidades de 4.º orden ó 4000 unidades de 1.º por ocupar el 4 el 4.º lugar; 3 unidades de 3.er orden ó 300 sencillas por estar el 3 en el 3.er lugar; ninguna de 2.º por estar ocupando un cero el segundo lugar; y 7 unidades de 1.er orden ó sencillas porque el 7 ocupa el 1.er lugar: hasta aquí la parte entera, conteniendo además como parte decimal 3 décimas, 5 centésimas y 4 milésimas, como indican las cifras 3, 5 y 4 colocadas en el 1.º, 2.º y 3.er lugar respectivamente á la derecha de la vírgula. De manera que descompuesto este número en la forma dicha tendrémos:

Parte entera.	6 unidades de 5.º orden, ó decenas de mil, ó sean 60000 unidades sencillas.	
	4 id. de 4.º id. ó unidades de mil, ó sean,	4000 id. id.
	3 id. de 3.º id. ó centenas, ó sean.. . .	300 id. id.
	7 id. de 1.º id. ó sean	7 id. id.
id. decimal.	3 de 1.er orden, ó décimas ó sean. . .	0'3
	5 de 2.º id. ó centésimas, ó sean. . .	0'05
	4 de 3.º id. ó milésimas, ó sean. . .	0'004

Antes de pasar á las operaciones aritméticas y terminar la numeración vamos á explicar algunas propiedades de los números, para lo cual demostrarémos los siguientes teoremas.

TEOREMA 1.°

Si se añaden uno ó más ceros á la izquierda de un número entero, no se altera su valor.

Demostración. Sea el número 468: digo que si á su izquierda se añaden uno ó más ceros siempre tendrá el mismo valor.

En efecto, añadiendo un cero resultará 0468 en donde el 8 queda en el 1.er lugar que es el que tenía en el número propuesto, el 6 queda en el 2.° y el 4 en el 3.° es decir que no han cambiado de lugar: luego tampoco de valor. (29-2.°) que es lo que nos propusimos demostrar.

Lo mismo resultaría si en lugar de uno, se escribiesen dos ó más ceros.

TEOREMA 2.°

Si á la derecha de un número entero se añaden uno ó más ceros, el número se hace tantas veces mayor cuantas exprese la unidad seguida de tantos ceros como se añadan.

Dem. Sea el número 36: digo que si se añade un cero á su derecha el número se hará 10 veces mayor, si dos 100 etc.

En efecto, escribiendo un cero á la derecha de este número resulta 360, en que se vé que el 6 que ocupaba el primer lugar de la derecha ha pasado al 2.° y el 3 que estaba en el 2.°, ahora ocupa el 3.° ó lo que es lo mismo el 6 que representaba unidades sencillas, ahora representa decenas que son diez veces mayores y el 3 que representaba decenas, ahora representa centenas que son diez veces mayores; luego todo el número se ha hecho diez veces mayor (29-3.°)

Si en lugar de un cero hubiéramos añadido dos, el número se hubiera hecho 100 veces mayor, porque las unidades de primer orden hubieran pasado á ser de tercero, que son 100 veces mayores, y las de 2.° á 4.°, que también lo son, y así sucesivamente.

Corolario. Si el número termina en uno ó varios ceros y se le quitan, se hará diez veces menor por el 1.er cero que se suprima, 100 por el 2.° porque las cifras ocuparán lugares inferiores á los que ántes ocupaban.

TEOREMA 3.°

Si á la derecha de un decimal se añaden ceros, no se altera su valor (1).

Demostración. Sea el número 58'34: digo que si se añaden ceros á su derecha, no altera su valor.

En efecto, por más ceros que escribamos á la derecha de la cifra 4, todas quedan en el mismo lugar, como se vé en 58'34000: luego (29-2.°) no altera su valor, según el enunciado del teorema.

TEOREMA 4.°

Si entre la vírgula y el primer guarismo de la parte decimal de un número se añaden ceros, la parte entera no varía, pero la decimal se hace 10 *veces menor por el* 1.er *cero que se añade;* 100 *por el* 2.°, etc. (2).

Demostración. Sea el número 43'56: si añadimos un cero entre la vírgula y el 5, resulta el número 43'056 en donde se vé que la parte entera queda inalterable; pero en la decimal el 5 que representaba décimas, representa ahora centésimas, y el 6 que representaba centésimas, representa milésimas; luego la parte decimal se ha hecho diez veces menor, según el enunciado.

TEOREMA 5.°

Si en un número se corre la vírgula un lugar hácia la derecha, se hace diez veces mayor, si dos, ciento, etc.; pero si se corre un lugar hácia la izquierda, se hace diez veces menor, si dos, ciento, etc.

Demostración Sea el número 432'567: si la vírgula se corre un lugar hácia la derecha, el número propuesto se trasforma en 4325'67, número diez veces mayor que el primero, toda vez que cada cifra representa ahora unidades de un orden inmediatamente superior al que ántes representaba; luego todo el número se ha hecho diez veces mayor. Si la corriésemos otro lugar, por la misma razón se haría este número diez veces mayor y por tanto ciento más que el propuesto, conforme al enunciado.

---

(1) Lo mismo, y por la misma razón sucede si tiene ceros y se le quitan.

(2) Si tiene ceros y se le quitan se hace 10 veces mayor por el 1.er cero que se quite, 100 veces si se quitan dos etc.

Sea ahora el mismo número 432'567: y corramos la vírgula hácia la izquierda; resultará 43'2567, número evidentemente diez veces menor que el propuesto, por la misma razón sentada en el caso anterior, que es lo que nos proponíamos demostrar.

CAPÍTULO III.

De las operaciones fundamentales.

37. ¿Cuántas son las operaciones fundamentales de la Aritmética? Cuatro, que son: adición, sustracción, multiplicación y división. Se llaman fundamentales porque en ellas se fundan todas las demás.

ARTÍCULO 1.°

Sumar ó adición.

38. ¿Qué es adición? Una operación que tiene por objeto reunir, juntar ó agrupar el valor de dos ó más números homogéneos en uno solo.

39. ¿Cómo se llaman los datos y el resultado de esta operación? Los datos se llaman *sumandos* y el resultado *suma* ó *agregado.*

40. ¿Cómo se indica esta operación? Por medio del signo + mas, que se coloca entre los sumandos, separando después el resultado por medio del signo = igual, y constituyendo lo que se llama una igualdad.

41. ¿Pues qué es igualdad? La separación de dos ó más cantidades del mismo valor por medio del signo = igual. Toda igualdad consta de dos *miembros*, llamados *primero* el que está ántes del signo, y *segundo* el que está después.

42. ¿Cuántos casos debemos distinguir en la adición? Dos: 1.°, que los sumandos sean sólamente enteros: y 2.°, que tengan también parte decimal.

43. ¿Cómo se ejecuta la operación en el primer caso? Se colocan los sumandos unos debajo de otros, de modo que formen columna las unidades de un mismo orden, se tira una línea horizontal por debajo de todos, y se principia á sumar por las unidades de primer orden; si de la reunión de estas unidades resulta alguna de segundo, se guarda para

agregarla mentalmente á las de la segunda columna, y las restantes se escriben debajo de la línea, y si resultase número exacto de decenas se escribe *cero*: en seguida se suman las decenas, y si de esta suma resulta alguna centena ó unidad de tercer orden, se guarda para añadirla á las de la tercera columna, escribiendo debajo de la línea las decenas restantes, ó *cero* si resultase número justo de centenas; y así se continúa hasta haber sumado todas las columnas.

44. Sírvase V. explicarme el por qué de esta regla.

La colocación de los sumandos unos debajo de otros se hace para mayor facilidad, aunque también puede hacerse la suma sin esta colocación.

La línea que se tira por debajo sirve para separar los sumandos de la suma y evitar el que se confundan.

Se principia á sumar por las unidades inferiores ó de primer orden, con el fin de poder agregar á las superiores inmediatas las que puedan resultar de las inferiores.

45. Indique V., resuelva y demuestre esta operación por medio de un ejemplo.

Sea el siguiente: Sumar 454+2468+526.

$$\begin{array}{r} 454 \\ +2468 \\ +\ 526 \\ \hline =3448 \\ \hline \end{array}$$

Colocaré los sumandos en la forma dicha y tiraré la línea por debajo: sumaré 4+8+6 unidades de primer orden que componen 18 unidades del mismo, ó sea una de 2.° y 8 de 1.°: escribo las ocho debajo de la línea y guardo la una para agregarla á la columna siguiente; sumo ahora las de 2.° orden y digo: una y 5 son 6 y 6 son 12 y 2 son 14 unidades de 2.° orden que componen una unidad de tercer orden y 4 de 2.°; escribo debajo de la línea las 4 de 2.° y guardo la una para añadirla á las de 3.°; paso ahora á la tercera columna y digo: 1 y 4 son 5 y 4 son 9 y 5 son 14 unidades de tercer orden que componen una de 4.° orden y 4 de 3.°: escribo las 4 debajo de la línea y guardo la una para añadirla á la columna siguiente: paso á la 4.ª columna y digo: 1 y 2 son 3, que como no componen ninguna unidad de 5.° escribo debajo de la línea, y resulta la suma de 3448.

Demostración. Descompuestos los sumandos en sus diferentes órdenes de unidades nos dan:

1.^{er} sumando = ... 4 cents. 5 decns. y 4 unids.
2.° id. . = 2 unidades de mil 4 » 6 » 8 »
3.° id. . = » » 5 » 2 » 6 »
que sumados separadamente dan:
Suma de las unidades de todos los sumandos.. . . . . 4+8+6=18 unidades.
Suma de todas las decenas de id. . 5+6+2=13 decenas.
Suma de todas las centenas de id. 4+4+5=13 centenas.
Suma de las unidades de mil.. . . 2 unidades de mil.

Ahora bien:
las 18 unidades son tanto como. . . 1 decena y 8 unidades.
las 13 decenas valen. . . 1 centena 3 decenas.
las 13 centenas 1 unidad de mil 3 centenas.
las 2 unids. de mil 2 id

Luego todos valdrán 3 unidades de mil 4 centenas 4 decenas y 8 unidades, ó sea 3448 unidades, conforme á la regla.

46. Cómo se ejecuta la operación en el 2.° caso ó sea cuando los sumandos se componen de parte entera y decimal? Se colocan los sumandos del mismo modo que en el caso anterior para lo cual será necesario que las vírgulas de todos los sumandos formen también columna y tirando la línea por debajo, se principia á sumar por las unidades del orden más inferior ó sea por la primera columna de la derecha, siguiendo después una marcha en un todo conforme á lo establecido en el caso anterior, y poniendo por último en la suma otra vírgula que forme columna con las de los sumandos. Ejemplo:

Sumar 325'34+26'586+38'457+0'003.

Disposición.

	325'34
+	26'586
+	38'457
+	0'003
Suma......	390'386

Resolución. Coloco los sumandos unos debajo de otros de manera que formen columna las unidades del mismo orden como se vé en el ejemplo: y principio á sumar por las del orden inferior que en el caso presente son las milésimas, y digo: 6 y 7 son 13 y 3 son 16 milésimas que componen una centésima y 6 milésimas, escribo debajo de la línea las 6 milésimas y añado la centésima á la columna siguiente diciendo: 1 y 4 son 5, y 8 son 13, y 5 son 18 centésimas, que componen una décima y 8 centésimas, escribo las 8 centésimas y añado la décima á la columna de las décimas diciendo: 1 y 3 son 4, y 5 son 9, y 4 son 13 décimas, que componen una unidad de primer orden y 3 décimas, escribo las 3 décimas y añado la unidad á las de la columna siguiente y del mismo modo continúo hasta haber sumado todas las columnas, y finalmente coloco en la suma otra vírgula entre el cero y el 3 formando columna con las de los sumandos, resultando que 325‘34+26‘586+38‘457+0‘003 =390‘386.

La demostración se hace como en el caso anterior: descomponiendo cada sumando en sus diferentes órdenes de unidades, sumando éstas separadamente y volviendo á descomponer las sumas parciales, para obtener el resultado final.

47. Hay alguna cosa que advertir respecto á esta operación?

Varias: 1.ª Que el orden de colocación de los sumandos no altera en nada el resultado, pues lo mismo es 3+4 que 4+3.

En efecto, $3=1+1+1$.
$4=1+1+1+1$.

Sumando ordenadamente, esto es, los primeros miembros y los segundos de estas dos igualdades, resultará otra igualdad y será $3+4=1+1+1+1+1+1+1$.

El segundo miembro de esta igualdad podemos descomponerle en dos sumandos $1+1+1+1=4$ y $1+1+1=3$ y por consiguiente $3+4=4+3$ que es lo que se quería demostrar.

2.ª Que si á un sumando se le añade una cantidad cualquiera, la suma aumentará en la misma cantidad, pues esto equivale á añadir á la suma un nuevo sumando.

3.ª Que si á un sumando se le quita una cantidad cualquiera, la suma disminuye en la misma cantidad, pues esto equivale á descomponer dicho sumando en dos sumandos y quitar uno de ellos, lo que debe influir de la misma manera en la suma.

4.ª Que si á un sumando se le añade una cantidad cualquiera y á otro se le quita la misma cantidad, la suma no se altera, porque lo que la suma aumenta con lo que á un sumando se añade, disminuye con lo que al otro se le quita y por consiguiente no se altera.

48. Cuándo harémos aplicación de la suma en los usos comunes de la vida?

Siempre que nos ocurra tener que reunir en una sola cantidad el valor de dos ó más de la misma especie, como si yo deseo saber cuántas fanegas de trigo habrá en un montón en que primeramente se echaron 20 fanegas, después 40, luego 50, en cuyo caso sumaría los números 20+40+50=110 fanegas.

ARTÍCULO 2.°

Sustracción ó resta.

49. Qué es sustracción? Una operación cuyo objeto es resolver el siguiente problema: *Dada una suma de dos sumandos y uno de éstos, hallar el otro.*

50. Qué nombres reciben la suma y los sumandos en esta operación? La suma se llama *minuendo*, el sumando conocido *sustraendo* y el sumando desconocido *resta, esceso* del minuendo sobre el sustraendo ó diferencia entre el sustraendo y minuendo. Esta operación se indica colocando entre el minuendo y sustraendo el signo ménos, así 6—2 que se lee 6 ménos 2.

51. Qué consecuencias se deducen de esta definición? Las siguientes:

1.ª Que en la sustracción el minuendo debe ser igual al sustraendo mas la resta.

2.ª Que el sustraendo es la diferencia entre el minuendo y la resta.

3.ª Que la sustracción es una operación contraria á la adición.

Y 4.ª Que la resta se obtendrá quitando ó rebajando del minuendo el valor del sustraendo; de donde se deduce la definición de que RESTAR *es hallar la diferencia que hay entre dos números*, y también *rebajar de un número el valor del otro.*

52. Según esto, qué alteraciones sufrirá la resta con respecto á las que sufran los datos? Las que se exponen en los dos teoremas siguientes:

TEOREMA 6.°

Si en una sustracción aumenta el minuendo, aumentará en las mismas unidades la resta, y si disminuye el minuendo, disminuirá la resta en las mismas unidades.

Dem. Sea la sustracción 8—3=5, digo que si el minuendo 8 aumenta, la resta aumentará y si disminuye el minuendo, disminuirá la resta.

En efecto: siendo el 8 (minuendo) una suma compuesta de dos sumandos, de los cuales el uno 3 (el sustraendo) permanece invariable, si aumenta ó disminuye la suma (minuendo), el aumento ó disminución estará en el otro sumando (resta), porque (46 adv. 2.ª y 3.ª) aumentando un sumando aumenta la suma, y disminuyendo un sumando disminuye la suma, conforme al enunciado.

TEOREMA 7.°

Si en una sustracción aumenta el sustraendo, disminuirá en las mismas unidades la resta, y si disminuye el sustraendo, aumentará la resta en las mismas unidades.

Dem. Sea el minuendo 8 que permanece constante y el sustraendo 3 que aumenta ó disminuye, digo que la resta 5 disminuirá si aumenta el sustraendo y aumentará si disminuye.

En efecto, no variando el minuendo que, como ya se ha dicho, es la suma del sustraendo y la resta, resultará evidentemente que tanto como aumente el sumando sustraendo, tendrá que disminuir el otro sumando resta; y tanto como disminuya aquel, aumentará ésta, conforme el enunciado.

COROLARIO 1.°

Según esto sucede á la resta lo mismo que al minuendo y lo contrario que al sustraendo.

COROLARIO 2.°

Si á minuendo y sustraendo se les añade ó quita la misma cantidad el resto no varía.

Porque el aumento que experimentaría la resta aumentando el minuendo, sería compensado con la disminución que sufriría por el aumento del sustraendo, y la disminución sufrida por disminución del minuendo, sería compensado por el aumento verificado por disminución del sustraendo.

53. Cómo se ejecuta la operación de restar ó sustracción?

Distinguirémos dos casos: 1.° Que minuendo y sustraendo consten sólamente de parte entera, 2.° que consten de parte entera y decimal.

En el primer caso se coloca el sustraendo debajo del minuendo, de modo que se correspondan las unidades de igual orden y se tira una línea horizontal por debajo, para separar la resta; en seguida se principia á restar por las unidades inferiores, rebajando de las del minuendo las correspondientes del sustraendo y escribiendo el resto debajo de la línea; luego se pasa á las unidades de 2.° orden y se ejecuta la misma operación, continuando del mismo modo hasta haber rebajado de los diferentes órdenes de unidades del minuendo los correspondientes del sustraendo.

Ejemplo.

Minuendo	76854
Sustraendo—	35232
Resta=	41622

Colocados el minuendo y sustraendo en la forma dicha, digo: rebajando de las 4 unidades del minuendo las dos del sustraendo, quedan 2 que escribo debajo de la línea; paso á las decenas y digo: de 5 decenas rebajo 3, quedan 2 que escribo de la misma manera: y así continúo hasta terminar, resultando de resta 41622.

La resta así obtenida será la verdadera, puesto que *lo que se hace con las partes queda hecho con el todo*, y como en el caso presente se han rebajado todas las partes del sustraendo de todas las del minuendo, es claro que se ha rebajado todo el sustraendo de todo el minuendo, que es en lo que consiste la resta.

54. Puede encontrarse alguna dificultad al ejecutar esta operación?

Sí; puede suceder que alguno de los guarismos del sustraendo sea mayor que su correspondiente del minuendo, en cuyo caso se resuelve siguiendo el método de descomposición ó añadiendo á minuendo y sustraendo una misma cantidad, lo que no altera la resta (Cor. 2.° del Teor. 7).

55. Veámos prácticamente esta resolución.

Sirva de ejemplo el siguiente:

Minuendo	57354
Sustraendo	38426
Resta=	18928

Método de descomposición. Colocados los datos en la forma que se vé en el ejemplo, diré: De 4 unidades rebajo 6 no puede ser, por lo que tomo una unidad de 2.° orden ó decena del 5, que tiene 10 del 1.° y sumadas con las 4 del minuendo resultan 14, de las que rebajadas las 6 del sustraendo quedan 8, que escribo debajo de la línea; paso á las decenas y cuento una de ménos que descompuse en unidades y diré: de 4 decenas rebajo 2, quedan 2 que escribo debajo de la línea; paso á las centenas y digo: de 3 centenas rebajo 4, no puede ser, tomo una unidad de mil que descompuesta en centenas vale 10, que sumadas con las 3 son 13, de las que rebajadas las 4 del sustraendo quedan 9, que escribo debajo de la línea; paso á las unidades de mil y digo: de 6 (porque rebajé una) quito 8, no puede ser, tomo una decena de mil que vale 10 unidades, que agregadas á las 6 hacen 16, resto las 8, me quedan 8 que escribo de la misma manera: finalmente, resto las tres decenas de mil del sustraendo de las 4 que me han quedado en el minuendo y la diferencia 1 la escribo debajo de la línea, resultando 18928.

Añadiendo una misma cantidad á minuendo y sustraendo. Digo: De 4 unidades rebajo 6, no puede ser, añado 10 al minuendo y serán 14, de las que rebajadas las 6, quedan 8 que escribo debajo la línea; paso á las decenas y teniendo en cuenta que he añadido 10 unidades al minuendo, añado ahora una decena que es lo mismo al sustraendo y diré: de 5, 3, quedan 2, que escribo en el resto y de la misma manera procedo con las centenas y unidades de mil en que las cifras del sustraendo son mayores que sus correspondientes del minuendo.

56. Cómo nos cercioraremos de que la operación está

bien ejecutada? Sumando el sustraendo con la resta, y si nos dá el minuendo estará bien, (50, 1.ª)

57. Cómo se ejecuta en el caso de que el minuendo y sustraendo contengan parte entera y decimal?

Se coloca el sustraendo debajo del minuendo en la forma dicha en el caso anterior, teniendo cuidado de que las vírgulas formen columna, y se tira la línea por debajo: si alguno de los datos tuviese más guarismos decimales que el otro, se añaden ceros á la derecha del que tenga ménos, lo cual no altera el decimal, (Teor. 3.) haciéndose lo mismo si alguno careciese de decimales, y en seguida se ejecuta la operación como en el primer caso, poniendo en la resta otra vírgula que se corresponda con las del minuendo y sustraendo.

Ejemplos.

1.°		2.°		3.ª	
Minuendo	34'580	Minuendo	6434'563	Minuendo	457'00
Sustraendo	16'345	Sustraendo	2318'000	Sustraendo	238'34
Resta=	18'235	Resta=	4116'563	Resta=	218'66

58. Cuándo harémos aplicación de la resta en los usos de la vida?

Siempre que tengamos necesidad de hallar la diferencia que hay entre dos números de la misma especie, ó que tengamos que rebajar una cantidad de otra.

Ejemplo.

Debiendo un sugeto 253568 reales y pagando 153892 reales ¿cuántos quedará debiendo?

En este caso tenemos que averiguar la diferencia que hay entre estos dos números y por lo tanto ésta será una operación de restar.

Dem. En efecto, llamando X á la resta tendrémos que X que queda debiendo, mas lo que paga, debe ser igual á lo que debe y por lo tanto X+153892=253568, donde se vé que 253568 es la suma de los dos sumandos 153892, conocido, y X desconocido, que es en lo que consiste la sustracción. Efectuándola resulta 253568—153892=99676.

ARTÍCULO 3.°

Multiplicación.

59. Qué es la multiplicación? Una operación que tiene por objeto resolver el siguiente problema: *Dados dos números hallar un tercero, que sea respecto del primero lo que el segundo es respecto de la unidad.* Así multiplicar 4 por 5 será hallar otro número que sea respecto del 1.° 4, lo que el 2.° 5 es respecto de la unidad, y como 5 es 5 veces la unidad, el número que vamos á buscar será 5 veces el 4=20.

60. Qué nombres reciben estos números? Los datos se llaman *multiplicando* y *multiplicador* y también *factores* y el resultado ó incógnita, *producto.*

61. Cómo se indica la operación de multiplicar? Poniendo entre los factores el signo $\times$ ó un punto. Así para indicar que 7 se ha de multiplicar por 8 se escribe 7×8 ó 7. 8: en el primer caso, esto es, 7×8 significa que la operación está indicada, y en el 2.°, esto es, 7. 8 que está ejecutada.

62. Qué consecuencias se deducen de la definición de multiplicar? Las siguientes:

1.ª Que si el multiplicador es número entero, el producto contiene al multiplicando tantas veces como unidades tiene el multiplicador, en cuyo caso se puede definir diciendo: que *multiplicar un número cualquiera por otro entero es hallar un tercer número que contenga al 1.° ó sea mayor que el 1.° tantas veces como unidades tiene el 2.°*

2.ª Que si el multiplicador es quebrado el producto será tantas veces menor que el multiplicando, como partes falten al quebrado para valer la unidad, ó el producto será tantas partes del multiplicando como el quebrado sea de la unidad.

3.ª Que cuando el multiplicador es entero podrá hallarse el producto repitiendo el multiplicando tantas veces por sumando como unidades tiene el multiplicador: y si es quebrado, tomando del multiplicando las partes que indique el multiplicador. Así para multiplicar 25 por 4 bastará tomar el 25 cuatro veces por sumando así 25+25+25+25=100: y para multiplicar 25 por $^3/_5$ bastará tomar del 25 tres quintas partes, ó sea $25\times{}^3/_5=15$.

63. Cuántos casos pueden ocurrir en la multiplicación? Tres: 1.° Multiplicar un número dígito por otro dígito. 2.°

Multiplicar un compuesto por un dígito. 3.° Multiplicar un compuesto por otro compuesto.

Además podemos considerar como casos especiales del 3.° Multiplicar por la unidad seguida de ceros; por una cifra significativa acompañada de ceros, y que uno ó ambos factores terminen en ceros.

64. Antes de examinar estos diferentes casos ¿convendría examinar algunos principios que nos sirvan como de base para nuestros razonamientos?

Sí, los siguientes: 1.°

TEOREMA 8.

Un producto de dos factores no se altera, aunque varíe el orden de los factores.

Sea el producto 3×4: digo que $3\times4=4\times3$.

En efecto, $3=1+1+1$. Si estas dos cantidades iguales se multiplican por el mismo número, 4 por ejemplo, los productos serán iguales; luego $3\times4=1\times4+1\times4+1\times4=4+4+4$ ó 4×3 que es lo que se quería demostrar.

2.° Un producto indicado compuesto de más de dos factores significa que el producto de los dos primeros se multiplique por el 3.°; este producto por el 4.° y así sucesivamente.

Así $6\times4\times5\times3$ quiere decir que $6\times4=24$ se multiplique por 5 y éste $24\times5=120$ por 3: de modo que $6\times4\times5\times3=24\times5\times3=120\times3=360$.

3.° Que si el multiplicando se multiplica por un número cualquiera, el producto queda multiplicado por el mismo número, sucediendo lo mismo si se multiplica el multiplicador, y que si se multiplican los dos factores por otros números, el producto queda multiplicado por el producto de ellos.

65. Cómo se multiplica un dígito por otro dígito? Sabiendo de memoria la tabla llamada pitagórica ó de multiplicar.

66. Pues qué cosa es esta tabla? El conjunto ó reunión de todos los productos que pueden resultar de las diferentes combinaciones de un dígito por otro dígito. Tal es la siguiente:

TABLA PITAGÓRICA.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

67. Cómo se averiguan los productos de un número dígito por otro en esta tabla? Se busca uno de los factores en la primera línea horizontal y el otro en la primera vertical y donde la columna correspondiente al 1.° corte á la horizontal correspondiente al 2.° se encontrará el producto de ambos.

68. Cómo se multiplica un número compuesto de varias cifras ó polidígito por un dígito? Distinguirémos dos casos: 1.° que el multiplicando contenga sólamente parte entera; 2.° que tenga también parte decimal.

Si sólamente contiene parte entera, se multiplica cada una de las cifras del *multiplicando* por la única del *multiplicador* principiando por la derecha, y escribiendo la cifra de cada producto en el lugar correspondiente, según el orden que representa, y agregando al producto siguiente las unidades de su orden que puedan resultar del anterior.

Dem. Sea el multiplicando 538 y el multiplicador 4.

Según la definición de la multiplicación, tendrémos que hallar un número que sea respecto 538 lo que 4 es respecto á la unidad, esto es, 4 veces mayor: y es evidente que será lo mismo que repetir el 538, cuatro veces, á saber 538 +538+538+538 donde vemos que cada cifra está repetida cuatro veces que es lo que indica la regla.

Ejemplo: 538×4=2152.

Práctica. Para mayor comodidad se suele colocar el multiplicador debajo del multiplicando en esta forma.

$$\begin{array}{r} 538 \\ \times 4 \\ \hline 2152 \end{array}$$

y decimos 8×4=32 unidades que componen 3 decenas y 2 unidades: escribo las dos debajo de la línea y guardo las 3 para agregarlas al producto siguiente, diciendo 3×4=12, mas 3 del producto anterior 15 decenas, que componen una centena y 5 decenas, escribo las 5 decenas y guardo la centena para el producto siguiente, y digo 5×4 =20, mas 1 del anterior 21 centenas, que componen una centena y dos unidades de mil, escribo la centena y guardo las 2: pero como no hay más cifras en el multiplicando, escribo también el 2 en el producto, que será 2152.

Si el número compuesto tuviese también parte decimal, entónces se prescinde de la vírgula, se ejecuta la multiplicación como en el caso anterior y de la derecha del producto se separan tantas cifras como decimales haya en el multiplicando.

Demostración y práctica. Sea el multiplicando 35'64 y el multiplicador 3. El producto será igual á

$$\begin{array}{r} 3564 \\ \times 3 \\ \hline 106'92 \end{array}$$

En efecto, al suprimir la vírgula del multiplicando hemos hecho á este 100 veces mayor (Teor. 5): luego el producto obtenido será 100 veces mayor que el verdadero; luego tendré que hacerlo 100 veces menor y ésto se consigue corriendo la vírgula dos lugares hácia la izquierda (Teor. 5) conforme el enunciado de la regla.

69. Antes de resolver el tercer caso conviene distinguir algún otro especial?

Sí; conviene saber cómo se multiplica un número por 10, 100, 1000 etc. y cómo se multiplica por un número compuesto de una cifra significativa seguida de uno ó más ceros.

70. Pues cómo se multiplica un número por 10, 100, 1000 etc. y en general por la unidad seguida de ceros?

Si el multiplicando tiene sólamente parte entera, se escriben á su derecha tantos ceros como acompañan á la unidad, con lo cual queda ejecutada la operación (Teor. 2).

Ejemplo: 365×100=36500.

Si el multiplicando se compone de entero y decimal, se corre la vírgula hácia la derecha tantos lugares como ceros acompañan á la unidad, con lo cual queda ejecutada. (Teorema 5.°)

Ejemplo: 773'753×100=77375'3.

71. Cómo se multiplica un número por una cifra significativa seguida de uno ó más ceros?

Si el multiplicando consta sólo de parte entera, se multiplica por la cifra significativa y á la derecha del producto se añaden tantos ceros como acompañen á dicha cifra.

Si además tiene parte decimal, se prescinde de la vírgula, y luego se separan de la derecha del producto tantas cifras como decimales haya en el multiplicando.

Ejemplos: $\left\{ \begin{array}{l} 724\times600=434400. \\ 35'7\times500=17850'0. \end{array} \right.$

Dem. En efecto, 600=6×100: luego
724×600=724×6×100; igualdad que nos dice que multipliquemos 1.° por 6 y luego por 100 conforme á la regla.

72. Cómo se multiplica un número compuesto por otro compuesto?

Si sólamente tuviese parte entera, se coloca el multiplicador debajo del multiplicando y se tira una línea por debajo. Se multiplican todas las cifras del multiplicando por la primera de la derecha del multiplicador y el producto se coloca debajo de la línea; en seguida se multiplican las cifras del multiplicando por la segunda del multiplicador y el producto se coloca debajo del anterior, colocando la primera cifra debajo de la segunda del anterior, y así sucesivamente hasta haber multiplicado todas las cifras del multiplicando por todas y cada una de las del multiplicador. Hecho esto, se tira una línea por debajo, se suman todos los productos que se llaman parciales y nos dará el producto total.

Sirva de ejemplo 5436×425.

Disposición.

5436	Multiplicando.
×425	Multiplicador.
27180	Productos parciales.
10872	
21744	
2310300	Producto total.

Demostración. Multiplicar 5436 por 425 es hacer el primer número 400+20+5 veces mayor, ó lo que es lo mismo 5+20+400 veces mayor porque (46. 1.ª) el orden de sumandos no altera la suma.

Ahora bien:	5436×5	según el 2.° caso=	27180
	5436×20	según (68) =	108720
	5436×400	según (id.) =	2174400
		Luego 5436×425=	2310300

Si observamos ahora que el cero de la derecha del 2.° producto parcial y los dos ceros del 3.° no producen ningún efecto en la suma, se comprende que podrán suprimirse, si tenemos cuidado de colocar las primeras cifras significativas en el lugar correspondiente, conforme á la regla.

Si además tuviesen parte decimal, se prescinde de las vírgulas y se efectúa la operación como en el caso anterior, y después de terminada se separan de la derecha del producto con una vírgula tantas cifras como decimales haya en el multiplicando y multiplicador, y si no hubiese bastantes se añaden á la izquierda los ceros necesarios.

En efecto, sea el multiplicando 365'5 y el multiplicador 6'24. Al prescindir de la vírgula del multiplicando se hace éste 10 veces mayor (Ter. 5) y al suprimir la del multiplicador se hace éste 100 veces mayor (id.): luego el producto se habrá hecho $10\times100=1000$ veces mayor: luego para obtener el verdadero producto habrá que hacerle 1000 veces menor, lo cual se consigue corriendo la vírgula hácia la izquierda tres lugares ó separando tres guarismos, conforme á la regla.

$$\textit{Práctica: } 365'5\times6'24=\left\{\begin{array}{r} 3655 \\ \times624 \\ \hline 14620 \\ 7310 \\ 21930 \\ \hline 2280'720 \end{array}\right.$$

73. Cómo se ejecuta la operación cuando uno ó ambos factores terminan en ceros?

Se prescinde de los ceros y se efectúa la multiplicación de las cifras significativas y después de terminada la operación se añaden á la derecha del producto tantos ceros como hubiese en ámbos factores

Sea 1.° el multiplicando 345 y el multiplicador 620, como al prescindir del cero del multiplicador, se hace este 10 veces menor (Teor. 2.° Cor.) el producto resultará 10 veces menor que el verdadero: luego para hallar el verdadero habrá que hacerle 10 veces mayor, y esto se consigue con añadir un cero á la derecha, conforme á la regla.

De otro modo $620=62\times10$: luego $345\times620=345\times62\times10$; lo cual quiere decir que se multiplique 345 por 62 y este producto por 10, lo que se consigue añadiéndole un cero á la derecha, conforme á la regla.

$$\textit{Práctica: } 345\times620=\left\{\begin{array}{r} 345 \\ \times62(0 \\ \hline 690 \\ 2070 \\ \hline 213900 \end{array}\right.$$

2.° Sea ahora 3200×640 Será igual á $32\times64\times1000$.
En efecto, $3200=32\times100$.
$640=64\times10$.

Multiplicando ordenadamente estas dos igualdades, los productos que resulten serán iguales: luego $3200\times640=32\times64\times100\times10=32\times64\times1000$: igualdad que dice debemos multiplicar sólamente las cifras significativas y añadir al producto los tres ceros que tienen ambos factores.

$$\textit{Práctica}: 3200\times640=\left\{\begin{array}{r} 32(00 \\ \times64(0 \\ \hline 128 \\ 192 \\ \hline 2048000 \\ \hline \end{array}\right.$$

74. Cuándo aplicarémos la operación de multiplicar en los usos comunes de la vida?

Principalmente en dos casos: 1.° Cuando sepamos el valor de una cosa y queramos averiguar el de varias de la misma especie. 2.° Cuando queramos reducir unidades de especie superior á inferior.

Ejemplos: 1.° Valiendo una @ 15 pesetas ¿cuánto valdrán 64 @s? Este problema corresponde á la multiplicación, porque es evidente que si una @ vale 15 pesetas 64 @s. valdrán 15 pesetas repetidas 64 veces ó lo que es lo mismo 15×64.

En efecto, multiplicar 15 por 64, según la definición de multiplicar, es hallar un tercer número que sea respecto al primero 15, lo que el 64 es respecto á la unidad, y como este es 64 veces la unidad, el número que vamos á buscar será 64 veces el 15, lo cual nos dice que debemos multiplicar el valor de la unidad que se nos dá por el número de ellas.

2.° Cuántos reales son 70 duros? También este problema pertenece á la multiplicación, por la misma razón que en el caso anterior.

Para resolver este caso, multiplicaremos el número de unidades inferiores que contenga una superior por el número de superiores que se nos den. Así en el ejemplo propuesto se multiplicará el número 20, que son los reales que tiene un duro, por 70, número de duros que se nos dan, en esta forma: $20\times70=1400$ reales.

75 Qué consecuencias se deducen de la teoría de la multiplicación?

Las siguientes: 1.ª Que si el multiplicador es la unidad, el producto será igual al multiplicando. 2.ª Si el multiplicador es mayor que la unidad, el producto será mayor que el multiplicando. 3.ª Si el multiplicador es menor que la unidad, el producto será menor que el multiplicando. Y 4.ª Todo número multiplicado por *cero*, ó *cero* por *cero* dá *cero* en el producto.

ARTÍCULO 4.°

División.

76. Qué es la *división*?

Una operación contraria á la multiplicación que nos enseña á resolver el siguiente problema: *Dados un producto compuesto de dos factores y uno de éstos, hallar el otro factor.*

El producto conocido recibe el nombre de *dividendo*, el factor conocido se llama *divisor*, y el factor desconocido *cociente.*

77. Qué se deduce de esto?

Que en toda división el dividendo es igual al producto del cociente por el divisor.

78. Cómo se indica la división?

Poniendo dos puntos entre el dividendo y divisor, y también colocando el dividendo encima de una línea y debajo de ella el divisor. Así la división de los números 24 y 6 se indicará así 24:6 ó $\frac{24}{6}$ lo cual quiere decir que el 24 es un producto compuesto del factor 6 y otro que vamos á buscar ¿Cuál será éste? Un número que multiplicado por 6 nos dé 24: tal es el 4: luego 24: 6=4.

79 Podrá darse alguna otra definición de la división?

Como hemos dicho que esta operación es contraria á la multiplicación, bien podríamos definirla diciendo: La división es una operación que tiene por objeto hallar un tercer número que sea respecto á la unidad, lo que el primero es respecto al segundo. Así dividir 24 por 6 será hallar un tercer número *(cociente)* que sea respecto á la unidad, lo que el primero 24 *(dividendo)* es respecto al segundo 6 *(divisor)*, y como el 24 es cuatro veces el 6, el cociente será cuatro veces la unidad, esto es, 4.

80. Qué se deduce de esta definición?

1.° Que si el divisor es la unidad, el cociente será igual al dividendo. 2.° Si el divisor es mayor que la unidad, el cociente será menor que el dividendo. 3.° Si el divisor es menor que la unidad, el cociente será mayor que el dividendo. Y 4.° Que todo número dividido por sí mismo, nos dá de cociente la unidad.

81. *Cero* dividido por un número cualquiera, ¿qué cociente dá?

Cero, porque *cero* multiplicado por cualquier número, dá de producto *cero*.

82. Y *cero* dividido por *cero*?

Cero, porque *cero* $\times$ *cero* $=$ *cero*.

83. Y un número dividido por *cero*?

El cociente en este caso es lo que los matemáticos llaman *infinito* que se representa por medio de este signo ∞

84. Qué alteraciones experimenta el cociente con respecto á los datos?

Las mismas que el dividendo y las contrarias que el divisor, esto es, si el dividendo se multiplica por un número, el cociente queda multiplicado por el mismo número, y si se divide el dividendo, queda dividido el cociente: si el divisor se multiplica por un número cualquiera, el cociente queda dividido por el mismo número, y si el divisor se divide, el cociente queda multiplicado. De donde, si dividendo y divisor se multiplican ó dividen por un mismo número, el cociente no se altera.

85. Cómo se obtiene el cociente en la división de dos números enteros?

Rebajando ó restando el divisor del dividendo todas las veces que se pueda y el número de veces será el cociente. Así que la división 12: 4=3, porque 4 se puede restar de 12 tres veces.

Pero este procedimiento sería demasiado largo, principalmente cuando el dividendo contenga muchas veces al divisor, por cuya razón se ha inventado otro que abrevia mucho esta operación, y por lo que se dice que la división es una resta abreviada.

86. Pero el dividendo contiene siempre al divisor un número exacto de veces?

No, y por eso se dice que la división es unas veces exacta y otras inexacta. Es exacta cuando el producto del cociente entero por el divisor es igual al dividendo y es inexacta cuando entre éste y dicho producto hay alguna diferencia, á la cual se dá el nombre de *resíduo* v. g. 27: 6=4, *(cociente entero)* en donde 4×6=24 y como entre 27 y 24 hay la diferencia 3, se dice que la división es inexacta y el *resíduo* 3. De donde se deduce que en la división inexacta el dividendo es igual al producto del cociente entero por el divisor, mas el *resíduo*.

87. Cuántos casos debemos distinguir en la división?

Dos, á saber: 1.° que dividendo y divisor tengan sólamente parte entera. 2.° que uno de los dos ó ambos tengan también parte decimal.

88. Para resolver el 1.° cuántos casos distinguirémos?

Tres: 1.° Que el dividendo tenga una ó dos cifras y el divisor y cociente una. 2.° Que dividendo y divisor tengan varias cifras y el cociente una. Y 3.° Que dividendo, divisor y cociente tengan varias cifras.

89. Cómo se resuelve el primer caso, esto es, cuando el dividendo tenga una ó dos cifras y el divisor y cociente una?

Por medio de la tabla de multiplicar. Al efecto se busca en dicha tabla (que debe saberse de memoria) una cifra que multiplicada por el divisor nos dé el dividendo, ó el producto próximo menor, si no le hubiese igual, y aquella será el cociente. Así, pues, si nos propusiéramos hallar el cociente de 35:7 veríamos en la tabla que la cifra 5 multiplicada por el divisor 7 es igual al dividendo 35, de donde deducimos que 35:7=5. Por el mismo procedimiento se vé que 38:7=5 más un resíduo de 3 por ser la división inexacta.

En la práctica se hallan estos cocientes diciendo 35 entre 7 á 5; 38 entre 7 á 5 y sobran 3, etc.

90. Cómo se resuelve el 2.° caso, esto es, cuando dividendo y divisor tienen varias cifras y una sola el cociente?

Ante todo conviene cerciorarse de si el ejemplo que se nos presenta pertenece ó no á este caso, para lo cual basta añadir mentalmente un cero á la derecha del divisor, lo cual equivale á multiplicarle por 10, que es el número más pequeño de dos cifras, y si resulta un número mayor que el dividendo, es evidente que el cociente no puede ser 10 y por lo tanto no tendrá mas que una cifra, perteneciendo al 2.° caso.

Sabido esto, se divide la primera ó dos primeras cifras del dividendo por la primera del divisor (1.er caso) y tendrémos un cociente que será el verdadero ó mayor que el verdadero. Para comprobar este cociente se multiplica por el divisor y su producto se resta del dividendo, si es menor que él, en cuyo caso, el cociente hallado será el verdadero: si el referido producto es mayor que el dividendo, la cifra hallada es demasiado grande: se rebaja una unidad y la nueva cifra se vuelve á comprobar de la misma manera, y así se continúa hasta encontrar la cifra verdadera; su producto por el divisor se resta del dividendo y tendrémos el *resíduo*.

Ejemplo.

Sea 42537: 6548.

Disposición.

Dividendo..	42537	6548 Divisor.
Producto de comprobación.	45836	
Producto verdadero.	39288	7 cifra de comprobación
		6 cociente verdadero.
Resíduo.	3249	

Práctica. Colocando mentalmente un cero á la derecha del divisor resulta 65480, número mayor que el dividendo, por cuya razón este ejemplo pertenece al 2.° caso de la división y el cociente tendrá una sola cifra.

Para hallar esta cifra divido las dos primeras cifras del dividendo, esto es, 42 por 6, primera del divisor y nos dá de cociente 7, cifra que puede ser la verdadera ó mayor que la verdadera. Para comprobarla la multiplico por el divisor dándome de producto 45836, mayor que el dividendo; luego la cifra 7 es grande; rebajo una unidad y compruebo la cifra 6 que multiplicada por el divisor dá de producto 39288, menor que el dividendo y por tanto es el cociente verdadero; resto el producto del dividendo y tengo 3249 de resíduo: luego 42537:6548=6 cociente y 3249 resíduo.

Demostración. El dividendo 42537 se compone de 42 millares +5 centenas +3 decenas +7 unidades. El divisor 6548 se compone de 6 millares +5 centenas +4 decenas +8 unidades: luego prescindiendo de las tres últimas cifras de dividendo y divisor y dividiendo los 42 millares por los 6, números poco menores que los propuestos, el cociente 7 que nos resulte, no estará muy léjos de ser el verdadero. Pues bien, si no es el verdadero, será menor ó mayor que el verdadero: menor no puede ser, porque el producto de 7 por 6 nos dá los 42 millares justos, más los que podrían resultarnos de la multiplicación de las cifras separadas en el divisor; luego será el verdadero ó mayor que el verdadero.

Sabido esto, nos resta saber si és ó nó el verdadero, y para eso nos sirve la comprobación multiplicando dicha cifra por el divisor. Si el producto es menor que el dividendo, es claro que la cifra será buena, y si es mayor, será demasiado grande, por lo que se van rebajando una ó más unidades, sometiendo cada cifra á igual comprobación, hasta hallar la verdadera.

91. En la práctica de esta operación no puede seguirse otro procedimiento?

Sí; se comprueba la cifra, efectuando la multiplicación del cociente por el divisor y restando al mismo tiempo su producto del dividendo.

Sírvanos de ejemplo el mismo anterior 42537:6548.

Disposición.

Dividendo. 42537	6548 Divisor.
Resíduo. . . . 03249	6 Cociente.

Diré: 42 entre 6 á 7 cuyo producto por el divisor es mayor que el dividendo, por lo que rebajo una unidad y pongo 6; 6 por 8 son 48 á 57 van 9 que coloco debajo del 7; y sigo 6 por 4 son 24 y 5 del producto anterior son 29 á 33 van 4 que escribo debajo del 3: 6 por 5 son 30 y 3 son 33 á 35 van 2 que escribo de la misma manera; 6 por 6 son 36 y 3 son 39 á 42 van 3 que escribo debajo del 2 y van 4 á 4 cero.

92. Hay algún otro método de comprobación?

Sí; y consiste en lo siguiente:

Hallada la cifra que queremos comprobar, se multiplica por la primera del divisor y se resta el producto del dividendo parcial que hemos tomado para calcularla (que será la 1.ª ó dos primeras cifras del dividendo total): si el resto parcial es igual ó mayor que la cifra que estamos comprobando, dicha cifra será buena: si es menor, se coloca mentalmente á su derecha la cifra siguiente del dividendo y se vuelve á multiplicar el cociente por la segunda cifra del divisor y su producto se resta del número formado por el resto parcial mas la cifra agregada, si la resta es igual ó mayor que la cifra comprobada, ésta será buena, y si menor, se baja á su derecha la cifra siguiente del dividendo y se continúa la comprobación de la misma manera hasta haber bajado todas las cifras del dividendo ó haber hallado un resíduo igual ó mayor que la cifra que estamos comprobando. Si esto no se consigue, tendrémos que rebajar una unidad al cociente, y comprobar la nueva cifra del mismo modo.

Ejemplos.

1.° $\begin{array}{r|l} 3856 & 745 \\ \cline{2-2} 0131 & 5 \end{array}$ 2.° $\begin{array}{r|l} 3368 & 872 \\ \cline{2-2} 0752 & \cancel{4} \\ & 3 \end{array}$

1.° Digo 38 entre 7 á 5; 5×7=35 á 38 van 3, con el 5 siguiente son 35; 5×4=20 á 35 van 15 resíduo mayor que el 5: luego la cifra 5 es buena y por consiguiente es el verdadero cociente entero, el cual multiplico por todo el divisor, resto el producto del dividendo y me dá el resíduo 131.

2.° Digo 33 entre 8 á 4; 4×8=32 á 33 vá 1, que unida al 6 siguiente son 16; 4×7=28 número mayor que 16 y por lo tanto la cifra 4 es demasiado grande. Rebajo una unidad y digo: 33 entre 8 á 3; 3×8=24 á 33 van 9, resíduo mayor que la cifra 3 que estamos comprobando y por lo tanto esta cifra es el verdadero cociente entero, le multiplico por el divisor, resto su producto del dividendo y me dá el resíduo 752.

93. Cómo se resuelve el tercer caso, esto es, cuando dividendo, divisor y cociente tienen varias cifras?

Este caso puede considerarse como repetición del anterior y para resolverlo se calcula 1.° el número de cifras que ha de tener el cociente, añadiendo mentalmente á la derecha del divisor los ceros necesarios, hasta obtener un número próximamente menor que el dividendo, en cuyo caso el cociente tendrá tantas cifras mas una cuantos sean los ceros añadidos.

Hecho esto, calculamos la 1.ª cifra del cociente tomando un dividendo parcial de tantas cifras como tenga el divisor, ó una más, si estas no bastasen, por el método dicho en el caso anterior; multiplicamos esta cifra por todo el divisor y su producto lo restamos del dividendo parcial.

A la derecha del resíduo colocamos la cifra siguiente del dividendo, con lo cual formamos otro dividendo parcial, que vuelto á dividir por el divisor, según hemos dicho en el 2.° caso, nos dará la segunda cifra del cociente, con la cual practicamos las mismas operaciones que con la anterior, siguiendo el mismo procedimiento, hasta haber tomado la última cifra del dividendo.

Si algún dividendo parcial fuese menor que el divisor, se pone cero en el cociente y se baja la cifra siguiente del dividendo para formar otro parcial.

Ejemplo, práctica y demostración.

Dividendo	425684	572	Divisor.
	02528	744	Cociente.
	02404		
Resíduo	0116		

Diré: añadiendo dos ceros al divisor resulta 57200 y añadiendo tres 572000: este número es mayor que el dividendo: luego el cociente no puede ser 1000, ó no puede tener cuatro cifras; el 57200, es menor: luego cuando ménos ha de ser 100, ó ha de tener tres cifras.

Si ha de tener tres cifras, la primera debe representar centenas; luego debemos buscarla en las centenas del dividendo, razón por la que tomamos para primer dividendo parcial las 4256 centenas del dividendo y tendrémos 4256: 572 que pertenece al 2.° caso ya explicado. Ejecuto, pues, la división y me resulta el cociente 7 centenas y el resíduo 252.

Agregando á éste la cifra siguiente 8 del dividendo resultará 2528:572, que también pertenece al 2.° caso. Ejecuto la división y me dá el cociente 4 decenas y el resíduo 220.

Bajando á la derecha de éste la cifra siguiente 4 del dividendo, me resulta 2404:572, que de la misma manera pertenece al 2.° caso.

Ejecuto la división como en aquel y me dá el cociente 4 y el resíduo 116, con lo que tengo concluida la operación, que como se vé no es mas que la repetición del 2.° caso tantas veces como cifras tenga el cociente.

94. Hay algún otro caso particular que examinar en la división?

Los siguientes: 1.° Dividir un número compuesto de varias cifras por otro de una sola, teniendo el cociente más de una. 2.° Dividir un número terminado en uno ó varios ceros por 10, 100 etc.

95. Cómo se resuelve el primero?

Aplicando la regla general del tercer caso, y también tomando del dividendo las partes que indique el divisor, con lo cual se ahorra el escribir el divisor y los restos parciales, colocando el cociente debajo del dividendo.

Ejemplo. Dividir 3785 por 5.

Siguiendo la regla general será

3785	5
028	757
035	
00	

Del otro modo diré: 5.ª parte de 37=7; 7×5=35 á 37 van 2; con el 8 son 28; 5.ª parte de 28=5; 5×5=25 á 28 van 3; con el 5 son 35; 5.ª parte de 35=7; 7×5=35 á 35 cero.

Disposición.

3885 Dividendo: 5 Divisor.
= 757 Cociente.

96 Cómo se resuelve el caso en que el dividendo termine en ceros y el divisor sea 10, 100 etc.?

Se suprimen del dividendo tantos ceros como acompañen á la unidad.

En efecto, sea el dividendo 6400 y el divisor 10, digo que el cociente será 640, porque 640×10=6400.

Del mismo modo se demuestra que para dividir por 100, se suprimen dos ceros, por 1000 tres; y en general para dividir un número terminado en ceros por la unidad seguida de uno ó más, se suprimen de la derecha de dicho número tantos ceros como acompañen á la unidad.

97. Cómo se ejecuta la división en el caso de que en uno ó en ambos datos haya parte decimal?

Distinguirémos cuatro casos: 1.° Que el dividendo tenga parte entera y decimal y el divisor sea la unidad seguida de ceros.

2.° Que el dividendo tenga parte entera y decimal y el divisor sólamente parte entera.

3.° Que el dividendo sea sólamente entero y el divisor entero y decimal.

4.° Que ambos consten de parte entera y decimal.

98. Cómo se divide un número decimal por la unidad seguida de ceros?

Corriendo la vírgula hácia la izquierda tantos lugares como ceros acompañen á la unidad.

Dem. Sea el dividendo 3586'75 y el divisor 100: digo que el cociente será igual á 35'8675.

En efecto, dividir un número por 100 equivale á hacer dicho número 100 veces menor, y hemos demostrado que esto se consigue corriendo la vírgula dos lugares hácia la izquierda (Teor. 5.°).

99. Cómo se divide un número compuesto de parte entera y decimal por un entero sólamente?

Se considera el dividendo como si fuera entero sólamente y se dividen como los enteros, y luego se separan con una vírgula de la derecha del cociente tantas cifras como decimales tenga el dividendo.

Dem. Sea el dividendo 2854'25 y el divisor 45 digo que el cociente es igual á dividir 285425 por 45 y separar luego de la derecha del cociente dos cifras decimales.

En efecto, al prescindir de la coma del dividendo se hace éste 100 veces mayor, pues equivale á correrla dos lugares hácia la derecha: luego el cociente que resulte será 100 veces mayor que el verdadero; luego para encontrar éste habrá que hacer aquel 100 veces menor, lo cual se consigue separando con la vírgula dos guarismos, lo cual equivale á correrla dos lugares hácia la izquierda conforme á la regla.

Práctica.	*Disposición.*	
2854'25 : 45	285425	45
	0154	63'42
	0192	
	0125	
	035	

De donde 2854'25 : 45=63'42.

También puede hacerse la división sin tocar la vírgula, poniéndola en el cociente al bajar para formar el dividendo parcial la primera cifra decimal del dividendo, lo cual dá el mismo resultado.

100. Cómo se divide un número entero por otro entero y decimal?

Se añaden á la derecha del dividendo tantos ceros como decimales tenga el divisor y se prescinde de la vírgula de éste, lo cual equivale á multiplicar dividendo y divisor por un mismo número, con cuya operación no se altera el cociente, y luego se dividen como enteros.

Ejemplo.

3685 : 42'35=368500 : 4235=87.

Práctica.

368500	4235
029700	87
00055	

101. Cómo se ejecuta la división cuando dividendo y divisor consten de parte entera y decimal?

Se añaden al que tenga ménos cifras decimales los ceros que sean necesarios para que queden iguales y luego se suprimen las vírgulas de ambos, lo cual equivale á multiplicar dividendo y divisor por un mismo número, operación que no altera el cociente, y luego se dividen como enteros.

Ejemplo y práctica.

Sea 7254'25 : 36'458=7254250 : 36458.

7254250	36458
360845	
0327230	198
035566	

102. Cuando en una división ya sea de enteros ó decimales queda resíduo ¿se podrá continuar la división para encontrar un cociente más aproximado al verdadero?

Sí; después de terminada la operación, se añade al último resíduo un cero á su derecha y se vuelve á dividir por el mismo divisor para obtener otra cifra más en el cociente, poniendo ántes la vírgula correspondiente: al resíduo que nos quede se añade otro cero, y se calcula otra cifra para el cociente, y así se continúa añadiendo un cero á cada resíduo hasta hallar cociente exacto ó el número de cifras decimales que se quieran.

Ejemplo.

Dividir 136'8 entre 42'25.

Operación.

13680	4225
010050	
016000	3'237
033250	
03675	

103. Cuándo aplicarémos la división en los usos de la vida?

En cuatro casos principalmente: 1.° Cuando tengamos que dividir un número en partes iguales. 2.° Cuando sabiendo el valor de muchas cosas queramos averiguar el de una de ellas. 3.° Cuando sabiendo el valor de una cosa y el de varias de la misma especie, queramos averiguar el número de éstas. 4.° Cuando queramos reducir unidades de especie inferior á superior.

104. Cómo se resuelve el 1.° y por qué será de dividir esta aplicación?

Se dividirá el número propuesto por el que indique el número de partes iguales que queramos obtener, v. g. si quiero dividir el número 320 en 16 partes iguales dividiré 320 entre 16 y el cociente me indicará el valor de cada parte.

En efecto, si llamamos X el valor de cada una de las partes es evidente que X×16 será igual á 320; ó 320=16×X donde se vé que 320 es un producto compuesto de los factores 16, conocido y X desconocido, que es en lo que consiste la división.

105. Cómo se resuelve el 2.° indicando así mismo la razón?

Se divide el número que indique el valor de las cosas que se nos dan por el número de ellas y el cociente indicará el valor de cada una, v. g. Suponiendo que 452 fanegas hayan costado 9040 rs., ¿cuánto costará una fanega? Dividiré el número 9040 por 452 y el cociente representará el valor de una fanega.

En efecto, si llamamos z el valor de una fanega, es evidente que $452 \times z = 9040$, donde se vé, como en el caso anterior, que el 9040 es un producto compuesto de los factores 452 y z uno conocido y otro desconocido, que es en lo que consiste la división.

106. Cómo se resuelve el tercero?

Se divide el valor de todas las cosas por el de una y el cociente nos dará el número de ellas; v. gr. Cuántos metros de tela se podrán comprar con 2800 rs., sabiendo que un metro vale 70 rs.? Dividiré los 2800 rs. valor de todos por los 70 que vale uno y el cociente será el número de metros que se podrán comprar con aquel dinero.

En efecto, llamando y este número tendrémos que $70 \times y = 2800$: luego 2800 es un producto compuesto de los factores 70, conocido, é y desconocido, conforme á la definición de dividir.

107. Cómo se resuelve el 4.° caso?

Se divide el número de unidades inferiores por otro que indique las veces que una de las unidades de especie superior contiene á la inferior de que se trata, y el cociente indicará el número de unidades superiores equivalentes á las inferiores que se nos dán: v. gr. si queremos saber cuántos duros son 5600 rs., dividiré este número 5600 por el que indica las veces que el duro contiene al real que es 20, y el cociente representará el número de duros equivalente á 5600 rs.

La razón es la misma que en los casos anteriores.

ARTÍCULO 5.°

Pruebas de las cuatro operaciones fundamentales.

108. A qué se llama prueba de una operación?

A otra operación que tiene por objeto conocer si la primera está bien ejecutada ó si el resultado obtenido es el verdadero.

109. Qué pruebas se emplean en las cuatro operaciones explicadas?

Para comprobar la operación de sumar lo más conveniente es repetir la operación en sentido inverso, esto es, sumando las diferentes columnas de abajo hácia arriba, si ántes se hizo de arriba hácia abajo. Las dos sumas obtenidas deben ser iguales, si la operación está bien ejecutada.

Esto se funda en que el orden de sumandos no altera la suma.

Para comprobar la resta se suman el sustraendo y la resta debiendo resultar el minuendo, porque ya hemos dicho que el minuendo es igual al sustraendo mas la resta.

Para la multiplicación se divide el producto por uno de los factores, debiendo resultar el otro factor, y también repitiendo la operación, tomando el multiplicando por multiplicador, y éste por multiplicando, en cuyo caso el producto debe ser igual al primeramente obtenido, porque el orden de factores no altera el producto.

Para la división se multiplica el cociente por el divisor, y si la división es exacta, el producto debe ser igual al dividendo: si no es exacta, se añade el resíduo al producto obtenido y el resultado nos dará el dividendo.

ARTÍCULO 6.°

Ejercicios prácticos de numeración.

1.° Leer los siguientes números:

9—12—20—10—26—44—52—67—86—45—90—50—62—79—15—11—18—54—93—80—93—58—37.

2.° Escribir al dictado los números del ejercicio anterior.

3.° Leer los números siguientes:

100—150—103—270—415—226—564—218—471—376—584—757—692—404—708—999—872—505—909—1000—1100—1003—2700—2070—4518—7584—7700—7708—12015—13758—99099—18046—10003—40085—40007—200002—267003—584078—247268—1524684—1000001—3607806—4034456—703030503.

4.° Escribir al dictado los números del ejercicio anterior.

5.° Analizar indicando los diferentes órdenes de unidades que componen los números siguientes:

78—103—473—586—1245—3004—7808—64000—50645—80040—624896—3003025—306403—4563708—9035048—12070308947.

6.° Leer los números 64'56—705'413—7'6845—57'003—154'00004—7111'443702—0'45—0'7503—0'15—0'4762—24'030207—46'1524—0'000006.

7.° Escribir al dictado los números del ejercicio anterior.

8.° Analizar indicando los diferentes órdenes de unidades de los números del 6.° ejercicio.

ARTÍCULO 7.°

Ejercicios prácticos correspondientes á las cuatro operaciones fundamentales.

1.° Un labrador ha recogido en una heredad 72 fanegas de trigo; en otra 124; en otra 407; en otra 89; en otra 615, y en otra 250 ¿cuántas fanegas de trigo tendrá en su granero?

2.° Un comerciante ha recibido una letra de Barcelona por valor de 2500 rs.; otra de Cádiz de 792; otra de Sevilla de 6495, y otra de Gerona de 72890 rs. ¿cuánto dinero reunirá al hacerlas efectivas?

3.° Un carpintero ha ejecutado para uno de sus parroquianos varias obras de las que una importa 65'75 pesetas; otra 65'09; otra 7'008; otra 125'25, y otra 9'9, ¿cuánto importan todas juntas?

4.° Un maestro cobró de retribuciones en un mes 105'15 reales; en otro 86'25; en otro 94'7; en otro 112'468; en otro 107'058, y en otro 93'6, ¿cuánto cobró en los seis meses?

5.° En una casa se ganan 564 rs. mensuales, se gastan 278 ¿cuánto se ahorra?

6.° Un padre tenía 32 años cuando nació su hijo ¿cuántos tendrá éste cuando aquél cumpla 76?

7.° Cristóbal Colón descubrió la América el año 1492 ¿cuántos años hace que se verificó este acontecimiento en el presente año de 1885?

8.° Un comerciante ha recibido géneros por valor de 5645 pesetas y ha girado letras en pago por valor de 3793 ¿cuánto queda debiendo?

9.° Un sugeto que compró 5245'96 varas de tela y vendió 3706'17 varas ¿cuántas tendrá de existencia?

10. Un estudiante cobró 365'5 reales para pagar su pupilaje, pagó á la patrona 284'75 reales ¿cuánto le quedó?

11. Una casa percibe de rentas la cantidad de 3245 reales y paga de contribución 878'045 reales ¿cuánto le queda líquido?
13. Cuánto importan 652 cántaras de vino á 12 reales cada cántara?
13. Un obrero que emplea cada día 25 minutos en leer ¿cuánto tiempo emplea cada año?
14. Un comerciante que vende por término medio 7507 varas de tela ganando en cada una 109 reales ¿cuánto gana en la venta de todas?
15. Ganando en una libra 15 maravedís ¿cuánto se ganará en 30 arrobas?
16. Uno que compró 73'25 @s. de tocino á 3'5 reales la libra ¿cuánto tuvo que pagar?
17. 781'075 reales ¿cuántos maravedises son?
18 Un padre que paga de pupilo por su hijo 6'5 reales diarios ¿cuánto tendrá que pagar al año?
19. 646'356 libras de tocino á 0'85 pesetas ¿cuánto importarán?
20. Tenía un sugeto 0'58 fanegas de trigo y las vendió á 45 reales la fanega ¿cuánto sacó?
21. Cuánto valen 565'72 varas de tela á 100 reales vara?
22. Se ha de repartir una hacienda de 84564 reales entre 7 hijos á partes iguales ¿cuánto corresponde á cada hijo?
23. Costando 37 @s. 1285 reales cuánto costará una @?
24. Tenemos 7285 reales para comprar paño que vale á 48 reales la vara ¿cuántas varas se podrán comprar?
25. Cuántos días compondrán 6275 horas?
26. 100 @s. valen 725'25 pesetas ¿cuánto valdrá una @?
27. 38 varas costaron 624'08 reales ¿á cómo costó la vara?
28. Con 3254'75 pesetas se compraron 78'075 varas de tela ¿á cómo costó la vara?
29. Una libra vale 0'68 pesetas ¿cuántas libras se podrán comprar con 5400 reales?
30. Se han de comprar 0'625 varas de paño con 0'94 pesetas ¿á cómo ajustaremos la vara?
31. Un labrador tenía en su casa 6840 reales en metálico y vendió una cuba de vino de 260 cántaras á 12'25 reales la cántara ¿cuánto dinero reunió?
32. Para embaldosar una habitación que tiene de superficie 378 piés cuadrados con baldosas de á pié cuadrado

¿cuánto se gastará valiendo 30 reales cada docena de baldosas?

33. Una brigada del ejército consume al año 1840 fanegas de cebada, á cada caballería se dá de pienso un celemín diario ¿cuántas caballerías tendrá la brigada?

34. Se han comprado para una oficina plumas de acero por valor de 578 reales: cada caja contenía 144 plumas y valía 8'50 reales cada caja, se desea saber cuántas cajas y cuántas plumas se compraron y á cómo costaba cada pluma?

35. Un obrero trabaja 5 días cada semana y gana cada día 7'50 rs.; otro trabaja solo [illegible] días y gana de jornal 9'25 reales ¿cuánto ganará el 1.° más que el 2.° al cabo del año?

36. Un maestro tiene de sueldo y retribuciones 4500 rs. anuales, quiere ahorrar 3,5 rs. diarios ¿cuánto debe gastar cada día?

37. A una ama de casa se le entregan 3600 rs. anuales y se le manda ahorrar 125 rs. cada mes ¿cuánto debe gastar cada día?

38. Para hacer una obra se han empleado 16 obreros que han trabajado 15 días á 10 horas diarias ¿cuántas horas hubiera tardado un solo obrero?

39. Un comerciante dió á otro 45 varas de paño y en cambio recibe 250 pañuelos de seda que vendió por 3540 rs. ¿á cómo vendería cada pañuelo y cuánto sacó de cada vara de paño?

40. Un labrador compró una finca con 560 árboles á razón de 9'15 rs. cada árbol; vendió luego estos á 12'75 rs. cada uno y por la tierra le dieron 3820 rs. ¿qué ganancia ha obtenido?

FIN DE LA 1.ª PARTE.

SEGUNDA PARTE.

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS, POTENCIAS, DIVISIBILIDAD, NÚMEROS PRIMOS, DESCOMPOSICIÓN DE LOS NÚMEROS EN SUS DIFERENTES FACTORES, MÁXIMO COMÚN DIVISOR, MÍNIMO MÚLTIPLO COMÚN.

CAPÍTULO PRIMERO.

Preliminares.

110. Cuándo se dice que un número es *duplo, triplo* y *múltiplo* de otro?

Cuando un número contiene exactamente á otro dos veces se le llama *duplo*; si le contiene tres veces *triplo* y en general se llama *múltiplo* cuando le contiene varias veces.

Así el 4 es duplo de 2; el 10 duplo del 5; el 12 triplo de 4; y 24 múltiplo de 2, de 3, de 4, de 6, de 8 y de 12: también se dice divisible por otro.

111. Cuándo se llama *divisor, factor, submúltiplo* ó *parte alícuota.*

Cuando está contenido exactamente en otro cierto número de veces: Así 2 es divisor ó factor de 8; 5 es divisor ó factor de 15; 6 de 24 etc.

112. A qué se llama *potencia* de un número?

Al producto que resulta de tomar este número varias veces por factor ó de multiplicarle por sí mismo cierto número de veces: llamándose 2.ª *potencia* ó *cuadrado* de un número al que resulta de multiplicarle por sí mismo una vez á tomarle dos veces por factor.

Tercera potencia ó *cubo* de un número al que resulta de multiplicarle dos veces por sí mismo ó tomarle tres veces por factor.

Cuarta potencia de un número al que resulta de multiplicarle tres veces por sí mismo ó de tomarle cuatro veces por factor etc.

Así la segunda potencia de 3 es $3\times3=9$: la de 5 es $5\times5=25$.

La tercera potencia ó cubo de 2 es $2\times2\times2=8$; la de 5 es $5\times5\times5=125$.

La cuarta potencia de 2 es $2\times2\times2\times2=16$; la de 3 es $3\times3\times3\times3=81$.

La primera potencia de un número es el mismo número, y una potencia cualquiera de la unidad es la misma unidad.

113. Cómo se indican abreviadamente las potencias de los números?

Poniendo en la parte derecha y superior del número otro de menor tamaño que sea igual al número de veces que el 1.° se ha de tomar como factor, el cual se llama *esponente* de la potencia.

Así la segunda potencia ó cuadrado de 4 se indica así 4^2 y se lee *cuatro elevado á dos* ó al cuadrado. El esponente es 2.

La tercera potencia ó cubo de 8 se indica 8^3 y se lee 8 *elevado* al cubo, á la 3.ª potencia ó á tres, y el esponente es 3 etc.

114. Qué es, pues, esponente?

El número que indica las veces que otro se ha de tomar por factor.

115. A qué se llama número par?

Al que puede dividirse exactamente por dos: los números dígitos pares son: el 2, el 4, el 6 y el 8, llamándose impares los que no pueden dividirse exactamente por 2: los impares de una sola cifra son el 1, el 3, el 5, el 7 y el 9.

116. A qué se llama *máximo común divisor* de varios números?

Al número mayor que divida exactamente á todos ellos.

117. Y *mínimo múltiplo común* de varios números.

Al número menor que contenga á todos ó sea divisible exactamente por todos ellos.

118. Qué es número primo ó simple?

Aquel que no puede dividirse mas que por la unidad y por sí mismo, tales como 3, 5, 7, 13 etc.

119. Y número compuesto?

Aquel que además de poderse dividir por sí mismo y por la unidad puede dividirse por otro número: tales son 6, 12, 8, 24 etc.

120. Cuándo se dice que varios números son primos entre sí?

Cuando no tienen más factor común que la unidad. Así 9 y 13 son primos entre sí.

121. Dijimos que además de los guarismos y demás signos, se hacía en Aritmética uso de las letras del alfabeto y del paréntesis; ¿se servirá V. explicarme la manera de usarlos?

Sí; cuando hacemos uso de las letras del alfabeto nos proponemos generalizar y simplificar los razonamientos y al efecto empleamos las últimas letras para representar las incógnitas y las primeras para los datos. Las letras no representan por sí valor alguno determinado; pero una misma letra en el mismo razonamiento ó problema representa siempre la misma cantidad.

122. Cómo se indican las operaciones aritméticas por medio de las letras?

Las de sumar, restar y dividir separando los datos con los mismos signos que las operaciones numéricas. Así $a+b$ significa que á lo que vale a se ha de añadir lo que vale b, $a—b$, que del valor de a se reste el de b; $a:b$ ó $\frac{a}{b}$ que se divida el valor de a por el de b.

La operación de multiplicar se indica también con la interposición del signo *aspa* ó *punto*; pero el producto ó resultado de la operación se indica juntando las letras que representan los factores sin interposición de signo alguno. Así el producto de $a \times b$ se indica ab; abc significa que el número a se multiplique por b y el producto de ambos por c: $ab \times cd$ ó $ab.\ cd$ quiere decir que el producto de los números a y b se multiplique por el producto de los números c y d.

123. Cuándo se hace uso del paréntesis?

Cuando queramos indicar que dos ó más números ligados por los signos $+$ ó $—$, se han de someter á una de las cuatro operaciones, en cuyo caso se encierran dentro de un paréntesis los números así ligados.

Así para indicar que el número $a+b—d$ se ha de multiplicar por el número n, se escribe $a+b—d$ dentro de un paréntesis y el n fuera sin interposición de ningún signo, en esta forma: $(a+b—d)\ n$.

Si tuviéramos que multiplicar $n+m+p$ por $r-s$; escribiríamos en esta forma: $(n+m+p)\times(r-s)$.

Lo mismo haríamos si quisiéramos dividir $a-b$ por c ó por $c+d$ indicándolo de este modo: $(a-b):c$; ó $(a-b):(c+d)$.

Si en lugar de las letras hiciésemos uso de los guarismos, emplearíamos la misma forma de indicación. Así, para indicar que el número $12+6$ se ha de multiplicar por 7 ó por el número $5-3$, se escribirá $(12+6)\times7$, ó $(12+6)\times(5-3)$.

De manera que si bien el paréntesis no tiene valor alguno, hace, sin embargo, variar el de la expresión: así $4+3\times2$ sin paréntesis significa que al 4 se ha de añadir el producto de 3 por 2 y es igual á $4+6=10$: y con paréntesis, en esta forma $(4+3)\times2$, significa que la suma de $4+3=7$ se multiplique por 2, cuyo valor será entonces $7\times2=14$.

CAPÍTULO II.

Propiedades de los números.

TEOREMA 9.

124. Cómo se resta de un número cualquiera la suma indicada de otros varios?

Para restar de un número la suma indicada de otros varios se resta del minuendo el primer sumando; del resto que quede, el segundo y así sucesivamente hasta acabar.

Dem. Sea a el número y $-(b+c)$ la suma indicada: digo que $a-(b+c)=a-b-c$.

En efecto, si de a se restase sólamente b, el resto se habría aumentado en tanto cuanto vale c, puesto que si el sustraendo disminuye, el resto aumenta; luego para que el resto sea el verdadero, será necesario rebajar ahora el valor de c ó quitar del resto obtenido lo que vale c, conforme al enunciado.

Práctica. Sea ahora $36-(10+15)$: digo que $36-(10+15)=36-10-15=26-15=11$.

TEOREMA 10.

125. Cómo se resta de un número cualquiera una diferencia indicada de otros dos?

Para restar una diferencia indicada de dos números de otro cualquiera, se resta del número dado el minuendo dado y al resultado obtenido se añade el sustraendo.

Dem. Sea a el número dado y $b-c$ la diferencia indicada: digo que $a-(b-c)=a-b+c$.

En efecto, en toda sustracción el minuendo es igual al sustraendo mas la resta, y como en el caso presente añadiendo á la resta $a-b+c$ el sustraendo $b-c$ nos dá $a-b+c+b-c=a$, resulta que $a-b+c$ es la resta pedida, conforme al enunciado del teorema. (1)

Otra demostración. El sustraendo es en este caso $b-c$, si del minuendo a se restase sólamente b, sería aumentar el sustraendo en lo que vale c y por lo tanto el resto disminuirá en la misma cantidad c: luego no será el verdadero y le faltará para serlo dicha cantidad; luego para que sea el verdadero resto habrá que añadirle la cantidad c conforme al enunciado.

Práctica. Sea ahora el minuendo 40 y el sustraendo 18—7: digo que $40-(18-7)=40-18+7=22+7=29$.

TEOREMA 11.

126. Cómo se multiplica una suma indicada por un número cualquiera?

Para multiplicar una suma indicada por un número cualquiera, se multiplican todos y cada uno de los sumandos por dicho número, se suman los productos parciales y la suma nos dará el producto total.

Dem. Sea la suma indicada $(a+b+c)$ y el multiplicador m: digo que $(a+b+c)\times m=am+bm+cm$.

En efecto, multiplicar $a+b+c$ por m es hacer esta suma m veces mayor (2) y es claro que esto se conseguirá haciendo m veces mayor cada uno de los sumandos, en razón á que *lo que se hace con las partes se hace con el todo*: luego $(a+b+c)\times m=am+bm+cm$, que es lo que se quería demostrar.

Práctica. Sea ahora el multiplicando 4+5+8 y el multiplicador 7: será $(4+5+8)\times 7=4\times 7+5\times 7+8\times 7=28+35+56=119$.

---

(1) Esta demostración puede aplicarse también al teorema anterior.
(2) En el caso de que m sea mayor que la unidad.

TEOREMA 12.

127. Cómo se multiplica una suma indicada, por otra suma también indicada?

Para multiplicar una suma indicada por otra suma indicada se multiplican todos y cada uno de los sumandos del multiplicando por el primer sumando del multiplicador, lo cual nos dará un producto, conforme al teorema anterior; luego se multiplican todos y cada uno de los sumandos del multiplicando por el segundo sumando del multiplicador y tendrémos otro producto; y así sucesivamente se van multiplicando todos los sumandos del multiplicando por los del multiplicador; hecho esto, se suman los productos obtenidos y la suma nos dará el producto total.

Dem. Sea el multiplicando $(a+b+c)$ y el multiplicador $(n+m+r)$: digo que $(a+b+c) \times (n+m+r)=an+bn+cn+am+bm+cm+ar+br+cr$.

En efecto, multiplicar $(a+b+c)$ por $(n+m+r)$ es tomar el multiplicando $n+m+r$ veces: $(a+b+c)\times n=an+bn+cn$ (Teor. 11) $(a+b+c)\times m=am+bm+cm$ (Teor. 11) y $(a+b+c)\times r=ar+br+cr$ (Teor. 11): luego $(a+b+c)\times(n+m+r)=an+bn+cn+am+bm+cm+ar+br+cr$, conforme al enunciado.

Práctica. Sea ahora $(3+4+5)\times(2+6+8)$; digo que el producto será: $3\times2+4\times2+5\times2+3\times6+4\times6+5\times6+3\times8+4\times8+5\times8=6+8+10+18+24+30+24+32+40=192$.

TEOREMA 13.

128. Cómo se multiplica una diferencia indicada por un número cualquiera?

Para multiplicar una diferencia indicada por un número cualquiera, se multiplican minuendo y sustraendo por el número dado y se restan los productos parciales.

Dem. Sea el multiplicando $(d-e)$ y el multiplicador f: digo que $(d-e) \times f=df-ef$.

En efecto, llamemos r á la diferencia entre d y e tendrémos que $d-e=r$.

Como el minuendo es igual al sustraendo mas el resto tendrémos también que $d=e+r$.

Si los dos miembros de esta igualdad se multiplican por un mismo número, la igualdad subsistirá y por consiguiente, multiplicando en este caso por f tendrémos.

$$df=(e+r)\times f=ef+rf.$$

Ahora, si de ambos miembros de esta igualdad se restan cantidades iguales, los restos también serán iguales; restemos, pues, de ellos la cantidad ef y nos dará

$$df-ef=ef+rf-ef=rf$$

y poniendo en lugar de r en el segundo miembro la cantidad $(d-e)$ que es su igual tendrémos que

$$df-ef=(d-e)\times f;$$

y permutando los miembros de esta igualdad, esto es; poniendo el primero por segundo y éste por primero, lo cual no altera la igualdad, nos dará

$(d-e)\times f=df-ef$ conforme al enunciado.

Práctica. Sea ahora $(15-7)\times 3$ el producto será $15\times 3-7\times 3=45-21=24$ (*a*).

TEOREMA 14.

129. Cómo se multiplica una diferencia indicada por una suma también indicada?

Para multiplicar una diferencia indicada por una suma indicada, se multiplican el minuendo y sustraendo por el primer sumando del multiplicador, lo cual nos dará dos productos, los cuales se restan; luego se multiplican el minuendo y sustraendo por el 2.° sumando del multiplicador y se restan también sus productos; después se multiplican minuendo y sustraendo por el tercer sumando y se hace la misma operación con sus productos y así sucesivamente, finalmente se suman las diferencias ó restos obtenidos y se tendrá el producto que se desea.

Dem. Sea la diferencia $(a-b)$ y la suma $(r+s)$: digo que

$$(a-b)\times(r+s)=ar-br+as-bs.$$

(*a*) Por lo que acabamos de exponer se vé que cuando varios números están multiplicados por un mismo factor, se puede separar éste, encerrando dichos números dentro de un paréntesis y colocando fuera de él el factor común.

En efecto, descomponiendo el multiplicador en sus dos sumandos tendrémos que $(a-b)\times(r+s)=(a-b)\times r+(a-b)\times s$.

pero $(a-b)\times r=ar-br$ (Teor. 13.)
y $(a-b)\times s=as-bs$ (Teor. 13.)

Luego sumando estas igualdades ordenadamente y separando el factor común $(a-b)$ del primer miembro tendrémos

$$(a-b)\times(r+s)=(ar-br)+(as-bs)$$

conforme al enunciado de la proposición.

Práctica. $(12-5)\times(6+3)=(12\times6-5\times6)+(12\times3-5\times3)=(72-30)+(36-15)=42+21=63$.

TEOREMA 15.

130. Si en un producto compuesto de varios factores se cambia el orden de colocación de estos ¿se altera el producto?

El valor de un producto de varios factores no se altera aunque varíe el orden de colocación de los factores.

Para demostrar este teorema conviene anteponer el siguiente:

LEMA. *Se puede cambiar el orden de dos factores consecutivos sin que el producto se altere.*

Dem. Distinguirémos dos casos: 1.° que los factores consecutivos sean los dos primeros: 2.° que sean otros dos cualesquiera.

1.° Sea el producto $4\times5\times6\times8\times3$: digo que será igual á $5\times4\times6\times8\times3$.

En efecto, hemos demostrado que $4\times5=5\times4$.

Si los dos miembros de esta igualdad se multiplican sucesivamente por los factores 6, 8 y 3, siempre existirá la igualdad y resultarán las siguientes: $4\times5\times6=5\times4\times6$

$4\times5\times6\times8=5\times4\times6\times8$

$4\times5\times6\times8\times3=5\times4\times6\times8\times3$

que es lo que se quería demostrar.

2.° Sean ahora los factores que queremos permutar el 6 y el 8: digo que $4\times5\times6\times8\times3=4\times5\times8\times6\times3$.

En efecto, $4\times5\times6=4\times5+4\times5+4\times5+4\times5+4\times5+4\times5$.

Multiplicando los dos miembros de esta igualdad por un mismo número la igualdad no se altera; multipliquemos pues, ambos miembros por 8 y nos dará:

$4\times5\times6\times8=4\times5\times8+4\times5\times8+4\times5\times8+4\times5\times8+4\times5\times8+4\times5\times8$ ó escribiendo abreviadamente el 2.° miembro, $4\times5\times6\times8=4\times5\times8\times6$; y multiplicando los dos miembros de esta igualdad por 3 nos dará

$$4\times5\times6\times8\times3=4\times5\times8\times6\times3$$

que es lo que se quería demostrar.

Demostrado ya el lema, esto es, que se pueden cambiar dos factores consecutivos sin que el producto se altere, es evidente que cambiando sucesivamente estos factores muchas veces, podrémos alterar completamente el orden de todos los factores sin que el producto se altere, conforme al enunciado del teorema.

TEOREMA 16.

131. A qué es igual el cuadrado ó segunda potencia de la suma de dos números?

El cuadrado ó segunda potencia de la suma de dos números es igual al cuadrado del primer sumando, mas el duplo del producto del primero por el segundo, mas el cuadrado del segundo.

Dem. Sean los números a y b; digo que $(a+b)^2=a^2+2.ab+b^2$.

En efecto, $(a+b)^2=(a+b)\times(a+b)$.

Pero $(a+b)\times(a+b)=a\times a+ab+ba+b.b$ ó escrito en otra forma $=a^2+2.ab+b^2$ que es lo que se quería demostrar.

Práctica. Si tuviésemos que elevar al cuadrado la suma de los números 5 y 3, haciendo uso del teorema anterior tendrémos que $(5+3)^2=5^2+2.5.3+3^2=25+30+9=64$.

TEOREMA 17.

132. Cuál es el producto de la suma indicada de dos números por la diferencia de los mismos?

El producto de la suma indicada de dos números por su diferencia es igual á la diferencia de cuadrados de los mismos.

Así $(a+b)\times(a-b)=a^2-b^2$.

En efecto, según lo dicho en el teorema 14, $(a+b)\times(a-b)$ $=a.a$ ó $a^2+ab-ab-b.b$ ó b^2.

Y como $+ab$ y $-ab$ se destruyen quedan, a^2-b^2 según el enunciado.

Práctica. Luego si nos ocurre multiplicar la suma de dos números por la diferencia de los mismos no tendrémos que hacer mas que elevarlos al cuadrado y restar estas potencias. Así $(6+4)\times(6-4)=6^2-4^2=36-16=20$.

TEOREMA 18.

133. A qué es igual el cubo ó tercera potencia de la suma de dos números?

El cubo ó tercera potencia de la suma indicada de dos números es igual al cubo del primer sumando, mas el triplo del cuadrado del primero por el segundo, mas el triplo del primero por el cuadrado del segundo: mas el cubo del segundo.

Dem. Sean los números c y d: digo que $(c+d)^3=c^3+3.c^2d+3.cd^2+d^3$.

En efecto, $(c+d)^3=(c+d)^2\times(c+d)$

pero $(c+d)^2=c^2+2.cd+d^2$ (Teorema 15).

Luego $(c+d)^3=(c^2+2.cd+d^2)\times(c+d)$.

El segundo miembro de esta igualdad es el producto de una suma indicada por otra suma indicada, haciendo pues la multiplicación resulta que

$(c+d)^3=c^2\times c+2.cd\times c+d^2\times c+c^2\times d+2.cd\times d+d^2\times d$ y puesto en otra forma, en atención á que $c^2\times c=c^3$, que $2\,cd\times c$ ó $2c^2\,d+c.^2d=3.c^2d$, que $d^2c+2.cd\times d$ ó $2.cd^2=3.cd^2$ y que $d^2\times d=d^3$ resulta que $(c+d)^3=c^3+3.c^2d+3.cd^2+d^3$ que es lo que se quería demostrar.

Práctica. Para elevar al cubo ó tercera potencia la suma indicada de dos números tendrémos que hallar las cuatro partes de dicho cubo como acabamos de demostrar, esto es, el cubo del primer sumando; el triplo del producto del cuadrado del primero por el segundo; el triplo del cuadrado del segundo por el primero, y el cubo del segundo sumando y sumar estos cuatro sumandos. Así, pues, el cubo ó tercera potencia de los números 4+5 será $4^3+3\times4^2\times5+3\times4\times5^2+5^3=64+240+300+125=729$.

TEOREMA 19.

134. Cómo se multiplica un producto indicado de varios factores por otro número?

Multiplicando uno cualquiera de los factores por dicho número, el producto queda multiplicado por el mismo número.

Dem. Sea el producto 5.6.4.3 y multipliquemos cualquiera de sus factores el 6 por ejemplo por un número cualquiera 2: el producto será 5.12.4.3.

Como el orden de los factores no altera el producto tendrémos que

$$5.12.4.3.=5.4.3.12.$$

descomponiendo el 12 del 2.° miembro en sus factores tendrémos otra igualdad, que será 5.12.4.3=5.4.3.6.2 y este segundo producto sabemos que proviene de multiplicar el producto propuesto por 2, que es lo que se quería demostrar.

TEOREMA 20.

135. Cómo se divide una suma indicada por un número cualquiera?

Para dividir una suma indicada por un número, se dividen los sumandos por dicho número y se suman los cocientes parciales.

Dem. Sea la suma indicada $a+b+c$ y el divisor d: digo que $(a+b+c): d=a: d+b: d+c: d$.

En efecto, dividir $a+b+c$ por d (1) es hacer esta suma d veces menor, y es claro que esto se conseguirá haciendo d veces menor cada una de sus partes, porque *lo que se hace con las partes queda hecho con el todo.*

Práctica. Dividir (8+12+16) por 4 será igual á 8: 4+12: 4+16: 4=2+3+4=9.

TEOREMA 21.

136. Cómo se divide una diferencia indicada por un número?

Para dividir una diferencia indicada por un número, se

(1) En el caso de que d sea mayor que la unidad.

dividen minuendo y sustraendo por dicho número, y se restan sus cocientes.

Dem. Sea el dividendo $a-b$ y el divisor d: digo que $(a-b)$: $d=a$: $d-b$: d.

En efecto, llamando r á la diferencia entre a y b tendrémos que $a=b+r$.

Si los dos miembros de esta igualdad se dividen por un mismo número, los cocientes también serán iguales: dividiendo, pues, por d, será a: $d=b$: $d+r$: d.

Si de ambos miembros de esta igualdad se restan cantidades iguales, los restos también serán iguales; restando, pues, de los dos el cociente $b{:}d$ tendrémos $a{:}d-b{:}d=r{:}d$ y poniendo en el segundo miembro de esta igualdad una cantidad igual á r, que hemos dicho es la diferencia de $a-b$, tendrémos finalmente que $a{:}d-b{:}d=(a-b){:}d$; que es lo que se quería demostrar.

Práctica. $(64-48){:}8=64{:}8-48{:}8=8-6=2$.

TEOREMA 22.

137. Cómo se divide un producto de varios factores por un divisor de alguno de sus factores?

Para dividir un producto de varios factores por un divisor de alguno de estos, se divide dicho factor por su divisor, y el producto quedará dividido por dicho divisor.

Dem. Sea el producto 12.8.4 y el divisor del factor 12 el 3: digo que para dividir este producto por 3 basta dividir el 12 por dicho 3 y el producto quedará dividido.

En efecto, haciendo la división resulta 12:3.8.4 ó 4.8.4.

Como en toda división el cociente multiplicado por el divisor es igual al dividendo, si este producto es el verdadero cociente, multiplicado por 3 nos dará el dividendo; multipliquemos, pues, el cociente 4.8.4 por 3, y como para hacer esta multiplicación basta multiplicar uno de sus factores, multiplicarémos el 4 y resultará 4.3.8.4=12.8.4 que es el dividendo.

Práctica. Dividir 11.6.15 por 5 será igual á 11.6.15:5= 11.6.3=198. (1)

(1) Si el divisor es alguno de los factores, se suprime dicho factor.

CAPÍTULO III.

Divisibilidad de los números.

TEOREMA 23.

138. Un número que sea divisor de otros varios ¿será divisor de la suma de éstos?

Si un número es divisor de otros, también lo será de la suma de ellos.

Dem. Sea el número 4 divisor de 8, 12, 20 y 24: digo que 4 será divisor de la suma 8+12+20+24.

En efecto, 8=4.2
12=4.3
20=4.5
24=4.6

Sumando ordenadamente estas cuatro igualdades, nos dará la siguiente igualdad 8+12+20+24=4.2+4.3+4.5+4.6 y separando el factor común del segundo miembro tendrémos que 8+12+20+24=4×(2+3+5+6) igualdad que nos dice que el 4 está contenido en la suma 8+12+20+24, 2+3+5+6 veces: luego el 4 es divisor de dicha suma.

COROLARIO.

Si un número es divisor de otro, también lo será de todos los múltiplos de éste.

Dem Sabemos que un múltiplo de cualquier número contiene á este cierto número de veces exactamente: luego puede considerarse como una suma compuesta de varios sumandos iguales al número propuesto, y como éste tiene por divisor al número dado, se deduce que este será divisor de dicha suma, ó sea de aquel múltiplo.

En efecto, sea 5 divisor de 15: digo que también será divisor de todos los múltiplos de 15, 45 por ejemplo.

Porque, según lo dicho, 45 es la suma de 15+15+15, y como 5 por suposición es divisor de 15, lo será de la suma 15+15+15=45.

TEOREMA 24.

139. Si tenemos un número que sea divisor del minuendo y sustraendo ¿lo será del resto?

Si un número es divisor de minuendo y sustraendo también lo será de su resto ó diferencia.

Dem. Sea 6 divisor de 48 y 30: digo que también será divisor de 48—30.

En efecto, 48=8.6
30=5.6

Restando estas igualdades miembro á miembro será

48—30=8.6—5.6.

Separando el factor común del segundo miembro de esta igualdad, tendrémos: 48—30=(8—5)×6, lo cual indica que en la diferencia 48—30 está contenido el 6, 8—5 veces: luego el 6 es divisor de dicha diferencia, conforme al enunciado.

TEOREMA 25.

140. Tenemos una suma compuesta de dos sumandos y otro número que divide á uno de ellos, pero no al otro ¿será divisor de la suma?

Si un número es divisor de uno de dos sumandos y no del otro, no será divisor de la suma de ambos.

Dem. Sean los sumandos 14 y 25, y 7 divisor de 14 y no de 25: digo que 7 no será divisor de 14+25.

En efecto, á la suma 14+25 podemos considerarla como el minuendo de una operación de restar y al 14 como el sustraendo, siendo el 25 la resta; ahora bien: si 7 fuese divisor de la suma 14+25, como por suposición también es divisor de 14, tendríamos, según el teorema anterior, que también sería divisor de 25; pero hemos supuesto que 7 no es divisor de 25: luego tampoco debe serlo de 14+25, que es lo que se quería demostrar.

TEOREMA 26.

141. Tenemos un número que es divisor del minuendo y no del sustraendo ¿será divisor del resto?

Si un número es divisor del minuendo y no del sustraendo, tampoco lo será del resto.

Dem. Sea el 3 divisor del minuendo 27 y no del sustraendo 16: digo que 3 no será divisor del resto 27—16.

En efecto, el sustraendo puede considerarse como la diferencia entre el minuendo y el resto: luego si 3 fuese divisor del resto 27—16, lo sería también del sustraendo 16 contra lo que hemos supuesto: luego 3 no puede ser divisor del resto 27—16, conforme al enunciado.

TEOREMA 27.

142. Cómo conocerémos si un número puede dividirse exactamente por 10, 100, 1000 etc.?

Todo número cuya 1.ª cifra de la derecha sea cero *puede dividirse por* 10; *si sus dos primeras cifras son* ceros *puede dividirse por* 100; *si son* ceros *las tres primeras cifras de la derecha, puede dividirse por* 1000 *etc.*

En efecto, el cociente exacto de un número que termina en *cero* por 10 es el mismo número sin dicho cero; el cociente de un número que termina en dos *ceros* por 100 es el mismo número sin los dos *ceros*: el cociente de un número que termina en tres *ceros* por 1000 es el mismo número sin los tres *ceros* etc.: luego dichos números pueden dividirse exactamente por 10, 100, 1000 etc. respectivamente.

TEOREMA 28.

143. Cómo conocerémos si un número puede dividirse por 2?

Todo número que termine en cero *ó cifra* par *puede dividirse por* 2 *y no en otro caso.*

Dem. 1.° Sea el número 140 que termina en *cero*: digo que puede dividirse por 2.

En efecto, este número es múltiplo de 10; 10=5×2: luego puede dividirse por 2 y por consiguiente todos los múltiplos de 10 como 140 pueden dividirse por 2, porque si un número divide á otro, es divisor de todos los múltiplos de éste.

2.° Sea ahora el número 148 que termina en cifra par: digo que también puede dividirse por 2.

En efecto, 148=140+8; 140 puede dividirse por 2, porque termina en *cero*; 8 también puede dividirse por 2, porque es cifra par: luego 2 es divisor de la suma 140+8=148, porque si un número es divisor de otros, también es divisor de la suma de estos.

3.° Sea finalmente el número 145 que no termina en *cero* ni en cifra par: digo que no puede dividirse por 2.

En efecto, 145=140+5; 140 puede dividirse por 2; pero 5 no: luego tampoco la suma 145, porque si un número es divisor de uno de dos sumandos y no es del otro, tampoco lo es de la suma de ambos.

TEOREMA 29.

144. Cómo se conoce si un número es ó no divisible por 5?

Todo número que termine en cero ó 5 puede dividirse por 5, y no es divisible por 5 si termina en otra cifra cualquiera.

Dem. 1.° Sea el número 640 que termina en cero: digo que puede dividirse por 5.

En efecto, 640 puede dividirse por 10, por terminar en *cero*; 10 puede dividirse por 5 porque es igual á 5×2: luego 640 puede dividirse por 5.

2.° Sea ahora el número 645 terminado en 5; digo que también es divisible por 5.

En efecto, 645=640+5: 640 es divisible por 5, según se acaba de demostrar, 5 también lo es, porque todo número puede dividirse por sí mismo: luego la suma 640+5=645 también es divisible por 5, porque si un número divide á varios números, también divide á la suma de estos.

3.° Ultimamente sea el número 658 que no termina en *cero* ni en 5: digo que no puede dividirse por 5.

Efectivamente, 658=650+8: 650 puede dividirse por 5, por terminar en *cero*, 8 no puede dividirse por 5, luego la suma 650+8=658 tampoco es divisible por 5, porque si un número divide á uno de dos sumandos y no divide al otro, tampoco divide à la suma de estos, conforme al enunciado.

TEOREMA 30.

145. Qué regla tenemos para conocer si un número se puede ó no dividir por 4; por 8, y por 25?

las siguientes: 1.ª *Todo número cuyas dos primeras cifras de la derecha sean ceros, ó compongan un múltiplo de 4 puede dividirse por 4 y no puede dividirse por 4 el número que no tenga estas condiciones.* Así los números 5600 y 5648 pueden dividirse por 4 y el número 557 no puede dividirse por 4.

2.ª *Todo número que tenga más de tres cifras y cuyas tres últimas sean ceros ó compongan un múltiplo de 8 puede dividirse por 8 y no puede dividirse en caso contrario.* (1.) Así los números 15000 y 15304 pueden dividirse por 8, y no puede ser dividido por 8 el número 12652.

3.ª *Todo número que termine en dos* CEROS *ó sus dos últimas cifras sean 25, 50 ó 75 puede dividirse por 25 y no puede dividirse por 25 en ningún otro caso.* Así los números 2700, 2725, 2750 y 2775 pueden dividirse por 25 y no puede dividirse el número 2778.

La demostración de estas tres reglas se hace por medio de razonamientos análogos á los que hemos seguido en la de los teoremas 29 y 28.

146. Cómo se conoce si un número puede dividirse por 9?

Por la siguiente regla:

Todo número cuyas cifras sumadas separadamente nos den la suma de 9 ó un múltiplo de 9, puede dividirse por 9 y no puede dividirse en caso contrario.

Antes de demostrar esta regla conviene probar la verdad del siguiente

TEOREMA 31.

Todo número que conste de dos ó mas cifras se compone de un múltiplo de 9 más el valor absoluto de sus cifras.

Para demostrar este teorema antepondrémos el siguiente

LEMA. *Todo número compuesto de una cifra significativa seguida de uno ó más ceros es igual á un múltiplo de 9 mas el valor absoluto de dicha cifra.*

Dem. Sea el número 800 compuesto de la cifra significativa 8 acompañada de dos ceros: digo que 800=á un múltiplo de 9+8.

---

(1) Si el número no tiene más de tres cifras se averigua su divisibilidad por 8 haciendo la división, pues no puede darse otra regla.

En efecto, 800=100×8;
Pero 100= 99 + 1.
Luego 800=(99+1) ×8=99×8+1×8.
El número 99=11×9=á un *m.* de 9. (1): luego 99×8 también será *m.* de 9 y por consiguiente 800=*m.* de 9+1×8=8 conforme al enunciado del *lema.*

Demostración del teorema. Sea el número 3825 compuesto de cuatro cifras: digo que 3825=á un *m.* de 9+3+8+2+5.

En efecto, descomponiendo este número en sus diferentes órdenes de unidades resulta que

$$3825=\left\{\begin{array}{l} 3000 = m.\text{ de } 9 + 3 \\ +800 = m.\text{ de } 9 + 8 \\ +\ 20 = m.\text{ de } 9 + 2 \\ +\ \ 5 = \ldots\ldots 5 \end{array}\right\}\text{según el lema demostrado.}$$

Sumando estas igualdades ordenadamente será 3825=*m.* de 9+3+8+2+5 que es lo que se quería demostrar.

Sabido esto, pasemos ahora á demostrar la verdad de la regla de la divisibilidad de un número por 9.

Llamemos N al número y S á la suma de los valores absolutos de sus cifras. Según lo que acabamos de demostrar tendremos que N=*m* d. 9+S.

Ahora bien: si S es igual á 9 ó á un *m.* de 9, el número N. se compondrá de dos múltiplos de 9 y por consiguiente será múltiplo de 9 ó divisible por 9, porque *si un número es divisor de otros es divisor de la suma de estos.* Pero si S no es 9 ni múltiplo de 9, el número N se compondrá de dos sumandos de uno de los cuales es divisor el 9, y no del otro: luego tampoco el 9 será divisor de la suma N. porque *si un número es divisor de uno de dos sumandos y no lo es del otro, tampoco lo será de la suma de ambos.*

COROLARIO.

147. Cuándo un número se podrá dividir por 3 y cuándo no?

Cuando sumando el valor absoluto de las cifras de dicho número la suma sea 3 ó múltiplo de 3 se podrá dividir por 3, mas no en otro caso.

Dem. En efecto, todo número se compone de un *m.* de

(1) Léase múltiplo de 9.

9+ el valor absoluto de sus cifras, y como todo múltiplo de 9 es también múltiplo de 3, resulta que todo número se compone de un múltiplo de 3+el valor absoluto de sus cifras: luego si el valor de estas es 3 ó *m.* de 3, el número propuesto también lo será y por tanto podrá dividirse por 3, pero si el valor de las cifras no es 3 ni múltiplo de 3, el número propuesto tampoco será múltiplo de 3, y por lo tanto no podrá dividirse por 3.

Práctica. El número 3726 será divisible por 9? Digo: 3+7+2+6=18; 18 es múltiplo de 9: luego 3726 puede dividirse por 9.

El número 726 puede dividirse por 9? Digo: 7+2+6=15; 15 no es múltiplo de 9: luego el número 726 no puede dividirse por 9.

El número 8646 puede dividirse por 3? Digo: 8+6+4+6 =24; 24=2+4=6; 6 es múltiplo de 3: luego el número 8646 puede dividirse por 3.

El número 574 puede dividirse por 3? Digo: 5+7+4=16; 16=1+6=7; 7 no es múltiplo de 3: luego el número 374 no puede dividirse por 3.

148. Cómo conoceremos si un número puede ó no dividirse por 11? Observando la siguiente regla:

Si sumando separadamente el valor absoluto de las cifras del lugar impar de dicho número y el valor absoluto de las cifras del lugar par del mismo (contando de derecha á izquierda) *y restando dichas sumas, la resta es cero,* 11, *ó m. de* 11, *el número podrá dividirse por* 11; *y si la resta no es cero,* 11, *ó m. de* 11, *no podrá dividirse por* 11.

Para demostrar esta regla conviene anteponer el siguiente

TEOREMA 32.

Todo número compuesto de dos ó más cifras es igual á un múltiplo de 11, *mas el valor absoluto de las cifras del lugar impar, menos el valor absoluto de las cifras del lugar par, contando de derecha á izquierda.*

Para mejor comprender este teorema demostrarémos antes los dos siguientes LEMAS:

1.° *Todo número compuesto de una cifra significativa seguida de un número par de ceros es igual á un m. de* 11 *mas el valor absoluto de su cifra significativa.*

2.° *Todo número compuesto de una cifra significativa seguida de un número impar de ceros es igual á un m. de 11 menos el valor absoluto de su cifra significativa.*

Demostración del 1.° Sea el número 70000: digo que es igual á un m. de 11+7.

En efecto, 70000=10000×7; pero 10000=9999+1 luego

$$70000=(9999+1)\times 7=9999\times 7+7.$$

Mas, 9999 número compuesto de tantos nueves como ceros tiene el número propuesto, es múltiplo de 11, á causa de que cada par de nueves proviene de multiplicar 9 por 11: luego el número 70000=á un m. de 11×7+7; y como m. de 11×7 es también m. de 11, se deduce que 70000= m. de 11+7, conforme al enunciado.

Demostración del 2.° Sea el número 7000: digo que es igual á un m. de 11—7.

En efecto, 7000=700×10; 700=m. de 11+7 según el lema anterior: luego poniendo en lugar de 700 en el 2.° miembro de la primera igualdad, la cantidad equivalente, m. de 11+7, la igualdad subsistirá en esta forma:

7000=(m. de 11+7)×10, efectuando esta operación indicada será

7000=m. de 11×10+7×10; pero 10=11—1:

luego: 7000=m. de 11×10+7×(11—1) y practicando esta multiplicación

7000=m. de 11×10+7×11—7:

igualdad que nos dice que 7000 se compone de un múltiplo de 11 multiplicado por 10, que es también múltiplo de 11;+7×11 que es otro múltiplo de 11, menos 7; ó lo que es lo mismo de un m. de 11 ménos el valor 7 de su cifra significativa, conforme al enunciado.

Pasemos ahora á la demostración del teorema.

Sea el número 74586: digo que es igual á un *m.* de 11+6 +5+7—8—4.

En efecto, descomponiendo dicho número en sus diferentes órdenes de unidades, y haciendo aplicación de los lemas demostrados, resulta que

$$74586=\left\{\begin{array}{rll} 70000= & m.\ \text{de}\ 11+7 & (1.^{er}\ \text{lema.}) \\ +4000= & m.\ \text{de}\ 11-4 & (2.^{\circ}\ \ \text{id.}\ ) \\ +\ 500= & m.\ \text{de}\ 11+5 & (1.^{\circ}\ \ \text{id.}\ ) \\ +\ \ 80= & m.\ \text{de}\ 11-8 & (2.^{\circ}\ \ \text{id.}\ ) \\ +\ \ \ 6= & \ldots\ldots\ 6 & \end{array}\right.$$

Sumando ordenadamente estas igualdades resulta.

74586=*m*. de 11+7+3+6—4—8;

pero restar 1.° 4 y luego 8 equivale á restar 4+8: luego

74586=*m*. de 11+7+5+6—(5+8)

que es lo que se quería demostrar.

Demostración de la regla para saber si un número es ó nó divisible por 11.

Demostrada la igualdad última del teorema anterior, observarémos si la diferencia entre las sumas de las cifras del lugar impar y de las del lugar par es cero, en cuyo caso el número dado será simplemente un múltiplo de 11 y por lo tanto divisible por 11.

Si no es cero; podrá suceder que la suma de los valores de las cifras del lugar impar sea mayor que la de los valores de las cifras del lugar par, en cuyo caso el número propuesto puede considerarse como compuesto de dos sumandos, uno que evidentemente es *m*. de 11, y otro la diferencia de ambas sumas. Ahora bien: si esta diferencia es 11 ó *m*. de 11, el número será divisible por 11, y si nó no lo será.

Puede suceder también que la suma de las cifras del lugar impar sea menor que la de las del lugar par y entonces el número se compondrá de un *m*. de 11—la diferencia de ambas sumas: luego, si esta diferencia es 11 ó *m*. de 11 el número será divisible por 11 y no lo será en caso contrario, conforme á la regla.

Práctica. El número 58762 es divisible por 11?

Veamos: 58762=*m*. de 11+2+7+5—(6+8)=*m*. de 11+14—14=*m*. de 11+0.

Múltiplo de 11 es divisible por 11 y como el otro sumando es cero se deduce que dicho número es divisible por 11.

El número 72985 es divisible por 11?

Veamos: 72985=*m*. de 11+5+9+7—(8+2)=*m*. de 11+(21—10)=*m*. de 11+11.

Múltiplo de 11 es divisible por 11; el otro sumando 11 también lo es; luego la suma que es el número propuesto también lo será.

148.* Cómo se conoce si un número puede ó no dividirse por 7?

Para conocer si un número es ó no divisible por 7, distinguirémos tres casos: 1.° que el número conste de solo dos cifras, esto es, sea menor que 100. 2.° que el número sea mayor que 100 y menor que 1000, es decir que tenga tres cifras y 3.° que el número sea mayor que 1000, ó conste de más de tres cifras.

1.° *Un número que conste de dos cifras será divisible por 7, si el triplo de la cifra de sus decenas, mas las unidades componen 7 ó múltiplo de 7 y si no, no lo será*, v. g. el número 56 puede dividirse por 7 porque 5 cifra de las decenas multiplicado por 3, mas 6 unidades componen 21 que es múltiplo de 7 esto es, $5.3+6=21$; y $21=7.3$ que es múltiplo de 7. (1)

Para demostrar esta verdad antepondrémos el siguiente

TEOREMA.

Todo número compuesto de dos cifras es igual á un *múltiplo de 7 mas el triplo de la cifra de las decenas, (consideradas como unidades) mas las unidades.*

Para demostrar este teorema antepondrémos el siguiente *Lema. Todo número compuesto de una cifra significativa seguida de un cero es igual á un múltiplo de 7 mas el triplo de dicha cifra*; (considerada como si representase unidades).

Demostración. Sea el número 50: decimos que $50=$m. de $7+5\times3$.

En efecto, $50=5\times10$; pero $10=7+3$: luego $50=5\times(7+3)$ y efectuando la multiplicación será igual á $5\times7+5\times3$, y como 5×7 es múltiplo de 7, resulta que $50=$ múltiplo de 7 más 5×3 que es lo que queríamos demostrar.

Demostrado este lema pasemos á la demostración del teorema, esto es, que *todo número que conste de dos cifras es igual á un múltiplo de 7, mas el triplo de las decenas, más las unidades.*

Sea el número 52, decimos que $52=$m. de $7+5\times3+2$.

En efecto, $52=50+2$; 50 según el lema es igual á m. de $7+5\times3$: luego si ponemos en esta igualdad en lugar de 50 su igual resultará que $52=$m. de $7+5\times3+2$ que es lo que se quería demostrar.

Demostraremos ahora la *regla.* Llamemos N al número de dos cifras, d la cifra de las decenas y u la de las unidades. Según lo que acabamos de demostrar será

(1) También es cierta la regla siguiente: Si duplicando la cifra de las unidades y su duplo se resta del número propuesto sin dicha cifra, la resta es cero ó múltiplo de 7, el número es divisible por 7.

N=m. de $7+3\times d+u$.

Ahora bien, si $3\times d+u$ es igual á 7 ó múltiplo de 7, N se compondrá de dos múltiplos de 7 y por lo tanto será divisible por 7; pero si $3\times d+u$ no es 7 ni múltiplo de 7, N se compondrá de un sumando múltiplo de 7 y de otro que no lo es, y por lo tanto N no podrá dividirse por 7; que es lo que nos proponíamos demostrar.

2.° *Un número mayor que* 100 *y menor que* 1000 *será divisible por* 7 *si el duplo de la cifra de sus centenas (consideradas como unidades) mas el triplo de la de las decenas mas las unidades, componen un múltiplo de* 7, *y si no, no lo será.*

Para demostrar esta regla antepondrémos el siguiente

TEOREMA.

Todo número compuesto de tres cifras es igual á un múltiplo de 7, *mas el duplo de la cifra de las centenas (consideradas como unidades) mas el triplo de la de las decenas, mas las unidades.*

Para demostrarlo antepondrémos el siguiente

Lema. Todo número compuesto de una cifra significativa seguida de dos ceros es igual á un múltiplo de 7 *mas el duplo de dicha cifra.*

Demostración. Sea el número 600, decimos que es igual á un múltiplo de $7+6\times 2$.

En efecto, $600=100\times 6$. pero $100=98+2$. luego $600=(98+2)\times 6$; mas $98=7\times 14$ que es evidentemente múltiplo de 7: luego 600=m. de $7+2\times 9$, que es lo que se quería demostrar.

Pasemos ahora al teorema y sírvanos para ello el número 456 decimos que

$$456=\text{m. de } 7+2.4+3.5+6.$$

$$\text{En efecto } 456=\left\{\begin{array}{l} 400=\text{m. de } 7+2.4, \text{ según el anterior lema.} \\ +50=\text{m. de } 7+3.5, \text{ según el 1.}^{\text{er}} \text{ lema.} \\ +6=\text{———}+6. \end{array}\right.$$

Sumando ordenadamente estas igualdades tendrémos que

456=m. de $7+2.4+3.5+6$. conforme al enunciado.

Demostración de la regla. Sea N el número y S la suma del duplo de las centenas, triplo de las decenas y las unidades y tendrémos que

N=m. de 7+*S*: luego si *S* es 7 ó múltiplo de 7 el número *N*, también lo será, y si nó, no: conforme á la regla.

3.° *Si el número tiene más de tres cifras, se dividirá en secciones de á tres cifras,* (contando de derecha á izquierda) *se suman las secciones de los lugares impares y las de los lugares pares,* (por el mismo orden de derecha á izquierda) *y se restan ambas sumas, si la diferencia de estas es cero, 7, ó múltiplo de 7 el número podrá dividirse por 7 y no en otro caso.*

Para comprender bien el fundamento de esta regla basta observar que si una unidad se divide por 7 nos dá 1 de resíduo, si la unidad de mil se divide por 7 nos dá de resíduo 6 ó sea 7 menos 1 de lo que se deduce que la primera clase ó sea el conjunto de centenas, decenas y unidades es un múltiplo de 7 aumentado en el valor absoluto de sus cifras y la 2.ª clase ó sea los miles es igual á un múltiplo de 7 disminuido el valor absoluto de sus cifras; si se divide la unidad de millón por 7 nos dá el mismo resultado que si fuesen unidades sencillas, y si se dividen por 7 los miles de millón nos produce lo mismo que los sencillos; por consiguiente todo número que conste de más de tres cifras se compondrá de un múltiplo de 7 mas la diferencia entre las sumas de los valores absolutos de las cifras del lugar impar y las del lugar par.

Sirva de ejemplo el número 6.546.876.342.

Este número se compondrá de un m. de 7+342—876+546—6 ó sea de un m. de 7+888—882=m. de 7+6 y como 6 no es *cero* ni 7, ni múltiplo de 7, se deduce que dicho número no es divisible por 7; y su resíduo será 6.

COMPROBACIÓN.

6546876342	7
023145006(6	
00000 0	935268048

Demostremos ahora la regla y al efecto llamemos N. al número compuesto de más de 3 cifras, S la suma de las secciones de los lugares pares, y S' las de las impares, tendrémos que

$$N=\text{múltiplo de } 7+(S-S')$$

Si S—S' es cero, N= á m. de 7 y por tanto divisible por 7: si S—S' es igual á 7 ó m. de 7, N= á m. de 7 y por lo mismo divisible por 7; pero si S—S' no es *cero*, ni 7 ni m. de 7, N no será divisible por 7.

CAPÍTULO IV.

Números primos.

149. Hemos dicho (116) que número primo es aquél que sólamente puede dividirse por sí mismo y por la unidad ¿habrá muchos números primos? Muchos.

150. Cómo se conocerá si un número dado es primo?

Por la siguiente regla: *Si se divide un número sucesivamente por los primos* 2, 3, 5, 7, 11, *etc. y, sin obtener cociente exacto, se llega á un cociente entero menor que el divisor, dicho número será primo.*

Dem. Sea, por ejemplo, el número 137, que dividido sucesivamente por 2, 3, 5, 7, 11, 13, no dá cociente exacto y el último obtenido es 10: digo que el número 137 es primo.

En efecto, el número 137 no puede dividirse por ningún número compuesto menor que 13, pues si lo fuera, lo sería también por los factores primos de dicho compuesto, y esto es contrario á lo que hemos supuesto: luego el 137 no tiene ningún divisor menor que 13, escepto la unidad.

Tampoco este número puede dividirse por otro mayor que 13, escepto por sí mismo, por que si lo fuese, el cociente obtenido no sería mayor que 10, pues es evidente que en toda división exacta el dividendo puede dividirse por el cociente y por lo tanto el número 137 sería divisible por un número menor que 13, lo que acabamos de demostrar que es imposible: luego el número 137 no tiene más factores que á sí mismo y la unidad: luego es primo.

151. Cómo se construye una tabla de números primos?

Varios métodos se conocen; pero el más sencillo es el siguiente llamado CRIBA DE ERATÓSTENES. Se escriben los números 1 y 2 y todos los impares hasta llegar al límite que se desee; luego se borran contando desde el 3 todos los números que ocupen el tercer lugar, pues todos ellos son múltiplos de 3; en seguida contando desde el 5 se borran los que ocupen el 5.° lugar por ser todos los múltiplos de 5, y así sucesivamente se van borrando contando desde el 7 los que ocupan el 7.° lugar; desde 11 los que ocupan el undécimo, etc. hasta llegar al número pedido: todos los números que queden sin borrar formarán la tabla de números primos pedida.

VÉASE LA SIGUIENTE TABLA DE NÚMEROS PRIMOS DE 1 HASTA 1000.

1	73	181	307	433	571	701	853
2	79	191	311	439	577	709	857
3	83	193	313	443	587	719	859
5	89	197	317	449	593	727	863
7	97	199	331	457	599	733	877
11	101	211	337	461	601	739	881
13	103	223	347	463	607	743	883
17	107	227	349	467	613	751	887
19	109	229	353	479	617	757	907
23	113	233	359	487	619	761	911
29	127	239	367	491	631	769	919
31	131	241	373	499	641	773	929
37	137	251	379	503	643	787	937
41	139	257	383	509	647	797	941
43	149	263	389	521	653	809	947
47	151	269	397	523	659	811	953
53	157	271	401	541	661	821	967
59	163	277	409	547	673	823	971
61	167	281	419	557	677	827	977
67	173	283	421	563	683	829	983
71	179	293	431	569	691	839	991
							997

ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS PRIMOS.

152. Cuáles son las principales propiedades de los números primos?

Las que se manifiestan en los siguientes teoremas:

TEOREMA 33.

Si tenemos un número primo que no es divisor de otro número éste y aquél son primos entre sí.

Dem. Sea el número primo 7 que no es divisor de 15: digo que 7 y 15 son primos entre sí.

En efecto, hemos dicho (118) que varios números son primos entre sí, cuando no tienen más factor común que la unidad; pues bien, el número 7, como primo que es, no puede dividirse más que por sí mismo y por la unidad y como 15, por suposición no puede dividirse por 7, resulta que 15 y 7 no tienen más factor común que la unidad: luego son primos entre sí, que es lo que se quería demostrar.

De aquí se deduce que *dos números primos son primos entre sí*, pues entre los dos no existe ningún factor común mas que la unidad.

TEOREMA 34.

Todo número primo que sea divisor de un producto, debe ser divisor de uno de sus factores cuando menos.

Dem. Sea 5 el número primo divisor del producto $7\times3\times15$: digo que 5 debe ser divisor de uno de sus factores.

En efecto, supongamos que 5 no sea divisor de los factores 7 ni 3 en cuyo caso será primo con cada uno de ellos; pero el producto $7\times3\times15$ es igual á 7 multiplicado por 3×15 y el número 5 es divisor de este producto: luego siendo primo con el 7, debe ser divisor de 3×15 y como también por suposición el 5 es primo con el 3, resulta que debe ser divisor del 15, según el enunciado.

COROLARIOS.

De este teorema se deduce: 1.° *Que si un número es primo con cada uno de los factores de un producto, también será primo con el producto,* pues si fuese divisor del producto, tendría que serlo de alguno de sus factores, contra lo supuesto.

2.° *Que un producto de varios números primos no puede dividirse por ningún otro primo diferente de los propuestos,* porque este nuevo número, siendo primo, sería primo con todos y cada uno de los factores: luego sería también con el producto.

TEOREMA 35.

Si un número es divisible por dos números primos entre sí, será divisible por el producto de éstos.

Dem. Sea el número 96 divisible por 3 y por 8 primos entre sí: digo que también lo será por su producto 3. 8.

En efecto, llamemos c al cociente de 96 : 3, tendremos $96 = c \times 3$: siendo 96 divisible por 8, por suposición, su igual $c \times 3$ también será divisible por 8; pero 8 y 3 son primos entre sí por hipótesi: luego 8 será divisor de c.

Si llamamos ahora n al cociente de c: 8; será $c = n \times 8$ y por consiguiente $96 = n \times 8 \times 3$, donde se vé que 96 puede dividirse por el producto de 8 por 3, conforme al enunciado.

De aquí se deduce que si un número tiene caractéres de divisibilidad por dos números primos, podrá dividirse por el producto de ambos: así el número 78, que puede dividirse por 2 y por 3, será divisible por 6; 75 que puede dividirse por 3 y por 5, será divisible por 15, etc.

CAPÍTULO V.

Descomposición de los números en sus diferentes factores.

153. Qué es descomponer un número en sus factores primos?

Descomponer un número en sus factores primos es hallar todos los números primos divisores de dicho número, y cuyo producto sea igual al número dado.

154. Cómo se hace esta descomposición?

Para descomponer un número en sus factores primos ó simples, se divide dicho número y los cocientes sucesivos por el menor divisor diferente de 1 hasta obtener de cociente la unidad; los divisores hallados serán los factores primos del número propuesto, y éste igual al producto de todos ellos.

Dem. Sea el número 240; este número es divisible por 2 y su cociente es 120: luego $240 = 120 \times 2$, *(a)*

120 es también divisible por 2 y su cociente es 60: luego poniendo en la igualdad *(a)* 60×2 en lugar de 120 resultará esta otra

$$240 = 60 \times 2 \times 2 \ (b)$$

Ahora 60 es asímismo divisible por 2 y su cociente es 30: luego $60 = 30 \times 2$: sustituyendo en la igualdad *(b)* en lugar de 60 su igual 30×2, resultará esta otra

$$240 = 30 \times 2 \times 2 \times 2 \ (c)$$

Pero 30 se puede dividir por 2 y su cociente es 15: luego $30 = 15 \times 2$, y por consiguiente sustituyendo en la igualdad *(c)* 15×2 en lugar de 30, tendremos:

$$240 = 15 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \quad (d)$$

Mas 15 es divisible por 3 y su cociente es 5: luego $15 = 5 \times 3$ y sustituyendo en la igualdad *(d)* 3×5 en lugar de 15 resultará:

$$240 = 5 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

y como 5 es también número primo y es divisible por sí mismo nos dará de cociente la unidad: luego los factores simples del número

240 son 5, 3, 2, 2, 2, 2 y por consiguiente

$$240 = 5 \times 3 \times 2^4$$

Práctica. Descomponer el número 860 en sus factores primos.

Disposición

Primer dividendo.	860	2	
Cocientes sucesivos	430	2	*Divisores.*
	215	5	
	43	43	
	1		

De donde $860 = 2^2 \times 5 \times 43$.

Diré 860 es divisible por 2 por terminar en cero, dividiendo, pues, 860 por 2 me dá de cociente 430 que coloco debajo del número propuesto. Este cociente es también divisible por 2 por la misma razón; haciendo la división, me dá 215 de cociente que coloco debajo del anterior. Este cociente termina en 5, y por lo tanto es divisible por 5, resultando de la división el cociente 43, que coloco debajo del anterior. Este cociente 43 es número primo; le divido por sí mismo y me dá de cociente la unidad: luego los factores primos de este número son 2^2, 5 y 43.

155. Cómo se descompone un número en todos sus factores simples y compuestos?

Para hallar todos los divisores de un número se descompone primero el número en sus factores primos: se escriben la unidad y las potencias sucesivas del primer factor simple; se multiplican estos números por las potencias sucesivas del segundo factor simple; los productos obtenidos se multiplican por las potencias sucesivas del tercer factor, y así se continúa hasta obtener el número dado.

Ejemplo.

Hallar todos los divisores del número 780.

780	2
390	2
195	3
65	5
13	13
1	

$780=2^2\times3\times5\times13.$

Disposición.

1— 2— 4

3— 6— 12

5— 10— 20
15— 30— 60

13— 26— 52
39— 78—156
65—130—260
195—390—780

Práctica. Descompuesto el número en sus factores simples resulta que 780 es igual á $2^2\times3\times5\times13$.

Escribo la unidad y las dos potencias del primer factor 2 que son 2 y 4: multiplico estos números por el 2.° factor 3, que me dan los productos 3, 6 y 12; multiplico ahora aquellos y estos por el factor 5 y tengo los divisores 5, 10, 20, 15, 30 y 60, y multiplicando todos los productos obtenidos por el último factor 13, me resultan los divisores 13, 26, 52, 39, 78, 156, 65, 130, 260, 195, 390 y 780, que son todos los divisores del número propuesto.

TEOREMA 36.

156. Descompuesto un número en sus factores primos ¿podrá darnos por medio de otra descomposición nuevos factores?

No; ni tampoco ningún factor primo con diferente esponente que en la primera descomposición.

Dem. En efecto, sea N. un número que descompuesto en los factores primos nos dé $N=2^2\times3^3\times5$.

Si suponemos que en otra nueva descomposición nos dá $N=2^2\times3^3\times5\times7$, esto es, el factor primo 7 además de los primeros resultará que

$$2^2\times3^3\times5=2^2\times3^3\times5\times7,$$

porque dos cosas iguales á una tercera son iguales entre sí, y como los dos miembros de esta igualdad son iguales á N, los dos son iguales entre sí.

Ahora bien el segundo miembro de esta igualdad es divisible por 7, puesto que 7 es uno de sus factores: luego el 1.º también lo será, lo cual es imposible por ser 7 primo con cada uno de los factores de dicho producto.

Tampoco en otra nueva descomposición se puede obtener ningún número primo con diferente esponente que en la primera descomposición, pues si llamamos N á este número y en la 1.ª descomposición nos dá como hemos visto, $N=2^2\times3^3\times5$.

Si en otra descomposición nos diese, por ejemplo, el mismo factor 5; pero elevado á la 2.ª potencia, sería $N=2^2\times3^3\times5$.

Y por tanto $2^2\times3^3\times5=2^2\times3^3\times5^2$

Siendo el segundo miembro de esta igualdad divisible por 5^2, el primero también lo sería, y esto es absurdo.

CAPÍTULO VI.

Máximo común divisor.

157. En qué se funda la determinación del máximo común divisor de dos números?

En los teoremas siguientes:

TEOREMA 37.

Si un número divide exactamente á dividendo y divisor en una división inexacta, dividirá también al resíduo.

Dem. Sea el número 7 divisor de 77 y 28: digo que también será divisor del resíduo que resulta de la división de 77 entre 28.

En efecto, $77:28=2$, cociente entero y 21 de resíduo.

Ahora bien $77=28\times2+21$ y por tanto.

$$77-28\times2=21$$

Por suposición el número 7 es divisor de 77 y de 28.2: luego también lo será de su diferencia 21, porque hemos demostrado ya (Teorema 24) *que si un número es divisor de minuendo y sustraendo es también divisor del resto*, que en este caso es el resíduo 21, conforme á lo que queríamos demostrar.

TEOREMA 38.

Si un número divide exactamente al divisor y al resíduo también dividirá al dividendo.

Dem. Sea el mismo 7 divisor de 28 y de 21 divisor y resíduo respectivamente de 49: 28: digo que 7 será divisor del dividendo 49.

En efecto, $49=28\times1+21$; el número 7 por suposición es divisor de 28×1 y de 21: luego también lo será de 49, que es la suma de estos dos sumandos, porque hemos demostrado (Teorema 23) *que si un número es divisor de otros es divisor de la suma de estos.*

TEOREMA 39.

El máximo común divisor del dividendo y divisor de una división indicada es igual al máximo común divisor del divisor y resíduo.

Dem. Sea el dividendo 68 y el divisor 12, cuyo cociente entero es 5 y el resíduo 8: digo que el *m. c. d.* (1) de 68 y 12=al *m. c. d.* de 12 y 8.

Sea ahora M el *m. c. d.* de 68 y 12 y N el *m. c. d.* de 12 y 8: digo que $M=N$.

En efecto, M es divisor de 68 y 12: luego también del resíduo 8: si M es divisor de 12 y de 8, no será mayor que N que es el *m. c. d.* de 12 y 8.

Siendo N divisor de 12 y 8, lo es también de 68 y siéndolo de 68 y 12, N no será mayor que M, que es su *m. c. d.*: de donde resulta que M no es mayor que N, ni N mayor que M: luego $M=N$ que es lo que se quería demostrar.

158. Sabido esto ¿cómo se halla el máximo común divisor de dos números?

Para hallar el máximo común divisor de dos números se divide el mayor por el menor; si resulta cociente exacto, el menor es el m. c. d *y si no es exacto, se divide el menor por el resíduo y así se continúa dividiendo el último divisor por el último resíduo hasta encontrar cociente exacto, en cuyo caso el último divisor será el* m. c. d. *de ambos.*

(1) Léase máximo común divisor.

Dem. Hallar el máximo común divisor de los números 564 y 235.

El máximo común divisor de 564 y 235 no puede ser mayor que 235 y por lo tanto si al dividir 564 por 235 resultase cociente exacto, el 235 que sería divisor de sí mismo y de 564; sería el *m. c. d.* de ambos.

Ejecutando la división resulta 2 de cociente y 94 de resíduo: luego 235 no es el *m. c. d.* que se busca.

Como el *m. c. d.* del dividendo y divisor es igual al del divisor y resíduo, divido el 235 por 94 y me dá 2 de cociente y 47 de resíduo: luego tampoco el 94 es el *m. c. d.* Vuelvo á dividir el 94 por el resíduo 47 resultando 2 de cociente exacto: luego 47 es el *m. c. d.* de 564 y 235.

Práctica. *Disposición.*

Diré: 564 entre 235=2 de cociente y 94 de resíduo: tomando ahora por divisor este resíduo, digo: 235: 94=2 cociente entero y 47 de resíduo: tomo por divisor éste y digo: 94: 47=2 cociente exacto: luego 47 es el *m. c. d.* que se busca.

564	235	94	47	*Divisores.*
	2	2	2	*Cocientes.*
94	47	00		*Resíduos.*

159. Hay algún otro procedimiento para hallar el *m. c. d.* de dos números?

Sí, fundado en la descomposición de éstos en sus factores primos. Al efecto se descomponen dichos números en sus factores primos y se multiplican las menores potencias de los factores comunes y *el producto de éstas será el* m. c. d.

Ejemplo. Hallar por este procedimiento el *m. c. d* de los dos números del ejemplo anterior 564 y 235.

Descompuestos estos números en sus factores primos resulta que $564=2^2\times3\times47$ y $235=5\times47$ en donde se vé que en la descomposición no hay más factor común que el 47: luego este es el *m. c. d.*

160. Cómo se halla el máximo común divisor de tres ó más números?

Se halla primero el m. c. d. *de los dos primeros; después el* m. c. d. *del* m. c. d. *hallado y del tercero y así se continúa hasta llegar al último; el* m. c. d. *de los dos últimos será el que se busca.* En la práctica conviene principiar por los dos menores, en razón á que el *m. c. d.* no puede ser mayor que el menor de ellos.

Ejemplo. Hallar el *m. c. d.* de los números 360, 230 y 60. Hallaré 1.º el de 230 y 60 por la regla dada, el cual es 10. Hallo ahora el de 360 y 10 y como 360 es divisible exactamente por 10, 10 es el *m. c. d.* de los tres números, porque todo divisor común de dos números lo es también de su *m. c. d.*

TEOREMA 40.

161. *Si se multiplican dividendo y divisor de una división inexacta por un número cualquiera ¿qué le sucede al cociente y al resíduo?*

El cociente no varía; pero el resíduo queda multiplicado por el mismo número.

Dem. Sea el dividendo 29 y el divisor 6: el cociente entero será 4 y el resíduo 5: digo que multiplicando 29 y 6 por un número cualquiera, 3 por ejemplo, y dividiendo el primer producto por el segundo el cociente 4 será el mismo, pero el resíduo 5 quedará multiplicado por 3.

En efecto $29=6\times4+5$.

Si los dos miembros de esta igualdad se multiplican por un número cualquiera, 3 por ejemplo, resultará otra igualdad, á saber:

$$29\times3=6\times4\times3+5\times3.$$

Ahora bien: el resíduo 5 es menor que el divisor 6: luego 5×3 será menor que 6×3; y por lo tanto $29\times3:6\times3$ dá de cociente entero 4 y 5×3 de resíduo, que es lo que se quería demostrar.

CAPÍTULO VII.

Mínimo múltiplo común.

162. Hemos dicho (115) que se llama mínino múltiplo común de varios números al menor número divisible por todos ellos ¿cómo podrá hallarse dicho mínimo múltiplo común?

Por la siguiente regla: Se prescinde de los números que sean factores de otros porque el número que sea múltiplo de éstos, también lo será de sus factores; se descomponen los restantes en sus factores primos, y se multiplican las mayores potencias de todos los factores: el producto obtenido será el mínimo múltiplo común de todos ellos.

Dem. Sean los números 8, 15, 24, 30 y 36.

Prescindo de los números 8 y 15 por ser factores de 24 y 30.

Descompuestos los números restantes 24, 30 y 36 en sus factores primos resulta $24=2^3\times3$

$$30=2\times5\times3$$

$$36=2^2\times3^2$$

Observando estas igualdades se comprende que un número será divisible por 24 si contiene á lo ménos los factores 2^3 y 3 primos entre sí.

Lo será por 30, si cuando ménos contiene los factores 2, 5 y 3: y lo será por 36, si contiene los factores 2^2 y 3^2.

Por lo tanto un número que contenga todos estos factores podrá dividirse á la vez por 24, 30 y 36, y este número es

$$2^3\times5\times3^2$$

luego este número es múltiplo de los propuestos.

Réstanos probar ahora que este múltiplo es el menor común á todos.

En efecto, otro número cualquiera que no contenga los factores dichos, á lo ménos con los mismos exponentes, no será divisible á la vez por los números propuestos, *porque un número no es divisible por otro si no contiene todos los factores primos de este otro repetidos cuando ménos tantas veces como se hallan en el divisor* (1) luego el producto $2^3\times 5\times3^2=360$ es el mínimo múltiplo común de los números 8, 15, 24, 30 y 36.

Si los números propuestos fuesen primos entre sí dos á dos, el mínimo múltiplo común sería el producto de todos ellos.

CAPÍTULO VIII.

Ejercicios prácticos correspondiente á esta 2.ª parte.

1.° Cuáles son los números duplos de 5, 7, 24, 56, 85, 190 y 7768?

(1) Porque si así no sucediera el dividendo admitiría dos descomposiciones diferentes.

2.° Cuáles son los triplos de 6, 12, 48, 96 y 580?
3.° Hallar cinco múltiplos de 9, 15, 20, 200 y 780.
4.° Manifestar dos números divisores de 28, 36 y 44.
5.° Id. tres factores de los números 12, 48 y 112.
6.° Id dos submúltiplos de 96 y 280.
7.° Qué número es parte alícuota de 90 y de 60?
8.° Cuál es el cuadrado ó segunda potencia de 15, de 36 y 40, indicándolas.
9.° Formar el cubo ó tercera potencia de 12, 18 y 25 indicándolos.
10. Formar las 4.ª y 5.ª potencias de los números 8 y 20 indicándolas.
11 Escribir siete números primos.
12. Id. siete números compuestos.
13. Indicar las cuatro operaciones fundamentales por medio de las letras del alfabeto, haciendo también uso del paréntesis.
14. Efectuar las operaciones siguientes: 150—(30+12); 70—(40+15).
15. Id. las siguientes: 60—(25—12); 80—(30—20).
16. Id. las siguientes: (15+4+18) ×12; (20+50+54) ×9; (250+16) ×50.
17. Id. las siguientes: (12+22+30)×(7+121); (17+13 +15)×(25+80).
18. Id. las siguientes: (36—15)×8; (48—16)×20; (30—18)×32.
19. Id. las siguientes: (42—19)×(20+15); (56—24)×(18 +13); (58—26)×(61+26); (84—32)×(25+38).
20. Hallar el cuadrado de la suma indicada 50+20; id. de 24+60; id. de 32+54.
21. Cuál es el producto de (8+3) por (8—3)? cuál el de (20+13) por (20—13)?
22. Formar la tercera potencia ó cubo de (50+15); de (60+30) y de (80+24).
23. Cuál es el producto de 2×5×7×8 por 12? cuál el de 6×15×9×8 por 32? cuál el de 50×60×8 por 120?
24. Hallar el cociente de (64+20):4; id. el de (80+75):5.
25. Id. el de (90—30): 15; id. el de (78—28): 2.
26. Id. el de 6×4×3×12: 6; id. el de 16×15×24×50: 8.

27. Son divisibles por 2 los números 26, 54, 75, 48, 90, 127 y 139?

28. Son divisibles por 5 los números 480, 595, 726, 425, 508 y 755?

29. Son divisibles por 4 los números 464, 800, 524, 626 y 512?

30. Son divisibles por 8 los números 2620, 5800, 4250 y 7000?

31. Son divisibles por 25 los números 125, 385, 900, 575, 850 y 720?

32. Son divisibles por 9 los números 635, 522, 774, 5679 y 612?

33. Son divisibles por 3 los números 894, 753, 846, 730 y 380.

34. Son divisibles por 11 los números 6545, 3274, 8294 y 6358?

35. Son primos los números 23, 109, 541, 283, 165, 277 y 499?

36. Son divisibles por 7 los números 84, 128, 536, 3284, 25496 y 86954?

37. Descomponer en sus factores primos los números 680, 430, 536, 4650, 2664 y 242374.

38. Hallar todos los factores simples y compuestos de los números 360, 540, 2600 y 4290.

39. Hallar el máximo común divisor de los números 680 y 420.

40. Id. de 7200, 640 y 560.

41. Hallar el mínimo múltiplo común de los números 4, 6, 8, 12, 36, 44, 112 y 336.

FIN DE LA 2.ª PARTE.

TERCERA PARTE.

NÚMEROS FRACCIONARIOS, REDUCCIÓN DE ÈSTOS Á DECIMALES Y VICE-VERSA. SISTEMA MÉTRICO ANTIGUO Y MODERNO. OPERACIONES CON LOS NÚMEROS COMPLEJOS DE AMBOS SISTEMAS.

CAPÍTULO 1.°

Propiedades de los quebrados, operaciones que con ellos pueden practicarse, adición, sustracción, multiplicación, elevación á potencias.

ARTÍCULO 1.°

Propiedades de los quebrados.

163. Ya hemos dicho (15) que número quebrado es la expresión ó representación de una ó varias partes de la unidad ¿cómo nos formaremos idea exacta de los quebrados?

Considerando la unidad dividida en dos ó más partes iguales, de las que tomamos una ó más de una. Así, si consideramos una unidad dividida en dos partes iguales, cada una se llama medio ó mitad; si la consideramos dividida en tres partes, cada una se llama tercio; si en cuatro, cuarto ó cuartillo; si en cinco, quinto y así sucesivamente.

164 Qué se deduce de ésto?

Que una unidad tiene dos medios, tres tercios, cuatro cuartos ó cuartillos, cinco quintos, seis sestos etc.

165. Cuántos números se necesitan para expresar un quebrado?

Dos, que se llaman *numerador* y *denominador*; el numerador expresa las partes que se toman de la unidad y el denominador las partes en que está dividida. Numerador y denominador se llaman términos del quebrado.

166. Cómo se escribe un quebrado?

Poniendo el numerador encima de una raya y el denominador debajo. Así el quebrado cinco octavos se representa en esta forma $^5/_8$ y significa que la unidad está dividida en 8 partes y de estas se toman cinco, siendo por lo tanto 5 el numerador y 8 el denominador.

167. Cómo se lee un quebrado?

Se lee primero el numerador con los nombres numerales absolutos y el denominador con los partitivos, si no pasa de 10, y con los absolutos añadiendo la terminación *avos*, si pasa de 10. Así $^3/_5$, $^2/_7$, $^4/_9$ se leen *tres quintos, dos séptimos, cuatro novenos* y los quebrados $^5/_{12}$, $^7/_{15}$ se leen *cinco doceavos, siete quinceavos*.

168. Qué división puede hacerse de los quebrados?

Los quebrados pueden dividirse en *propios* ó *impropios*. Son quebrados propios aquellos cuyo numerador es menor que su denominador, por cuya razón valen menos que una unidad, v. gr. $^3/_7$, $^2/_5$, $^4/_{13}$: y son quebrados impropios aquellos cuyo numerador es igual ó mayor que su denominador, por lo que valen tanto ó más que una unidad, razón por la que se les llama impropiamente quebrados v. gr. $^7/_7$, $^5/_5$, $^8/_3$, $^{14}/_4$, en los que $^7/_7$ y $^5/_5$ valen una unidad y $^8/_3$, $^{14}/_4$ valen más que una unidad.

169. Qué números se comprenden bajo la denominación de fraccionarios?

Toda clase de quebrados, ya sean propios ó impropios y os números que hemos denominado mixtos.

TEOREMA 41.

170. Cuál es el producto de un quebrado multiplicado por su denominador?

El producto de un quebrado multiplicado por su denominador es igual á su numerador.

Dem. Sea el quebrado $^5/_8$: digo que $^5/_8 \times 8 = 5$.

En efecto, $^5/_8 \times 8 = 5$ octavos$\times 8$, esto es á 5 unidades llamadas octavos$\times 8$; pero 5 octavos multiplicados por el número abstracto 8, nos dan de producto $5 \times 8 = 40$ octavos; y como una unidad entera tiene 8 de las llamadas octavos, los 40 octavos serán tanto como 40: 8 unidades enteras, igual á 5 enteros, conforme al enunciado.

TEOREMA 42.

171. Dijimos al hablar de la divisiòn que ésta podía ser inexacta ¿cómo se completará su cociente?

El cociente completo de toda división inexacta se compone del cociente entero mas un quebrado, cuyo numerador es el resíduo y cuyo denominador es el divisor.

Dem. Sea el dividendo 57 y el divisor 6, en que el cociente entero es 9 y el resíduo 3: digo que 57: $6=9+{}^3/_6$. En efecto, el cociente entero 9 de esta división×el divisor $6=54$: luego para completar este cociente falta un número que multiplicado por el divisor 6, nos dé 3 que es la diferencia entre 57 y 54, y este número no puede ser otro que ${}^3/_6$, puesto que ${}^3/_6\times6=3$, según el teorema anterior: luego es cierto el enunciado de este teorema.

COROLARIO.

172. Según esto toda división se podrá expresar en forma de quebrado?

Sí; toda división, ya sea exacta ó inexacta, puede expresarse en forma de quebrado poniendo por numerador el dividendo y por denominador el divisor.

Dem. Sea la división 52 : 12; digo que $52 : 12=\frac{52}{12}$

En efecto, en toda división el cociente multiplicado por el divisor es igual al dividendo, y como $\frac{52}{12}\times12=52$, resulta que $\frac{52}{12}$ es el cociente de dicha división, que es lo que se quería demostrar.

173. Y un número entero puede también ponerse en forma de quebrado?

Como todo número dividido por la unidad dá de cociente el mismo número, podrá éste ponerse en forma de quebrado poniéndole por denominador la unidad. Así 7 se puede expresar en la forma de quebrado de este modo: ${}^7/_1$, puesto que $7 : 1=7$.

174. Se ha dicho que un quebrado impropio puede ser

igual ó mayor que la unidad, ¿cómo, pues, se sacarán las unidades que contenga un quebrado impropio?

Para sacar las unidades que contenga un quebrado impropio, no hay que hacer mas que dividir el numerador por el denominador; si la división es exacta, el cociente representará las unidades en él contenidas, y si no es exacta, se agrega á éste un quebrado cuyo numerador sea el resíduo y el denominador el divisor, y nos resultará un número mixto, equivalente al quebrado impropio propuesto. Así el quebrado impropio $\frac{24}{6}$=24:6=4. El quebrado impropio $\frac{27}{7}$=27:7=3 $^6|_7$.

175. Cómo se reduce un entero á quebrado impropio cuyo denominador se nos dé?

Se multiplica el entero por dicho denominador y al prodúcto se le pone por denominador el mismo.

En efecto, si queremos reducir 8 á tercios diré: una unidad tiene 3 tercios: luego $8=\frac{8\times3}{3}$

176. Qué se entiende por reducir un número mixto á quebrado?

Reducir un número mixto á quebrado es hallar un quebrado impropio equivalente al número mixto dado.

177. Cómo se reduce un número mixto á quebrado equivalente?

Para reducir un mixto á quebrado equivalente, se multiplica el entero por el denominador del quebrado que le acompaña, á este producto se añade el numerador y á la suma se le pone por denominador el del mismo quebrado.

Dem. Sea el número mixto $5^2|_3$: digo que reducido á quebrado equivalente, $5^2|_3=\frac{5\times3+2}{3.}$

En efecto, este número se compone de 5 unidades mas dos tercios de otra unidad; pero una unidad es igual á *tres tercios*: luego las 5 unidades tendrán $\frac{5\times3}{3}$ y añadiendo los $^2|_3$ que acompañan á las 5 unidades, tendrémos $\frac{5\times3+2}{3}$ conforme á la regla.

178. Y la unidad puede ponerse también en forma de quebrado?

Sí, porque siendo todo quebrado el cociente de la división de su numerador por su denominador, y dándonos todo número dividido por sí mismo la unidad por cociente, si escribimos un quebrado que tenga el denominador igual á su numerador, este quebrado representará la unidad.

Así $1=\frac{1}{1}=\frac{2}{2}=\frac{3}{3}=\frac{5}{5}=\frac{8}{8}=\frac{25}{25}$ etc.

TEOREMA 43.

179. Cuál de dos quebrados que tienen el mismo denominador será mayor?

De dos quebrados que tienen igual denominador, es mayor el que tiene mayor numerador.

Dem. Sean los dos quebrados $^5/_9$ y $^7/_9$ digo que $^7/_9 > {}^5/_9$.

En efecto, en ambos quebrados se representa la unidad dividida en igual número de partes y por lo tanto el tamaño de éstas en los dos será igual, y como en $^7/_9$ se toman más de estas partes que en $^5/_9$, es evidente que $^7/_9$ es mayor que $^5/_9$.

COROLARIO.

Luego si permaneciendo constante el denominador de un quebrado, aumenta el numerador, el quebrado aumentará, y si disminuye el numerador, el valor del quebrado disminuirá.

Así $\frac{3}{16}<\frac{4}{16}<\frac{5}{16}<\frac{9}{16}$ y *vice-versa* $\frac{9}{16}>\frac{5}{16}>\frac{4}{16}>\frac{3}{16}$

TEOREMA 44.

180. Qué le sucede á un quebrado si se multiplica su numerador por un número entero?

Si el numerador de un quebrado se multiplica por un número entero, el quebrado queda multiplicado por el mismo número, con tal que el denominador permanezca el mismo.

Dem. Sea el quebrado $^5/_8$ digo que si el numerador 5 se multiplica por un número entero, 3, por ejemplo, el quebrado quedará también multiplicado por 3, esto es, que $\frac{5\times3}{8}={}^5/_8\times3$.

En efecto, de los dos quebrados $^5/_8$ y $\frac{5.3}{8}$ que tienen el mismo denominador, el segundo tiene el numerador tres veces mayor que el primero y por lo tanto es tres veces mayor que éste ó está multiplicado por 3, conforme al enunciado.

COROLARIO.

Luego para multiplicar un quebrado por un entero, bastará multiplicar su numerador por dicho entero y poner por denominador al producto el denominador del quebrado.

$$\text{Así } {}^4/_7\times5=\frac{4.5}{7}=\frac{20}{7}$$

TEOREMA 45.

181. Qué le sucede á un quebrado si su numerador se parte por uno de sus divisores?

Si el numerador de un quebrado se parte por alguno de sus divisores, el quebrado queda partido por dicho divisor.

Dem. Sea el quebrado $^8/_{12}$: digo que si su numerador 8 se parte por uno de sus divisores 4, por ejemplo, el quebrado quedará partido por 4, ó lo que es lo mismo que $\frac{8:4}{12}={}^8/_{12}:4$.

En efecto, de los dos quebrados $^8/_{12}$ y $\frac{8:4}{12}={}^2/_{12}$ que tienen el mismo denominador, el segundo $\frac{8:4}{12}$ tiene un numerador cuatro veces menor que el primero; luego es cuatro veces menor que éste ó es el cociente de dividir éste por 4, conforme al enunciado.

COROLARIO.

Luego para partir un quebrado por un divisor de su numerador, bastará partir éste por dicho divisor, dejando por denominador el mismo del quebrado.

Así $\frac{12}{15}: 6 = \frac{12:6}{15} = \frac{2}{15}$.

TEOREMA 46.

182. De dos quebrados que tienen el mismo numerador cuál será mayor?

De dos quebrados que tienen el mismo numerador es mayor el que tiene menor denominador.

Dem. Sean los dos quebrados $^7/_8$ y $^7/_{12}$: digo que $^7/_8 > ^7/_{12}$. En efecto, en $^7/_8$ la unidad está dividida en 8 partes y en $^7/_{12}$ está dividida en 12: luego las partes del 1.° son de mayor tamaño que las del 2.° y como en ambos se toma el mismo número de ellas, es evidente que será mayor aquel cuyas partes sean mayores; luego $^7/_8 > ^7/_{12}$. (1)

COROLARIO.

Luego si, permaneciendo constante el numerador de un quebrado, aumenta su denominador, el valor del quebrado disminuirá, y si disminuye el denominador, el valor del quebrado aumentará.

Así $^4/_3 > ^4/_6 > ^4/_7 > ^4/_9$ y *vice-versa* $^4/_9 < ^4/_7 < ^4/_6 < ^4/_5$.

Luego si el denominador llegase á ser *cero*, el valor del quebrado llegaría á ser todo lo mayor posible, esto es, sería ∞, razón por lo cual dijimos (83) que el cociente de un número cualquiera por *cero* es igual al infinito.

TEOREMA 47.

183. Qué le sucede á un quebrado si el denominador se multiplica por un número entero?

Si el denominador de un quebrado se multiplica por un número entero, no variando el numerador, el quebrado queda dividido por dicho número entero.

Dem. Sea el quebrado $^4/_5$: digo que si su denominador 5 se multiplica por un número entero, 3 por ejemplo, el quebrado queda dividido por dicho número 3, esto es $\frac{4}{5\times3} = {^4/_5}: 3$.

(1) Si los quebrados tienen distintos los numeradores y los denominadores se sabrá cuál es mayor, reduciéndolos á un común denominador, como se dirá después.

En efecto, de los dos quebrados $^4/_5$ y $\frac{4}{5.3}={}^4/_{15}$, que tienen el mismo numerador, el 2.° tiene el denominador 3 veces mayor que el 1.°; luego el valor del segundo es 3 veces menor que el del primero, ó es el cociente de dividir el 1.° por 3, conforme al enunciado.

COROLARIO.

Luego para dividir un quebrado por un número entero, basta multiplicar su denominador por el entero, dejando por numerador el mismo del quebrado.

$$\text{Así } {}^5/_7:4=\frac{5}{7.4}={}^5/_{28}.$$

TEOREMA 48.

184. Qué le sucede á un quebrado si su denominador se parte por uno de sus divisores?

Si el denominador de un quebrado se parte por uno de sus divisores, el quebrado queda multiplicado por dicho divisor.

Dem. Sea el quebrado $\frac{5}{12}$: digo que si el denominador 12 se divide por alguno de sus divisores, 4, por ejemplo, el quebrado queda multiplicado por el mismo 4, esto es, que $\frac{5}{12:4}=\frac{5}{12}\times4.$

En efecto, de los dos quebrados $\frac{5}{12}$ y $\frac{5}{12:4}=\frac{5}{3}$ que tienen el mismo numerador, el segundo tiene su denominador 4 veces menor que el 1.°: luego es 4 veces mayor que éste y por lo tanto es el producto de multiplicar el 1.° por 4, conforme al enunciado.

COROLARIO.

Luego para multiplicar un quebrado por un divisor de su denominador, basta dividir éste por dicho divisor, dejando por numerador el mismo del quebrado.

$$\text{Así } \frac{5}{9}\times3=\frac{5}{9:3}=\frac{5}{3}$$

185. Según lo que acabamos de manifestar podrá V. decirnos de cuántas maneras puede multiplicarse y dividirse un quebrado por un entero?

Un quebrado puede multiplicarse por un entero de dos maneras: 1.ª Multiplicando su numerador por dicho entero quedando el denominador el mismo. (Teor. 44. Cor.) 2.ª Partiendo su denominador por dicho entero, dejando el numerador el mismo. (Teor. 48. Cor.)

Un quebrado puede dividirse por un entero de otras dos maneras: 1.ª Partiendo su numerador por dicho entero, dejando por denominador el mismo (Teor. 45 Cor.) 2.ª Multiplicando su denominador por dicho entero, dejando el mismo numerador (Teor. 47. Cor.)

TEOREMA 49.

186. Qué le sucede á un quebrado si á los dos términos se les añade por vía de suma una misma cantidad?

Si á los dos términos de un quebrado se les añade la misma cantidad, el quebrado, si es propio aumentará; pero si es impropio, (1) *disminuirá.*

Dem. Sea el quebrado propio $^5/_9$: digo que si á los dos términos se les añade la misma cantidad, 3 por ejemplo, el nuevo quedrado $\frac{5+3}{9+3}$ será mayor que el propuesto, esto es, $\frac{5+3}{9+3}>{}^5/_9$

En efecto, á $^5/_9$ le faltan $^4/_9$ para ser igual á 1. A $^8/_{12}$ le faltan $^4/_{12}$ para valer también 1 y como $^4/_9$ que le falta al 1.º es mayor que $^4/_{12}$ (Teor. 49.) que le falta al 2.º resulta que á $^5/_9$ le falta más que á $^8/_{12}$ para valer la unidad luego $\frac{5+3}{9+3}={}^8/_{12}>{}^5/_9$ conforme al enunciado

Sea ahora el quebrado impropio $^5/_3$ digo que si á los dos términos de este quebrado se les añade una misma cantidad, 4 por ejemplo, el nuevo quebrado $\frac{5+4}{3+4}$ será menor que $^5/_3$.

En efecto, $^5/_3=1+{}^2/_3$, es decir que vale $^2/_3$ más que la

(1) Exceptúase el caso en que el quebrado impropio sea de los que tienen iguales los dos términos, pues en este caso no varía su valor.

unidad: $\frac{5+4}{3+4}={}^{9}/_{7}=1+{}^{2}/_{7}$ esto es ${}^{2}/_{7}$ más que la unidad y como ${}^{2}/_{3}>{}^{2}/_{7}$ (Teor. 46.) se deduce que ${}^{5}/_{3}>{}^{9}/_{7}$ ó que ${}^{9}/_{7}=\frac{5+4}{3+4}<{}^{5}/_{3}$ conforme al enunciado.

TEOREMA 50.

187 Qué le sucede á un quebrado si á sus dos términos se les quita por vía de resta la misma cantidad?

Si á los dos términos de un quebrado se les resta la misma cantidad, el quebrado, si es propio, disminuirá; pero si es impropio, aumentará. (1)

Dem. Sea el quebrado propio ${}^{5}/_{8}$: digo que si á los dos términos se les quita la misma cantidad, 2 por ejemplo, el nuevo quebrado $\frac{5-2}{8-2}={}^{3}/_{6}$ será menor que ${}^{5}/_{8}$

En efecto, al quebrado ${}^{5}/_{8}$ le faltan ${}^{3}/_{8}$ para valer una unidad y al quebrado ${}^{3}/_{6}$ le faltan ${}^{3}/_{6}$ para valer también una unidad y como ${}^{3}/_{8}<{}^{3}/_{6}$ se deduce que á ${}^{3}/_{6}$ le falta más que á ${}^{5}/_{8}$ para valer 1: luego ${}^{3}/_{6}<{}^{5}/_{8}$.

Sea ahora el quebrado impropio ${}^{8}/_{5}$; digo que si á los dos términos se les quita la misma cantidad, 3 por ejemplo, el nuevo quebrado $\frac{8-3}{5-3}={}^{5}/_{2}$ será mayor que ${}^{8}/_{5}$.

En efecto, el quebrado ${}^{8}/_{5}=1+{}^{3}/_{5}$: el quebrado ${}^{5}/_{2}=1+1\,{}^{1}/_{2}$ y como $1\,{}^{1}/_{2}$ es mayor que ${}^{3}/_{5}$, se deduce que ${}^{5}/_{2}$ ó $\frac{8-3}{5-3}$ es mayor que ${}^{8}/_{5}$ conforme al enunciado.

TEOREMA 51.

188. Qué le sucede á un quebrado, ya sea propio ó impropio, si sus dos términos se multiplican ó dividen por un mismo número?

Si los dos términos de un quebrado se multiplican ó dividen por un mismo número el valor del quebrado no se altera.

(1) Véase la nota anterior.

Dem. Sea 1.° el quebrado $^3/_5$ cuyos dos términos se multiplican por 4, v. g.: digo que $^3|_5=\frac{3\times4}{5\times4}$

En efecto, al multiplicar el numerador 3 por 4 el quebrado $^3|_5$ se ha hecho 4 veces mayor, porque multiplicando el numerador de un quebrado queda éste multiplicado; pero al multiplicar el denominador 5 por 4, el quebrado $^3|_5$ se ha hecho 4 veces menor, porque multiplicando el denominador de un quebrado queda éste dividido: luego lo que ha aumentado multiplicando el numerador, ha disminuido multiplicando el denominador, y por consiguiente el valor no se ha alterado.

2.° Sea ahora el quebrado $^7|_9$ digo que si sus dos términos se dividen por un mismo número, el valor del quebrado no se altera.

En efecto, si dividimos los dos términos 7 y 9 por 3. v. g. resultará $\frac{7:3}{9:3}=^7|_9$, puesto que lo que el quebrado disminuye al dividir el numerador por 3, se aumenta al dividir su denominador por el mismo 3 y por lo tanto su valor será el mismo conforme al enunciado.

Consecuencias de estas propiedades.

189. Puede aplicarse esta teoría al cociente de toda división?

Sí, porque, como se ha demostrado que todo quebrado es el cociente de una división, en que el numerador es el dividendo y el denominador el divisor, puede decirse que todo lo dicho del numerador es aplicable al dividendo y lo que se ha dicho del denominador es aplicable al divisor. Así, pues, podremos decir:

1.° Que si el dividendo aumenta, el cociente aumenta, y si el dividendo disminuye, el cociente disminuye.

2.° Que si el dividendo se multiplica por un número entero, el cociente queda multiplicado por el mismo número.

3.° Que si el dividendo se parte por un número entero, el cociente queda dividido por el mismo número.

4.° Que si el divisor aumenta, el cociente disminuye, y si el divisor disminuye, el cociente aumenta.

5.° Que si el divisor se multiplica por un número entero, el cociente queda dividido por dicho número.

6.° Que si el divisor se parte por un número entero, el cociente queda multiplicado por el mismo número.

7.° Que si dividendo y divisor se multiplican ó parten por el mismo número, el cociente no varía.

ARTÍCULO 2.°

Reducción de quebrados á un común denominador y á decimales y vice-versa; simplificación de quebrados.

190. Qué es reducir quebrados á un común denominador?

Reducir quebrados á un común denominador es hallar otros quebrados equivalentes á los propuestos y cuyos denominadores sean iguales.

191. En qué se funda esta reducción?

En que si los dos términos de un quebrado se multiplican por un mismo número, el valor del quebrado no se altera.

192. Cómo se reducen varios quebrados á un común denominador?

De tres maneras: 1.ª Por el método ordinario. 2.ª Por medio del mínimo múltiplo común. 3.ª Por la reducción á decimales.

193. En qué consiste el método ordinario?

Para reducir quebrados á un común denominador por el método ordinario, se multiplican los dos términos de cada quebrado por el producto de los denominadores de los demás y poniendo por numeradores los productos que nos resulten de multiplicar los respectivos numeradores por los denominadores, y por denominadores los productos de éstos, habremos conseguido el objeto.

Sean los quebrados $^2/_5$ $^3/_7$ $^4/_8$ y $^1/_6$ los que queremos reducir á un común denominador.

Multiplicarémos 1.° los dos términos del $^2/_5$ por el producto 7. 8. 6 de los denominadores de los otros y tendrémos el quebrado $\frac{2\times7\times8\times6}{5\times7\times8\times6}=\frac{672}{1680}$ que es equivalente al $^2/_5$ porque proviene de multiplicar sus dos términos por el mismo número.

Siguiendo el mismo procedimiento encontrarémos el quebrado $\frac{3\times5\times8\times6}{7\times5\times8\times6}=\frac{720}{1680}$ equivalente al $^3|_7$ por la misma razón anterior.

En la misma forma obtendrémos los quebrados $\frac{4\times7\times5\times6}{8\times7\times5\times6}$ y $\frac{1\times8\times7\times5}{6\times8\times7\times5}$ iguales respectivamente á $\frac{840}{1680}$ y $\frac{280}{1680}$ y equivalentes á $^4|_8$ y $^1|_6$ en que todos tienen el mismo denominador: resultando que

$$^2|_5,\ ^3|_7,\ ^4|_8\ ^1|_6=\frac{672}{1680},\ \frac{720}{1680},\ \frac{840}{1680}\text{ y }\frac{280}{1680}\ (1).$$

194. Cómo se reducen los quebrados á un común denominador por medio del mínimo múltiplo común.

Se halla el mínimo múltiplo común de los denominadores de todos los quebrados, y éste será el denominador común. Para hallar los numeradores de los nuevos quebrados se multiplica cada numerador por el factor que falta á su denominador para componer dicho mínimo múltiplo y poniendo á estos productos por denominador el citado mínimo múltiplo común, tendrémos los nuevos quebrados equivalentes á los propuestos y con el mismo denominador.

Ejemplo. Sean los quebrados $^1|_2$, $^2|_3$, $^4|_5$, $^7|_9$, $^3|_4$.

Hallando el mínimo múltiplo común de los denominadores resulta ser el número 180. Este es, pues, el denominador común.

Para hallar los numeradores digo: al denominador 2 del 1.er quebrado le falta el factor 90 para componer 180, puesto que 180: 2=90: multiplico pues, el numerador 1 por 90 y tendré $\frac{90}{180}=^1|_2$ pues equivale á multiplicar los dos términos por 90 lo cual no altera, como sabemos, el valor del quebrado.

Haciendo la misma operación con el segundo diré: al denominador 3 le falta el factor 60 para componer 180, puesto

(1) En la práctica se acostumbra á buscar sólamente los numeradores de los nuevos quebrados, hallado que sea el denominador del 1.º puesto que ha de servir para todos.

que 180: 3=60: multiplico el numerador 2 por 60 y tendré $\frac{120}{180}={}^2/_3$.

De la misma manera procedo con los demás, resultando:

Quebrados propuestos.—	$^1/_2$, $^2/_3$, $^4/_5$, $^7/_9$, $^3/_4$.
Reducidos á común denominador.	$\frac{90}{180}, \frac{120}{180}, \frac{144}{180}, \frac{140}{180}, \frac{135}{180}$.

195. Cómo se reducen los quebrados á un común denominador por medio de los decimales?

Reduciendo primeramente los quebrados á sus equivalentes decimales y haciendo que todos tengan el mismo número de cifras de esta clase, añadiendo á la derecha los ceros que sean necesarios hasta que todos estén iguales.

196. Y cómo se reducen los quebrados á decimales equivalentes?

Se divide el numerador por el denominador, y se tendrá la parte entera.

Si el quebrado es propio, carecerá de ésta, en cuyo caso se pone cero en el cociente y en seguida la vírgula. Para hallar la parte decimal, se continuará la división añadiendo un cero á cada resíduo, hasta obtener cociente exacto ó el número de cifras decimales que se deseen.

Dem. Sea el quebrado $^5/_8$. Efectuando la división nos resulta que $^5/_8$ no contiene ningún entero por lo que se pone cero y vírgula en el cociente. Para hallar la parte decimal añado un cero á la derecha del 5 y me resulta $^{50}/_8$ de décima, y efectuando la división me dá 6 décimas y $^2/_8$ de décima: pero como una décima equivale á 10 centésimas los $^2/_8$ de décima serán $^2/_8\times10={}^{20}/_8$ de centésima y dividiendo otra vez, resultan 2 centésimas y $^4/_8$ de centésima, que convertido en milésimas serán $^{40}/_8$ de milésima ó 5 milésimas resultando finalmente que los $^5/_8$ equivalen á 0'625 milésimas.

Disposición.

$$\begin{array}{r|l} 50 & 8 \\ \cline{2-2} 20 & 0'625 \\ 40 & \\ 0 & \end{array}$$

197. Reduzca V. por este método á un común denominador los quebrados $^3/_5$ $^3/_4$ $^5/_7$.

Reducidos estos quebrados á decimales me dán:

$^3/_5$ = 0'6
$^3/_4$ = 0'75
$^5/_7$ = 0'7142 ....

Pues bien, como el último tiene cuatro cifras decimales y por tanto su denominación es diezmilésimas, haré que los otros tengan esta misma denominación, añadiéndoles á su derecha los ceros necesarios, lo cual, como ya se sabe, no altera el valor decimal, resultando que los quebrados propuestos se convierten en 0'6000, 0'7500 y 0'7142.

198. Pero al hacer esta reducción obtendrémos siempre cociente exacto?

No, como se ha visto en el último de los quebrados propuestos en el ejemplo anterior, en cuyo caso se puede continuar la división hasta donde se quiera, de tal modo que el decimal se diferencie del quebrado en menos de cualquier cantidad por pequeña que sea.

199. Cuántas cosas podrán ocurrirnos al hacer estas reducciones?

Tres: 1.ª Que resulte decimal exacto. 2.ª Que se repitan las cifras sucesivamente desde las décimas, en cuyo caso la cantidad decimal se llama *periódica pura*, denominándose *período* al conjunto de cifras repetidas y 3.ª Que la repetición de las cifras no principie desde las décimas, sino desde otro orden cualquiera, y en este caso la cantidad decimal se llama *periódica mixta*.

200. Hay alguna regla para conocer cuándo la fracción decimal que resulte del quebrado será exacta, cuándo periódica pura y cuándo mixta?

Sí; cuando el denominador del quebrado (reducido este á su más simple expresión) no tenga más factores primos que el 2 ó el 5 ó ambos, podrá convertirse exactamente en decimal. Cuando no contenga á ninguno de los factores 2 ó 5, resultará cantidad decimal periódica pura: y cuando además del factor 2 ó 5 contenga algún otro diferente, será periódica mixta.

Ejemplos.

1.°

$$\begin{array}{r|l} \frac{3}{8}=30 & 8 \\ \cline{2-2} 60 & 0'375 \text{ exacta.} \\ 40 & \\ 0 & \end{array}$$

2.°

$$\begin{array}{r|l} \frac{5}{11}=50 & 11 \\ \cline{2-2} 60 & 0'45454 \text{ periódica pura.} \\ 50 & \\ 60 & \\ 50 & \\ 6 & \end{array}$$

3.°

$$\begin{array}{r|l} \frac{7}{15}=70 & 15 \\ \cline{2-2} 100 & 0'4666 \text{ periódica mixta.} \\ 100 & \\ 100 & \end{array}$$

201. Las cantidades decimales pueden convertirse en quebrados?

Sí; y para ello distinguirémos tres casos: 1.° Que la cantidad decimal tenga un número limitado de cifras. 2.° Que sea periódica pura. 3.° Que sea periódica mixta.

1.° *Si la cantidad decimal tiene un número limitado de cifras, se convierte en quebrado poniéndole por denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales haya. Así la cantidad* $0'625=\frac{625}{1000}$: *luego se simplifica, como verémos, resultando ser igual á* $\frac{5}{8}$

2.° *Si la cantidad es* PERIÓDICA PURA *se pone por numerador el período y por denominador tantos nueves como cifras tiene el período.* Así la cantidad $0'454545.....=\frac{45}{99}$

Dem. Llamando q al quebrado de donde procede esta cantidad será $q=0'454545$ .... Si los dos miembros de esta igualdad se multiplican por 100 la igualdad subsistirá en esta forma:

$$100\, q=45'454545.......$$

pero la parte decimal del segundo miembro es igual á q: luego si restamos de ambos miembros q ó su igual, siempre resultará igualdad y tendrémos:

$$99.q=45$$

y dividiendo ambos miembros por 99 nos dará

$$q=\frac{45}{99}$$ conforme á lo enunciado.

3.° *Si la cantidad decimal es periódica mixta, se corre la vírgula á la parte no periódica, se multiplica ésta por tantos nueves como cifras tiene el período, con este producto se suma el período y la suma se divide por tantos nueves como cifras tiene el período acompañados de tantos ceros como cifras tiene la parte no periódica.*

Dem. Sea la cantidad decimal *periódica mixta* 0'45666.....

Tendrémos que $0'45666.... = \frac{45'666}{100}$

$$\frac{45'666....}{100}=\frac{45^{6}|_{9}}{100}=\frac{\frac{45\times9+6}{9}}{100}=\frac{45\times9+6}{900}=\frac{411}{900}$$

conforme á la regla.

202. Qué es simplificar quebrados?

Simplificar quebrados es hallar otros de igual valor y cuyos términos sean más pequeños.

203. En qué se funda la simplificación de quebrados?

En que si los dos términos de un quebrado se dividen por un mismo número el quebrado no se altera.

204. Cómo se simplifican los quebrados?

Dividiendo sus dos términos por un mismo número todas las veces que se pueda, hasta que numerador y denominador sean primos entre sí, en cuyo caso se dice que el quebrado es *irreducible* ó está reducido á su más simple expresión.

Ejemplos.

1.° Simplificar el quebrado $\frac{625}{1000}$

$$\frac{625}{1000}=\frac{125}{200}=\frac{25}{40}=\frac{5}{8}$$

2.° Simplificar el quebrado $\frac{45}{99}$

$$\frac{45}{99}=\frac{15}{33}=\frac{5}{11}$$

3.° Simplificar el quebrado $\frac{411}{900}$

$$\frac{411}{900}=\frac{137}{300}$$

205. Cuando al hacer alguna simplificación resulta que á primera vista no sepamos si sus términos tienen algún factor común ¿qué deberémos hacer?

Hallar el máximo común divisor de sus términos y dividir ambos por dicho máximo común divisor.

TEOREMA 52.

206. Un quebrado irreducible podrá ser igual á un número entero?

Un quebrado irreducible no puede ser igual á un número entero.

En efecto, si el quebrado irreducible $^9/_5$ fuese igual á un número entero, 5 sería divisor de 9, y por lo tanto los dos términos podrían dividirse por 5, y el quebrado no sería irreducible contra lo supuesto.

ARTÍCULO 3.°

Operaciones con los quebrados.

ADICIÓN Ó SUMA.

207. Cuántos casos pueden ocurrir en la suma de quebrados?

Tres: 1.° Sumar quebrados que tienen un mismo denominador.

2.° Sumar quebrados que tienen distinto denominador.

3.° Sumar números mixtos.

208. Cómo se suman los quebrados que tienen el mismo denominador?

Para sumar quebrados que tienen el mismo denomina-

dor, se suman los numeradores y á la suma se pone por denominador el denominador común.

Sean los quebrados $^{3}[_{5}+{}^{4}[_{5}+{}^{2}[_{5}+{}^{1}[_{5}$.

Teniendo estos quebrados la misma denominación, es evidente que la suma de todos ellos debe denominarse de la misma manera y por lo tanto será igual á $3+4+2+1$ quintos ó sea $\frac{3+4+2+1}{5}$ conforme á la regla.

209 Cómo se suman los quebrados que tienen distinto denominador?

Para sumar quebrados que tienen distinto denominador, se reducen primero á un común denominador y luego se suman como en el caso anterior, esto es, se suman los numeradores y á la suma se pone por denominador el denominador común.

Sean los quebrados $^{2}[_{3}+{}^{3}[_{4}+{}^{2}[_{5}+{}^{1}[_{6}$.

Reducidos á un común denominador nos dan $^{40}[_{60}+{}^{45}[_{60}+{}^{24}[_{60}+{}^{10}[_{60}$; la suma de éstos quebrados según el caso anterior, es $\frac{40+45+24+10}{60}={}^{119}[_{60}=1\ {}^{14}[_{15}$, y como los quebrados sumados son iguales á los propuestos, la suma obtenida será la misma que la de éstos.

210. Cómo se suman los números mixtos?

Para sumar números mixtos, se suman primero los quebrados por las reglas dadas en los casos anteriores, se sacan los enteros que la suma de éstos contenga, y luego se suman los enteros agregando á esta suma los que hemos obtenido de la anterior.

Pueden también reducirse primero los quebrados á decimales y luego sumarlos como tales.

Ejemplos.

1.° Sean los sumandos $325^{3}[_{5}+72^{4}[_{9}+26^{2}[_{3}+250^{1}[_{2}$.

Como cada sumando puede descomponerse en dos partes (entero y quebrado) será

$$325^{3}[_{5}=325+{}^{3}[_{5}$$
$$72^{4}[_{9}=72+{}^{4}[_{9}$$
$$26^{2}[_{3}=26+{}^{2}[_{3}$$
$$250^{1}[_{2}=250+{}^{1}[_{2}$$

Sumando ahora ordenadamente estas igualdades nos dará esta otra $325^{3}|_{5}+72^{4}|_{9}+26^{2}|_{3}+250^{1}|_{2}=325+72+26+250+{}^{3}|_{5}+{}^{4}|_{9}+{}^{2}|_{3}+{}^{1}|_{2}$ lo cual nos dice que se sumen los quebrados con los quebrados y los enteros con los enteros, conforme á la regla.

Práctica. En la práctica se escriben los sumandos unos debajo de otros como los enteros, y se dispone y ejecuta la operación en la siguiente forma:

Método ordinario			*Por decimales.*
$325^{3}|_{5}$—162		270	325'600
$72^{4}|_{9}$—120			72'444
$26^{2}|_{3}$—180			26'666
$250^{1}|_{2}$—135			250'500
Suma $675^{19}|_{90}$	597 / 057	270 / $2^{57}|_{270}={}^{19}|_{90}$	Suma 675'210

ARTÍCULO 4.°

Sustracción ó resta.

211. Cuántos casos pueden ocurrir en la resta de quebrados?

Tres: 1.° Restar quebrados que tienen el mismo denominador. 2.° Restar quebrados que tienen distinto denominador. 3.° Restar números mixtos.

212. Cómo se restan quebrados que tienen el mismo denominador?

Para restar quebrados que tienen el mismo denominador, se restan los numeradores y á la resta se le pone el mismo denominador. Así $\frac{5}{9}-\frac{3}{9}=\frac{5-3}{9}=\frac{2}{9}$.

213. Cómo se restan los quebrados cuando tienen distinto denominador?

Para restar quebrados que tienen distinto denominador, se reducen primero á un común denominador, y luego se restan como en el caso anterior. Así ${}^{7}|_{8}-{}^{2}|_{5}={}^{35}|_{40}-{}^{16}|_{40}=\frac{35-16}{40}={}^{19}|_{40}$.

214. Cómo se restan los números mixtos?

Para restar números mixtos, se restan primero los quebra-

dos y luego los enteros. Así $12\,^{5}[_{9}-8^{2}[_{9}=(^{5}[_{9}-{}^{2}[_{9})+(12-8)$ $=^{3}[_{9}+4=4^{4}[_{9}$.

215. Qué dificultades pueden presentarse en este caso?

Cuatro: 1.ª Que el quebrado del sustraendo sea mayor que el quebrado del minuendo.

2.ª Que el minuendo sea número mixto y el sustraendo entero.

3.ª Que el minuendo sea entero y el sustraendo mixto.

4.ª Que el minuendo sea entero y el sustraendo quebrado.

216. Cómo se resuelven estas dificultades?

1.ª Si el quebrado del sustraendo es mayor que el del minuendo, se toma una unidad del entero del minuendo, la que se descompone en tantas partes como expresa el denominador común; á éstas se agregan las del quebrado del minuendo, y de la suma se restan las del sustraendo, contando al pasar á los enteros una unidad ménos en el guarismo de donde se tomó.

Ejemplo.

Sea el minuendo $46^{2}[_{5}$ y el sustraendo $34^{7}[_{8}$. Reducidos los quebrados á un común denominador resultará $46^{16}[_{40}-34^{35}[_{40}$.

Práctica. Diré de $^{16}[_{40}$ resto $^{35}[_{40}$ no puede ser, tomo una unidad del 6 del minuendo, que tiene 40 partes que expresa el denominador; 40 y 16 que tiene el quebrado del minuendo son 56: de 56 resto 35 quedan $^{21}[_{40}$, que escribo en la resta: paso á los enteros, y digo: de 5, porque tomé una unidad, rebajo 4 queda 1, y de 4 quito 3 queda 1, y por lo tanto la resta será $11^{21}[_{40}$.

Operación.

$$\begin{array}{r} 46^{16}[_{40} \\ -34^{35}[_{40} \\ \hline =11^{21}[_{40} \\ \hline \end{array}$$

2.ª Si el minuendo es número mixto y el sustraendo entero, se restan los enteros poniendo en la resta el quebrado del minuendo. Así $58^{3}[_{8}-16=(58-16)+{}^{3}[_{8}=42^{3}[_{8}$.

Operación.

$$\begin{array}{r} 58^{3}[_{8} \\ -16 \\ \hline =42^{3}[_{8} \\ \hline \end{array}$$

3.ª Si el minuendo es entero y el sustraendo mixto, se considera como *cero* el quebrado del minuendo, se toma una unidad del entero, se considera dividida en tantas partes como expresa el quebrado del sustraendo, y se resta éste contando en el minuendo una unidad ménos. Así $246-158^3|_4=245^4|_4-158^3|_4=84^1|_4$.

Operación.

$$\begin{array}{r} 245^4|_4 \\ -158^3|_4 \\ \hline 087^1|_4 \\ \hline \end{array}$$

4.ª Si el minuendo es entero y el sustraendo quebrado la resta será igual al minuendo disminuido en una unidad, mas un quebrado, cuyo numerador sea la diferencia entre su denominador y numerador teniendo por denominador el mismo del quebrado sustraendo. Así $46-{}^3|_5=45^2|_5$.

En efecto, $46=45^5|_5$: luego $46-{}^3|_5=45^5|_5-{}^3|_5$; haciendo la resta será: ${}^5|_5-{}^3|_5={}^2|_5$ y por consiguiente $45^2|_5$.

Nota. También puede aplicarse á la resta el método de la reducción de los quebrados á decimales haciendo después la resta como se explicó en su lugar correspondiente.

Sírvanos de ejemplo el siguiente: $354^3|_8-218^4|_5$

Reducidos los quebrados à decimales resulta 354‘375—218‘8=135‘575.

Operación.

$$\begin{array}{r} 354‘375 \\ -218‘800 \\ \hline =135‘575 \\ \hline \end{array}$$

ARTÍCULO 5.°

Multiplicación

217. Cuántos casos pueden ocurrir al multiplicar quebrados?

Además del ya explicado de multiplicar un quebrado por un entero pueden ocurrir cuatro casos: 1.ª Multiplicar un quebrado por otro. 2.° Multiplicar un entero por un quebrado 3.° Multiplicar números mixtos. 4.° Multiplicar un número mixto por un entero ó al contrario.

218. Cómo se multiplica un quebrado por otro quebrado?

Para multiplicar un quebrado por otro, se multiplican los numeradores y su producto se divide por el producto de los denominadores.

Dem. Sean los quebrados $\frac{5}{8}$ y $\frac{3}{7}$ digo que $\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}=\frac{5.3}{8.7}$

En efecto, multiplicar $^5/_8$ por $^3/_7$, según la definición de multiplicar, es hallar tres séptimas partes de $^5/_8$; hallarémos una séptima parte dividiendo $^5/_8$ por 7; pero $^5/_8$: 7 es dividir un quebrado por un entero, que sabemos puede hacerse de dos maneras, á saber: dividiendo su numerador ó multiplicando su denominador por 7: y conviniéndonos multiplicar el denominador tendrémos que $^5/_8$: $7=\frac{5}{8.7}$ que representa la séptima parte de $^5/_8$; pero como se nos piden 3 séptimas partes, habrémos de multiplicar $\frac{5}{8.7}$ por 3, lo cual es multiplicar un quebrado por un entero, que puede hacerse multiplicando el numerador ó dividiendo su denominador por el entero, y conviniéndonos multiplicar el numerador tendrémos $\frac{5}{8.7}\times 3=\frac{5.3}{8.7}=\frac{15}{56}$ conforme al enunciado.

218.* Cómo se multiplica un entero por un quebrado?

Para multiplicar un entero por un quebrado, se le pone al entero la unidad por denominador y la cuestión queda reducida al caso anterior; v. g. $6\times\frac{3}{5}=\frac{6}{1}\times\frac{3}{5}=\frac{6.3}{5}=\frac{18}{5}$

Lo cual quiere decir que se multiplique el entero por el numerador y el producto se parta por el denominador del quebrado.

219. Cómo se multiplican los números mixtos?

De dos maneras: 1.ª *Reduciendo los mixtos á quebrados y multiplicándolos como tales.* 2.ª *Reduciendo á decimales los quebrados que acompañan á los enteros de los mixtos y multiplicándolos como las cantidades decimales.*

En efecto, sea por ejemplo $35^3/_4 \times 8^2/_5$.

Reducidos estos mixtos á quebrados nos dán $\frac{143}{4} \times \frac{42}{5}$

Siendo estos dos quebrados equivalentes respectivamente á los dos mixtos propuestos, el producto de estos será también equivalente al de aquellos; haciendo, pues, la multiplicación de estos dos quebrados en la forma para ellos establecida, tendrémos el producto deseado.

Así $35^3/_4 \times 8^2/_5 = \frac{143}{4} \times \frac{42}{5} = \frac{143 \times 42}{4 \times 5} = \frac{6006}{20} = 300\frac{6}{20}$

Por decimales. $35^3/_4 \times 8^2/_5 = 35'75 \times 8'4$. Multiplicando ahora estos decimales por la regla de éstos, obtendrémos el producto pedido en esta forma:

$$\begin{array}{r} 35'75 \\ \times\ \ 8'4 \\ \hline 14300 \\ 28600 \\ \hline 300'300 \end{array}$$ Producto igual al anterior.

Nota. También puede efectuarse esta multiplicación de números mixtos, en la forma de tales que, aunque poco usada, ponemos á continuación, sirviéndonos al efecto del mismo ejemplo anterior.

Al efecto se multiplican primero los enteros, después los enteros por los quebrados, luego los quebrados entre sí, y se suman todos los productos.

Operación.

$$\begin{array}{l} 35^3/_4 \\ \times 8^2/_5 \\ \hline \end{array}$$

280 producto de 35 por 8.
14 id. de 35 por $^2/_5$
6 id. de $^3/_4$ por 8
» $^6/_{20}$ id. de $^3/_4$ por $^2/_5$.
300 $^6/_{20}$ producto total.

220. Cómo se multiplica un número mixto por un entero ó al contrario?

Se multiplican las dos partes del mixto por el entero y se suman los productos parciales.

También pueden seguirse en estos casos las reglas de los casos anteriores.

Ejemplos.

1.° Hallar el producto de $352\ ^4/_5$ por 12.

Operación.

$352\ ^4/_5$	
$\times 12$	
704	productos de 352 por 12.
352	
$9\ ^3/_5$	producto de $^4/_5$ por 12.
$4233\ ^3/_5$	producto total.

2.° Hallar el producto de 456 por $24\ ^2/_3$.

Operación.

456	
$\times 24\ ^2/_3$	
1824	producto de 456 por 24.
912	
304	producto de 456 por $^2/_3$.
11248	producto total.

La verdad de esta regla es evidente; puesto que si las partes de un todo se hacen cierto número de veces mayores, el todo quedará hecho mayor el mismo número de veces.

221. Cómo se multiplican varios quebrados entre sí?

Multiplicando los numeradores de todos los quebrados y partiendo su producto por el de todos los denominadores de los mismos.

Ejemplo.

Sean los quebrados $^2/_5 \times {}^3/_4 \times {}^1/_8 \times {}^6/_7$: digo que su producto es igual á

$$\frac{2.3.1.6}{5.4.8.7}=\frac{36}{1120}=\frac{18}{560}=\frac{9}{280}$$

222. Qué es quebrado de quebrado?

El número que expresa parte ó partes de un quebrado. Así $^2/_3$ de $^4/_5$ es un quebrado de quebrado: $^1/_5$ de $^3/_4$ de $^7/_9$ es otro quebrado de quebrado.

223. Cómo se averigua el valor de un quebrado de quebrado?

Multiplicando entre sí los quebrados que le forman. Así el valor de $^2/_3$ de $^4/_5$ es $^8/_{15}$; el de $^1/_5$ de $^3/_4$ de $^7/_9$ es $\frac{21}{180}=\frac{7}{60}$

En efecto tomar $^2/_3$ de $^4/_5$ es multiplicar $^4/_5$ por $^2/_3$ que sabemos es igual á $\frac{4.2}{3.5}=\frac{8}{15}$

ARTÍCULO 6.°

División.

224. Cuántos casos pueden ocurrir en la división de quebrados?

Además del caso ya explicado de dividir un quebrado por un entero, pueden ocurrir otros tres casos: 1.° Dividir un quebrado por otro. 2.° Dividir un entero por un quebrado. Y 3.° Dividir números mixtos.

225. Cómo se divide un quebrado por otro?

Para dividir un quebrado por otro, se multiplica el numerador del dividendo por el denominador del divisor y el producto será el numerador del cociente y después se multiplica el denominador del dividendo por el numerador del divisor y el producto será el denominador del cociente.

Dem. Sea el dividendo $^3/_8$ y el divisor $^4/_5$: digo que $^3/_8 : {}^4/_5 = \frac{3\times5}{8\times4} = {}^{15}/_{32}$.

En efecto, al dividir $^3/_8$ por $^4/_5$ me dará un cociente que llamo n; luego $^3/_8 = n\times{}^4/_5$, porque en toda división el dividendo es igual al cociente multiplicado por el divisor: y como multiplicar n por $^4/_5$ es tomar cuatro quintas partes de $n =$ $^3/_8$ tendrémos que $^3/_8$ valen cuatro quintos de n y por lo tanto, para averiguar el valor de uno de estos *cuatro* quintos, dividirémos el $^{3}[_{8}$ por 4, lo cual es dividir un quebrado por un entero, operación que puede efectuarse de dos maneras, dividiendo el numerador ó multiplicando el denominador por el entero, y conviniéndonos para la demostración multiplicar el denominador, tendrémos que $^{3}[_{8}:4=\frac{3}{8.4}$.

$\frac{3}{8.4}$ representa, pues, una quinta parte de n y como n tiene cinco de estas partes, hallarémos el valor de n multiplicando el quebrado $\frac{3}{8.4}$ por 5, lo cual puede hacerse multiplicando su numerador por 5 y tendrémos que $n=\frac{3}{8.4}\times 5$ $=\frac{3.5}{8.4}=\frac{15}{32}$ que es lo que se quería demostrar.

Otra demostración. Sea el dividendo $^{2}[_{3}$ y el divisor $^{4}[_{7}$: digo que $^{2}[_{3}:^{4}[_{7}=^{2.7}[_{3.4}=^{14}[_{12}$.

En efecto, como en toda división, el cociente multiplicado por el divisor es igual al dividendo, tendrémos que si el cociente de $^{2}[_{3}:^{4}[_{7}$ es $^{2.7}[_{3.4}$ multiplicando éste por $^{4}[_{7}$ nos dará el dividendo $^{2}[_{3}$, es decir, que $^{2.7}[_{3.4}\times^{4}[_{7}=^{2}[_{3}$:

Efectuando la multiplicación de los quebrados del primer miembro tendrémos $\frac{2.7.4}{3.4.7}=^{2}[_{3}$ y simplificando el quebrado del primer miembro, para lo cual basta suprimir los factores comunes de su numerador y denominador, nos queda $^{2}[_{3}=$ $^{2}[_{3}$: luego $\frac{2.7}{3.4}=\frac{14}{12}$ es el cociente de $^{2}[_{3}:^{4}[_{7}$ que es lo que queríamos demostrar.

226 Cómo se divide un entero por un quebrado?

Para dividir un entero por un quebrado se pone al entero la unidad por denominador y el caso queda reducido á dividir un quebrado por otro: Así 7: $^{2}[_{5}=^{7}[_{1}$: $^{2}[_{5}=\frac{7.5}{1.2}=\frac{7.5}{2}=\frac{35}{2}$ lo cual quiere decir que se multiplique el entero por el denominador del quebrado y al producto se le ponga por denominador el numerador del mismo quebrado.

Esta regla puede demostrarse del mismo modo que la anterior.

227. Cómo se dividen los números mixtos?

Para dividir los números mixtos, se reducen los mixtos á quebrados y queda reducida la cuestión á dividir un quebrado por otro. Así $46^{3}\lfloor_{5} : 6^{2}\lfloor_{7} = \frac{46\times5+3}{5} : \frac{6\times7+2}{7} = \frac{233}{5} : \frac{44}{7} = \frac{233.7}{5.44} = \frac{1631}{220} = 7\frac{91}{220}$.

También puede resolverse esta operación convirtiendo los quebrados en decimales y efectuando la operación como se dijo en su lugar.

Así $58^{3}\lfloor_{8} : 5^{3}\lfloor_{4}$ puede dividirse en la forma siguiente:

$$58^{3}\lfloor_{8} = 58'375$$
$$5^{3}\lfloor_{4} = 5'75 :$$

Luego $58^{3}\lfloor_{8} : 5^{3}\lfloor_{4} = 58'375 : 5'75$.

Operación.

```
 58375  |5750
008750  |------
 30000  10'152
012500
 01000
```

228. Y si el dividendo fuese mixto y el divisor entero ó quebrado y vice-versa ¿cómo se ejecuta la operación?

Aunque hay diversos procedimientos debe seguirse la regla general que acabamos de exponer v. gr. $23^{4}\lfloor_{5} : 6 = \frac{23\times5+4}{5} : 6 = \frac{119}{5} : 6 = \frac{119}{5.6} = \frac{119}{30} = 3\frac{29}{30}$

2.° $65 : 4^{3}\lfloor_{8} = 65 : \frac{4\times8+3}{8} = 65 : \frac{35}{8} = \frac{65.8}{35} = \frac{520}{35} = 14\frac{30}{35}$

229. Hay que examinar algún caso particular en la división de quebrados?

Dos. 1.° *Cuando tengamos que dividir quebrados que tienen el mismo denominador, puede efectuarse la división suprimiendo los denominadores, y dividiendo, como si fuesen enteros el numerador del dividendo por el numerador del divisor.*

Así $^{7}\lfloor_{8} : ^{3}\lfloor_{8} = ^{7}\lfloor_{3}$.

En efecto, suprimir los denominadores de $^7|_8$ y $^3|_8$ equivale á multiplicar dividendo y divisor por el mismo número 8, lo que ya sabemos no altera el cociente, con cuya operación queda reducida la cuestión á dividir 7 por 3 ó 7:3 que sabemos es igual á $^7|_3$, conforme á la regla.

2.° *Cuando los quebrados que tengamos que dividir tengan iguales numeradores, basta dividir el denominador del divisor por el denominador del dividendo.*

Así $^5|_9 : {}^5|_8 = {}^8|_9$.

En efecto, practicando la operación por la regla general tendrémos que $^5|_9 : {}^5|_8 = \frac{5\times8}{9\times5}$, y suprimiendo en este cociente el factor 5, común á numerador y denominador, será $\frac{5\times8}{9\times5} = {}^8|_9$ conforme á la regla.

Nota. Los teoremas que hemos expuesto en nuestra segunda parte, relativos á la multiplicación y división de sumas y restas indicadas por otro número y por otras sumas y restas también indicadas tienen asímismo aplicación y son verdaderas, si los números son fraccionarios, de la misma manera que cuando son enteros, y las demostraciones de aquellos pueden hacerse extensivas á estos, con pequeña variación.

ARTÍCULO 7.°

Potencias de los números fraccionarios.

TEOREMA 53.

230. Cómo se eleva un quebrado á una potencia cualquiera?

Para elevar un quebrado á una potencia se elevan numerador y denominador á dicha potencia. Así $(^4|_5)^3 = \frac{4^3}{5^3}$

Dem. En efecto, $(^4|_5)^3 = {}^4|_5 \times {}^4|_5 \times {}^4|_5 = \frac{4\times4\times4}{5\times5\times5} = \frac{4^3}{5^3}$ conforme al enunciado.

COROLARIO.

231. Cómo se eleva un número mixto á una potencia cualquiera?

Para elevar un número mixto á una potencia cualquiera, se reduce el mixto á quebrado y la cuestión queda reducida al caso anterior. Así $(4^5|_6)^2=\left(\frac{4.6+5}{6}\right)^2=\frac{29^2}{6^2}$

TEOREMA 54.

232. Qué alteraciones experimentan las potencias de los números según que éstos sean menores ó mayores que la unidad?

Las potencias de los números menores que la unidad disminuyen á medida que crece su grado: y 2.° las potencias de los números mayores que la unidad aumentan á medida que crece su grado.

Dem. 1.° Sea el número ${}^4|_5<1$: digo que $({}^4|_5)^2<{}^4|_5$ y $({}^4|_5)^3<({}^4|_5)^2$ etc.

En efecto, $\frac{4^2}{5^2}={}^4|_5\times{}^4|_5$ y como multiplicar ${}^4|_5$ por ${}^4|_5$ es tomar los ${}^4|_5$ de ${}^4|_5$ resulta que este producto será menor que ${}^4|_5$ ó $({}^4|_5)^2<{}^4|_5$.

Por la misma razón $({}^4|_5)^3<({}^4|_5)^2$, puesto que $({}^4|_5)^3=({}^4|_5)^2\times{}^4|_5$, lo cual es tomar los ${}^4|_5$ de $({}^4|_5)^2$, producto menor que $({}^4|_5)^3$, conforme al enunciado.

2.° Sea ahora el número ${}^7|_3>1$: digo que $({}^7|_3)^2>{}^7|_3$ y $({}^7|_3)^3>({}^7|_3)^2$ etc.

En efecto, $({}^7|_3)^2={}^7|_3\times{}^7|_3=\frac{7\times7}{3\times3}={}^{49}|_9$ número evidentemente mayor que ${}^7|_3$.

Por la misma razón $({}^7|_3)^3>({}^7|_3)^2$, puesto que $({}^7|_3)^3=\frac{7^3}{3^3}>\frac{7^2}{3^2}$ ó sea $\frac{343}{27}>\frac{49}{9}$, conforme al enunciado.

TEOREMA 55.

233. Si un quebrado irreducible se eleva á una potencia, el quebrado que resulte será también irreducible?

Si un quebrado irreducible se eleva á una potencia, el nuevo quebrado será también irreducible.

Dem. Sea el quebrado irreducible ${}^5/_7$ digo que $({}^5/_7)^3$ será también irreducible.

En efecto, $({}^5/_7)^3 = \frac{5^3}{7^3}$: luego si ${}^5/_7$ es irreducible el 5 y el 7 son primos entre sí, y por lo tanto sus potencias 5^3 y 7^3 también serán primos entre sí y por consiguiente el quebrado $\frac{5^3}{7^3}$ es irreducible.

CAPÍTULO II.

ARTÍCULO 1.°

Sistema métrico antiguo y moderno. (1)

234. A qué se llama sistema métrico?

A la colección de pesas y medidas adoptadas en un país para facilitar los diferentes cambios que de sus diversas producciones se verifican en los usos de la vida.

235. A cuántos podemos reducir estos sistemas en España?

A dos: el llamado antiguo á pesar de estar todavía en uso, y el moderno, conocido con el nombre de sistema métrico decimal.

236. Cuál ofrece mayores ventajas?

El moderno, ya por la uniformidad que se observa en todas sus unidades, en todos sus múltiplos y en todos sus divisores, y ya también porque en el mismo nombre de la medida, lleva la significación de su valor, cosas de que carece el anómalo sistema antiguo.

Tiene además el sistema moderno la ventaja de que todas las operaciones se hacen con suma facilidad, por estar basado en el sistema ordinario de numeración siendo sumamente complicadas en el antiguo, que no está basado en ningún sistema.

237. Se servirá V. decirme cuáles son las pesas y medidas en ambos sistemas?

Sí: Véase el siguiente cuadro de comparación.

---

(1) A pesar de estar mandado que se haga uso exclusivamente de las pesas y medidas del sistema métrico decimal, no creemos aún llegado el caso de omitir la explicación de las concernientes al antiguo, ni de las operaciones con los números complejos á ellas referentes, por no haber desaparecido todavía en las transaciones particulares.

CUADRO COMPARATIVO

de las pesas y medidas antiguas y las del sistema métrico decimal.

MEDIDAS DE LONGITUD.

SISTEMA ANTIGUO.

Múltiplos..	Legua que tiene (1). . .	$6666^2/_3$	varas.
	Estadal.	4	varas.
Unidad.....	Vara.	3	piés.
Divisores..	Pié..	12	pulgadas.
	Pulgada.	12	líneas.
	Línea.	12	puntos.

SISTEMA MODERNO.

Múltiplos..	Miriámetro.	10000	metros.
	Kilómetro.	1000	id.
	Hectómetro.	100	id.
	Decámetro.	10	id.
Unidad.....	Metro..	10	decímetros.
Divisores..	Decímetro.	10	centímetros.
	Centímetro.	10	milímetros.
	Milímetro.	0'001	de metro.

MEDIDAS DE CAPACIDAD.

SISTEMA ANTIGUO.

PARA ÁRIDOS.

Múltiplo...	Cahiz que tiene.. . . .	12	fanegas.
Unidad....	Fanega.	12	celemines.
Divisores..	Celemín.	4	cuartillos.
	Cuartillo.	1	cuartillo.

(1) En la marina se usan las siguientes:

La legua marina que tiene.	3 millas ó 19980 piés.
La milla.	10 cables ó 6660 piés.
El cable.	111 brazas ó 666 piés.
La braza.	6 piés.

PARA LÍQUIDOS MENOS EL ACEITE.

Múltiplo...	Moyo que tiene.	16 cántaras
Unidad.....	Cántara.	8 azumbres.
Divisores..	Azumbre.	4 cuartillos.
	Cuartillo.	4 copas.
	Copa.	1 copa.

PARA EL ACEITE.

La @ que tiene 25 libras y la libra 4 panillas ó cuarterones.

SISTEMA MODERNO.

PARA ÁRIDOS Y LÍQUIDOS.

Múltiplos..	Miriálitro *(no se usa)*. . .	10000 litros.
	Kilólitro.	1000 litros.
	Hectólitro.	100 litros.
	Decálitro.	10 litros.
Unidad.....	Litro.	10 decílitros.
Divisores...	Decílitro..	10 centílitros.
	Centílitro.	10 milílitros.
	Milílitro..	0'001 de litro.

MEDIDAS DE PESO.

SISTEMA ANTIGUO.

Múltiplos..	Tonelada.	20 quintales.
	Quintal.	4 arrobas.
	Arroba.	25 libras.
Unidad....	Libra..	16 onzas.
Divisores..	Onza.	16 adarmes.
	Adarme..	3 tomines.
	Tomín.	12 granos.
	Grano.	1 grano.

SISTEMA MODERNO.

Múltiplos. .	Tonelada métrica.. . . .	1000 kilógramos.
	Quintal métrico.	100 kilógramos.
	Miriágramo *(no se usa)*. . .	10 kilógramos.
	Kilógramo *(unidad usual)*. .	1000 gramos.
	Hectógramo.	100 gramos.
	Decágramo..	10 gramos.
Unidad científica. .	Gramo.	10 decígramos.
Divisores. .	Decígramo.	10 centígramos.
	Centígramo	10 milígramos.
	Milígramo.	0'001 de gramo.

MEDIDAS SUPERFICIALES.

SISTEMA ANTIGUO.

Múltiplos. .	Legua cuadrada.. . .	20000^2 piés cuadrados.
	Estadal cuadrado. . .	16 varas cuadradas.
Unidad... .	Vara cuadrada. . . .	9 piés cuadrados.
Divisores. .	Pié cuadrado.. . .	144 pulgadas cuadradas
	Pulgada cuadrada. .	144 líneas cuadradas.
	Línea cuadrada. . . .	1 id. id.

SISTEMA MODERNO.

Múltiplos. .	Miriámetro cuadrado. .	100 Kilómetros id.
	Kilómetro cuadrado. .	100 Hectómetros.
	Hectómetro cuadrado..	100 Decámetros.
	Decámetro cuadrado. .	100 Metros.
Unidad.....	Metro cuadrado. . .	100 Decímetros.
Divisores. .	Decímetro cuadrado. .	100 Centímetros.
	Centímetro cuadrado. .	100 Milímetros.

MEDIDAS DE VOLUMEN.

Son las mismas de longitud elevadas al cubo ó tercera potencia tanto en el antiguo como en el nuevo sistema con la diferencia de que en el antíguo crecen y decrecen de una manera anómala y en el moderno crecen y decrecen de 1000 en 1000. Así pues, la vara cúbica tiene $3^3=27$ piés cúbicos y el pié cúbico 12^3 pulgadas cúbicas; mientras el metro cúbico tiene 1000 decímetros cúbicos y el decímetro cúbico tiene 1000 centímetros cúbicos y así de los demás.

MEDIDAS AGRARIAS.

SISTEMA ANTIGUO.	SISTEMA MODERNO.
Fanega superficial de 576 estadales ó sean 9.216 varas.	Múltiplo-Hectárea=100áreas ó 10000 metros cuadrados.
Esta se divide en 12 *celemines* y el colemín en cuatro *cuartillos*.	Unidad—-Area=100 metros cuadrados.
La *aranzada* es un cuadrado de 80 varas de lado ó 6.400 varas cuadradas.	Divisor Centiárea = 1 metro cuadrado.

Además de estas medidas y pesas que podemos llamar generales, hay en el sistema antiguo otras pesas especiales usadas en la Medicina y Farmacia, otras que se destinan á pesar el oro y la plata y otras para las joyas ó piedras llamadas preciosas y son las siguientes:

Pesas usadas en Medicina y Farmacia.

La libra que tiene 12 onzas.
La onza 8 dracmas de á 2 adarmes.
La dracma 3 escrúpulos de á 2 tomines.
El escrúpulo 24 granos.

Pesas para el oro y la plata.

El marco que tiene 8 onzas.
La onza 8 ochavas de á 2 adarmes.
La ochava 6 tomines.
El tomín 12 granos
En la joyería se usa como unidad el quilate que tiene $^{1}/_{4}$ ó 0'25 de grano.

MEDIDA DEL TIEMPO.

Medir el tiempo es determinar la sucesión de las cosas fijando su duración; y como para poder efectuar cualquiera medida, es necesario elegir una unidad de la misma especie, para la medida del tiempo se ha tomado por unidad principal el año, que es el tiempo que la tierra emplea en recorrer su órbita. Esta unidad tiene también sus múltiplos y divisores y son los siguientes:

Múltiplos.	El *siglo* que tiene	100 años.
	El *lustro* »	5 id.
Unidad. .	El AÑO común (1)	365 días ó 12 meses.
Divisores. .	El *mes*............	30 días. (2)
	El *día*............	24 horas.
	La *hora*..........	60 minutos.
	El *minuto*........	60 segundos.

La *semana* es la reunión de 7 días; pero no es divisor exacto.

SISTEMA MONETARIO.

El sistema monetario en España ha sufrido muchas modificaciones, y como al hacerse una acuñación nueva no se ha recogido la moneda acuñada según el sistema anterior, resulta que tenemos hoy una gran multitud de monedas, sin que obedezcan á un sistema fijo, lo cual es causa de bastante confusión. (3)

Para proceder, pues, con más claridad en este asunto vamos á consignar primeramente las monedas legales ántes del Decreto de 19 de Octubre de 1868 y luego las establecidas por este Decreto.

---

(1) Hay cada 4 años otro que se llama *bisiesto* y tiene 366 días.

(2) Los meses tienen 30, 31 y 28 ó 29 días; pero en el uso común se cuentan todos de 30 días. Los meses de 30 dias son: Abril, Junio, Setiembre y Noviembre, Febrero tiene 28 y si el año es bisiesto 29 y los demás 31.

(3) Ya se ha mandado recoger toda la moneda antigua, con especialidad la de cobre, y que sólo circule la moderna.

MONEDAS ANTERIORES AL 19 DE OCTUBRE DE 1868.

De oro....	La onza que vale. . . .	16 duros	ó 320	reales.
	La media id.	8 id.	ó 160	id.
	El centén.	5 id.	ó 100	id.
	El doblón de	4 id.	ú 80	id.
	El escudo de oro	2 id.	ó 40	id.
	El escudito de id	1 id.	ó 20	id.
	El id. id. de premio (anterior á 1785)		$21\frac{1}{4}$	id.

De plata.	El peso fuerte ó duro que vale. . . .	20	reales.
	El medio id. ó escudo.	10	id.
	La peseta.	4	id.
	La media id.	2	id.
	El real que tiene $8\frac{1}{2}$ cuartos ó 34 maravedís.		
	Hay también:		
	La peseta columnaria.	5	reales.
	La media id.	$2\frac{1}{2}$	id.
	El real id.	$1\frac{1}{4}$	id.

De cobre.	La pieza de medio real ó. . . .	0'50	de real.
	La id. de cuartillo.	0'25	id.
	La doble décima.	0'20	id.
	La décima.	0'10	id.
	La media décima.	0'05	id.
	También hay:		
	La pieza de 2 cuartos que tiene. . .	8	maravedís
	La de 1 cuarto.	4	id.
	El ochavo.	2	id.

MONEDAS POSTERIORES AL 19 DE OCTUBRE DE 1868.

Por decreto de la citada fecha se ordenó que en todos los dominios españoles se considerára la *peseta* como unidad monetaria equivalente á 100 céntimos, y que se acuñasen las demás en la forma siguiente.

De oro. .	La pieza de.	100	pesetas.
	La id. de.	50	
	La id. de.	20	
	La id. de.	10	
	La id. de.	5	

Posteriormente se ha mandado acuñar también la de 25 id.

De plata.	La pieza de.	5	pesetas.
	La id. de.	2	
	La id. de.	1	
	La id. de.	0'50	
	La id. de.	0'20	
De bronce	La id. de.	10	céntimos
	La id. de.	5	
	La id. de.	2	
	La id. de.	1	

Este sistema es obligatorio desde 31 de Diciembre de 1870, tanto para las Cajas públicas, como para los particulares.

ARTÍCULO 2.°

Exposición y desarrollo del sistema métrico decimal.

238. Qué se entiende por sistema métrico decimal?

El conjunto de las nuevas pesas y medidas mandado adoptar en España por la Ley de 19 de Julio de 1849, las cuales crecen y decrecen por grados de 10 en 10, por cuya razón se llama *decimal*, y que reconocen por base la medida metro por lo que se le dá el nombre de *métrico*.

239. Qué es el metro?

El metro es una medida longitudinal, tomada en el cuadrante del meridiano terrestre que pasa por París, el cual se dividió en 10 millones de partes, dando á una de éstas el nombre de *Metro*, y es próximamente igual á 1 vara y 7 pulgadas castellanas.

240. Cuáles son las unidades principales de este sistema?

El Metro para las de longitud.
El Metro cuadrado para las de superficie.
El Metro cúbico para las de volúmen. (1)
El Litro para las de capacidad.
El Gramo para las de peso (2)
La Area para las agrarias.

---

(1) También se llama esta medida *Estéreo*.
(2) Esta es la unidad científica: la usual es el Kilógramo.

241. Cómo se forman los múltiplos de estas medidas?

Anteponiendo á las unidades principales las palabras griegas *Miria*, *Kilo*, *Hecto* y *Deca* que significan respectivamente diez mil, mil, ciento y diez.

242. Cómo se forman los divisores?

Anteponiendo á las unidades principales las palabras latinas *deci*, *centi*, *mili*, que significan décima, centésima y milésima parte.

Así anteponiendo las citadas palabras á las unidades metro, litro y gramo resultan todas las medidas de longitud, capacidad y peso en esta forma:

	Miriá-		10000	
Múltiplos.	Kiló-	*Unidades.*	1000	
	Hectó-		100	
	Decá-	metro, litro,	10	
		gramo=	1	metros, litros ó
	Decí-		0'1	gramos.
Divisores.	Centí-		0'01	
	Milí-		0'001	

A la unidad *Area* sólo se le anteponen las palabras *Hecto* y *Centi*.

243. Por qué se dice que el metro es la unidad fundamental?

Porque de ella dependen las demás, en esta forma:

El Metro	lineal es la unidad de las medidas de longitud.
	cuadrado, la de las medidas de superficie.
	cúbico la de las de volúmen.

El Decámetro cuadrado es la unidad de las medidas agrarias ó *Area*.

El decímetro cúbico es el *Litro*, unidad para las medidas de capacidad.

El peso del agua destilada á la temperatura de 4 grados centígrados que cabe en el litro ó decímetro cúbico es el *Kilógramo*, unidad usual de las medidas de peso: y el peso de la que cabe en un centímetro cúbico es el *Gramo*, unidad científica de las mismas.

244. Qué cuestiones principales se nos pueden presentar

ántes de resolver las operaciones de sumar, restar, multiplicar y dividir los números complejos de ambos sistemas?

Tres, á saber: 1.ª escribir los números complejos del sistema métrico decimal; 2.ª reducir números complejos á incomplejos de sus diferentes especies; y 3.ª reducir números incomplejos á complejos.

245. Cómo se escriben los números complejos del sistema métrico decimal?

Teniendo en cuenta que las diferentes unidades, múltiplos y divisores de las medidas de este sistema crecen y decrecen por grados de 10 en 10, como en el sistema de numeración, se escribirán, como en éste, primeramente las cifras que hayan de representar los múltiplos, siguiendo el orden descendente de *miria*, *kilo*, *hecto*, *deca*; en seguida la cifra que haya de representar las unidades principales y la vírgula, y á continuación las cifras de los divisores por el orden de las palabras *deci*, *centi*, *mili*; advirtiendo que si falta alguno de los órdenes expresados, se escribirá *cero* en el lugar correspondiente.

Ejemplo.

Escribir la cantidad 6 Mm., (1) 8 Hm., 9 Dm., 7 Metros, 6 dm. y 9 mm.

Se escribirán primeramente los múltiplos 6089 luego los 7 metros y la vírgula y en seguida los divisores 609 y resultará

60897'609

cantidad que puede leerse de dos modos, á saber: 1.° dando á cada guarismo el nombre que le corresponde según el lugar que ocupa y 2.° como si fuera un número compuesto de parte entera y decimal, en esta forma: *sesenta mil ochocientos noventa y siete metros y seiscientos nueve milímetros.*

246. Las medidas superficiales siguen este mismo orden?

El mismo; pero ha de tenerse en cuenta que éstas crecen y decrecen por grados de 100 en 100, y por lo tanto cada

---

(1) Para escribir abreviadamente estos nombres se ha convenido en escribir los múltiplos con la letra inicial mayúscula seguida de la inicial de la unidad principal á que se refiere; y los divisores con la inicial minúscula seguida también de la unidad principal. Así ***Mm.*** se lee ***miriámetro; mm***, se lee *milimetro;* ***Dl.*** se lee *decálitro*, y ***dl.*** se lee *decílitro*, etc.

orden de unidades ha de ocupar dos lugares, y si faltare alguno de éstos se escribirán dos *ceros* en su lugar.

Ejemplo.

Escribir 8 $Km.^2$ (1) 9 $Dm.^2$ 6 $M.^2$ 8 $dm.^2$ y 7 $cen.^2$
Se escribirá así: 8000906'0807.
y se leerá en la forma expresada en el ejemplo ó diciendo; 8 millones 906 metros cuadrados y 807 centímetros cuadrados, ó diezmilésimas de metro cuadrado.

247. Y las medidas cúbicas ó de volúmen cómo se escriben?

Como éstas crecen y decrecen por grados de 1000 en 1000, se escribirán en la misma forma; pero ocupando con cada orden tres lugares ó escribiendo tres *ceros* cuando alguno de ellos falte.

Ejemplo.

Escribir 5 $Dm.^3$ 75 $M.^3$ 126 $dm.^3$ y 48 $mm.^3$
Se escribirá así: 5075'126000048:
y se leerá en la forma expresada en el ejemplo, ó diciendo: 5075 metros cúbicos y 126 millones y 48 milímetros cúbicos, ó milmillonésimas de metro cúbico.

ARTÍCULO 3.°

Reducción de números complejos á incomplejos y vice-versa.

248. Cómo se reducen los números complejos del sistema métrico decimal á imcomplejos de cualquiera de sus especies?

Se escriben los números en la forma dicha, y luego se coloca la vírgula á la derecha de la cifra que represente las unidades del orden á que queramos referirnos.

Ejemplo.

Reducir el complejo 8 Kl 7 Hl. 6 L 5 dl y 9 cl á incomplejo de Hl.

(1) En la escritura abreviada de estos nombres se ha convenido en escribir las mismas letras que en los expresados en la nota anterior acompañadas del esponente 2; así como para representar las cúbicas ó de volúmen se acompañan del esponente 3. Así km. 2 quiere decir kilómetro cuadrado, y km. 3 quiere decir kilómetro cúbico.

Escribiré primeramente el número en la forma dicha, y luego colocaré la vírgula á la derecha del 7, que es la que representa los hectólitros, de esta manera: 87'0 659.

Si quisieramos que el número representase litros, hubiéramos puesto la vírgula á la derecha del 6; si centílitros, á la derecha del 5, y así de los demás.

249. Cómo se reducen los complejos del antiguo sistema á incomplejos?

Distinguirémos dos casos: 1.° Reducir un número complejo á incomplejo de especie inferior. 2.° Reducir un complejo á incomplejo de cualquiera de sus especies.

1.° *Para reducir un número complejo á incomplejo de su especie inferior, se reducen las unidades de especie superior á las de especie inferior inmediata y se añaden á éstas las que el mismo contenga de esta especie; la suma de éstas se reduce á la inferior inmediata, agregando las de esta especie, así sucesivamente hasta llegar á la inferior de todas.*

Ejemplo.

Reducir el complejo 15 arrobas, 18 libras y 5 onzas á incomplejo de onzas.

Práctica. Reduciré las 15 arrobas á libras y como una arroba tiene 25 libras, las 15 arrobas tendrán 25×15=375 libras, mas 18 que hay en el número propuesto, son 393 libras, que reduciré á onzas diciendo: si una libra tiene 16 onzas las 393 libras serán 16×393=6288 onzas, más 5 que hay en el número propuesto, son 6293 onzas, número incomplejo de especie inferior, equivalente al complejo propuesto.

Operación.

```
 25 libras.
×15
----
125
 25
----
375
+18
----
=393 libras.
×16
----
2358
393
----
6288
+  5
----
=6293 onzas.
```

2.° *Para reducir un complejo á incomplejo de cualquie-*

ra de sus especies, se reduce como en el caso anterior, á incomplejo de su menor especie, y luego se pone por denominador el número que indique las veces que la unidad de especie inferior está contenida en aquella superior á que quiere reducirse.

Ejemplo.

Reducir el complejo 14 fanegas, 7 celemines y 3 cuartillos á incomplejo de fanega.

Práctica. Reducido el complejo propuesto á incomplejo de su menor especie, resulta ser equivalente á 703 cuartillos; y reduciendo estos á fanegas, como dijimos en la división (107) será 703: 48 cuartillos que tiene la fanega, ó dejando sólamente indicada la operación, tendremos que 14 fanegas, 7 celemines y 3 cuartillos$=\frac{703}{48}$ fanegas conforme á la regla.

Operación.

$$
\begin{array}{l}
12 \text{ celemines} \\
\times 14 \\
\hline
48 \\
12 \\
\hline
168 \\
+\ 7 \\
\hline
=175 \text{ celemines} \\
\times\ 4 \\
\hline
700 \\
+\ 3 \\
\hline
=703 \text{ cuartillos}
\end{array}
$$

Esta reducción puede hacerse también por medio de los decimales, en cuyo caso se pone por unidad principal aquella á cuya especie queremos referir el número, reduciendo primeramente á ella todas las de especie superior, y se escribe á su derecha la vírgula; en seguida las unidades de especie inferior á la principal se reducen á la inferior de todas, y para averiguar la parte decimal correspondiente, se divide el resultado por el número que indique las veces que la unidad de especie inferior está contenida en la superior á que se refiere, añadiendo ceros á los resíduos hasta obtener cociente exacto ó aproximarnos á la cifra que queramos, y el cociente obtenido se escribe á la derecha de la vírgula, con lo cual tendrémos un número compuesto de parte entera y decimal equivalente al número propuesto.

Si la especie á que ha de reducirse es mayor que las que contiene el número propuesto, se pone *cero* por parte entera.

Ejemplo.

Reducir por este método el complejo 16 años, 5 meses y 15 días á incomplejo de años.

Práctica. Escribiré los 16 años como enteros y pondré la vírgula á la derecha; reduciré los 5 meses y 15 días á días y serán $30\times5+15=165$ días, que reducidos á decimal de año serán 452 milésimas y por lo tanto el número propuesto equivale á 16'452 años.

Operación.

```
 1650  |365
01900   0'452
 00750
   020
```

Otro ejemplo.

Reducir 3 arrobas, 15 libras y 8 onzas á decimal de quintal.

Práctica. Como el número propuesto no contiene quintales que es la especie á que se vá á referir, escribiré 0 enteros y reduciré las arrobas, libras y onzas á onzas, y el número que resulte lo divido por 1600, número de onzas que tiene el quintal y resultará 0'905 quintales, incomplejo de quintal, equivalente al complejo propuesto.

Operación.

```
     25 libras
   × 3
   ------
     75
   + 15
   ------
   = 90 libras
   × 16
   ------
    1440
   +   8 onzas
   ------------
    14480      | 1600
    0008000     0'905 quintales.
       0000
```

250. Cómo se reduce un incomplejo del sistema métrico decimal á complejo?

Se escribe el número propuesto dando á cada cifra el nombre de la medida que por el lugar que ocupa represente.

Ejemplos.

1.° Reducir 5464'75 litros á complejo.
Este número es igual á 5 Kl. 4 Hl. 6 Dl. 4 L. 7 dl. y 5 cl.
2.° Reducir 4547'48 Metros cuadrados ó complejo.
Este número equivale á 45 Dm^2 47 $M.^2$ y 48 $dm.^2$
3.° Reducir 35084'036454 Metros cúbicos á complejo.
Este número equivale á 35 $Dm.^3$ 84 $M.^3$ 36 $dm.^3$ y 454 $cm.^3$

251. Cómo se reducen á complejos los incomplejos de especie inferior?

Para reducir á complejo un incomplejo de especie inferior, se reduce primero á la especie superior inmediata, según dijimos en la división (107), *el cociente se reduce á la especie inmediata superior, el que resulte á la inmediata y así sucesivamente hasta llegar á la superior de todas: el último cociente y los resíduos de todas las divisiones formarán el complejo pedido equivalente al incomplejo propuesto.*

Ejemplo.

Reducir á complejo el incomplejo 7585 onzas.

Operación.

7585	16		
118	474 libras.	25	
0065	224	18 @	4
01 onza.	024 libras.	02 @	4 quintales.

lo cual quiere decir que las 7585 onzas equivalen á 4 quintales, 2 @ 24 libras y una onza.

252. Cómo se reduce á complejo un quebrado de especie superior?

Para reducir á complejo un quebrado de especie superior, (operación que algunos llaman valuar quebrados), *se divide el numerador por el denominador y el entero del cociente* *será el número de la especie superior del complejo: el residuo se multiplica por el número de veces que su unidad contiene á la de la especie inferior inmediata y el producto se divide por el mismo denominador; el cociente será el número de la segunda especie del complejo y del mismo modo se continúa hasta llegar á la especie inferior.*

Ejemplo.

Reducir á complejo el quebrado $^{11}/_{16}$ de quintal.

Operación.

11 quintales.	6
5	1 quintal 3 @ 8 libras 5 $^{2}/_{16}$ onzas.
×4	
20 @	
02	
×25	
50 libras.	
02	
×16	
32 onzas.	
02	

253. Y si el incomplejo estuviese representado por un decimal cómo se reduce á complejo?

En este caso la parte entera expresará el número de la primera especie del complejo que se pide; luego se multiplica sólo la parte decimal por el número de veces que su unidad contiene á la inferior inmediata, la parte entera que resulte será el número de la segunda especie, y así se continúa multiplicando sólo la parte decimal hasta llegar á la especie inferior.

Ejemplo.

Reducir á complejo el número 5'28 años.

Operación.

5'28	años.
× 12	
56	
28	
3'36	meses.
× 30	
10'80	días.
× 24	
19'20	horas.
× 60	
12'00	minutos.

De donde 5'28 años=5 años, 3 meses, 10 días, 19 horas y 12 minutos.

CAPÍTULO III.

Operaciones con los números complejos.

ARTÍCULO 1.º

Sumar ó adición.

254. Cómo se suman los números complejos?

Si pertenecen al nuevo sistema métrico decimal, se reducen á incomplejos de la misma especie y se suman como incomplejos decimales.

Si pertenecen al antiguo sistema pueden sumarse en la misma forma; pero se acostumbra á sumarlos en la forma compleja; *para lo cual se colocan los sumandos unos debajo de otros, de modo que se correspondan las unidades de la misma especie, se suman las de la especie inferior y si de estas resulta alguna de la superior inmediata, se guardan para añadirlas á las de aquella especie y las restantes se escriben debajo de las inferiores; en seguida se suman las de la otra especie, continuando de la misma manera hasta concluir con las de especie superior.*

Ejemplos.

1.° Sumar 8 Km. 6 Dm. 8 M 5 dm. y 4 cm. + 8 Hm. 9 Dm. 6 M. 7 cm. y 4 mm. + 9 Mm. 5 Km. 9 Hm. 6 M. 4 dm. 8 mm.

Resolución.		8068'54
	+	896'074
	+	95906'408
Suma.		104871'022 Metros.

2.° Sumar 7 quintales, 3 arrobas, 15 libras y 6 onzas + 5 quintales, 2 arrobas, 16 libras y 12 onzas + 24 quintales, 2 arrobas, 9 libras y 7 onzas + 17 quintales, 3 arrobas, 13 libras y 11 onzas.

Resolución.	7 quintales,	3 arrobas,	15 libras,	6 onzas.
	5	2	16	12
	24	2	9	7
	17	3	13	11
Suma	56 quintales,	0 arrobas,	5 libras,	4 onzas.

ARTÍCULO 2.°

Sustracción ó resta.

255. Cómo se restan los números complejos?

Si pertenecen al nuevo sistema métrico decimal, se reducen minuendo y sustraendo á incomplejos de la misma especie y luego se restan como los decimales.

Si pertenecen al antiguo sistema, puede ejecutarse la operación del mismo modo; pero se prefiere restarlos dejándolos en la forma compleja; para lo cual *se coloca el sustraendo debajo del minuendo de modo que se correspondan las unidades de igual especie y se tira una raya por debajo: luego se restan las unidades de la especie inferior del sustraendo de las de la misma especie del minuendo, escribien-*

do el resto debajo de la raya y de las de su especie, ejecutando la misma operación con las demás especies, hasta llegar á la última.

Ejemplos.

1.° Restar de 9 Km. 8 Dm. 7 M. 4 dm. y 8 cm., 7 Km. 6 Hm. 8 Dm. 9 M. 5 dm. y 6 cm.

Resolución.

Minuendo	9087'48	
Sustraendo	7689'56	
Resta	1397'92	Metros.

2.° Restar 4 cahices, 6 fanegas, 8 celemines y 2 cuartillos de 9 cahices, 8 fanegas, 9 celemines y 3 cuartillos.

Resolución.

Minuendo	9 cahices,	8 fanegas,	9 celemines,	3 cuartillos.
Sustraendo	4	6	8	2
Resta	5 cahices,	2 fanegas,	1 celemín,	1 cuartillo.

256. Puede ocurrir alguna dificultad al hacer esta resta? Sí, puede suceder que el número de unidades de una especie del sustraendo sea mayor que el de las mismas del minuendo, en cuyo caso se toma una unidad de la especie superior inmediata del minuendo, se descompone en unidades de especie inferior, se añaden éstas á la de su especie y luego se restan las del sustraendo, teniendo cuidado después de rebajar aquella unidad en las de la especie donde se tomó.

Ejemplo.

De 45 años, 7 meses, 8 días y 9 horas, restar 26 años, 10 meses, 5 días y 16 horas.

Resolución.

Minuendo	45 años	7 meses	8 días	9 horas.
Sustraendo	26	10	5	16 horas.
Resta	18 años	9 meses	2 días	17 horas.

Práctica. En este ejemplo diré: de 9 horas que hay en el minuendo rebajar 16 que hay en el sustraendo, no puede ser, tomo un día de los 8 del minuendo que tiene 24 horas y 9 del minuendo son 33; de 33 rebajo 16, quedan 17 horas que coloco debajo de la raya. Paso á los días y digo: de 7 días, porque quité uno, rebajo 5, quedan 2 días, que coloco en la resta. Paso á los meses y digo: de 7 meses rebajo 10 no puede ser, tomo un año que tiene 12 meses y 7 son 19; de 19 rebajo 10, quedan 9 meses, que escribo en la resta. Finalmente paso á los años y digo: de 44 años rabajo 26 quedan 18, que de la misma manera coloco en la resta, con lo cual queda terminada la operación.

257. Y si al ir á tomar alguna unidad de la especie superior inmediata no la hubiese en el minuendo ¿qué deberemos hacer?

En tal caso la tomaremos de las de la especie superior más próxima que se encuentre y esta se vá descomponiendo sucesivamente en las inmediatamente inferiores hasta llegar á la que nos ocupa, y luego se sigue el mismo procedimiento que en el caso anterior.

Ejemplo.

Restar 456 @, 15 libras, 12 onzas, de 845 @.

Resolución.

Minuendo. .	845 @	(24	(16
Sustraendo..	456 @	15 libras y	12 onzas.
Resta. . . .	388 @	9 libras	4 onzas.

Práctica. Para ejecutar esta operación diré: rebajar las 12 onzas del sustraendo de las que no hay en el minuendo, no puede ser, por lo que, paso á tomar una libra, y como tampoco las hay en el minuendo, paso á las arrobas y tomo una que tiene 25 libras, dejo 24 en las libras y llevo una á las onzas que tiene 16 quedando reducido el minuendo á la expresión siguiente: 844 @, 24 libras y 16 onzas del que ya se puede restar el sustraendo.

258. Qué aplicación se hace frecuentemente en la vida de la regla de sustracción de complejos?

Esta regla se aplica con frecuencia á averiguar la edad del hombre, para lo cual se resta el tiempo que pasó desde el principio de la era cristiana, hasta el día de su nacimiento, del trascurrido desde la misma fecha, hasta el día en que se propone la cuestión.

Ejemplo.

Qué edad tendrá el 12 de Febrero de 1889 un sugeto que nació el 24 de Setiembre de 1808?

Resolución.

Como el tiempo pasado desde el principio de la era cristiana será 1888 años, 1 meses, 11 días, este número será el minuendo, del cual restaremos el tiempo pasado desde el principio de la era cristiana hasta el día de su nacimiento, que es en el caso presente 1807 años, 8 meses y 23 días, y este será el sustraendo.

Operación.

Minuendo . . 1888 años 1 meses, 11 días.
Sustraendo—1807 . . . 8 . . . . 23.

Resta. . . =0080 años 4 meses 18 días. . edad de dicho sugeto el día 12 de Febrero de 1889.

ARTÍCULO 3.°

Multiplicación.

259. Qué conviene tener presente en la multiplicación de los números concretos, ya sean incomplejos ó complejos?

Que el producto es siempre de la misma naturaleza que el multiplicando, por cuya razón el multiplicador puede siempre considerarse como abstracto.

260. Cuántos casos conviene distinguir en la multiplicación de complejos?

Tres: 1.° Multiplicar un complejo por un incomplejo.
2.° Multiplicar un incomplejo por un complejo.
3.° Multiplicar un complejo por otro complejo.

261. Cómo se multiplica un complejo por un incomplejo?

Como el producto, hemos dicho, ha de ser de la misma naturaleza que el multiplicando, conviene reducir éste á incomplejo de la especie que queramos obtener y luego queda reducida la cuestión á multiplicar dos números incomplejos. También puede ejecutarse la operación dejando el multiplicando en la forma compleja y multiplicando por el multiplicador sus diferentes especies.

Ejemplos.

1.° Cuánto importan 58 @ de bacalao á 2 duros 12 rs. y 17 maravedís la @?

Resolución.

El multiplicando en este caso es el dinero, pues que dinero es lo que queremos hallar en el producto. Si queremos que éste se exprese en reales, reduciremos el multiplicando á incomplejo de reales y tendrémos: 2 duros, 12 rs. y 17 maravedís$=2\times20+12$ rs. $+17$ maravedís y reduciendo ahora los mrs. á decimal de real nos dará para

Multiplicando 52'5 reales.
Multiplicador 58 que podemos cosiderarle abstracto

$$\begin{array}{r} \hline 4200 \\ 2625 \\ \hline \end{array}$$

Producto$=$3045'0 rs. valor de las 58 @.

Dejando el multiplicando en la forma compleja será

2 duros	12 rs.	17 mrs.
	×	58
16 . . .	96 . .	136
10 . . .	60 . .	85
116 ds.	696 rs.	986 mrs;

pero los 986 mrs. son 986: 34=29 rs. que sumados con los 696 hacen 725 rs. que reducidos á duros nos dan 725: 20=36 duros y 5 rs. que agregados á los 116 hacen 152 duros y 5 rs. valor de las 58 @.

Por lo expuesto se vé que el primer método es más breve y más sencillo que el segundo.

2.° Pesando una fanega de trigo 3 @, 15 libras y 6 onzas ¿cuánto pesarán 64 fanegas del mismo trigo?

Resolución.

En este caso el multiplicando es 3 @. 15 libras y 6 onzas, pues en el producto vamos á buscar peso. Si queremos obtenerle en @s. le reducirémos á incomplejo de @s. tomando las 3 @. como enteros y haciendo las libras y las onzas decimal de @, lo cual nos dará

Multiplicando	3'615 @.
Multiplicador	64
	14460
	21690
Producto=	231'360 @. peso de las 64 fanegas.

262. Cómo se multiplica un incomplejo por un complejo?

Se reduce el complejo á incomplejo de la especie cuyo valor se nos dá, y luego se multiplican como incomplejos.

Ejemplos.

1.° Valiendo un hectólitro de trigo 112 rs. ¿cuánto valdrán 6 Kl. 8 Hl. 9 L y 16 cl?

Resolución.

En este caso el multiplicando es 112 rs., puesto que reales queremos obtener en el producto y el multiplicador es el complejo: reducirémos éste á incomplejo de hectólitros, pues que se nos dá el precio de esta especie, y tendrémos:

Multiplicando. 112
Multiplicador. 68'0916 } y como el orden de factores no altera el producto, tomarémos para mayor facilidad el multiplicador por multiplicando y tendrémos:

68'0916
× 112
1361832
680916
680916
7626'2592 rs. valor pedido.

2.° Andando un caballo 8.000 varas por hora ¿cuántas andará en 3 días, 15 horas y 24 minutos?

Resolución.

En este ejemplo el multiplicando es 8.000 varas, porque varas vamos á buscar en el producto y el multiplicador 3 días, 15 horas y 24 minutos, y como se nos dá lo que anda en una hora, reducirémos este á incomplejo de horas y tendrémos:

Multiplicando	8.000 varas.
Multiplicador	87'4 horas.
Producto	699200'0 varas.

263. Cómo se multiplica un complejo por otro complejo? Se reduce el complejo multiplicando á incomplejo de la especie que queramos obtener en el producto, y el complejo multiplicador á incomplejo de la especie cuyo valor se dá y luego se multiplican como incomplejos.

Ejemplos.

1.° Marchando una locomotora con una velocidad de 7 Km. 8 Hm. 5 M y 6 dm. por hora ¿qué espacio recorrerá en 8 días, 18 horas y 36 minutos?

Resolución.

Reducirémos el multiplicando á incomplejo de Km. si queremos obtener en el producto Km. por ejemplo, y el multiplicador á incomplejo de horas, puesto que se nos dá como unidad de tiempo la hora, resultando:

Multiplicando	7'8056 Km.
Multiplicador	210'6
	468336
	78056
	156112
Producto=1643'85936 Km.	

que recorrerá la locomotora en el tiempo dado.

2.° Valiendo una fanega 5 duros, 12 rs. y 26 mrs. ¿cuánto valdrán 15 fanegas, 8 celemines y 3 cuartillos.

Resolución.

Reducirémos el multiplicando á incomplejo de duros, si queremos obtener duros en el producto, y el multiplicador á incomplejo de fanegas, puesto que se nos dá el precio de la fanega, y resultará:

Multiplicando	5'6382 duros.
Multiplicador	15'729 fanegas.
	507438
	112764
	394674
	281910
	56382
Producto= 88'6832478 duros.	

NOTA. Al reducir los complejos á incomplejos en todos los ejemplos propuestos hemos preferido el sistema decimal al de quebrados; por parecernos más fácil éste método que el de los quebrados, aunque también pueden ejecutarse las operaciones por este procedimiento.

264. Hay algún otro método para resolver los problemas relativos á la multiplicación de números complejos?

Sí, el conocido con el nombre de método de las *partes alícuotas*, que, si bien no ofrece ventajas en la práctica, es un buen ejercicio para el desarrollo de la inteligencia.

265 En qué consiste el método de las *partes alícuotas?*

En hallar primeramente el valor de las unidades de especie superior, descomponer después las inferiores en *partes alícuotas* ó divisores exactos de los valores ya conocidos; y sumar después todos estos valores para obtener en la suma el valor total.

Ejemplo.

Cuánto valen 15 varas 2 piés y 9 pulgadas á 3 duros 8 rs. y 12 mrs. la vara?

Disposición de la operación.

Resolución. { Multiplicando 3 duros, 8 rs., 12 mrs. valor de la vara.
Multiplicador 15 varas, 2 piés, 9 pulgadas.

Valor de 15 varas..	45 duros	120 rs.	180 mrs.
Id. de 1 pié ó $^1/_3$ de vara.	1	2	26 $^2/_3$
Id. de 1 pié..	1	2	26 $^2/_3$
Id. de 6 pulgadas ó $^1/_2$ pié.	»	11	13 $^1/_3$
Id. de 3 pulgadas, mitad de 6.	»	5	23 $^2/_3$
Valor de las 15 varas, 2 piés y 9 pulgadas.	54 duros,	7 rs.	32 $^1/_3$ mrs.

Para hallar el valor de las 15 varas, multiplico el valor de una por 15, resultando 45 duros, 120 rs. y 180 mrs.

Para hallar el de los 2 piés, busco 1.° el de uno que es la tercera parte de la vara, tomando la tercera parte del valor de ésta, y repito este valor para el otro pié, que es 1 duro, 2 rs. y 26 $^2/_3$ mrs.

Para hallar el de las 9 pulgadas, descompongo este número en 6+3; hallo el valor de las 6, que es medio pié, tomando la mitad del valor de este, que son 11 rs. y 13 $^1/_3$ mrs. y luego el de las 3 pulgadas, tomando la mitad del valor de las 6, y sumando todos estos valores tenemos 54 duros, 7 rs. y 32 $^1/_3$ mrs., valor total de las 15 varas, 2 piés y 9 pulgadas.

ARTICULO 4.°

División.

266. Qué debemos advertir en la división?

Que al dividir números concretos, ya sean estos complejos ó incomplejos de uno ú otro sistema, debemos tener presente que el dividendo es de la misma especie que la que se quiere obtener en el cociente, y que cuando dividendo y divisor son de la misma naturaleza, deben considerarse como abstractos y la cuestión determina la naturaleza del cociente.

267. Cuántos casos pueden ocurrir en la división de números complejos?

Tres: 1.° Dividir un complejo por un incomplejo.
2.° Dividir un incomplejo por un complejo.
3.° Dividir un complejo por otro complejo.

268. Cómo se divide un complejo por un incomplejo?

Para dividir un complejo por un incomplejo, se reduce el complejo dividendo á incomplejo de la especie que se quiera obtener en el cociente, y luego se dividen como los incomplejos.

Ejemplos.

1.° 154 litros de vino pesan 3 quintales métricos 9 Kg. 8 dg. y 6 gramos ¿cuántos Kg. pesará cada litro?

Resolución.

Reducirémos los 3 quintales métricos 9 Kg. 8 Dg. y 6 gramos á incomplejo de kilógramo, por querer esta especie en el cociente y los divido por el número de litros, en esta forma.

```
309'086 Kg. | 154 litros.
            |___________
001 086       2'007 Kg.
  0 008
```

resultando que pesará el litro 2 Kg. y 7 gramos.

2.° 18 fanegas cuestan 32 duros, 9 rs. y 17 mrs. ¿cuántos reales valdrá la fanega?

Resolución.

Reduciré los 32 duros, 9 rs. y 17 mrs. á incomplejo de reales y le dividiré por las 18 fanegas en esta forma:

```
649'5 rs. | 18 fanegas.
          |____________
109         36'08 1/3
00150
  006
```

resultando que valdrá la fanega 36 rs. y ocho y un tercio céntimos de real.

También puede ejecutarse la operación dejando el dividendo en la forma compleja, en cuyo caso el cociente también será complejo.

Resolviendo el problema anterior por este procedimiento tendrémos:

```
32 duros 9 rs. 17 mrs. | 18 fanegas.
14                     |______________________
×20                    | 1 duro 16 rs. 2 5/6 mrs.
___
280+9=289 rs.
      109
      001
      ×34
      ___
       34+17=51 mrs.
             15
```

269. Cómo se divide un incomplejo por un complejo?

Para dividir un incomplejo por un complejo, se reduce el complejo divisor á incomplejo de la especie á cuya unidad se refiere el dividendo, y luego se dividen como incomplejos.

Ejemplos.

1.° Con 6275 pesetas se compraron 18 Hl. 9 L. y 6 cl. de aceite ¿á cómo costó el Dl?

Resolución.

Reduciré el complejo divisor á incomplejo de la especie decálitro y dividiré las 6275 pesetas por este número en esta forma:

```
6275000  pesetas | 180‘906 Dl.
                 |------------
0847820            34‘68 pesetas.
 1241960
 01552240
  0117992
```

resultando que el decálitro costó á 34 pesetas y 68 céntimos.

2.° Si 5 @, 12 libras y 10 onzas valen 705 rs., cuánto valdrá una libra?

Resolución.

Reduciré el complejo divisor á incomplejo de libra y dividiré los 705 rs. por este número:

```
705‘000 rs. | 137‘625 libras.
            |---------------
0168750     |   5,12
 0311250    |
  036000    |
```

resultando que la libra vale 5 rs. y 12 céntimos de real.

270. Cómo se divide un complejo por otro complejo?

Para dividir un complejo por otro, se reduce el complejo dividendo á incomplejo de la especie que se quiera obtener en el cociente, y el complejo divisor á incomplejo de la especie á cuya unidad se refiere el dividendo, y luego se dividen como incomplejos.

Si los dos fuesen complejos de una misma naturaleza, se reducen á incomplejos de la misma especie y se consideran como abstractos.

Ejemplos.

1.° 16 Dm. 8 metros y 5 decímetros de paño costaron 112 duros, 5 reales y 28 maravedís ¿á cómo costó el metro?

Resolución.

Reduciré el dividendo á incomplejo de reales para obtener reales en el cociente, y el divisor á incomplejo de metros que es la unidad á que se refiere el dividendo, y tendré:

2245'8235 rs.	168'5000
05608235	13'328 rs.
05532350	
04773500	
14035000	
00555000	

resultando que costó el metro 13 reales y 328 milésimas de real.

2.° Una fuente arroja 245 cántaras, 6 azumbres y 3 cuartillos en 3 días, 16 horas y 15 minutos ¿cuántas azumbres arrojará en cada hora?

Resolución.

Reduciré el dividendo á incomplejo de azumbre, por ser esta la especie que se quiere obtener en el cociente, y el divisor á incomplejo de hora, por ser la unidad de tiempo á que queremos referirnos, y tendrémos:

1966'75 azumbres.	88'25 horas.
020175	22'286 azumbres
025250	
076000	
054000	
04050	

resultando que en cada hora arroja dicha fuente 22 azumbres y 286 milésimas de azumbre.

3.° Una @ vale 3 duros 5 rs. y 17 mrs. ¿cuántas @s. se podrán comprar con 62 duros 15 rs. y 26 mrs.?

Resolución.

Reduciré el dividendo y divisor á incomplejos de real y el cociente representará las @. en esta forma:

```
1255'76 | 65'50
060076  |--------
 011260 | 19'17 @.
  047100|
    1250|
```

ARTÍCULO 5.°

Reducción de las pesas y medidas de Castilla á las correspondientes del sistema métrico decimal y vice-versa.

271. Cómo se reducen las pesas y medidas de un sistema á otro?

Sabiendo las equivalencias de sus unidades principales, y multiplicando ó dividiendo éstas por las que se nos dén del otro sistema.

272. Sírvase V. pues, decirme las equivalencias principales.

Las equivalencias aproximadas más necesarias para hacer toda clase de reducciones son las que se expresan en las dos tablas siguientes:

TABLA 1.ª

Equivalencia aproximada de las pesas y medidas de Castilla con las del sistema métrico decimal.

1 vara equivale á.	0'836 metros.
1 libra.	460 gramos.
1 cántara.	16'133 litros.
1 @ de aceite.	12'563 litros.
1 fanega de áridos.	55'501 litros.
1 legua.	5'572 kilómetros.
1 vara cuadrada.	0'699 metros cuadrados.
1 vara cúbica.	0'584 metros cúbicos.
1 fanega superficial de marco real.	64'39 áreas.

TABLA 2.ª

Equivalencia aproximada de las pesas y medidas del sistema métrico decimal con las de Castilla.

1 metro equivale á.	1'196 varas.
1 kilógramo.	2'173 libras.
1 decálitro de líquido. . . .	0,62 cántaras.
1 decálitro de aceite.. . . .	0'800 @.
1 hectólitro de grano. . . .	1'802 fanegas
1 kilómetro.	0'179 leguas.
1 metro cuadrado.	1'431 varas cuadradas.
1 metro cúbico.	1'712 varas cúbicas.
1 hectárea..	1'553 fanegas.

273. Según esto cómo se reducen las pesas y medidas de Castilla á las del métrico decimal?

Si hacemos uso de la primera tabla, multiplicando las que se nos dén del sistema de Castilla por la equivalencia de su unidad correspondiente, pues en este caso puede considerarse como una de las aplicaciones de la multiplicación en que se nos dá *el valor de una cosa* y *se quiere averiguar el de muchas de la misma especie.* Si se quiere hacer uso de la segunda tabla, en tal caso se hará aplicación de la operación de dividir.

Ejemplo.

Cuántos metros son 254 varas castellanas?

Haciendo uso de la primera tabla diré: si una vara equivale á 0'836 metros, 254 varas equivaldrán á 0'836×254= 212'344 varas.

$$\textit{Operación.}\left\{\begin{array}{r} 0'836 \\ \times\ \ 254 \\ \hline 3344 \\ 4180 \\ 1672 \\ \hline 212'344 \end{array}\right.$$

Aplicando la 2.ª tabla diré: si un metro equivale á 1'196 varas las 254 varas serán tantos metros, cuántas veces las 1'196 estén contenidas en las 254; luego la cuestión está reducida á dividir 254 por 1'196.

Operación.

```
254000 | 1'196
 01484 | 212'4 metros. (1)
  02880
   04880
    0096
```

274. Cómo se reducen las pesas y medidas métricas á las de Castilla.

Si se hace uso de la segunda tabla, multiplicando las que se nos dén de éstas por la equivalencia de la correspondiente unidad, y aplicando la primera, dividiendo dicho número por aquella equivalencia.

Ejemplo.

Cuántas libras son 236'235 Kg.?

Según la segunda tabla diré: si un kilógramo equivale á 2'173 libras los 236'235 equivaldrán á 236'235×2'173= 513'339 libras.

Operación.

```
    236'235
  ×   2'173
  ---------
     708705
    1653645
    236235
   472470
  ---------
  513'338655 libras
```

Aplicando la 1.ª tabla harémos uso de la división en esta forma: 236'235:0'460

(1) Al hacer estas reducciones por ambos métodos se observa siempre alguna diferencia á causa de no ser exactas las equivalencias y no ser el mismo grado de aproximación en ambas.

Operación.	236'235	0'460
	006 23	513'55 libras. (1)
	1 635	
	0 2550	
	02500	
	0200	

275. Vamos á terminar éste artículo resolviendo dos problemas importantes y de aplicación frecuente al establecerse definitivamente el nuevo sistema métrico: tales son los siguientes:

1.° *Dado el precio de una unidad antigua, averiguar el de su correspondiente métrica.*

2.ª *Dado el precio de una unidad métrica, averiguar el de su correspondiente antigua.*

Para resolver el 1.° se multiplica el precio dado por la equivalencia de la unidad métrica con la antigua, (tabla 2.ª)

Ejemplo.

Valiendo una vara 12 rs. ¿cuánto valdrá un metro?

Si una vara vale 12 rs. las 1'196 á que equivale el metro, valdrá 12×1'196=14'352 rs.

Para resolver el 2.° se multiplica el precio dado por la equivalencia de la unidad antigua con la métrica, (tabla 1.ª)

Ejemplo.

Valiendo un kilógramo 20 rs. cuánto valdrá la libra?

Si un kilógramo vale 20 rs., los 0'460 que equivale á la libra, valdrá 20×0'460=9'200 rs.

---

(1) De la misma manera que en el caso anterior se encuentra diferencia en esta reducción y ésta diferencia es debida á la misma causa expresada en la antecedente nota. Tanto para esta, como para la anterior reducción preferimos la multiplicación por ser más sencilla.

CAPÍTULO IV.

Ejercicios prácticos correspondientes á esta tercera parte.

1.° Cuánto valen $^3/_5$ de @ á 65 rs. @?
2.° $^7/_{12}$ de cántara á 16 rs. la cántara ¿cuánto importan?
3.° A cuántos reales equivale el quebrado $\frac{525}{8}$ de real?
4.° Reducir á quebrado el número $623^3/_7$.
5.° Id. á id. el número $68^5/_{12}$.
6.° Cuál es mayor de los quebrado $^3/_7$, $^5/_7$ y $^6/_7$?
7.° Cuál es el mayor de $^3/_8$, $^3/_9$ y $^3/_{20}$?
8.° Y de los quebrados $^3/_4$, $^2/_5$ y $^5/_7$?
9.° Reducir á un común denominador por el método ordinario los quebrados $^2/_3$, $^3/_4$, $^4/_5$ y $^5/_6$.
10. Id. id. por medio del mínimo múltiplo común los quebrados $^2/_3$, $^7/_9$, $^1/_2$, $^3/_4$ y $^7/_{12}$.
11. Id id. por decimales los quebrados $^3/_8$, $^4/_5$ y $^7/_{15}$.
12. Simplificar los quebrados $\frac{432}{540}$ y $\frac{2592}{3240}$
13. Reducir á quebrados las cantidades decimales siguientes:
0'375, 4'512, 0'351351351..... 6'727272..... 0'5737373..... 3'5828282.......
14. Una finca se ha dividido en cinco partes, una tenía $3^1/_5$ fanegas, otra $5^2/_5$ fanegas, otra $17^4/_5$, otra $6^3/_5$ y la otra $7^2/_5$ ¿cuántas fanegas tenía la finca entera?
15. Una mujer ha hilado en una semana $4^3/_8$ libras de lino, en otra $5^2/_3$ libras, en otra $6^1/_2$ y en otra $3^3/_4$ ¿cuántas libras habrá reunido en las cuatro semanas?
16. Un jornalero ganó el lúnes $5^1/_2$ rs., el mártes 6 reales, el miércoles $8^3/_4$, el juéves $7^2/_5$, el viernes 9 y el sábado $4^1/_4$ ¿cuánto ganó en la semana.
17. En un comercio se han vendido géneros por valor $1154^3/_4$ reales de los cuales se ganaron $715^7/_9$ ¿cuál era el valor de los géneros?
18. Para hacer un chaleco se entregaron á un sastre $^2/_3$ de vara de paño y volvió al parroquiano $^1/_4$ de vara ¿cuánto empleó en el chaleco?

19. De un madero que tenía 14 piés de largo se han cortado $6\frac{1}{3}$ piés ¿cuántos han quedado en el madero?

20. Uno que debía 1800 reales pagó $915\frac{3}{4}$ ¿cuánto quedó debiendo?

21. A un herrero se le dieron 22 libras de hierro para una obra y le sobraron $\frac{7}{8}$ de libra ¿cuánto gastó?

22. A una ama de gobierno se le han entregado $125\frac{1}{5}$ rs. por una parte y $258\frac{4}{9}$ por otra, ha gastado en los alimentos $180\frac{1}{2}$ reales en limpieza $162\frac{2}{3}$ y en otras menudencias $16\frac{3}{4}$ ¿cuánto le habrá sobrado?

23. Cuánto valen $\frac{3}{4}$ varas de paño á $\frac{3}{5}$ duros la vara?

24. Se han comprado 52 celemines de garbanzos á $\frac{7}{8}$ duros el celemín ¿cuánto han importado?

25. $\frac{2}{3}$ @ de lino á 45 rs. @ ¿cuánto valen?

26. Cuánto importan $625\frac{7}{8}$ cántaras de vino á $6\frac{3}{4}$ reales la cántara?

27. A una costurera se le han dado $245\frac{3}{4}$ rs. y ha comprado $12\frac{1}{3}$ varas de tela á razón de $15\frac{1}{2}$ rs. y $26\frac{2}{3}$ varas de cinta á $2\frac{3}{3}$ rs. ¿cuánto le ha sobrado?

28. Se ganan en una casa diariamente $18\frac{3}{5}$ rs. por el padre y $12\frac{2}{3}$ rs. por un hijo, se gastan $16\frac{1}{4}$ rs. en comer y $8\frac{1}{2}$ en varias cosas ¿cuánto se ahorrará en dicha casa en 43 días?

29. $\frac{5}{7}$ de libra de seda costaron $\frac{4}{5}$ de duro ¿á cómo vale la libra?

30. Valiendo $\frac{1}{3}$ de vara $\frac{3}{8}$ duros, ¿á cómo valdrá la vara?

31. 52 cántaras costaron $\frac{7}{8}$ de onza de oro, ¿cuánto valdrá la cántara?

32. Con 250 reales se compraron $\frac{5}{9}$ de quintal, ¿á cómo vale el quintal?

33. Si $32\frac{2}{3}$ fanegas valen $152\frac{3}{4}$ reales, ¿cuánto valdrá una fanega?

34. Valiendo una libra $15\frac{1}{2}$ reales, ¿cuántas se podrán comprar con $260\frac{3}{4}$?

35. Se ha pesado un pedazo de plomo que tenía $35\frac{3}{5}$ libras y se ha pagado á razón de $3\frac{1}{2}$ reales la libra; éste se ha repartido entre 4 individuos dejando un sobrante de $2\frac{5}{7}$ libras, cuánto plomo habrá recibido cada uno y cuánto habrá pagado por él?

36. Cuál es el valor de $\frac{3}{5}$ de $\frac{2}{7}$ de $\frac{5}{9}$ de 8 duros?

37. Cuál es la 2.ª potencia ó cuadrado de los quebrados $^2/_3$ $^5/_4$ y $^6/_7$?
38. Elevar á la tercera potencia los quebrados $^5/_9$, $^2/_5$ y $^6/_{11}$.
39. Elevar á la cuarta potencia el número 5 $^2/_3$.
40. Cuántos metros son 66 Km., 8 Hm., 9 m. y 7 mm.?
41. Expresar la cantidad anterior en kilómetros.
42. Id. id. id. en decámetros.
43. Cuántos metros cuadrados son 6 Hm^2, 6 M^2 y 8 dm^2?
44. Cuántos metros cúbicos hacen 7 Hm^3, 18 Dm^3, 125 M^3 y 24 cm^3?
45. Expresar en hectólitros la cantidad 9 Kl, 7 Dl, 8 L y 7 dl.
46. Expresar en kilógramos la cantidad 6 toneladas 8 qqs. 65 kg., 9 Dg. y 6 cg.
47. Id. en qqs. la cantidad anterior.
48. Cuántas áreas son 6 hect. 8 ár. y 96 centiáreas?
49. Reducir á incomplejo de mrs. el número 66 duros 18 rs: y 15 mrs.
50. Id. á id. de duros el mismo número anterior.
51. Id. á id. de reales el mismo número.
52. Id. á id. de quintal el número 2 @, 18 libras y 9 onzas.
53. Id. á id. de libra el número anterior.
54. Reducir á complejo el número 68752 minutos.
55. Id. á id. el número 72456 onzas.
56. Id. á id. el número $^3/_7$ de quintal.
57. Id. á id. el número 0'628 @.
58. Sobre una mesa había tres barras de oro: una pesaba 5 libras, 8 onzas y 3 adarmes, otra 6 libras, 9 onzas y 5 adarmes y la otra 8 libras, 12 onzas y 10 adarmes ¿cuánto pesaban entre todas?
59. En una bodega había tres cubas de vino: la primera tenía 68 Hl., 9 Dl., 7 L. y 6 dl. la 2.ª 125 Hl., 6 Dl. 8 L y 4 cl. y la 3.ª 18 Hl., 6 Dl. y 24 cl. ¿cuánto vino hay en la bodega?
60. De una piedra que tenía 45 M^3, 76 dm^3, y 125 mm^3, se quitaron 2468 dm^3, cuánto quedó en la piedra?
61. De qué edad murió un sugeto que nació en 5 de Octubre de 1803 y falleció el día 3 de Mayo de 1873?
62. Un solar tiene de superficie 129 varas cuadradas y 5 piés cuadrados, se ha construido en él una casita de 34 va-

ras cuadradas y 8 piés cuadrados ¿cuánto queda de solar?

63. Cuánto valen 245 @ á 5 pesetas y 3 rs. la @?

64. Cuánto importan 17 fanegas, 3 celemines y 2 cuartillos á 56 rs. la fanega?

65. Cuánto pesarán 125 fanegas, 7 celemines y 3 cuartillos en la suposición de que una fanega pese 3 @, 17 libras y 3 onzas?

66. Valiendo un kilógramo 6 rs. y 17 mrs: cuánto valdrán 6 qq.s métricos y 18 gramos?

67. Pesando un hectólitro de trigo 126 kilógramos y 7 gramos, cuánto pesarán 17 litros y 4 decílitros?

68. Una locomotora con movimiento uniforme ha recorrido en una hora 5 km., 9 metros y 8 dm., cuántos recorrerá en 16 horas, 12 minutos y 20 segundos?

69. 15 metros costaron 18 duros, 15 rs. y 28 mrs. ¿á cómo costó el decámetro.

70. 78 kg. y 6 gramos costaron 160 rs. y 20 mrs. ¿cuánto valdrá un quintal métrico?

71. Una locomotora ha recorrido en una hora con movimiento uniforme 5 Km., 7 Hm. y 12 metros ¿cuánto tardará á recorrer con el mismo movimiento una distancia de 642 Km., 9 Hm. y 24 metros?

72. Con 3 onzas, 7 duros y 16 rs. se compraron 58 quintales ¿á cómo costó el quintal?

73. Con 1300 duros se compraron 125 fanegas, 11 celemines y 3 cuartillos ¿á cómo costaría la fanega?

74. Cuánto valdrá una libra de azúcar en la suposición de que 5 @s., 10 libras y 6 onzas hayan costado 20 duros, 10 rs. y 10 mrs?

75. Una piedra de molino tiene 526 piés cúbicos de volúmen, suponiendo que un pié cúbico de esta piedra pesa 6 @s. y 15 libras ¿cuánto pesará la piedra?

76. Otra piedra pesa 245 @s., 20 libras y 12 onzas ¿cuántos piés cúbicos tendrá en la suposición de que el pié cúbico de ésta pese como el de la anterior?

77. Cuántos metros son 5780 varas?

78. Cuántos Kg. son 685 @s?

79. Cuántos Hl. son 1600 fanegas de grano?

80. Cuántos Dl. son 378 cántaras de vino?

81. Cuántos litros son 65 @s. de aceite?

82. Cuántos metros cuadrados son 1250 varas cuadradas?

83. Cuántos metros cúbicos son 565 varas cúbicas?
84. Cuántas varas son 245'25 metros?
85. Cuántas @s. hacen 720 kilógramos?
86. Cuántas fanegas son 125 hectólitros de grano?
87. Cuántas cántaras componen 628 decálitros de vino?
88. Cuántas @s. de aceite son 5772 litros?
89. Cuántas varas cuadradas hacen 72 m^2 y 45 dm^2?
90. Cuántas varas cúbicas son 7 Dm^3, 78 m^3 y 325 dm^3?
91. 60 fanegas de tierra de marco real ¿cuántas hectáreas hacen?
92. 85 hect., 8 áreas y 25 centiáreas, cuántas fanegas son?
93. 52 fanegas superficiales de á 3000 varas cuadradas ¿cuántas áreas son?
94. 18 @s., 15 libras y 6 onzas, cuántos kilógramos componen?
95. 7 varas, 2 piés y 6 pulgadas, cuántos metros son?
96. 15 cántaras y 6 azumbres, cuántos litros son?
97. 78 quintales antiguos cuántos quintales métricos son?
98. Valiendo una vara 15 rs., cuánto valdrán 12 metros?
99. Valiendo una cántara $8\frac{1}{2}$ rs., cuánto valdrá el litro?
100. Valiendo una @ 70 rs., cuánto valdrá el kilógramo?
101. Si un metro vale 80 rs., cuánto valdrá una vara?
102. Si un kilógramo vale 7 rs., cuánto valdrá la @?
103. Si un litro vale $2\frac{1}{4}$ rs., cuánto valdrá una cántara?

FIN DE LA 3.ª PARTE.

CUARTA PARTE.

RAÍCES DE LOS NÚMEROS. RAZONES Y PROPORCIONES. REGLAS DE TRES Y OTRAS QUE DE ESTAS SE DERIVAN. REGLAS CONJUNTA, DE ALIGACIÓN Y FALSA POSICIÓN.

CAPÍTULO 1.°

Preliminares.

276. Qué es raíz de un número y cómo se clasifican las raíces?

Raíz de un número es otro número que, tomado cierto número de veces por factor, reproduce el número propuesto.

Las raíces se clasifican en 1.ª 2.ª, ó cuadrada, 3.ª ó cúbica, 4.ª, 5.ª, 6.ª etc

La *raíz* 1.ª de un número cualquiera es el mismo número, así como una raíz cualquiera de la unidad es siempre la unidad.

Raíz 2.ª ó cuadrada de un número es otro número que multiplicado por sí mismo, reproduce el número propuesto. Así la raíz 2.ª ó cuadrada de 4 es 2, porque $2\times2=4$: la raíz cuadrada ó 2.ª de 25 es 5, porque $5\times5=25$.

Raíz 3.ª ó cúbica de un número es otro número que tomado tres veces por factor reproduce el número propuesto. Así la raíz cúbica ó 3.ª de 8 es 2, porque $2\times2\times2=8$: la raíz cúbica ó 3.ª de 27 es 3, porque $3\times3\times3=27$.

Raíz cuarta de un número es otro número que tomado cuatro veces por factor, reproduce el número propuesto. Así la raíz 4.ª de 16 es 2, porque $2\times2\times2\times2=16$.

Finalmente raíz *n* de un número es otro número que tomado *n* veces por factor reproduce el número propuesto.

277. Cómo se indican las raíces de los números?

Colocando debajo del signo $\sqrt{\;}$ que hemos llamado radical, el número cuya raíz queremos indicar; y en la abertura del mismo un número que indique el grado de la raíz, y que por lo mismo se llama *índice.* Así para indicar la raíz cúbica ó 3.ª del número 525 se hará en esta forma: $\sqrt[3]{525}$ y se lee raíz cúbica de 525.

Para la raíz 2.ª ó cuadrada se suprime el *índice* y sólo se escribe el número debajo del radical. Así la raíz cuadrada de 64 se indica $\sqrt{64}$ y se lee raíz cuadrada de 64.

TEOREMA 56.

278. Qué propiedades tienen las raíces de los números menores que la unidad?

La raíz cualquiera de un número menor que 1 *es también menor que* 1; *pero mayor que dicho número.*

Dem. Sea $^{2}[_{3}$ el número menor que 1; digo que la raíz cuadrada, por ejemplo, de $^{2}[_{3}$ es menor que 1 y mayor que $^{2}[_{3}$

En efecto, 1.° la $\sqrt{^{2}[_{3}}$ no puede ser 1, ni mayor que 1; no puede ser uno, porque $1\times1=1$: tampoco puede ser mayor que 1, porque las potencias de los números mayores que 1 crecen á medida que crece su grado: (Teor. 54) luego, si no es 1, ni mayor que 1, tiene que ser menor que 1

2.° La $\sqrt{^{2}[_{3}}$ no puede ser igual á $^{2}[_{3}$, ni menor que $^{2}[_{3}$: no puede ser $^{2}[_{3}$, porque $^{2}[_{3}\times{}^{2}[_{3}$ es un número menor que $^{2}[_{3}$, tampoco puede ser menor que $^{2}[_{3}$ porque las potencias de los números menores que uno disminuyen á medida que crece su grado: (Teor. 54.) Luego si la $\sqrt{^{2}[_{3}}$ no puede ser igual á $^{2}[_{3}$, ni menor que $^{2}[_{3}$, precisamente será mayor que $^{2}[_{3}$, conforme al enunciado.

TEOREMA 57.

279. Qué propiedad tienen las raíces de los números mayores que la unidad?

La raíz cualquiera de un número mayor que la unidad es también mayor que la unidad; pero menor que dicho número.

Dem. Sea $^{3}|_{2}$ el número mayor que 1: digo que la raíz cuadrada, por ejemplo, de $^{3}|_{2}$ es mayor que 1; pero menor que $^{3}|_{2}$.

En efecto, 1.° $\sqrt{^{3}|_{2}}$ no puede ser 1, ni menor que 1: no puede ser 1, porque $1\times1=1$; no puede ser menor que 1, porque la 2.ª potencia de un número menor que 1 es también menor que 1: luego, si la $\sqrt{^{3}|_{2}}$ no puede ser 1, ni menor que 1, precisamente será mayor que 1.

2.° $\sqrt{^{3}|_{2}}$ no puede ser igual á $^{3}|_{2}$, ni mayor que $^{3}|_{2}$: no puede ser igual que $^{3}|_{2}$, porque $^{3}|_{2}\times{}^{3}|_{2}$ es mayor que $^{3}|_{2}$; tampoco puede ser mayor que $^{3}|_{2}$, porque las potencias de los números mayores que la unidad crecen á medida que crece su grado (Teor 54); luego, si $\sqrt{^{3}|_{2}}$ no puede ser igual á $^{3}|_{2}$, ni mayor que $^{3}|_{2}$, será menor que $^{3}|_{2}$, conforme al enunciado.

CAPITULO II.

Extracción de las raíces cuadrada y cúbica.

ARTÍCULO 1.°

Raíz cuadrada de los números enteros.

280. Cuántos casos debemos distinguir al extraer la raíz cuadrada de los números enteros?

Dos: 1.° que el número sea menor que 100: 2.° que sea mayor que 100.

281. Cómo se extrae la raíz cuadrada de un número menor que 100?

Sabiendo de memoria los cuadrados perfectos y sus raíces correspondientes comprendidos entre 1 y 100, que son los siguientes:

Cuadrados perfectos........	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100
Raíces cuadradas exactas.	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10

Sabido esto, si el número, cuya raíz cuadrada queremos extraer, es alguno de los cuadrados perfectos, su raíz será el número que le corresponde y entonces se llama *exacta*; pero si es algún otro de los no comprendidos en la primera línea, no la tendrá exacta, y tomaremos como raíz la del mayor cuadrado contenido en dicho número, la cual se llama *raíz entera*

Así, la $\sqrt{36}=6$; la $\sqrt{64}=8$; la $\sqrt{40}=6$ *entera*; la $\sqrt{68}=$ 8 *entera*.

TEOREMA 58.

281. En cuánto se diferencia la raíz cuadrada entera de un número de la raíz verdadera del mismo?

La raíz entera de un número se diferencia de la verdadera del mismo en ménos de una unidad.

Dem. En efecto, la verdadera $\sqrt{68}$, por ejemplo, está comprendida entre 8 y 9, es decir, que es mayor que 8 y menor que 9, y como entre 8 y 9 la diferencia es 1, se infiere que la raíz entera 8 se diferencia de la verdadera en ménos de uno.

TEOREMA 59.

282. El número que no tenga raíz cuadrada exacta en número entero, la tendrá en número fraccionario?

Si un número no tiene raíz cuadrada exacta en número entero tampoco puede tenerla en número fraccionario.

Dem. Sea el número 54 que no tiene raíz cuadrada exacta en número entero y cuya raíz entera es 7: digo que tampoco puede tener raíz cuadrada exacta en número fraccionario.

En efecto, supongamos que la $\sqrt{54}$ sea $7\,{}^5/_8$, en este caso, reducido este mixto á quebrado irreducible, ó sea $\frac{59}{8}$, elevado á la segunda potencia será igual á 54, esto es, $(\frac{59}{8})^2=$ 54; pero si $\frac{59}{8}$ es irreducible, su 2.ª potencia $(\frac{59}{8})^2$ es también irreducible, porque, según el teorema 55, si un quebrado irreducible se eleva á una potencia, el nuevo quebrado será también irreducible; en cuyo caso tendríamos que un quebrado irreducible $(\frac{59}{8})^2$ sería igual al número entero 54, lo cual es imposible, según el teorema 52, porque un quebrado irreducible no puede ser igual á un número entero: luego la $\sqrt{54}$ no puede ser 7 $^{3}/_{8}$ conforme al enunciado.

283. A qué se llama resíduo en la raíz cuadrada?

Al esceso que hay entre el número entero y el mayor cuadrado en él contenido. Así al extraer la raíz cuadrada de 54 tendrémos un *resíduo* de 5, porque el esceso entre 54 y el mayor cuadrado 49 en él contenido es 5.

284. Si el número cuya raíz cuadrada queremos extraer es mayor que 100, su raíz cuadrada será mayor ó menor que 10?

La raíz cuadrada verdadera de un número mayor que 100, es siempre mayor que 10; pero la entera es siempre 10 hasta llegar al número 121, que es el cuadrado perfecto de 11.

TEOREMA 60.

285. De qué partes consta el cuadrado de todo número mayor que 10?

Como todo número mayor que 10 *se compone de decenas y unidades* (1) *su cuadrado, según el teorema* 16, *constará de tres partes, á saber: del cuadrado de las decenas, más el duplo del producto de las decenas por las unidades, más el cuadrado de las unidades.*

Dem. Sea el número 46: digo que el cuadrado de este número es igual á 4^2 centenas, $+2.4.6$ decenas, $+6^2$ unidades.

En efecto, el número 46 se puede descomponer en 4 decenas + 6 unidades y por consiguiente su cuadrado, según el teorema 16, será igual al cuadrado del primer sumando 4^2 + el duplo del 1.° por el 2.° 2.4.6 + el cuadrado del 2.° 6^2.

Pero el cuadrado de las decenas ha de darnos un número justo de centenas; el duplo de las decenas por las unidades nos dará un número justo de decenas, y el cuadrado de las unidades, un número justo de unidades; de donde se deduce que el cuadrado de 46 será 4^2 centenas + 2.4.6 decenas $+6^2$

(1) Exceptuando los que terminan en cero, que carecen de unidades.

unidades = 16 centenas + 48 decenas, + 36 unidades= 1600 + 480 + 36 = 2116 unidades.

Comprobación.

$$\begin{array}{r} 46 \\ \times 46 \\ \hline 276 \\ 184 \\ \hline 2116 \end{array}$$

TEOREMA 61.

286 A qué es igual la diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos?

La diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos, ó que se diferencian en una unidad, es igual al duplo del menor mas 1.

Dem. Sean los números a y $a+1$; digo que $(a+1)^2-a^2=2.\,a+1$.

En efecto, según el teorema 16, será: $(a+1)^2=a^2+2\,a\times 1+1^2=a^2+2a+1$.

Si de los dos miembros de esta igualdad $(a+1)^2=a^2+2a+1$ se resta la cantidad a^2, la igualdad subsistirá y tendrémos: $(a+1)^2-a^2=2a+1$, conforme al enunciado.

COROLARIO.

El resíduo de la raíz cuadrada de un número entero es siempre menor que el duplo de la raíz mas 1.

Dem. Sea el número 18 cuya raíz cuadrada entera es 4: luego su resíduo será $18-4^2$ Si la raíz cuadrada de 18 es 4, es claro que $18<5^2$ y por consiguiente si de los dos miembros de esta desigualdad se resta la misma cantidad, 4^2; la desigualdad subsistirá y tendrémos: $18-4^2<5^2-4^2$; pero, según el teorema anterior, la diferencia de los cuadrados del segundo miembro de esta desigualdad es igual al duplo del menor mas uno, es decir, igual á $2.\,4+1$: luego $18-4^2$ que es el resíduo, $<2.\,4+1$, conforme al enunciado.

287. Sabido ésto, pasemos á extraer la raíz cuadrada de un número mayor que 100 ¿cómo se ejecuta esta operación?

REGLA PRÁCTICA.

Para extraer la raíz cuadrada de un número mayor que 100 se divide el número en secciones de dos en dos cifras principiando por la derecha; se extrae la raíz cuadrada de la primera sección de la izquierda, que podrá tener una ó dos cifras: la cifra obtenida se eleva al cuadrado y éste se resta de las cifras de dicha sección; á la derecha del resíduo se baja la sección siguiente y del número así formado se separa la primera cifra de su derecha: este número sin dicha cifra se divide por el duplo de la raíz hallada y el cociente se coloca á la derecha del que nos ha servido de divisor: este número así modificado se multiplica por la misma cifra y si su producto puede restarse del dividendo más la cifra separada, la hallada será buena, si nó, es demasiado grande; se rebaja una unidad y se vuelve á comprobar del mismo modo hasta obtener la cifra verdadera, la cual se coloca en la raíz á la derecha de la ya hallada.

Si el número tuviese más secciones, al lado del resíduo que nos quede se baja la sección siguiente, se separa su primera cifra de la derecha; el que nos quede á la izquierda se divide por el duplo de la raíz hallada, y el cociente se comprueba del mismo modo que el anterior, continuando de la misma manera hasta haber bajado la última sección.

Ejemplos.

1. Extraer la raíz cuadrada del número 4564.

Operación.

$\sqrt{45.64}$	67 raíz	
96.4	12 8	
— 889	× 8	Comprobación de la cifra 8 que resulta ser grande, porque 1024 > que 964
Resíduo. 75	1024	
	12 7	
	× 7	Comprobación de la cifra 7, que es buena, porque 889 < 964
	88 9	

2.° Extraer la raíz cuadrada de 545876.

Operación.

$\sqrt{54.58.76}$	738 raíz.	
.55.8	14.3	
— 42 9	× 3	Comprobación de la cifra 3 que es buena.
1297.6	429	
— 1174 4	146.8	
Resíduo 1232	× 8	Comprobación de la cifra 8 que es buena.
	11744	

RAZONAMIENTO.

Si el número cuya raíz cuadrada queremos extraer es mayor que 100, su raíz cuadrada tendrá decenas y unidades; por consiguiente en el número propuesto estarán contenidas las tres partes de que se ha de componer su cuadrado, esto es, el cuadrado de la cifra de las decenas, el duplo del producto de las decenas por las unidades, y el cuadrado de las unidades; pero el cuadrado de las decenas nos ha de dar un número justo de centenas: luego para hallar esta cifra, habrémos de buscarla en las centenas del número propuesto (1). Se extrae, pues, la raíz cuadrada de las centenas del número, y tendrémos la cifra de las decenas de la raíz, se eleva esta cifra al cuadrado y se resta éste de las centenas del número propuesto, y á la derecha del resíduo, se colocan las cifras de las decenas y unidades: en el número así formado quedarán las otras dos partes del cuadrado, esto es, el duplo de las decenas por las unidades y el cuadrado de las unidades. Como tenemos que buscar la cifra de las unidades, y su cuadrado nos ha de dar unidades cuando menos, prescindimos de la cifra de las unidades del número propuesto (2) y el formado por las cifras que quedan á su izquierda le

---

(1) Esta es la razón de dividir el número en secciones de á dos cifras principiando á contar por la derecha, como decimos al establecer la regla práctica de esta operación.

(2) Por esto decimos en la regla: del número así formado se separa la primera cifra de la derecha.

consideramos como un producto compuesto de dos factores; uno el duplo de las decenas y el otro las unidades: luego para obtener éstas, dividirémos dicho número por el duplo de la raíz hallada: el cociente será la cifra de las unidades ó mayor que ésta. (1) Para saber si es la verdadera cifra, se comprueba colocándola á la derecha del número que nos ha servido de divisor y así modificado se multiplica por la misma cifra, (2) y si el producto se puede restar del número que nos ha servido de dividendo mas la cifra separada, la cifra será buena, y si no es demasiado grande; se rebaja una unidad y se vuelve á comprobar de la misma manera, hasta obtener la que se desea.

288. Hay que hacer alguna advertencia sobre este asunto?

Varias: 1.ª cuando al buscar la 2.ª, 3.ª etc. cifras de la raíz, el número que nos ha de servir de dividendo sea menor que el duplo de la raíz que nos ha de servir de divisor; significa que aquella cifra es *cero*, y por lo tanto se pone en la raíz y se continúa la operación bajando la sección siguiente.

2.ª Que la raíz de un número ha de tener tantas cifras como secciones de á dos se hayan hecho.

3.ª Que si en algún caso se encuentra un resíduo mayor que el duplo de la raíz más uno, la raíz hallada es menor que la verdadera.

4.ª Que los números terminados en 2, 3, 7, 8 ó número impar de ceros no tienen raíz cuadrada exacta.

ARTÍCULO 2.°

Raíz cuadrada de los quebrados.

289. Cómo se extrae la raíz cuadrada de un quebrado?

Si los dos términos del quebrado son cuadrados perfectos se extrae la raíz cuadrada de ambos términos y la del numerador se divide por la del denominador.

Dem. En efecto, $\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}=4/5$, porque $(4/5)^2=\frac{4^2}{5^2}=\frac{16}{25}$

(1) Razón por la que continuamos en la regla diciendo: este número, sin dicha cifra, se divide por el duplo de la raíz hallada.

(2) El producto así obtenido nos dá el cuadrado de las unidades, pues se multiplica la cifra de estas por si misma, y el duplo de las decenas por las unidades puesto que el que nos ha servido de divisor es este duplo, el cual se multiplica por las unidades.

Si alguno de los términos del quebrado no es cuadrado perfecto, el quebrado no tiene raíz cuadrada exacta y podrá hallarse aproximada por el método siguiente:

1.° Si el numerador no es cuadrado perfecto, pero si el denominador, en tal caso, se halla la raíz entera del numerador y se divide ésta por la exacta del denominador, y la raíz hallada se diferenciará de la verdadera en menos de una de las partes que exprese dicho divisor. Así la $\sqrt{\frac{15}{9}}=\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{9}}=\frac{3}{3}=1$ que se diferencia de la verdadera en menos de $^1/_3$.

2.° Si el denominador ó ambos términos no son cuadrados perfectos, entonces se multiplican ambos términos por un número que convierta al denominador en cuadrado perfecto, con lo cual queda la cuestión reducida al caso anterior. Así la $\sqrt{\frac{8}{5}}=\sqrt{\frac{8.5}{5.5}}=\sqrt{\frac{40}{25}}=\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{25}}={}^6/_5$ en menos de $^1/_5$.

290. A qué se llama raíz cuadrada inconmensurable?

A las raíces de los números ya sean enteros ó fraccionarios, que no la tienen exacta.

291. Cómo se halla el valor de una raíz cuadrada inconmensurable, de tal modo que su error sea menor que una parte cualquiera de la unidad?

Se multiplica el número por el cuadrado del denominador de dicha parte; se extrae la raíz cuadrada del producto y se parte por el mismo denominador.

Dem. Sea el número 7, cuya raíz cuadrada se quiere extraer con un error menor que $^1/_8$. Multiplicando 7 por $8^2=7\times64=448$, extraigo la raíz cuadrada de su producto, ó sea de 448, que es 21; y digo que $^{21}/_8$ es la raíz cuadrada de 7 en menos de $^1/_8$.

En efecto, 7.8^2 ó su igual 448 está comprendido entre 21^2 y 22^2: luego $\frac{7.8^2}{8^2}$ ó su igual 7, estará comprendido entre $\frac{21^2}{8^2}$ y $\frac{22^2}{8^2}$: luego la $\sqrt{7}$ estará comprendida entre las raíces $\frac{21}{8}$ y $\frac{22}{8}$; y como entre estos dos números hay de diferencia $^1/_8$

es claro que $^{21}/_8$ se diferencia de la $\sqrt{7}$ en menos de $^1/_8$ conforme á la regla.

292. Cómo se extrae la raíz cuadrada de los números mixtos?

Se reducen á quebrados y se extrae su raíz por las reglas dadas para éstos. Así la $\sqrt{15^3/_8}=\sqrt{\frac{15.8+3}{8}}\sqrt{\frac{123}{8}}=\frac{31}{8}=3^7/_8$

ARTÍCULO 3.°

Raíz cuadrada de los decimales.

293. Cómo se extrae la raíz cuadrada de los números decimales?

Si el número se compone de parte entera y decimal, se hace que la parte decimal tenga un número par de cifras, añadiendo un *cero* á su derecha si es impar, y luego se extrae la raíz cuadrada como si fuesen sólamente enteros, separando después de la derecha de la raíz tantas cifras decimales como pares de éstas contenga el número propuesto.

Ejemplo.

Extraer la raíz cuadrada del número 726'118.

Operación.

```
√7.2 6'1 1.8 0 | 26'94 raíz con error de menos 1 centésima
 3 2 6         |    4.6
—2 7 6         |    ×6        5 3 8.4
    5 0 1.1    |  2 7 6          ×4
—   4 7 6 1    |  5 2.9      2 1 5 3 6
     2 5 0 8.0 |    ×9
—    2 1 5 3 6 |4 7 6 1
       3 5 4 4 |
```

Si el número tiene sólo parte decimal, se hace que éste tenga número par de cifras, añadiendo á su derecha un cero, si es impar; se pone cero enteros en la raíz, y luego se extrae la raíz del número, de la misma manera que si fuera entero.

Ejemplos.

1.° Extraer la raíz cuadrada de 0'875.

Operación.

$\sqrt{0'87\ 5\ 0}$	0'93 en menos de una centésima.
6 5.0	18.3
—5 4 9	3
1 0 1	54 9

2.° Extraer la raíz cuadrada de 0'00563.

Operación.

$\sqrt{0'00.56\ 30}$	0'075 en menos de una milésima.
56	14.5
73 0	5
—72 5	725
5	

Notas. 1.ª En la extracción de raíces de los enteros, puede aproximarse la raíz por medio de los decimales, hasta que se diferencie de la verdadera en menos de una unidad de un orden decimal cualquiera, sin más que añadir al último resíduo un par de ceros por cada cifra decimal que se quiera obtener en la raíz.

2.ª La raíz cuadrada de los quebrados puede extraerse también reduciéndolos 1.° á decimales, y extrayendo la raíz cuadrada de éstos, método preferible al ordinario, por ser más sencillo que aquel.

ARTÍCULO 4.°

Raíz cúbica de los números enteros.

294. Cuántos casos debemos distinguir al extraer la raíz cúbica de los números enteros?

Dos: 1.° que el número sea menor que 1000: 2.° que sea mayor que 1000.

295. Cómo se extrae la raíz cúbica de un número menor que 1000?

Sabiendo de memoria los cubos perfectos que hay entre los números 1 y 1000 y sus correspondientes raíces, los cuales son los siguientes:

Cubos perfectos.	1^3	2^3	3^3	4^3	5^3	6^3	7^3	8^3	9^3	10^3
	‖	‖	‖	‖	‖	‖	‖	‖	‖	‖
	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000
Raíces cúbicas....	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Sabido esto, si el número es alguno de los cubos perfectos, su raíz cúbica será el número á él correspondiente, y entonces se llama *exacta*; pero si es algún otro de los no comprendidos en la primera línea, no la tendrá exacta, y tomaremos como raíz la del mayor cubo contenido en dicho número, la cual se llama *raíz entera*.

Así la $\sqrt[3]{64}=4$; la $\sqrt[3]{343}=7$: la $\sqrt[3]{415}=7$, entera.

TEOREMA 62.

296. En cuánto se diferencia la raíz cúbica entera de un número, de la raíz cúbica verdadera del mismo?

La raíz cúbica entera de un número se diferencia de la verdadera del mismo en menos de una unidad.

Dem. En efecto, la verdadera $\sqrt[3]{415}$, v. g. está comprendida entre 7 y 8, y como entre 7 y 8 la diferencia es uno, se infiere que entre la raíz cúbica entera 7 y la verdadera, la diferencia es menos que uno.

TEOREMA 63.

297. El número que no tenga raíz cúbica exacta en número entero ¿la tendrá en fraccionario?

Si un número no tiene raíz cúbica exacta en número entero, tampoco la tiene en número fraccionario.

Dem. Sea el número 82 que no tiene raíz cúbica exacta en número entero, y cuya raíz cúbica entera es 4: digo que 82 tampoco tiene raíz cúbica exacta en número fraccionario.

En efecto, supongamos que la $\sqrt[3]{82}$ sea $4\,{}^5/_8$; en este caso, reducido este mixto á quebrado irreducible, ó sea $\frac{37}{8}$, y elevado á la 3.ª potencia ó cubo, será igual á 82, esto es, $\left(\frac{37}{8}\right)^3=82$; pero si, como suponemos, $\frac{37}{8}$ es irreducible, su 3.ª potencia ó $\left(\frac{37}{8}\right)^3$ también lo será, según el teorema 55, y por consiguiente resultaría un quebrado irreducible igual á un número entero, lo cual es imposible, según lo demostrado en el teorema 52: luego la $\sqrt[3]{82}$ no puede ser $4\,{}^5/_8$, según el enunciado.

298. A qué se llama resíduo en la raíz cúbica?

Al esceso que hay entre el número entero y el mayor cubo en él contenido. Así al extraer la raíz cúbica del número 82 tendrémos un resíduo de 18, porque el esceso entre 82 y el mayor cubo 64 en él contenido es 18.

299. Si el número, cuya raíz cúbica queremos extraer, es mayor que 1000 será aquella mayor ó menor que 10?

La raíz cúbica verdadera de un número mayor que 1000 es siempre mayor que 10; pero la entera es siempre 10 hasta llegar al número 1331, que es el cubo de 11.

TEOREMA 64.

300. De qué partes consta el cubo ó tercera potencia de todo número mayor que 10?

Como todo número mayor que 10 *se compone de decenas y unidades* (1), *según el teorema* 18, *constará de cuatro partes, á saber*: 1.ª *el cubo de las decenas*, 2.ª *el triplo del producto del cuadrado de decenas por unidades*, 3.ª *el triplo del producto de decenas por el cuadrado de unidades, y* 4.ª *el cubo de las unidades*.

Dem. Sea el número 54: digo que el cubo de este núme-

(1) Exceptuando los terminados en cero que carecen de unidades.

ro es igual á 5^3 miles$+3.5^2.4$ centenas$+3.5.4^2$ decenas $+4^3$ unidades.

En efecto, el número 54 se puede descomponer en 5 decenas+4 unidades: luego, según el teorema 18, su cubo será igual al cubo del primer sumando 5^3+el triplo del cuadrado del 1.° por el 2.° $3.5^2.4$+el triplo del 1.° por el cuadrado del 2.° $3.5.4^2$+el cubo del 2.° 4^3.

Pero el cubo de las decenas ha de darnos un número justo de miles; el triplo del cuadrado de decenas por unidades nos dará un número justo de centenas; el triplo de las decenas por el cuadrado de unidades dará un número justo de decenas, y el cubo de unidades, un número justo de unidades; de donde se deduce que el cubo de 54 será 5^3 miles; $+3.5^2.4$ centenas $+3.5.4^2$ decenas; $+4^3$ unidades $=125$ miles $+300$ centenas$+240$ decenas $+64$ unidades$=125000$ $+30000+2400+64=157464$ unidades, conforme al enunciado.

TEOREMA 65.

301. A qué es igual la diferencia de los cubos de dos números consecutivos?

La diferencia de los cubos de dos números consecutivos, ó que se diferencian en una unidad, es igual al triplo del cuadrado del menor, más el triplo del menor, más 1.

Dem. Sean los números a y $a+1$: digo que $(a+1)^3-a^3=3a^2+3a+1$.

En efecto, $(a+1)^3=a^3+3a^2\times1+3a\times1^2+1^3$ (Teor. 18) Si de los dos miembros de esta igualdad se resta una misma cantidad a^3 resultará otra igualdad en esta forma $(a+1)^3-a^3=3a^2\times1+3a\times1^2+1^3$ pero como la multiplicación de una cantidad por 1 dá la misma cantidad, y las potencias de uno son siempre 1, tendrémos, finalmente que

$$(a+1)^3-a^3=3a^2+3a+1,$$

conforme al enunciado.

COROLARIO.

El resíduo de la raíz cúbica de un número entero es menor que el triplo del cuadrado de su raíz cúbica entera, más el triplo de la misma raíz+1.

Dem. Sea el número 75, cuya raíz cúbica entera es 4, el resíduo será $75-4^3$. Si la raíz cúbica de 75 es 4, es claro que $75<5^3$ y por consiguiente $75-4^3<5^3-4^3$; pero, según el teorema anterior, la diferencia de los cubos del segundo miembro de esta desigualdad es $3.4^2+3.4+1$: luego si en dicha desigualdad ponemos en lugar de su segundo miembro su igual, tendrémos que $75-4^3<3.4^2+3.4+1$, conforme al enunciado.

302. Sabido esto, pasemos á extraer la raíz cúbica de un número mayor que 1000: ¿cómo se ejecuta esta operación?

REGLA PRÁCTICA.

Para extraer la raíz cúbica de un número mayor que 1000, *se divide dicho número en secciones de á tres cifras principiando por la derecha; se extrae la raíz cúbica de la primera sección de la izquierda que podrá tener una, dos ó tres cifras y por consiguiente será menor que mil, la cifra que nos resulte se eleva al cubo, y éste se resta de dicha sección. A la derecha del resíduo se baja la sección siguiente del número propuesto, se separan las dos primeras cifras de su derecha, y las que queden á su izquierda se dividen por el triplo del cuadrado de la raíz hallada, el cociente que se obtenga nos dará la 2.ª cifra de la raíz ó mayor que ella. Para comprobarla se agrega á la derecha de la 1.ª y el número formado por las dos se eleva al cubo, si éste se puede restar de las dos secciones separadas en el número propuesto, la cifra será buena y si no será demasiado grande, en cuyo caso se rebaja una unidad y se comprueba del mismo modo.*

También se puede comprobar, y nosotros preferimos este medio, por ser más matemático, formando las otras tres partes que nos faltan para obtener el cubo completo, para lo cual se suma *el triplo del cuadrado de la raíz hallada multiplicado por la cifra que se comprueba; el triplo de la raíz hallada multiplicado por el cuadrado de la cifra, que se comprueba, y el cubo de esta cifra*, y si la suma de éstos tres números no se puede restar del que nos ha servido de dividendo, más las dos cifras separadas, la cifra será demasiado grande y se rebaja una unidad para volverla á comprobar.

Hecho esto, y hallado el resíduo se baja á su derecha la sección siguiente y se procede del mismo modo que para ha-

llar la anterior cifra, hasta haber bajado todas las secciones del número propuesto.

Razonamiento. Si el número cuya raíz cúbica queremos extraer, es mayor que 1000, su raíz cúbica tendrá decenas y unidades; y de consiguiente en el número propuesto estarán contenidas las cuatro partes de que hemos hablado en el teorema 64; pero el cubo de las decenas nos ha de dar un número justo de miles; luego para hallar esta cifra, habrémos de buscarla en los miles del número propuesto (*a*). Se extrae la raíz cúbica de los miles de dicho número y tendrémos la cifra de las decenas de la raíz; se eleva esta cifra al cubo, y se resta éste de los miles del número propuesto. A la derecha del resto se baja la sección siguiente, y en el número formado por el resto y esta sección quedarán las otras tres partes del cubo de la raíz. Como tenemos que buscar la cifra de las unidades, y el cubo de éstas nos ha de dar unidades cuando ménos, prescindimos de esta cifra en el resto; y como el triplo de las decenas por el cuadrado de unidades, nos ha de dar cuando ménos decenas, prescindimos también de la cifra de las decenas del mismo resto, (*b*) y en el número que componen las cifras que quedan á la izquierda estará comprendido el triplo del cuadrado de las decenas por las unidades, número que podemos considerar compuesto de dos factores, á saber: *triplo del cuadrado de decenas* uno, y *unidades* otro: luego para obtener éstas, dividirémos dicho número por el triplo del cuadrado de las decenas, y el cociente obtenido será la cifra de las unidades, ó mayor que ésta, (*c*) Para saber si es la verdadera, se comprueba por uno de los medios dichos en la regla, y se continúa del mismo modo hasta haber bajado todas las secciones del número, y por cada sección se obtendrá una cifra en la raíz.

(*a*) Esta es la razón de dividir el número en secciones de á tres cifras como decimos en la regla práctica.

(*b*) Por esto decimos en la regla: se separan las dos primeras cifras de la derecha del número así formado.

(*c*) Razón por la que decimos: y las que quedan á la izquierda se dividen por el triplo del cuadrado de la raíz hallada.

Ejemplos.

1.° Extraer la $\sqrt[3]{275456}$

Operación.

$\sqrt{}$ 275 456	65
Cubo de la cifra 6,—216	108 triplo del cuadrado de las decenas.
Resta. 594. 56	$\times$ 5 cociente de 594 por 108.
Suma de las 3 partes 586. 25	540 centenas, triplo del cuadrado de decenas por unidades.
Resíduo. . . . . . . »»8 31	+450 decenas, triplo de las decenas por el cuadrado de unidades.
	+125 unidades, cubo de unidades
	58625 suma de las tres par-

tes, menor que 59456; luego la cifra 5 es buena.

2.° Extraer la $\sqrt[3]{53458476}$

Operación.

$\sqrt{}$ 53.458.476	376
—27	27 triplo de 3^2
Resto=264.58	$\times$9 cociente de 264 por 27.
—23653	243. triplo de $3^2\times9$ unidades.
28054 76	729 triplo de 3 por 9^2
24943 76	729.. cubo de 9.
311100	32319, suma de las tres partes>

26458: luego la cifra 9 es grande, se rebaja una unidad y se comprueba la cifra 8 en la forma siguiente:

27.... triplo de 3^2.
$\times$8.... nueva cifra de comprobación.

216.... triplo de $3^2\times8$
576.. triplo de 3×8^2
512. cubo de 8

27872 suma de las tres partes$>$26458: luego la cifra 8 también es grande, se rebaja otra unidad y se comprueba la cifra 7, de la misma manera.

27.... triplo de 3^2
$\times$7.... nueva cifra de comprobación.

189 triplo de $3^2\times7$
441.... triplo de 3×7^2
343.. cubo de 7.

23653 suma de las tres partes$<$26458: luego la cifra 7 es buena, la coloco en la raíz y resto la suma obtenida.

Para hallar la 3.ª cifra, bajo á la derecha del resíduo la sección siguiente, y separo las dos primeras cifras de la derecha, y el número formado por las que quedan á la izquierda le divido por el triplo del cuadrado de la raíz hallada, y compruebo su cociente de la misma manera que comprobé la 2.ª en la forma siguiente:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Número que sirve de dividendo } 28054\\ \text{Id. de divisor } 3.37^2=4107\end{array}\right\}6 \text{ cociente.}$$

Comprobación de la cifra 6.

4107.... triplo de 37^2
$\times$ 6

24642... centenas; triplo de $37^2\times6$
3396.. decenas; triplo de 37×6^2
216.. unidades; cubo de 6

2498376 suma de las tres partes, menor que 2805476: luego la cifra 6 es buena, la coloco en la raíz, resto la suma anterior del número formado por el que me ha servido de dividendo y por las dos cifras separadas, dándome por resultado final que la $\sqrt[3]{53458476}=376$ con un resíduo de 311100.

303. Hay que hacer alguna advertencia sobre este asunto?

Varias: 1.ª Cuando al buscar la 2.ª, 3.ª etc. cifra de la raíz, el número que ha de servir de dividendo sea menor que el triplo del cuadrado de la raíz hallada, que ha de servir de divisor, significa que aquella cifra es *cero*, por lo tanto se escribe *cero* en la raíz y se continúa la operación bajando la sección siguiente.

2.ª Que la raíz ha de tener tantas cifras como secciones se hayan hecho en el número propuesto.

3.ª Que si en algún caso se encuentra un resíduo mayor que el triplo del cuadrado de la raíz hallada, mas el triplo de la misma raíz, mas 1, la raíz hallada es menor que la verdadera.

ARTÍCULO 5.°

Raíz cúbica de los quebrados.

304. Cómo se extrae la raíz cúbica de los quebrados?

Si los dos términos del quebrado son cubos perfectos, se extrae la raíz cúbica de ambos términos y se divide la del numerador por la del denominador.

Dem. En efecto la $\sqrt[3]{\frac{27}{64}}=\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}}={}^3/_4$, porque $({}^3/_4)^3=\frac{3^3}{4^3}={}^{27}/_{64}$.

Si alguno de los têrminos del quebrado no es cubo perfecto, el quebrado no tiene raíz cúbica exacta y podrá hallarse aproximada por el método siguiente:

1.° Si el numerador no es cubo perfecto, pero sí el denominador, en tal caso, se halla la raíz cúbica entera del numerador y se divide por la exacta del denominador; y la raíz hallada se diferenciará de la verdadera en ménos de una de las partes que expresa dicho divisor.

Así la $\sqrt[3]{\frac{24}{27}}=\frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{27}}={}^2/_3$ que se diferencia de la verdadera en ménos de un tercio.

2.° Si el denominador ó ambos términos no son cubos perfectos, entonces se multiplican ambos términos por un número que convierta al denominador en cubo perfecto, con lo cual queda reducida la cuestión al caso anterior. Así la

$\sqrt[3]{\frac{16}{7}}=\sqrt[3]{\frac{16.7^2}{7.7^2}}=\sqrt[3]{\frac{784}{343}}=\frac{\sqrt[3]{784}}{\sqrt[3]{343}}={}^9/_7$ que se diferencia de la verdadera en ménos de ${}^1/_7$.

305. A qué se llama raíz cúbica inconmensurable?

A las raíces de los números, ya sean enteros ó fraccionarios, que no la tienen exacta.

306. Cómo se halla el valor de la raíz cúbica inconmensurable de tal modo que su error sea menor que una parte alícuota de la unidad?

Se multiplica el número dado por el cubo del denominador de la parte alícuota, se extrae la raíz cúbica de este producto, y ésta se divide por el denominador de dicha parte alícuota.

Dem. Sea el número 12 cuya raíz cúbica se quiere extraer con un error menor que ${}^1/_5$. Multiplicando 12 por $5^3=12\times 125=1500$, extraigo la raíz cúbica de este producto, ó sea de 1500, que es 11; y digo que ${}^{11}/_5$ es la raíz cúbica de 12 en ménos de ${}^1/_5$.

En efecto, 12×5^3 está comprendido 11^3 y 12^3: luego $\frac{12\times5^3}{5^3}$ ó su igual 12, estará comprendido entre $\frac{11^3}{5^3}$ y $\frac{12^3}{5^3}$:

luego la $\sqrt[3]{12}$ estará comprendida entre las raíces $\frac{11}{5}$ y $\frac{12}{5}$, y como entre estos dos números hay $^1/_5$ de diferencia, es claro que $^{11}/_5$ se diferencia de la raíz cúbica de 12 en ménos de $^1/_5$, conforme al enunciado.

307. Cómo se extrae la raíz cúbica de los números mixtos?

Se reducen á quebrados y se extrae su raíz por las reglas dadas para estos.

ARTÍCULO 6.°

Raíz cúbica de los decimales.

308. Cómo se extrae la raíz cúbica de los números decimales?

Si el número se compone de parte entera y decimal, se hace que el número de cifras decimales sea tres ó múltiplo de tres, añadiendo para ello y á su derecha uno ó dos ceros, lo cual no altera su valor; luego se extrae la raíz cúbica del número, como si sólamente fuese entero, separando de la derecha de la raíz tantas cifras decimales como secciones de á tres tenga la parte decimal del número propuesto.

Si solo tuviese parte decimal, se pone cero enteros en la raíz y luego se extrae la raíz, como si fuesen enteros, después de haber hecho que el número de cifras decimales sea tres ó múltiplo de tres.

Ejemplos.

1.° Extraer la raíz cúbica del número 85'0465.

Operación.

$\sqrt[3]{85.'046\ 500}$ 4'39 en menos de una centésima.

—64	48	5547
210.46	×3	× 9
—155 07	144 cens.	49923 cens.
55395. 00	108 decs.	10449 decs.
—50975 19	27 unids.	729 unids.
Resíduo. 4419 81	15507	5097519

2.° Extraer la $\sqrt[3]{0'47283}$

Operación.

	$\sqrt[3]{0'472.830}$	0'77 en menos de una centésima.
	—343	147
	1298.30	× 7
	—1135 33	1029 cens.
Resíduo. .	162 97	1029 decs.
		343 unids.
		113533

Notas. 1.ª En la extracción de la raíz cúbica de los enteros puede aproximarse ésta por medio de los decimales, hasta que se diferencie de la verdadera en menos de una unidad de un orden decimal cualquiera, sin más que añadir al último resíduo tres ceros por cada cifra decimal que se quiera obtener en la raíz.

2.ª La raíz cúbica de los quebrados puede extraerse también reduciéndolos primero á decimales y extrayendo la raíz cúbica de éstos, método preferible al ordinario, por ser más sencillo que aquél.

CAPÍTULO 3.°

Razones y proporciones.

ARTÍCULO 1.°

Preliminares.

309. Qué es razón de dos números y de cuántas maneras es?

Se llama razón de dos números al resultado de la comparación de dichos números: y como esta comparación puede hacerse, ya para ver el esceso del uno sobre el otro, ya para ver las veces que el uno contiene al otro, se deduce que la razón puede ser de dos maneras: *aritmética* ó por diferencia, y *geométrica* ó por cociente.

310. Qué es razón *aritmética* de dos números?

La diferencia que hay entre dos números se llama razón *aritmética* ó por diferencia. Así la razón aritmética de 6 á 2 es 4, la de 9 á 4 es 5.

311. Cómo se escribe una razón aritmética?

Poniendo un punto entre los dos números, que se lee: *es aritméticamente á*; v. g. 9. 3 se lee 9 es aritméticamente á 3.

312. Cómo se llaman los números que entran en esta razón?

El 1.° se llama antecedente; el 2.° consecuente; así en el ejemplo anterior 9 es el antecedente y 3 el consecuente, 6 es la razón: el antecedente y consecuente juntos se llaman términos de la razón.

313. Qué se deduce de ésto?

1.° Que en toda razón aritmética el antecedente es igual al consecuente mas la razón; así en la razón 9. 3=6; 9=3 +6: 2.° que el consecuente es igual al antecedente menos la razón; así 3=9—6: 3.° que la razón es igual al antecedente menos el consecuente; así 6=9—3; (1) y 4.° que la razón aritmética puede considerarse como una resta indicada en que el antecedente es el minuendo y el consecuente el sustraendo: de donde se deduce que si á los dos términos se les añade ó quita la misma cantidad la razón no varía.

314. Qué es razón *geométrica* ó por cociente de dos números?

El cociente que resulta de dividir dichos números: así la razón geométrica de 12 á 4 es 3; la de 4 á 7 es $^4/_7$.

315. Cómo se escribe la razón geométrica?

Poniendo dos puntos entre los dos números, que se leen *es geométricamente á* ó simplemente *es á*; v. g. 12 : 4 se lee 12 es á 4, y 4 : 7 se lee 4 es á 7.

316. Cómo se llaman los números que entran en esta razón?

El primero se llama *antecedente* y el segundo *consecuente* y ambos juntos, términos de la razón: así en el ejemplo anterior 12 es el antecedente, 4 el consecuente y 3 la razón.

317. Qué se deduce de ésto?

Que en toda razón geométrica el antecedente es igual al consecuente multiplicando por la razón.

318. Cómo puede considerarse una razón geométrica?

Como una división indicada en que el antecedente es el

(1) Todo esto en el caso de que el antecedente sea mayor que el consecuente.

dividendo, el consecuente el divisor y la razón el cociente, y también como un quebrado en que el antecedente es el numerador y el consecuente el denominador; así que también puede una razón geométrica escribirse en forma de quebrado; v. g. la razón 5 : 3 puede escribirse así $^5/_3$ y la razón 9: 2=$^9/_2$: de aquí se deduce que si los dos términos se multiplican ó dividen por un mismo número la razón no varía.

319. Qué es proporción y de cuántas maneras puede ser?

Se llama proporción á la igualdad de dos razones. Si las razones son aritméticas, la proporción será aritmética, y si geométricas son las razones, geométrica será la proporción; de donde se deduce que las proporciones pueden ser *aritméticas* y *geométricas*, como las razones.

320. Cómo se escribe una proporción?

Si es *aritmética* poniendo dos puntos entre las dos razones, y si es *geométrica* cuatro, que en ambas se leen *como*: así 4. 2: 10. 8 se lee 4 es aritméticamente á 2 como 10 es á 8. y 5: 6:: 15: 18 se lee 5 es á 6 como 15 es á 18: la geométrica puede escribirse también formando una igualdad con las dos razones escritas como quebrado, así $^5/_6$=$^{15}/_{18}$.

321. Cómo se llaman los términos de una proporción?

Tanto en la aritmética, como en la geométrica el 1.° y el 3.° se llaman antecedentes; el 2.° y el 4.° consecuentes: el 1.° y el 4.° se llaman extremos y el 2.° y 3.° medios: así en la proporción 4. 2: 10. 8 el 4 y el 10 son los antecedentes, el 2 y el 8 los consecuentes; el 4 y el 8 son los extremos y el 2 y el 10 los medios: en la proporción 5: 6:: 15: 18, el 5 y el 15 son los antecedentes el 6 y el 18 los consecuentes; el 5 y el 18 son los extremos, y el 6 y el 15 los medios.

322. De cuántas maneras pueden ser además las proporciones?

De dos: discretas y contínuas: son discretas cuando los medios son diferentes, y contínuas cuando los medios son iguales: así 3: 8:: 12: 32 es discreta, y 5: 20:: 20: 80 es contínua.

Esta se escribe abreviadamente así ∺ 5: 20: 80 y se lee: como 5 es á 20 es á 80: el término medio de la proporción contínua se llama medio proporcional entre los extremos, si es geométrica, y medio diferencial si es aritmética.

Las proporciones aritméticas se llaman también equidiferencias.

ARTÍCULO 2.°

Propiedades de las proporciones aritméticas.

323. Cuáles son las principales propiedades de las proporciones aritméticas?

Las siguientes: 1.ª *En toda proporción aritmética la suma de los términos medios es igual á la suma de los extremos.*

2.ª *Si tenemos cuatro números tales que la suma de dos de ellos sea igual á la suma de los otros dos, con los cuatro se puede formar proporción aritmética, poniendo por extremos los sumandos de una suma y por medios los sumandos de la otra.* (1).

324. Sírvase V. demostrar la 1.ª propiedad deduciendo de ella alguna consecuencia.

Sea la proporción $a.\ b:\ c.\ d$: digo que $a+d=b+c$.

En efecto, si llamamos r á la razón de $a\ .\ b$ y por consiguiente de $c\ .\ d$ tendrémos que

$$a=b+r \text{ y } c=d+r:$$

Luego sustituyendo en la primera proporción en lugar de los términos a y c sus iguales $b+r$ y $d+r$, resultará que

$$b+r.\ b:\ d+r.\ d.$$

En esta proporción la suma de los extremos es $b+r+d$ y la de los medios es $b+d+r$, las que como se ve constan de los mismos sumandos, aunque en distinto orden colocados, pero como el orden de los sumandos no altera la suma tendrémos que $b+r+d=b+d+r$ y poniendo en los dos miembros de esta igualdad, en vez de $b+r$ su igual a, y en lugar de $d+r$ su igual c tenemos que

$$a+d=b+c$$

conforme al enunciado.

Consecuencias. De esta propiedad se deduce: que puede hallarse un término desconocido de una proporción aritmética si se conocen los otros tres, en esta forma: Si el término

(1) Otras varias propiedades podríamos exponer; pero creemos suficientes estas á nuestro objeto.

desconocido es un extremo, se suman los medios y de la suma se resta el extremo conocido, y si el término desconocido es un medio, se suman los extremos y de la suma se resta el medio conocido.

En efecto, sea 1.ª la proporción $a.b:c.x$. Según lo que acabamos de demostrar tenemos que $a+x=b+c$: si de los dos miembros de esta igualdad se resta la misma cantidad, la igualdad subsistirá; restando, pues, a, tendrémos que $x=b+c-a$ conforme á la regla.

2.° Sea ahora la proporción $a.b:x.c$, tendrémos que $a+c=b+x$ y restando b de ambos miembros, resulta que $a+c-b=x$, conforme á la regla.

325. Sírvase V. demostrar la 2.ª propiedad deduciendo también algunas consecuencias.

Sean los cuatro números a, b, c, d, en los que se verifica que $a+b=c+d$: digo que $a.c:d.b$.

En efecto, llamemos r á la diferencia que hay entre a y c, tendrémos que $a=c+r$; sustituyendo en el primer miembro de la igualdad propuesta $c+r$ en lugar del sumando a, nos resulta esta otra igualdad.

$$c+r+b=c+d,$$

restando de ambos miembros la cantidad c, nos dá esta otra

$$r+b=d$$

y restando b de los dos miembros de esta última tendrémos que

$$r=d-b \text{ ó } d-b=r$$

igualdad que nos dice que r es también la diferencia que hay entre d y b y por consiguiente que la razón $a.c$ es igual que la razón $d.b$: luego estos cuatro números forman proporción.

Consecuencia. De aquí se deduce que siempre que coloquemos estos cuatro números en la forma dicha, tendrémos proporción, resultando ocho proporciones diferentes, á saber:

1.ª	$a.c:d.b$	4.ª	$c.b:a.d$	7.ª	$d.a:b.c$
2.ª	$a.d:c.b$	5.ª	$b.c:d.a$	8.ª	$d.b:a.c$
3.ª	$c.a:b.d$	6.ª	$b.d:c.a$		

en todas las que se verifica que la suma de los extremos es igual á la de los medios.

ARTÍCULO 3.°

Propiedades de las proporciones geométricas.

326. Cuál es la primera y más principal propiedad de las proporciones geométricas?

Que en toda proporción el producto de los términos extremos es igual al producto de los términos medios.

Dem. Sea la proporción $a:b::c:d$: digo que $a\times d=b\times c$.

En efecto, esta proporción es igual á esta otra $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

Multiplicando estos dos quebrados por el mismo número bd la igualdad subsistirá y tendrémos $\frac{a\times bd}{b}=\frac{c\times bd}{d}$ y simplificando estos dos quebrados, esto es, suprimiendo en ambos los factores comunes á numerador y denominador resulta que $a\times d=c\times b$, que es lo que se quería demostrar.

327. Qué consecuencias se deducen de esta propiedad?

Las siguientes: 1.° que en la proporción contínua el cuadrado del término medio proporcional es igual al producto de los términos extremos.

En efecto, siendo la proporción $a:b::b:c$, tendrémos que $a\times c=b^2$.

2.° Que dados tres términos de una proporción podrá hallarse fácilmente el cuarto, pues si la proporción es $4:6::12:x$ en virtud de esta propiedad, $4\times x=6\times 12$, y dividiendo ambos miembros de esta igualdad por 4 será $x=\frac{6\times 12}{4}$ igualdad que nos dice que *si el término desconocido es un extremo, se multiplican los medios y el producto se parte por el extremo conocido.*

Si la proporción es $4:6::x:18$, tendrémos que $4\times 18=6\times x$ y partiendo ambos miembros por 6, nos dará $\frac{4\times 18}{6}=x$; igualdad que nos dice que *si el término desconocido es un medio, se multiplican los extremos, y el producto se parte por el medio conocido.*

3.° *Que para hallar un medio proporcional entre dos nú-*

meros, ó sea, el término medio de una proporción contínua, se multiplican dichos números y se extrae la raíz cuadrada del producto.

En efecto, si queremos hallar el término medio de la proporción contínua $\div 50:x:80$, tendrémos que $50\times80=x^2$ y extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros nos dará $\sqrt{50\times80}=x$, conforme á la regla.

328. Qué otras propiedades tienen las proporciones geométricas?

Las que se expresan en los teoremas siguientes:

TEOREMA 66.

Si tenemos cuatro números tales que el producto de dos de ellos es igual al producto de los otros dos, se puede con ellos formar proporción, poniendo por extremos los factores de un producto y por medios los factores del otro producto.

Dem. Sean los números $a, b, c, d,$ tales que $a\times b=c\times d$: digo que $a:c::d:b$.

En efecto, si los dos términos de la igualdad se dividen por el mismo número, la igualdad no se altera. Dividamos, pues por el producto $c.\, b$ y resultará

$$\frac{a\times b}{c.b}=\frac{c\times d}{c.b}$$

simplificando estos dos quebrados, ó sea suprimiendo los factores comunes á numerador y denominador tendrémos:

$\frac{a}{c}=\frac{d}{b}$ ó en forma de proporción $a:c::d:b$

conforme al enunciado.

COROLARIO.

De aquí se deduce que á toda proporción se le pueden dar las transformaciones que se quiera, siempre que el producto de los extremos sea igual al de los medios, resultando de esto ocho formas diferentes que reciben los nombres de *alternar, invertir* y *permutar*, como se vé en las siguientes:

Sea la proporción.	$a : b :: c : d$ (1.ª)
Alternando los medios y los extremos..	$a : c :: b : d$ (2.ª)
Invirtiendo.	$b : a :: d : c$ (3.ª)
Permutando.	$c : d :: a : b$ (4.ª)
Alternando en la 3.ª.	$b : d :: a : c$ (5.ª)
Id. en la 4.ª	$c : a :: d : b$ (6.ª)
Invirtiendo en la 5.ª.	$d : b :: c : a$ (7.ª)
Permutando en la 3.ª	$d : c :: b : a$ (8.ª)

TEOREMA 67.

Si se multiplican ó dividen un extremo y un medio de una proporción por un mismo número, la proporción no se altera.

Dem. Sea la proporción $a : b :: c : d$ y n un número cualquiera entero ó fraccionario: digo que $a\,n : b :: c\,n : d$ y que $\frac{a}{n} : b :: \frac{c}{n} : d$.

En efecto, alternando la primera proporción y escribiéndola en forma de quebrado resulta: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

Si los dos términos del quebrado primero se multiplican ó dividen por el mismo número n la igualdad no se altera y tendrémos.

$$1.^{\circ}\ \frac{an}{cn} = \frac{b}{d} \qquad 2.^{\circ}\ \frac{a:n}{c:n} = \frac{b}{d}$$

y escribiendo estas igualdades en forma de proporción resulta

$$1.^{\circ}\ an : cn :: b : d \qquad 2.^{\circ}\ \frac{a}{n} : \frac{c}{n} :: b : d$$

y alternando los medios tendremos finalmente que

$$an : b :: cn : d \qquad \frac{a}{n} : b :: \frac{c}{n} : d$$

que es lo que se quería demostrar.

329. Qué aplicaciones pueden hacerse de esta propiedad? En virtud de la primera parte, pueden quitarse los denominadores de los quebrados de una proporción; y en virtud

de la segunda, hacer más pequeños sus términos, sin que la proporción se altere.

Ejemplos.

1.° Sea la proporción $^3/_5 : ^4/_7 :: 8 : x$

Multiplicando el extremo $^3/_5$ y el medio $^4/_7$ por el número 5, resultará esta otra proporción: $3 : ^{20}/_7 :: 8 : x$ y multiplicando el extremo 3 y el medio $^{20}/_7$ de esta por el número 7, nos dará esta otra: $21 : 20 :: 8 : x$; de donde $X = \frac{20 \times 8}{21}$ en cuya proporción se vé que han desaparecido los denominadores.

2.° Sea la proporción 1500: 200: 80: x

Dividiendo el extremo 1500 y el medio 200 por 100, resulta: 15: 2 :: 80: x y partiendo por 5 el extremo 15 y el medio 80 de ésta, resulta esta otra; $3 : 2 :: 16 : x$; de donde $x = \frac{16 \times 2}{3}$, proporción en la que los términos son mucho menores que en la propuesta.

TEOREMA 68.

Si dos proporciones tienen una razón común, las otras dos razones forman también proporción.

Dem. Sean las proporciones $a : b :: c : d$ y $a : b :: n : m$.

Supuesto que la razón a: b es igual á la c: d y n: m, estas serán iguales entre sí; y por lo tanto formarán la proporción $c : d :: n : m$.

TEOREMA 69.

Si los términos de varias proporciones se multiplican ordenadamente entre sí los productos forman proporción.

Dem. Sean las proporciones $a : b :: c : d$ (1.ª)

$n : m :: r : s$ (2.ª)

$e : f :: g : h$ (3.ª)

Según la primera propiedad, en la primera proporción tendrémos que

$$ad = bc.$$

en la proporción 2.ª. . . $ns = mr$.
en la 3.ª. . . . . $eh = fg$.

y multiplicando ordenadamente estas igualdades, tendrémos:

$$ad \times ns \times eh = bc \times mr \times fg.$$

y como el orden de factores no altera el producto

$$ane \times dsh = bmf \times crg.$$

y por consiguiente (Teor. 66.) $ane : bmf :: crg : dsh$, conforme al enunciado.

De aquí se deduce que las *potencias de un mismo grado de los cuatro términos de una proporción, forman también proporción.*

En efecto, sea la proporción $e : c :: o : z$; digo que $e^3 : c^3 :: o^3 : z^3$,
pues escribiendo tres veces la proporción propuesta y multiplicando ordenadamente sus términos resultará

$$\left.\begin{array}{l} e : c :: o : z \\ e : c :: o : z \\ e : c :: o : z \end{array}\right\} = eee : ccc :: ooo : zzz = e^3 : c^3 :: o^3 : z^3.$$

TEOREMA 70.

En toda proporción se verifica que la suma de antecedente y consecuente de la primera razón, es á su antecedente ó consecuente, como la suma de antecedente y consecuente de la 2.ª razón, es á su antecedente ó consecuente.

Dem. Sea la proporción $n : m :: r : s$; digo que

$$n+m : n :: r+s : r$$
$$n+m : m :: r+s : s.$$

En efecto, según la primera propiedad, en la proporción propuesta resulta que $ns = mr$.

Si á los dos miembros de esta igualdad se les añade la misma cantidad nr, por ejemplo, la igualdad subsistirá y tendrémos:

$$ns+nr=mr+nr$$

y separando el factor común en ambos miembros, resulta

$$(n+m)\times r=(r+s)\times n$$

ó según el teorema 66: $n+m : n :: r+s : r$.

2.° Si á los dos miembros de la misma igualdad $ns=mr$, se añade la misma cantidad ms, por ejemplo, tendrémos:

$$ns+ms=mr+ms$$

y separando el factor común tendrémos: $(n+m)\,s=(r+s)\,m$, de donde : $n+m : m :: r+s : s$, conforme al enunciado.

TEOREMA 71.

Del mismo modo se verifica en toda proporción que la diferencia de antecedente y consecuente de la primera razón, es á su antecedente ó consecuente, como la diferencia de antecedente y consecuente de la segunda razón, es á su antecedente ó consecuente.

De manera que siendo la proporción: $a : b :: c : d$, será

$$a-b : a :: c-d : c$$

$$a-b : b :: c-d : d$$

Se demuestra como la anterior, restando de la igualdad $ad=bc$, el producto de los antecedentes ó de los consecuentes, según el caso, en lugar de sumarlos, como se ha hecho en el teorema anterior.

Si los antecedentes son menores que los consecuentes, se invierte la proporción.

TEOREMA 72.

En toda proporción se verifica que la suma de antecedente y consecuente de la primera razón, es á su diferencia, como la suma de antecedente y consecuente de la segunda razón, es á su diferencia.

Dem. Sea la proporción $a : b :: c : d$: digo que $a+b : a-b :: c+d : c-d$.

En efecto, según los teoremas 70 y 71, de la proporción

propuesta se deduce que $a+b : b :: c+d : d$ y que $a-b : b :: c-d : d$
cambiando los medios en éstas proporciones resulta que

$$a + b : c + d :: b : d$$
$$a - b : c - d :: b : d$$

y según el teorema 68 de éstas dos se deduce esta otra

$$a+b : c+d :: a-b : c-d$$

y cambiando los medios de esta última tendrémos $a+b : a - b :: c+d : c-d$, conforme al enunciado.

330. A qué se llama série de razones iguales?

Al conjunto de varias razones iguales entre sí, como $a : b :: c : d :: m : n :: r : s$ etc.

TEOREMA 73.

En una série de razones iguales la suma de los antecedentes es á la suma de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.

Dem. Sea la série de razones iguales $a : b :: c : d :: m : n$ etc.: digo que $a+c+m : b+d+n :: a : b$.

En efecto supongamos 1.° que son sólamente dos las razones iguales, tales como $a : b :: c : d$.

Permutando los medios será $a : c :: b : d$ y por consigiente, según el teorema 70, $a+c : a :: b+d : b$ y permutando los medios resultará que $a+c : b+d :: a : b$, conforme al enunciado.

Si fuesen más de dos las razones, sustituyendo en lugar de la razón $a : b$ su igual $m : n$ resultaría esta otra $a+c : b+d :: m : n$ en la cuál, según el caso anterior sería $a+c+m : b+d+n :: m : n$ ó como $a : b$ conforme al enunciado.

331. Qué aplicación práctica puede deducirse de los teoremas 70 y 71?

Poder averiguar el valor de dos términos desconocidos de una proporción, siempre que conozcamos los otros dos y la suma ó diferencia de los desconocidos.

Ejemplos.

1.° Sea la proporción $x : y :: 60 : 80$ en que la suma de $x+y=28$: tendrémos según el teorema 70, que $x+y : x :: 60+80 : 60$ y sustituyendo en lugar del primer término su valor 28, nos resultará $28 : x :: 60+80 : 60$ de donde $x=\frac{60\times28}{60+80}=12$: luego $y=16$.

2.° Sea ahora la proporción $x : y :: 50 : 30$ en que la diferencia de x é y ó sea $x-y=4$: tendrémos, según el teorema 71, que $x-y : x :: 50-30 : 50$ y sustituyendo en lugar del primer término su valor 4, nos resultará $4 : x :: 50-30 : 50$; de donde $x=\frac{50\times4}{50-30}=10$: luego $y=6$.

CAPÍTULO 4.°

Reglas de tres.

ARTÍCULO 1.°

Regla de tres simple.

332. A qué se llama regla de tres?

A la que tiene por objeto resolver los problemas que dependen, ya de una, ó ya de dos ó más proporciones.

333. De cuántas maneras puede ser la regla de tres?

La regla de tres puede ser simple y compuesta, directa é inversa.

La regla de tres se llama simple cuando su resolución depende de una sola proporción, ó consta de cuatro términos sólamente, tres de ellos conocidos y uno desconocido.

Es compuesta, cuando su resolución depende de dos ó más proporciones, ó consta de más de cuatro términos, siendo todos conocidos menos uno.

Es directa cuando sus términos principales son directamente proporcionales á sus correspondientes, é inversa en caso contrario.

334. Cuántas cantidades entran en la regla de tres simple?

Cuatro cantidades homogéneas dos á dos, de las cuales dos se llaman principales y las otras dos correspondientes respectivamente á las primeras.

335. Cómo conocerémos si éstas cantidades son directa ó inversamente proporcionales?

Del modo siguiente: *Si duplicando una de las cantidades principales, su correspondiente debe también duplicarse, se* *dice que estas correspondientes están en razón directa ó son directamente proporcionales á sus principales.*

Si duplicando una de las cantidades principales, su correspondiente se hace la mitad ó queda dividida por dos, se dice que están en razón inversa ó son inversamente proporcionales á sus principales.

Ejemplos.

1.° Costando 12 fanegas de trigo 980 reales, ¿cuánto costarán 56 fanegas?

Cálculo. Si 12 fanegas cuestan 980 rs., doble número de fanegas deben costar doble número de reales: luego los reales están en razón directa ó son directamente proporcionales á las fanegas.

En este ejemplo se vé que entran las cuatro cantidades homogéneas dos á dos; á saber: 12 fanegas y 56 fanegas que se llaman principales y 980 rs. y x rs. que se llaman correspondientes.

2.° 8 hombres tardan á ejecutar una obra 15 días ¿cuánto hubieran tardado 10 hombres?

Cálculo. También en este ejemplo entran cuatro cantidades homogéneas dos á dos, á saber: 8 hombres y 10 hombres y 15 días y x días. Pues bien, si 8 hombres tardan en hacer la obra 15 días, doble número de hombres hubieran tardado la mitad de tiempo: luego los días y los hombres están en razón inversa ó son inversamente proporcionales.

336. Cómo se resuelve un problema de la regla de tres simple?

Si es directa, por medio de la proporción siguiente: 1.ª cantidad es á su homogénea, como la correspondiente á la 1.ª es á la correspondiente á la 2.ª

Si es inversa por medio de la siguiente: 1.ª cantidad es á su homogénea, como la correspondiente á la 2.ª es á la correspondiente á la 1.ª

Sirvan de ejemplo los dos anteriores.

1.° *Disposición.*

$$\left.\begin{array}{llll} 12 \text{ fanegas....} & 980 & \text{reales.} \\ 56 \quad \text{id.} & x & \text{id.} \end{array}\right\} \text{Resolución } 12 : 56 :: 980 : x$$

De donde

$$x = \frac{980 \times 56}{12} 4573\ ^1/_4 \text{ reales.}$$

Resulta que las 56 fanegas costarán 4573 $^1/_4$ reales.

2.° *Disposición.*

$$\left.\begin{array}{l}8 \text{ hombres. . . } 15 \text{ días.}\\ 10 \text{ id. . . . } x \text{ id.}\end{array}\right\}\ \text{Resolución. } 8 : 10 :: x : 15.$$

De donde

$$x=\frac{15\times 8}{10}=12 \text{ días.}$$

Resultando que los 10 hombres tardarían 12 días.

337. Hay algún otro método para resolver estos problemas?

Sí, el método llamado de reducción á la unidad, que consiste en hallar primeramente la cantidad correspondiente á la unidad de la especie que se busca, y después la correspondiente al número de unidades de la misma, ó sea la incógnita.

Resolviendo los anteriores ejemplos por este método diremos:

1.° Si 12 fanegas cuestan 980 rs. una fanega costará $\frac{980}{12}$ y las 56 fanegas $\frac{980}{12}\times 56=4573\ ^1/_4$ reales.

2.° Si 8 hombres tardan en hacer la obra 15 días, un solo hombre tardaría 8 veces más tiempo, es decir, 15×8: luego si un hombre tarda 15×8 días, 10 tardarían 10 veces menos ó $\frac{15\times 8}{10}=12$ días.

ARTÍCULO 2.°

Regla de tres compuesta.

338. Cómo se resuelven los problemas de la regla de tres compuesta?

Como estos problemas dependen de dos ó más proporciones, según el número de circunstancias que en ellos concurran, se deduce que habrá necesidad de plantear un número de proporciones correspondiente á dichas circunstancias y hallar sucesivamente las incógnitas de éstas hasta llegar á la última; lo cual puede conseguirse multiplicando ordenadamente todas las proporciones planteadas, y destruyendo las incógnitas iguales que existirán en un extremo y un medio de esta última proporción.

Resolvamos por este método el ejemplo siguiente:

Si 20 operarios han empleado 15 días en hacer 600 varas de paño ¿cuántos días emplearán 60 operarios en hacer 1400 varas del mismo paño y con las mismas circunstancias y condiciones?

Razonamiento y resolución. Como se vé en este problema es necesario atender á las circunstancias de operarios, de tiempo y de obra y por lo tanto necesitamos para resolverle de dos proporciones.

1.ª Supongamos primeramente que los 20 operarios y los 60 operarios deben hacer la misma obra, esto es, 600 varas de paño: dirémos.

20 operarios hacen dicha obra en 15 días
60 id. la harían en. . . . . x días } 20:60::x:15, ó

invirtiendo la proporción será: 60:20::15:x (inversa.)

Podríamos desde luego obtener el valor de x; pero preferimos dar por conocido su valor, por lo que luego verémos.

2.ª Compararémos ahora la obra con los días y dirémos: Si los 60 operarios necesitan x días para hacer 600 varas de paño, ¿cuántos necesitarán para hacer las 1400? (Proporción directa.)

Disposición.

600 varas se hacen en x días
1400 id. en . . . . . z id. } Proporción 600:1400::x:z

1.ª 60 : 20::15:x
2.ª 600 :1400:: x: z

Multiplicándolas ordenadamente resulta esta otra:

$$60\times600:20\times1400::15\times x:x\times z$$

Suprimiendo ahora x en los dos últimos términos, tendrémos que:

$$60\times600:20\times1400::15:z.$$

De donde z, número de días que tardarían los 60 operarios á fabricar las 1400 varas de paño, será igual á

$\frac{20\times1400\times15}{60\times600}$ y simplificando este quebrado resulta que $z=11^2/_3$ días.

Resolvamos ahora este mismo problema por el método de la reducción á la unidad.

Razonamiento. 1.° Si 20 operarios emplean 15 días para hacer 600 varas de paño *un* solo hombre empleará 20 veces más de tiempo, esto es, 20×15: y por consiguiente los 60 operarios tardarán 60 veces menos ó sea $\frac{20\times15}{60}$ días.

2.° Si los 60 operarios emplean $\frac{20\times15}{60}$ días para hacer 600 varas, para hacer *una* vara emplearán 600 veces menos, ó sea $\frac{20\times15}{60}:600=\frac{20\times15}{60\times600}$ días que emplearán los 60 operarios para hacer *una* vara: luego para hacer 1400 varas emplearán $\frac{20\times15}{60\times600}\times1400=\frac{20\times15\times1400}{60\times600}=11\ {}^2/_3$ días.

Otro método conocido con el nombre de causas y efectos.

Para resolver los problemas de la regla de tres compuesta por este método, no se necesita de proporción alguna, y solo se debe tener presente que todo problema consta de dos partes: *supuesto* y *pregunta* y que todo lo que produce ó contribuye á producir un efecto se llama causa.

Teniendo, pues, esto presente, para hallar la incógnita en estos problemas, se multiplican la causa ó causas del supuesto por los efectos de la pregunta, y la causa ó causas de la pregunta por los efectos del supuesto, y el producto que conste de mayor número de factores numéricos, se divide por el que tenga menor número, que será aquel en que se encuentre la incógnita.

Sírvanos de ejemplo el mismo anterior.

DISPOSICIÓN.

CAUSAS.		EFECTOS.	
Operarios.	*Días.*	*Varas.*	*Resolución.*
Supuesto=20.	15..	600	$X=\frac{20\times15\times1400}{60\times600}=11\ {}^2/_3$ días.
Pregunta—60.	X..	1400	

ARTÍCULO 3.°

Aplicación de la regla de tres al cambio.

338* ¿A qué se llama cambio en el comercio?

Llámase cambio en general al trueque de unas cosas por otras; si bien en el comercio se aplica á la moneda.

339* Qué es letra de cambio?

Letra de cambio es un documento por cuyo medio un sugeto manda á otro que pague á un tercero una cantidad determinada. En todo giro, por lo tanto, intervienen cuando menos tres personas: la que gira que se llama librador, la que paga pagador, y la que recibe la letra tenedor: ésta puede mandar que se pague á otra persona, en virtud de consignación escrita en la misma letra y que se llama *endoso.*

340* De cuántas maneras puede ser el cambio?

El cambio puede ser directo é indirecto; nacional ó interior y extranjero ó exterior; á la par, con beneficio ó con daño.

Es directo cuando se verifica entre dos plazas comerciales sin intervención de ninguna otra; indirecto cuando se verifica por el intermedio de otra ú otras; nacional, cuando se cambia entre plazas de una misma nación; extranjero, si las plazas pertenecen á distintas naciones; á la par, si se recibe la misma cantidad que se entrega; con beneficio si se negocia recibiendo más que lo que se dá, y con daño, si se recibe menos que lo que se dá. Estas palabras *beneficio y daño* se refieren siempre al tenedor de la letra.

341* Cuál es la moneda de cambio?

Si el cambio se verifica entre plazas de la misma nación es la misma en todas las plazas; pero si es extranjero, cada nación tiene la suya. En España la moneda de cambio es el duro y es invariable, mientras el de las demás naciones varía según las circuntancias. Cuando el cambio es á la par, nuestro duro equivale á las monedas extranjeras que se expresan en la siguiente

TABLA DE CAMBIOS

España... 1 duro ó 5 pesetas equivale á

5'19 francos de Francia	49'52 dineros de Lóndres
5'19 francos de Amberes	122 granos de Nápoles

2'44 florines de Amsterdan	96'5 bayocos de Roma
5'19 libras piamontesas de Génova	130 copekes de Rusia
43'16 chelines de Hamburgo	849 reis de Lisboa.

En Lóndres se usa también la libra esterlina que tiene 20 chelines, y el chelin 12 dineros. Cada chelin equivale á 5 reales de nuestra moneda.

342* Cómo se resuelven los problemas relativos al cambio?

Para resolver los problemas relativos al cambio de monedas extranjeras puede hacerse aplicación de la regla de tres simple directa, sin más que tener en cuenta que la palabra cambio para nosotros equivale á cinco pesetas, y así dirémos: cinco pesetas : **x** *pesetas* :: **m** *monedas extranjeras* : **m** *extranjeras.*

Ejemplo: Cuántos francos nos darán en París por 1500 pesetas estando el cambio á 5'19?

Resolución. Aquí las cantidades homogéneas principales son 5 pesetas y 1500 pesetas y sus correspondientes 5'19 francos y x francos. Por consiguiente tendrémos:

Disposición.

$$\left.\begin{array}{llll} 5 & \text{pesetas.} & 5'19 & \text{francos} \\ 1500 & \text{id.} & x & \text{id.} \end{array}\right\} 5 : 1500 :: 5'19 : x. \text{ De donde}$$

$$x = \frac{1500 \times 5'19}{5} = \frac{7785}{5} = 1557 \text{ francos.}$$

Otro ejemplo. Cuántas pesetas tendrémos que dar por una letra de Lóndres de 5600 *dineros al cambio de* 49'50?

Resolución. Aquí las cantidades homogéneas principales son 5 pesetas y x pesetas y sus correspondientes 49'50 dineros y 5600 dineros. Por consiguiente tendrémos.

Disposición.

$$\left.\begin{array}{llll} 5 & \text{pesetas.}\ . & 49'50 & \text{dineros.} \\ x & \text{id.}\ .\ . & 5600 & \text{id.} \end{array}\right\} 5 : x :: 49'50 : 5600. \text{De}$$

$$\text{donde } x = \frac{5600 \times 5}{49'50} = \frac{28000}{49'50} = 565'65 \text{ pesetas.}$$

Nota. Si la cuestión se presentase en diferente moneda que la de cambio, habría que reducir á ésta el número de aquellas.

Ejemplo: Cuántas pesetas tendrémos que dar por una letra de 425 libras esterlinas estando el cambio á 48‘15?

Lo primero que haremos será reducir las libras á dineros y luego aplicar la regla. Así tendrémos que las 425 libras son 425×20×12=94000 dineros, y aplicando ahora la regla del ejemplo anterior tendrémos:

$$5 : x :: 48'15 : 94000. \text{ De donde } x=\frac{94000\times5}{48'15}=9760'95 \text{ ptas.}$$

343* A qué se llama deuda pública?

Llámase deuda pública ó rentas contra el Estado á los créditos que una nación tiene contra sí por cantidades que ha recibido para cubrir sus atenciones y por las que abona un interés anual, emitiendo en cambio documentos en papel, que con el nombre de títulos de la deuda representan aquellos capitales.

La deuda en España es de diferentes clases, á saber: consolidada, del personal, del Tesoro, amortizable, de carreteras, ferro-carriles etc. etc.

344* Cómo se resuelven los problemas relativos á la deuda?

Todos los problemas relativos á la deuda se resuelven también por medio de la regla de tres simple directa, ó sea por la proporción siguiente:

$$100 \text{ papel} : d \text{ dinero} :: x \text{ papel} : z \text{ dinero.}$$

Ejemplos. Cuánto papel se podrá comprar de la renta consolidada con 25000 reales estando el cambio á 22'50?

Operación.

$$100 : 22'50 :: x : 25000. \text{ De donde } x=\frac{25000\times100}{22'50}=$$

$$\frac{2500000}{22'50}=111111 \text{ reales nominales.}$$

Otro. Tenemos 240000 reales nominales en Bonos del Tesoro, cuánto valdrán en efectivo estando el cambio á 85‘25?

Operación.

100 : 85'25 : : 240000 : x. De donde

$$x=\frac{240000\times 85'25}{100}=197400 \text{ reales efectivos.}$$

CAPÍTULO V.

Reglas derivadas de las de tres.

ARTÍCULO 1.°

División de un número en partes proporcionales.

339. Qué se entiende por dividir un número en partes proporcionales?

Hallar varias partes del número, que tengan entre sí la misma razón que otros números dados tienen también entre sí.

340. Cómo se divide un número dado en partes proporcionales á otros números dados?

Se divide dicho número por la suma de los números á que las partes deben ser proporcionales, y el cociente que resulte se multiplica por cada uno de ellos. (1)

Dem. Sea el número 150 que queremos dividir en tres partes proporcionales á los números 3, 4 y 5.

Si dividimos el número 150 en 3+4+5 partes, es evidente que una de estas partes será $\frac{150}{3+4+5}$

3 de estas serán $\frac{150}{3+4+5}\times 3.$

4 de las mismas $\frac{150}{3+4+5}\times 4.$

y 5 de ellas $\frac{150}{3+4+5}\times 5.$

y como los números 3, 4 y 5, tomados dos á dos, tienen en-

(1) El mismo resultado se obtiene multiplicando el número propuesto por cada uno de los dados y dividiendo los productos por la suma de todos.

tre sí la razón de 3 : 4 : 5, se deduce que las cantidades $\frac{150}{3+4+5}\times 3$; $\frac{150}{3+4+5}\times 4$, y $\frac{150}{3+4+5}$ se encuentran en esta misma proporción.

Practicando las operaciones indicadas tendrémos que dichas partes serán $\frac{150\times 3}{12}$, $\frac{150\times 4}{12}$, y $\frac{150\times 5}{12}$; ó sea $\frac{450}{12}=$ $37\frac{1}{2}$; $\frac{600}{12}=50$; $\frac{750}{12}=62\frac{1}{2}$, cuyo conjunto ó suma es igual á 150.

ARTÍCULO 2.°

Regla de compañía.

341. Qué es regla de compañía?

Aquella que tiene por objeto averiguar la ganancia ó pérdida correspondiente á varios capitales colocados en sociedad en justa proporción á éstos y circunstancias que les acompañen.

342. En qué principios se funda la resolución de los problemas pertenecientes á la regla de compañía?

En los tres siguientes: 1.° *Las ganancias ó pérdidas de capitales diferentes, que están el mismo tiempo en sociedad, deben ser proporcionales á los capitales.* Este principio es evidente.

2.° *Las ganancias ó pérdidas de capitales iguales, que están diferente tiempo en la sociedad, deben ser proporcionales á los tiempos.* Este principio, aunque no enteramente exacto, en la práctica se considera como cierto.

3.° *Las ganancias ó pérdidas de capitales diferentes, que están diferente tiempo en sociedad, deben ser proporcionales á los productos de los capitales por los tiempos.* Este principio necesita demostración.

Sean C y C' dos capitales que están en la sociedad los tiempos T y T', y llamemos G á la ganancia de C en el tiempo T y G' á la ganancia de C' en el tiempo T': digo que $G : G' :: C\times T : C'\times T'$.

En efecto, sea G'' la ganancia de C en el tiempo T', tendrémos que las ganancias G y G'' correspondientes al mismo capital C en los tiempos T y T', según el 2.° principio, deben ser proporcionales á los tiempos, y por consiguiente: G: G'': T : T'.

Pero según el primer principio, las ganancias G'' y G' que corresponden á los capitales C y C' en el mismo tiempo T', deben ser proporcionales á los capitales, y por lo tanto: G'' : G' :: C : C'.

Multiplicando ordenadamente estas dos proporciones resulta que

$$G \times G'' : G'' \times G' :: C \times T : C' \times T'$$

y suprimiendo en el primero y segundo término de esta proporción el factor común G'' tendrémos: G : G' :: C×T : C'× T' que es lo que se quería demostrar.

343. Según esto, cuántos casos pueden ocurrir en la regla de compañía y cómo se resuelven?

Tres casos pueden ocurrirnos en esta regla: 1.° Que los capitales sean diferentes y estén el mismo tiempo en la sociedad; *en cuyo caso la cuestión queda reducida, aplicando el primer principio, á dividir la ganancia ó pérdida total en partes proporcionales á los capitales.*

2.° Que el capital sea uno mismo y el tiempo diferente; en cuyo caso, *se aplica el 2.° principio, y se divide la ganancia ó pérdida total en partes proporcionales á los tiempos.*

3.° Que los capitales y los tiempos sean diferentes, y entonces, aplicando el tercer principio, *se hallan* 1.° *los productos de los capitales por sus respectivos tiempos, y después se divide la ganancia ó pérdida total en partes proporcionales á estos productos.*

Ejemplos.

Primer caso. Tres estudiantes jugaron á la lotería; el primero puso 15 rs., el segundo 20, y el tercero 5; habiéndoles tocado el premio de 1.500 pesetas, ¿cuánto correspondió á cada uno?

Resolución.

Corresponde al 1.° $\frac{1500}{15+20+5} \times 15 = \frac{1500 \times 15}{40} = 562'50$ pts.

Id. . al 2.º. . . . . $\frac{1500}{15+20+5}\times 20=\frac{1500\times 20}{40}=750$‘ » id.

Id. . al 3.º. . . . . $\frac{1500}{15+20+5}\times 5=\frac{1500\times 5}{40}=187‘50$ id.

Total.$=1500$‘ » id.

2.º *caso.* Tres comerciantes emprendieron un negocio aportando cada uno 6000 rs.; el 1.º se retiró á los 5 meses, el 2.º á los 7, y el 3.º á los 8, en que terminó, habiendo obtenido una ganancia de 10000 rs. cuánto correspondió á cada uno?

Resolución.

Ganancia del 1.º $\frac{10000}{5+7+8}\times 5=\frac{10000\times 5}{20}=2500$ rs.

Id. del 2.º. . . . $\frac{10000}{5+7+8}\times 7=\frac{10000\times 7}{20}=3500$ rs.

Id. del 3.º. . . . $\frac{10000}{5+7+8}\times 8=\frac{10000\times 8}{20}=4000$ rs.

Total$=10000$ rs.

3.er *caso.* Tres sugetos formaron sociedad: el 1.º puso 2000 rs. por 4 meses; el 2.º 3000 rs. por 5 meses y el 3.º 4000 rs. por 3 meses; ganaron 24000 rs. ¿cuánto corresponde á cada socio?

Preparación.

Capitales.

1.º $2000\times 4=8000$

2.º $3000\times 5=15000$

3.º $4000\times 3=12000$

Suma$=35000$

Resolución.

1.º $\frac{24000}{35000}\times 8000=5485\frac{5}{7}$

2.º $\frac{24000}{35000}\times 15000=10285\frac{5}{7}$

3.º $\frac{24000}{35000}\times 12000=8228\frac{4}{7}$

Total. . . . 24000 »

Nota. Si los capitales ó los tiempos se expresan en unidades de diferentes especies, deberán reducirse á la misma antes de practicar las demás operaciones.

ARTÍCULO 3.°

Regla de interés.

344. A qué se llama interés

Se dá el nombre de *interés* á la ganancia producida por un capital impuesto á réditos, á condición de que cada 100 unidades han de producir una cantidad determinada al cabo de un año.

La cantidad producida por cada 100 unidades se llama *tanto por* 100, y abreviadamente se escribe así $^0|_0$. (1)

345. Cuántos casos pueden ocurrir en la regla de interés?

Dos, á saber: 1.° Que el tiempo á que el capital se refiere sea un año.

2.° Que dicho tiempo sea diferente de un año.

El 2.° caso puede subdividirse en otros dos, á saber: 1.° Que el tiempo sea menos que un año, y 2.° que sea más de un año.

Y este 2.° puede dividirse en otros dos: 1.° Que los intereses se cobren al finalizar cada año, y 2.° que los intereses se vayan aglomerando cada año para producir nuevos intereses, á que se dá el nombre de *interés compuesto.*

346. Cuál es el fundamento de estas cuestiones?

Que en todas ellas se supone como cierto que los intereses son proporcionales á los capitales, y también al tiempo que éstos están empleados en la producción de aquellos: por lo tanto su resolución depende, ya de una regla de tres simple directa, ya de la de tres compuesta.

347. Cuántas cuestiones se pueden presentar en el primer caso?

Tres: 1.° averiguar el interés; 2.° averiguar el capital, y 3.° averiguar el tanto por 100; todas las cuales se resuelven por la siguiente proporción: $100 : c :: n : i$, en la que c representa el capital n el tanto por 100 é i el interés.

---

(1) La cantidad producida por 1000 unidades se llama tanto por 1000 y los problemas correspondientes se resuelven de la misma manera, sustituyendo 1000 en lugar de 100.

Ejemplos

1.° Cuánto producen 3500 rs. impuestos á réditos al 6 por 100 anual?

Resolución. 100 : 3500 :: 6 : i; de donde $i=\frac{3500\times 6}{100}=$ 210 reales.

2.° Cuál es el capital que al 6 por 100 ha producido en un año 210 reales?

Resolución. 100 : c :: 6 : 210; de donde $c=\frac{210\times 100}{6}=$ 3500 reales.

3.° A cómo por 100 se impondrá el capital 3500 rs. para que al año produzca 210 de interés?

Resolución. 100 : 3500 :: n : 210; de donde $n=\frac{210\times 100}{3500}=6$.

348. Cuántas cuestiones pueden presentarse cuando el tiempo de producción sea ménos de un año?

Cuatro: 1.ª averiguar el interés; 2.ª averiguar el tanto por 100; 3.ª averiguar el capital, y 4.ª averiguar el tiempo. Todas ellas se resuelven por la siguiente proporción:

100×12 (1) : $c\times t$ :: n : i, en la que t representa el tiempo.

Ejemplos.

1.° Cuánto producen 6400 rs. en 9 meses al 5 % anual?

Resolución. $100\times 12 : 6400\times 9 :: 5 : i$, de donde $i=\frac{6400\times 9\times 5}{100\times 12}=\frac{288000}{1200}=240$.

2.° A cómo % habrá estado impuesto el capital 6400 rs. que en 9 meses ha producido 240 rs?

Resolución. $100\times 12 : 6400\times 9 :: n : 240$; de donde $n=\frac{240\times 100\times 12}{6400\times 9}=\frac{288000}{57600}=5$.

3.° Cuál es el capital que impuesto á réditos al 5 % anual ha producido 240 rs. en 9 meses?

(1) Si el tiempo se refiere á meses. Si quisiese expresarse en días, en tal caso 100 se multiplicaría por los 360 días que tiene el año comercial.

Resolución. $100 \times 12 : c \times 9 :: 5 : 240$; de donde $c=\frac{240\times100\times12}{5\times9}=\frac{288000}{45}=6400$.

4.° Cuánto tiempo se necesitará para que 6400 rs. impuestos al 5 % anual produzcan 240?

Resolución. $100 \times 12 : 6400\times t :: 5 : 240$: de donde

$$t=\frac{240\times100\times12}{6400\times5}=\frac{288000}{32000}=9.$$

349. Cuántas cuestiones pueden presentarse cuando el tiempo sea más de un año?

Dos: 1.ª Que los intereses se cobren al finar cada año y entonces la cuestión queda reducida al primer caso y 2.ª que se aglomeren á los capitales respectivos, en cuyo caso puede aplicarse la regla anterior haciendo una operación para cada año, ó practicar la siguiente con la cual se obtiene la suma del capital primitivo, sus intereses y los intereses de éstos.

Hé aquí la regla.

Para hallar la suma de un capital y sus intereses de varios años á interés compuesto á un cierto tanto por ciento, se forma un número decimal, cuya parte entera sea la unidad y la decimal tantas centésimas como unidades tenga el tanto por ciento; este número se eleva á la potencia que indique el número de años, y el resultado se multiplica por el capital. De manera que si llamamos S á dicha suma, C al capital, t al número de años y 4 el tanto por ciento, tendrémos la siguiente fórmula:

$$S=(1'04)^{t}\times C.$$

Ejemplos.

1.° Cuánto producen 6.000 reales en tres años al 5 % anual cobrando todos los años los intereses?

Resolución. Aplicando á este caso la regla del 1.° tendrémos que el interés producido por los 6.000 en cada año será $\frac{6.000\times5}{100}=300$: luego en los tres años producirán $300\times3=900$ reales.

2.° Cuánto produciría el mismo capital en el mismo tiempo y con el mismo interés, pero aglomerados los intereses?

1.ª *Resolución.* Producto del primer año. . . 300 rs.

Capital para el 2.° año: 6 000+300=6.300, que al 5 % producirá $\frac{6.300\times5}{100}=315$.

Capital para el 3.er año: 6.300+315=6.615 que al 5 % producirán $\frac{6.615\times5}{100}=330',75$.

Luego el producto de los 6.000 rs. en los tres años al 5 % de interés compuesto será: 300+315+330'75=945'75, que sumados con el capital primitivo hacen 6.945'75.

2.ª *Resolución.* Aplicando la fórmula será: $1'05^3\times6.000=6.945'75$.

Operación.

$$\begin{array}{r}
1'0\,5 \\
\times1'0\,5 \\
\hline
5\,2\,5 \\
1\,0\,5 \\
\hline
1{,}1\,0\,2\,5 \\
\times1'0\,5 \\
\hline
5\,5\,1\,2\,5 \\
1\,1\,0\,2\,5 \\
\hline
1'1\,5\,7\,6\,2\,5 \\
\times6\,0\,0\,0 \\
\hline
6\,9\,4\,5'7\,5\,0\,0\,0\,0
\end{array}$$

ARTÍCULO 4.°

Regla de descuento.

350. A qué se llama descuento?

A la cantidad que ha de rebajarse de una letra, pagaré ú otro documento que se cobra ó hace efectivo antes de su vencimiento, cuya cantidad se calcula mediante el tanto por 100 de convenio.

351. Cuántos casos pueden ocurrir en la regla de descuento?

Dos: 1.° que el plazo de vencimiento sea un año justo; 2.° que sea menos de un año.

352. Cómo se resuelve el primer caso?

Según costumbre del comercio, aplicando la regla de interés, por medio de la cual se obtiene el interés que produce el valor nominal del documento, y después se rebaja este interés para averiguar el valor actual. Pero este método, aunque es el que comunmente se usa, no dá el resultado justo y equitativo que debe buscarse en estas cuestiones, pues se descuenta más de lo que corresponde y sale por lo tanto perjudicado el tenedor del documento.

Nosotros vamos á establecer otro más justo en la regla que se expresa en la proporción siguiente: 100 + *el tanto* es *á* 100, como *el valor nominal de la letra* es *á su valor actual.*

Ejemplo.

¿Cuál será el valor actual de un pagaré de 12000 rs. que vence al año, siendo 5 $^0/_0$ el descuento?

Resolucion. Aplicando el primer método tendrémos que 00 : 12000 :: 5 : x, de donde $x=\frac{12000\times5}{100}=600$, que descontado de los 12000 nos dá 11400, valor del pagaré un año antes de su vencimiento.

Aplicando el 2.° método será: 100 + 5 : 100 :: 12000 : x; de donde $x=\frac{12000\times100}{105}=11428$, esto es 28 rs. más que por el método anterior.

Este método se funda en que si 105 reales, descontados los 5 del descuento, se convierten en 100; los 12000 rs. del pagaré, descontado el 5 $^0/_0$, se convertirán en x, esto es, en los 11428, que es el valor justo del pagaré y lo que en realidad debería pagarse por él. (1)

353. Cómo se resuelve cuando el tiempo de vencimiento sea menos de un año?

Se halla 1.° lo que corresponde al tiempo de vencimiento

---

(1) Tres son las causas principales que hay para que predomine el primer método, aunque vicioso, á saber: 1.ª que el cálculo es más fácil; 2.ª que está generalizado en el comercio de todo el mundo; 3.ª que como el comprador sale favorecido, y es, por decirlo así, el solicitado, prefiere siempre el método que le produce mayor beneficio.

tomando por tipo el tanto por ciento anual y considerando este resultado como tanto por 100 definitivo, se aplica la regla anterior.

Ejemplo.

Cuánto vale actualmente una letra de 15000 rs. que venc á los 90 días siendo 6 % el descuento anual?

Resolución. Diré 1.° Si á 360 días corresponden 6 rs. á 90 días cuánto corresponderá?

$$360 : 90 : : 6 : x; \text{ de donde } x=\frac{540}{360}=1'5.$$

Luego aplicando la regla anterior será: $101'5:100::15000:x$;

de donde $x=\frac{15000\times100}{101'5}=14778\frac{66}{203}$, valor exacto del pagaré 90 días antes de su vencimiento.

CAPÍTULO VI.

Regla conjunta.

354. A qué se llama regla conjunta?

A aquella que tiene por objeto reducir unidades de unas especies á otras, valiéndose al efecto de otras intermedias y que forman entre sí varias equivalencias.

355. Qué es equivalencia?

La reunión por medio del signo igual de dos cantidades en general diferentes; pero que tienen el mismo valor. Así 80 rs.=4 duros es una equivalencia: 5 @s.=12 cántaras es otra equivalencia.

356. Cuál es el fundamento de la regla conjunta?

El siguiente

TEOREMA 74.

Si se multiplican ordenadamente varias equivalencias combinadas entre sí de tal modo que el primer miembro de la 2.ª sea de la misma especie que el 2.° de la 1.ª; el 1.° de la 3.ª de la misma que el 2.° de la 2.ª y así sucesivamente, *los nuevos productos formarán otra equivalencia, en que el primer miembro será de la especie del 1.° de la 1.ª, y el 2.° de la especie del 2.° de la última.*

Dem. 1.° Sean sólamente dos las equivalencias, tales como:

$$\left.\begin{array}{l}6n=5m\\3m=8r\end{array}\right\}\text{digo que } 6.3n=5.8r$$

En efecto, multiplicando los dos miembros de la primera equivalencia por el número abstracto 3, tendrémos: $6.3n=5.3m$ y multiplicando los dos de la 2.ª por el abstracto 5, será $5.3m=5.8r$ y como dos cosas iguales á una tercera son iguales entre sí, resulta que $6.3n=5.8r$ que es lo que se quería demostrar.

2.° Sean ahora más de dos las equivalencias, tales como

$$\left.\begin{array}{l}6n=5m\\3m=8r\\2r=4s\\7s=9z\end{array}\right\}\text{digo que } 6.3.2.7n=5.8.4.9z.$$

En efecto, de las dos primeras resulta que $6.3n=5.8r$
De ésta y la 3.ª resultará que $6.3.2n=5.8.4s$
y de ésta y la 4.ª resultará que $6.3.2.7n=5.8.4.9z$, conforme al enunciado.

357. Esto supuesto, cómo se resuelve la regla conjunta? Se plantea la operación poniendo por primera equivalencia la incógnita x=á la cantidad, cuyo valor se quiera conocer, por 2.ª aquella cuyo primer miembro sea de la especie del 2.° de la 1.ª y así sucesivamente hasta que el último sea de la misma especie que la cantidad x que se quiere hallar. Hecho esto, se multiplican ordenadamente todas las equivalencias, y el producto de los segundos miembros dividido por el de los primeros conocidos, nos dará el valor de la incógnita.

Antes de ejecutar las operaciones conviene simplificar los productos, suprimiendo los factores comunes á ambos. Véase el siguiente

Ejemplo.

¿Cuántos reales valdrán 12 fanegas de trigo, en la suposición de que dos fanegas valgan tanto como 10 cántaras de vino, que 3 cántaras de vino valen como 8 @ de patatas, y que 4 @ de este género valgan 3 pesetas y una peseta 4 reales?

Preparación. *Resolución.*

x rs. =12 fans.
2 fs. =10 cánts.
3 cant.= 8 @
4 @ = 3 ptas.
1 pta. = 4 rs.

$$X=\frac{\overset{6}{\cancel{12}}.\ 10.\ 8.\ \cancel{3}.\ \cancel{4}}{\cancel{2}.\ \cancel{3}.\ \cancel{4}.\ 1}=6.\ 10.\ 8=480$$

Para ejecutar esta operación hemos suprimido los factores 2, 3 y 4 comunes á ambos productos.

358 Qué aplicación frecuente se hace de esta regla?

La de reducir las monedas de cambio de diferentes naciones, cuando no se sabe directamente el cambio de las que nos ocurren y sí el de otras intermedias, como se vé en el siguiente

Ejemplo.

A cuántos reales equivalen 160 libras esterlinas, suponiendo que 2 libras esterlinas valgan 36 peniques que 100 peniques valgan 10 francos y 5 francos 19 rs.?

Preparación *Resolución.*

x reales =160 libras esterlinas.
2 libras = 36 peniques.
100 peniques = 10 francos.
5 francos = 19 reales.

$$x=\frac{160\times36\times10\times19}{2\times100\times5}=1094^2/_3 \text{ rs.}$$

Nota. Por esta regla pueden resolverse también todas las operaciones de la Aritmética que dejamos explicadas, esceptuando la adición y sustracción. Véase al efecto un ejemplo de dividir resuelto por esta regla.

Habiendo costado 9 cántaras de vino 1440 rs á cómo costó el cuartillo?

Preparación.	*Resolución.*
Reales x = 1 cuartillo. cuarts. 4 = 1 azumbre. azum. 8 = 1 cántara cánts. 9 = 1440 rs.	$x=\frac{1.\ 1.\ 1.\ 1440}{4.\ 8.\ 9}=5$ rs

CAPÍTULO VII.

Regla de aligación.

359. Qué es regla de aligación?

La que nos enseña á resolver los dos siguientes problemas generales: 1.° Dado el precio y la cantidad de varias especies mezcladas, hallar el precio medio de la mezcla. 2.° Dados el precio medio y los precios de diferentes especies, hallar la razón en que éstas han de mezclarse.

360. Cómo se resuelve el primer caso?

Cuando se conocen las cantidades que se han de mezclar y el precio de éstas, se hallará el precio medio de la mezcla dividiendo el valor total de las cantidades mezcladas por el número de unidades, y el cociente será el precio de la mezcla.

Ejemplo.

Se han mezclado 30 fanegas de trigo de 40 rs. fanega con 25 fanegas de 50 rs. y con 60 fanegas de 35 rs. á cómo resultará el precio de la fanega de mezcla?

Disposición.

30	fanegas	á 40	rs. valen	1200 rs.
25	id.	á 50	. . .	1250
60	id.	á 35	. . .	2100
115				4550 valor de las 115 fane-

gas: luego una fanega valdrá 4550 : 115=$39\frac{13}{23}$ rs.

361. Cómo se resuelve el 2.° caso?

Si sólamente son dos las especies que se han de mezclar, se vé la diferencia que hay entre el precio mayor y el precio medio, y el número que resulte será el de las unidades que se han de tomar de la especie menor; luego se vé la diferencia que hay entre el precio menor y el precio medio y este mismo número expresará las unidades que se han de tomar del precio mayor.

Esta regla se funda en que las cantidades que deben mezclarse de ambas especies están en razón inversa de la diferencia de sus precios al precio medio; lo cual vamos á demostrar con el siguiente ejemplo:

Se ha de mezclar trigo de 50 y de 38 rs. para vender la mezcla á 45 rs. sin perder ni ganar ¿cuántas fanegas se han de tomar de cada especie?

Sean x las fanegas de 50 rs. y z las de 38 que con ellas se han de mezclar, digo que $x : z :: 45-38 : 50-45$.

En efecto, cada fanega de 50 rs. vendida á 45 produce una pérdida de 50—45 rs.: luego las x fanegas producirán $(50-45)\times x$ rs.

En cada fanega de 38 rs. vendida á 45 rs. se ganan 45—38 rs.: luego en z fanegas se ganarán $(45-38)\times z$ rs. y como la ganancia debe ser igual á la pérdida tendrémos que $(50-45)\times x=(45-38)\times z$: de donde resulta la proporción $x : z :: 45-38 : 50-45$, que es lo que se quería demostrar.

Disposición.

$$\textit{Práctica}\ldots\quad 45\left\{\begin{array}{l} 50\ \ .\ \ .\ \ .\ \ 7 \\ \\ 38\ \ .\ \ .\ \ .\ \ 5 \end{array}\right\}=12$$

Resolución. Diré: de 50 á 45 van 5; que coloco frente al precio menor 38: de 38 á 45 van 7, que coloco frente al precio mayor 50, lo cual quiere decir: que del trigo de 50 reales se han de tomar 7 fanegas, y del de 38 rs. 5 fanegas cuya suma 12 se puede vender á 45 rs. sin ganancia ni pérdida.

Nota. Este problema se llama indeterminado, porque además de los números 7 y 5 que satisfacen la cuestión, pueden encontrarse otros muchos que dén el mismo resultado, sin más que multiplicar los hallados por un mismo número las veces que se quiera. Así los números 14, 21, 28 etc. de 50 y 10, 15, 20 etc. de 38; serían otras tantas soluciones del problema propuesto.

362. Cómo se hacen determinados estos problemas?

Añadiendo al problema propuesto una de estas tres condiciones: 1.ª que se conozca el número de unidades que se han de mezclar de una de las especies: 2.ª que se conozca la suma de las de ambas, y 3.ª que se nos dé conocida la diferencia de las mismas.

Ejemplos.

1.º Cuántos litros de vino de á 3 rs. se deben mezclar con 12 de á 8 rs. para poder vender la mezcla á 5 rs.?

Resolución. Sean x los litros de vino de á 3 rs.; según el fundamento de esta regla, explicado en el número 361, tendrémos la proporción:

$5 \begin{cases} 8..2 \\ 3..3 \end{cases}$ 12 *(litros de á 8 rs.)* : x *(de 3)* :: 2 *(diferencia entre el precio menor y el medio)* : 3 *(diferencia entre el mayor y el medio)*, ó sea $12:x::2:3$ de donde

$$z=\frac{12\times3}{2}=18 \text{ litros de á 3 rs.}$$

2.º Cuántas fanegas de trigo de 40 y 58 rs. se han de mezclar para obtener 200 fanegas de mezcla de á 48 rs.?

Resolución. $48 \begin{Bmatrix} 58. & .8 \\ 40. & 10 \end{Bmatrix} 18$

Hecha esta operación formaré dos proporciones diciendo:

1.ª Si para obtener 18 fanegas de 48 rs. he de tomar 8 de 58, para componer 200 ¿cuántas tomaré?

2.ª Si para obtener 18 fanegas de 48 rs. he de tomar 10 de 40, para componer 200 ¿cuántas?

1.ª $18:200::8:x$
2.ª $18:200::10:z$

Resolviéndolas tendré que $x=\frac{200\times8}{18}=\frac{1600}{18}=88\ ^8/_9$ fanegas de 58 rs. y $z=\frac{200\times10}{18}=\frac{2000}{18}=111\ ^1/_9$ fanegas de 40 rs. que sumadas nos dan las 200 de 48 rs.

3.º Tenemos aguardiente de 12 grados y de 32 grados

¿cuántos litros mezclarémos de cada especie á condición de que el número de litros de 32 exceda al de 12 en 20 litros y la mezcla resulte de 24 grados?

Resolución. $24\left\{\begin{matrix}12....8\\32..12\end{matrix}\right\}20$

Llamemos ahora x el número de litros de aguardiente de 32 grados y z el de 12 grados; tendrémos, según lo dicho en el núm. 361 que $x:z::12:8$: y como sabemos la diferencia que ha de haber entre x y z que es 20, podrémos modificar la anterior proporción en esta forma:

$$\left.\begin{matrix}x-z:x::12-8:12\\x-z:z::12-8:\ 8\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}20:x::4:12\\20:z::4:\ 8\end{matrix}\right\}\text{de donde}$$

$$x=\frac{20\times12}{4}=\frac{240}{4}=60 \text{ litros de 32 grados.}$$

$$z=\frac{20\times8}{4}=\frac{160}{4}=40 \text{ litros de 12 grados.}$$

363. Si fuesen más de dos las especies que deben entrar en la mezcla cómo se resuelve la cuestión?

Si fuesen más de dos las especies que han de entrar en la mezcla, la cuestión se reduce al caso anterior; para lo cual se hallan primeramente las cantidades que se han de mezclar de dos especies, una mayor y otra menor que el precio medio; luego las de otras dos mayor y menor que el precio medio, y así sucesivamente hasta concluir.

Ejemplo.

Cuántos kilógramos de azúcar de 12 rs. de 10 rs. de 7 rs. y de 5 rs. se han de mezclar para obtener azúcar de 8 rs?

Resolución. $8\left\{\begin{matrix}12....3\\10....1\\7....2\\5....4\end{matrix}\right\}$ Resulta que se pueden mezclar 3 Kg. de 12 rs., 1 de 10, 2 de 7, y 4 de 5, obteniendo 10 Kg. de 8 rs.

Este problema es también indeterminado y admite otras varias soluciones.

CAPÍTULO VIII.

Regla de falsa posición.

364. Qué es regla de falsa posición?

Aquella que, por medio de uno ó dos números supuestos, nos enseña á determinar otro desconocido.

Esta puede ser simple y doble; es simple cuando para determinar el número desconocido basta suponer otro, y es doble cuando se necesitan dos suposiciones para averiguar el número desconocido.

365. Cómo conocerémos si para la resolución del problema que se propone se necesitan una ó dos suposiciones?

Del modo siguiente: si en las condiciones del problema entran cantidades múltiplas y submúltiplas sólamente, la regla será de falsa posición simple, y para resolverla bastará un solo supuesto; pero si además entran otras cantidades fijas y determinadas, entonces será de falsa posición doble, y para resolverla tendrémos necesidad de dos supuestos.

366. Cómo se resuelve un problema de falsa posición simple?

Primeramente se supone conocida la incógnita del problema, eligiendo para ello un número que satisfaga las condiciones que se proponen: (1) luego se hacen con él las operaciones que se harían con la incógnita, si fuese conocida, y finalmente se plantea y resuelve la siguiente proporción: *número supuesto* es al *número verdadero*, como *el resultado obtenido* es al *que se propone*.

Ejemplo:

Cuál es el número cuya mitad, tercio y cuarto mas el duplo y triplo del mismo compongan 1460?

Resolución. Tomaré para número supuesto uno que tenga mitad, tercera y cuarta parte exactas, tal como 12; sacaré las partes indicadas de este número, á cuya suma agregaré el duplo y el triplo del mismo y valiéndome de la suma final obtenida formaré la proporción dicha en la regla.

---

(1) Puede suponerse un número cualquiera, pero la resolución es más fácil suponiendo un número con las expresadas condiciones.

Práctica.

Sea, pues, el número supuesto	12
Su mitad es. . . .	6
Su tercio.	4
Su cuarto.. . . .	3
Su duplo.	24
Su triplo.	36
Suma falsa. . .	73

Proporción.

$12 : x :: 73 : 1460$ de donde

$$x = \frac{1460 \times 12}{73} = \frac{17520}{73} = 240$$

Luego 240 es el número pedido.

215. Cómo se resuelven los problemas de falsa posición doble?

Se supone un número con el que se practican las mismas operaciones que en el problema anterior hasta obtener un resultado; éste se compara con el que se pide y la diferencia que entre ellos se encuentre, que se llama *error*, se anota anteponiéndole el signo + si el resultado obtenido es mayor que el verdadero; y el signo — si es menor.

En seguida se supone otro número, con el cual se practican las mismas operaciones, anotando así mismo el *error* que resulte.

Finalmente, se multiplica cada supuesto por el *error* del otro, y si los *errores* tienen el mismo signo, la diferencia de estos productos se divide por la diferencia de los errores; pero si éstos tienen diferente signo, la suma de dichos productos se divide por la suma de los errores.

Ejemplo.

Dos amigos quieren comprar un caballo; uno de ellos no tiene más que la 5.ª parte de lo que vale y el otro la 7.ª parte: si á lo que entre los dos tienen se añadiesen 276 rs. podrían ya comprar el caballo ¿cuál era el precio de éste?

Resolución.

Supongamos 1.° que el caballo vale 70 rs. tendrémos:

1.er supuesto 70.

Cantidad que pone el 1.er amigo. .	14
Id. que pone el 2.°	10
Mas.	276
Resultado obtenido.	300 rs. y como se-

gún la suposición solo deberían resultar 70 rs. que es el valor del caballo, tenemos un error de 230 de exceso, cuyo *error* anotarémos así + 230

Supongamos ahora que el caballo valga 140 rs. tendrémos 2.° supuesto 140.

Cantidad del 1.er amigo.	28
Id. del 2.°.	20
Mas.	276
Resultado obtenido. . . .	324 rs.

y como, según esta segunda suposición, el caballo solo vale 140, resulta otro *error* por exceso de 184, que anotarémos en la misma forma que el anterior así + 184.

Resúmen.

1.er supuesto.... 70..... + 230 error } de donde
2.° id............ 140..... + 184 id. }

$$\text{Valor verdadero del caballo} = \frac{(140\times230)-(70\times184)}{230-184} = \frac{32200-12880}{46} = 420.$$

CAPÍTULO IX.

Problemas correspondientes á esta 4.ª parte.

1.° Extraer las raíces cuadradas de los números 180, 590, 6382, 56325 y 685564.

2.° Id. id. de los números $\frac{4}{9}$, $\frac{25}{49}$, $\frac{36}{64}$ y $\frac{15}{16}$, $\frac{24}{144}$ y $\frac{68}{92}$

3.° Id. id. de los números 8, 40, 103 y 480 de modo que se diferencien de las verdaderas en menos de $^1/_9$.

4.° Id. id. de los números 124'56; 8465'525; 0'758, y 0'003.

5.° Aproximar hasta milésimas las raíces cuadradas de los números 568; 7560 y 32854.

6.° Extraer las raíces cúbicas de los números 3468; 65896 y 365896.

7.° Id. id. de los números $\frac{27}{64}$, $\frac{125}{343}$, $\frac{99}{512}$ y $\frac{65}{78}$.

8.° Id. id. de los números 6, 80 y 625 de modo que se diferencien de las verdaderas en menos de $^1/_5$.

9.° Id. id. de los números 68'52; 168'256; 0'4543 y 0'0064.

10. Aproximar hasta centésimas las raíces cúbicas de los números 6384; 68456 y 745894.

11. Habiendo 60 caballos consumido 500 fanegas de cebada ¿cuántos caballos se necesitarían para consumir 2400 fanegas en el mismo tiempo y con el mismo pienso?

12. Resolver por el método de reducción á la unidad el siguiente problema: Una locomotora ha recorrido en 5 días 8750 kilómetros ¿cuánto tardaría á recorrer 78690 con la misma velocidad?

13. Resolver por medio de las proporciones y por el método de reducción á la unidad el siguiente problema: Si 15 libras de agua ocupan 7'5 litros ¿cuánto pesarán 7 Hl., 6 litros y 25 centl?

14. Un caballo que anda 8 Km. por hora, ha tardado 15 horas á recorrer una distancia ¿cuánto hubiera tardado á recorrerla andando 6 Km. por hora?

15. Si 40 operarios han hecho una obra en 24 días ¿cuánto tiempo hubieran empleado en hacerla 32 operarios?

16. Para esterar una sala se necesitan 7 rollos de estera de 12 metros de largo, si tuviese cada rollo 15 metros ¿cuántos se necesitarían?

17. Un buque lleva víveres para 20 días; pero una borrasca le ha alejado de la costa de tal manera, que tiene que tardar mes y medio á volver al puerto ¿qué ración debe darse á cada tripulante para que no les falte el alimento?

18. Para hacer un vestido se necesitan 15 metros de tela de 5 cuartas de marca, si la marca fuese 7 cuartas ¿cuántos metros se necesitarían?

19. 16 hombres en 15 días, trabajando 5 horas al día, han hecho una obra de fortificación de 30 metros de largo; 5 de ancho y 4 de alto ¿cuántos hombres será necesario emplear para hacer una fortificación de 500 metros de largo, 6 de ancho y 3 de alto en 10 días, trabajando 8 horas cada día?

20. Una fuente con 6 caños llena en 5 días un estanque de 15 metros y 28 decímetros cúbicos de cabida ó volúmen ¿en cuántos días llenaría otro estanque de 26 metros y 450 decímetros cúbicos de volúmen?

21. Se ha de repartir una hacienda de 124000 rs. entre tres hermanos en proporción á sus edades; siendo la del 1.° 24 años, 16 la del 2.° y 10 la del 3.° ¿cuánto corresponderá á cada uno?

22. Entre cuatro pueblos que cuentan el 1.° 160 vecinos, el 2.° 240, el 3.° 630 y el 4.° 580 se han de distribuir 800.000 rs. en proporción al número de vecinos ¿cuánto corresponderá á cada pueblo?

23. A un pueblo que tiene de riqueza imponible 600000 reales se le han impuesto de contribución 15000 rs. ¿cuánto corresponderá pagar á Pedro, cuyo capital es 8000 rs. á Juan que tiene 5000 y á Diego que tiene 600?

24. Tres comerciantes de la Habana fletan un buque para traer á España el uno 1600 cajas de azúcar, el otro 2840 y el otro 5000. Abonan por el seguro 8000 rs. ¿qué parte corresponde á cada uno?

25. Cuatro labradores han formado sociedad para labrar una hacienda, habiendo puesto el 1.° 4000 rs.; el 2.° 5000; el 3.° 6000, y el 4.° 7000: después del cultivo han obtenido un producto líquido de 40000 rs. ¿cuánto debe percibir cada uno?

26. Tres mineros formaron sociedad para explotar una mina, aportando todos el mismo capital; pero el 1.° se retiró á los 5 meses, el 2.° á los 8 y el 3.° á los 9, en la explotación se obtuvo un beneficio de 15000 rs. ¿cuánto corresponde á cada socio?

27. Cinco comerciantes emprendieron un negocio en el que perdieron 8000 reales. El 1.° entró en la sociedad 3000 rs. que retiró á los 20 días; el 2.° 5000 que retiró á los dos meses, el 3.° 2000 rs. que tuvo en la sociedad 5 meses, el 4.° 1000 rs. por 10 meses y el 5.° 800 rs. por un año ¿cuánto perdió cada uno.

28. Cuánto producen 18000 rs. impuestos á réditos al 6 %?

29. Por una casa se paga de censo anual la cantidad de 80 rs.: se quiere redimir este censo que ha de capitalizarse al 8 % ¿cuánto habrá que pagar por su redención?

30. Por una finca que produce 8000 rs. se pagan de contribución 164 rs. anuales ¿á cómo % se le ha cargado?

31. Un sugeto tomó á réditos 12000 rs. al 5 %, á los 8 meses hizo el pago correspondiente ¿cuánto debió pagar?

32. Otro que tomó 15000 rs. pagó de rédito á los 5 meses 420 rs. á cómo por % le cobraron?

33. Otro pagó 800 rs. de réditos por un préstamo que tuvo 7 meses al 6 % ¿cuál fué la cantidad que tomó?

34. Cuánto tiempo tendría Juan en su poder 8500 rs. que tomó á réditos al 7 % y por los cuales pagó 420 reales?

35. Cuánto valdrá hoy una letra de 1500 rs. que vence á los tres meses siendo 5 % el descuento?

36. Cuánto valdrá actualmente un pagaré de 20000 rs. que se cobra con un año de anticipación y con un descuento de 6 %?

37. Cuánto habrá de abonarse por una letra de 3600 rs. pagada con 10 días de anticipación con un 4 % de descuento?

39. Un sugeto colocó en una caja de ahorros 3200 rs. á un 3 % de interés; y en la que los tuvo 4 años dejando los intereses sin cobrar: cuánto debió percibir al retirar su capital é intereses?

40. Habiendo ahorrado un obrero 250 rs. en cada uno de tres años y habiendo ido imponiéndolos sucesivamente en una caja de ahorros que abona el 4 %: qué capital reunirá á interés compuesto al fin de los tres años?

41. Cuántas pesetas se abonarán en Madrid por 80 libras esterlinas, siendo el cambio entre Lóndres y Amsterdan el de 1 libra esterlina por 10'5 florines, el de Amsterdan y París 4'84 florines por 11 francos, y el de París y Madrid 5'25 francos por 5 pesetas?

42. Mezclándose 30 litros de vino de á 3 rs. con 24 de 2'75 y con 54 de 3'25 á cómo saldrá el litro de la mezcla?

43. Echando á 200 cántaras de vino de á 12 rs. 20 cántaras de agua que cuesta á 5 maravedís de porte cada cántara ¿cuánto valdrá la cántara de la mezcla?

44. Un tabernero que quiere mezclar vino de 26, 22, 15 y 8 reales cántara y llenar con éstos una cuba de 200 cántaras que ha de vender á 18 rs. cuántas cántaras mezclará de cada clase?

45. Con 50 litros de aguardiente de 28 grados se quiere mezclar otro aguardiente de 16 grados ¿cuántos litros de éste se han de tomar para que la mezcla resulte de 22 grados?

46. Cuántos Hl. de trigo de 112 rs. y de 82 se deben mezclar para que su mezcla pueda venderse á 90 rs. á condi-

ción de que el número de las que se tomen del de 112 exceda en 50 al de 82?

47. Preguntando á un pastor las ovejas que guardaba contestó: Si á las que guardo añades otras tantas, la mitad y 5.ª parte más, tendré 270 ¿cuántas guardaba?

48. A un estudiante preguntaron cuántos años tenía y contestó: no lo sé, pero aseguro que si á los años que han pasado desde mi nacimiento, añades los que mi padre entonces tenía, que eran el doble de los que yo ahora cuento, y la 3.ª y 5.ª parte más de los que tengo, resultarán 53 años ¿qué edad tiene?

49. Dos banqueros hicieron el arqueo de sus cajas y observaron que entre los dos tenían 38700 duros y que el capital del 2.º era doble que el del 1.º ¿cuánto tenía cada uno?

50 Un maestro para estimular á un discípulo holgazan le hizo la siguiente proposición: por cada lección que dés bien, le dijo, te daré 3 vales, y por cada una que dés mal, te quitaré 2; después de haber dado 20 lecciones tenía el muchacho 5 vales ¿cuàntas lecciones dió bien y cuántas mal?

PROBLEMAS VARIOS.

51 Queremos construir una escuela para 200 niños, en la suposición de que cada niño necesite 9 piés superficiales y que la forma de la sala de clase sea un rectángulo de doble longitud que latitud ¿cuáles deben ser sus dimensiones?

52. Se quiere construir un cuartel dejando en su interior una plaza exactamente cuadrada capaz para 15400 soldados con la holgura necesaria para sus ejercicios; suponiendo que cada soldado necesite cuatro metros cuadrados para hacer todas las evoluciones ¿qué longitud deberá darse á los lados de la plaza?

53. Deseo construir un estanque de forma cúbica que pueda contener 600800 litros de agua ¿cuáles deben ser sus dimensiones?

54. Un comerciante de quincalla principia su comercio con 23546 rs. de bisutería: un año después tiene en dinero 3475 reales y 16930 reales en mercancías; le deben además 4707'60 rs. ¿qué beneficio ha obtenido durante el año?

55. Vendiéndose el kg. de azúcar á 2'50 pesetas, el de café á 3 y el chocolate á 3'50 ¿cuántos kgs. de estos géneros

podrán comprarse por la cantidad de 135 pesetas y cuántos de cada clase queriendo el mismo número de kgs. de cada una?

56. Para uniformar unos soldados se compraron 115 metros de paño y 47 de bayeta por 540 escudos y 4 milésimas; pero no habiendo bastante hubo necesidad de comprar por 2.ª vez otros 60 metros de paño y 47 de bayeta, los cuales al mismo precio que los anteriores costaron 331 escudos y 4 milésimas. ¿A qué precio habrá costado el metro de paño y á cómo el de bayeta?

57. Dividir el número 1694 en cuatro partes tales que la 2.ª sea triple que la 1.ª; la 3.ª doble que la 2.ª y la 4.ª cuadruple que la 1.ª

58. Empleando los hojalateros para soldar, una mezcla de 7 partes de plomo y 1 de estaño, y suponiendo que se venda el kg. de plomo á 0'400 escudos y el de estaño á 1'700 escudos, se desea saber cuánto plomo y cuánto estaño será preciso emplear para obtener un kg. de dicha aleación y cuál será el precio de ésta.

59. Un colono quiere arar sus tierras teniendo para ello un par de asnos, otro de bueyes y otro de mulas. Sabe que un año los pollinos solos las araron en 30 días; que en otro los bueyes solos las araron en 40 días y en otro las mulas solas las araron en 15 días ¿cuántos días necesitarán los tres pares juntos para ararlas?

FIN DE LA 4.ª PARTE.

COMPLEMENTO DE LA ARITMÉTICA.

CAPÍTULO PRIMERO.

Progresiones.

Artículo 1.°

Progresiones aritméticas ó por diferencia.

1. Se dá el nombre de progresión aritmética á una série de términos tales que entre cada dos consecutivos hay la misma diferencia, tales son los siguientes: 1, 4, 7, 10, 13; y también 24, 21, 18, 15.

2. La diferencia que hay entre dichos términos consecutivos se llama *razón* de la progresión. Así en los ejemplos propuestos la *razón* es 3.

3. Las progresiones pueden ser *crecientes y decrecientes.* Son crecientes, cuando los términos van aumentando, y decrecientes, cuando van disminuyendo.

4. Una progresión aritmética se escribe poniendo delante del primer término dos puntos separados por una línea horizontal, y luego un punto entre cada uno de los términos. Así la progresión, 1, 4, 7, 10, 13 se escribirá: $\div$ 1.4.7.10.13; y se lee como 1 es á 4, es á 7, es á 10, es á 13.

5. De lo dicho en la definición se deduce que el 2.° término de una progresión aritmética creciente es igual al 1.° mas la razón, el 3.° igual al 2.° mas la razón, ó igual al 1.° mas dos veces la razón; y en general *un término cualquiera de la progresión será igual al* 1.° *mas tantas veces la razón, como términos hay antes que él.*

6. Según esto podrá hallarse un término cualquiera de una progresión sin más que conocer el primer término y la razón. Así, si quisiésemos hallar el término vigésimo de una progresión aritmética, cuyo primer término sea 6 y la razón 4, dirémos: 6 *primer término* + 4 *razón* $\times$ 19 *términos que hay antes del vigésimo será:* $6+4\times19=6+76=82$.

7. Los problemas que más comunmente se resuelven en las progresiones, además del que acabamos de resolver son: 1.° Hallar el último término de una progresión, conocidos el 1.°, la razón y el número de ellos. 2.° Interpolar entre

dos números dados, cierto número de medios diferenciales. 3.° Hallar la suma de todos los términos de una progresión, dados que sean el 1.° y el último de la progresión y la razón de ella. Otros varios problemas que pueden también resolverse son el dominio del *Algebra*.

8. *Para hallar el último término de una progresión se multiplica la razón por el número de términos menos* 1, *y al producto se le añade el primero.*

En efecto, si llamamos u al último término a el 1.° r la razón y n el número de términos tendrémos por lo dicho en el número 5, que

$$u=a+(n-1)r.$$

Ejemplo. Hallar el último término de una progresión, que tenga 15 términos, siendo el 1.° 8 y la razón 3; tendrémos que: $u=8+(15-1)\times3=8+14\times3=8+42=50$.

9. *Para interpolar entre dos números dados un cierto número de términos diferenciales*, ó lo que es lo mismo, *para formar una progresión dados el 1.° y el último término y el número de términos intermedios, no hay que hacer mas que hallar la razón de la progresión y luego escribir la progresión en la forma dicha en el número* 4; pero *para hallar la razón se resta del último el primero y la diferencia se divide por el número de términos de la progresión menos uno, ó por el de los términos que se han de interpolar mas uno.*

Ejemplo. Interpolar entre los números 5 y 40 cuatro medios diferenciales; tendrémos que $r=\frac{u-a}{n-1}$ y por consiguiente: $r=\frac{40-5}{5}=\frac{35}{5}=7$: luego la progresión será:

$$\div\ 5.12.19.26.33.40.$$

10. *Para hallar la suma de todos los términos de una progresión, se suma el 1.° y el último término, la suma se multiplica por el número de términos y el producto se divide por* 2. Hé aquí la fórmula, $S=\frac{(a+u)n}{2}$ en la que S representa la suma de todos los términos, a el 1.° u el último y n el número de ellos.

Ejemplo. Hallar la suma de todos los términos de la progresión en que 5 es el primer término, 40 el último y 6 el número de términos; tendrémos: $S=\frac{(5+40)\times6}{2}=\frac{270}{2}=135.$

ARTÍCULO 2.°

Progresiones por cociente ó geométricas.

11. Se dá el nombre de progresión por cociente ó geométrica á una série de números tales que cada uno es igual al anterior inmediato multiplicado por un mismo número: tales son los números 4, 12, 36, 108, 324, 972, 2916, y los números 768, 192, 48, 12, 3.

12. El número por el cual se ha de multiplicar se llama *razón* de la progresión. Así la razón de la primera progresión anterior es 3 y la de la 2.ª es $^1|_4$.

13. Las progresiones geométricas pueden ser también *crecientes* y *decrecientes*: cuando la razón es mayor que la unidad, la progresión es *creciente* y si es menor que la unidad, *decreciente*.

14. Una progresión geométrica se escribe poniendo delante del primer término cuatro puntos separados por una línea horizontal, y dos puntos entre los demás términos. Así la 1.ª progresión la escribiríamos en esta forma:

$$\div\!\!\div 4 : 12 : 108 : 324 : 972 : 2916,$$

y la 2.ª así $\div\!\!\div$ 768 : 192 : 48 : 12 : 3 : $^3|_4$.... que se leen: como 4 es 12, es á 36, etc. y como 768 es á 192; es á 48 etc.

15. De la definición dada se deduce que en toda progresión geométrica se verifica: que el 2.° término es igual al 1.° multiplicado por la *razón*, el 3.° igual al 2.° multiplicado por la *razón* ó al primero multiplicado por la segunda potencia de la *razón*, y en general, *un término cualquiera de una progresión por cociente es igual al* 1.° *multiplicado por una potencia de la razón, cuyo exponente es el número de términos que hay antes que él.*

16. Según esto podrá hallarse fácilmente un término cualquiera de una progresión sin más que multiplicar el 1.° por la razón elevada á la potencia que indique el número de términos que haya antes que él. Así el término 8.° de la progresión, cuyo primer término fuese 3, y la razón, 5 sería: $3\times5.^7=68125.$

17. Tres son comunmente los problemas que se resuelven aritméticamente en las progresiones geométricas, á saber: 1.° Hallar el último término de una progresión conocido el 1.° y la razón, el cual no es mas que un caso particular del anterior. 2.° Hallar la suma de todos los términos de una progresión geométrica, conocidos el 1.° el último, la razón y el número de términos. 3.° Interpolar varios medios geométricos entre dos números dados.

18. *Para hallar el último término de una progresión geométrica, tendrémos, según lo dicho en el número* 16: *que:* $u=ar^{n-1}$ en donde u es el último término, a el 1.° r la razón y n el número de términos.

Ejemplo. Cuál será el último término de la progresión que principiando por 4, tenga 7 términos y su razón sea 3?

Este problema se reduce á hallar el séptimo término de dicha progresión, y por lo tanto $u=4\times3^6=2916$.

19. *Para hallar la suma de todos los términos de una progresión geométrica, se multiplica el último término por la razón, de este producto se resta el primer término, y la resta se divide por la razón disminuida en una unidad:*

Véase la fórmula: $S=\frac{ur-a}{r-1}$

Ejemplo. Hallar la suma de todos los términos de la progresión $\div\!\div$ 4 : 12... 2916. Según la fórmula, tendrémos

$$S=\frac{(2916\times3)-4}{3-1}=\frac{8744}{2}=4372.$$

20. *Para interpolar cierto número de términos geométricos entre dos números dados de una progresión, se halla primero la razón de dicha progresión y luego se escribe, multiplicando el* 1.° *por dicha razón, luego éste por la misma y así sucesivamente.*

Para hallar la razón tendrémos que: $r=\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$ fórmula que quiere decir *que se divida el último término por el* 1.° y *del cociente se extraiga la raíz que indique el número de términos menos uno.*

Ejemplo. Interpolar tres términos geométricos entre los números 4 y 324 de una progresión. Según la fórmula anterior, la razón de esta progresión será: $r=\sqrt[4]{\frac{324}{4}}=\sqrt[4]{81}$ $=3$: luego la progresión sería ∺4:12:36:108:324.

Nota. Como en la Aritmética no se enseña generalmente á extraer más raíces que la cuadrada y cúbica, la resolución de este problema viene á hacerse difícil cuando se pida interpolar más de dos términos; esto no obstante advertirémos que la raíz cuarta de un número puede obtenerse extrayendo la raíz cuadrada de la raíz cuadrada del mismo; y la raíz novena se obtiene extrayendo la raíz cúbica de la raíz cúbica del mismo; pero el medio más sencillo de extraer la raíz de un grado cualquiera es el de valerse de los *logaritmos* de que luego hablarémos.

21. De la formación de las progresiones geométricas se deduce que tres términos consecutivos de una progresión forman una proporción contínua, y cuatro, una proporción discreta: que cuatro términos cualesquiera de una progresión, con tal que equidisten dos á dos de los términos extremos, forman también proporción. Así si la progresión es

∺2:4:8:16:32:64:128....

los tres primeros 2, 4, 8, forman la proporción contínua 2:4::4:8; los cuatro términos consecutivos 8, 16, 32 y 64 forman la discreta 8:16::32:64; los cuatro términos 4 y 8, 32 y 64 que distan respectivamente igual de los extremos 4 y 128 forman también la proporción: 4:8::32:64.

CAPÍTULO II.

Logaritmos.

22. Si se escriben en justa correspondencia dos progresiones, una aritmética que principie por *cero*, y otra geométrica que principie por *uno*, los términos de la 1.ª son los *logaritmos* de los términos correspondientes de la segunda, la razón de la progresión geométrica se llama *base*, y las dos progresiones constituyen un sistema de *logaritmos*. Así que puede haber un sin número de sistemas logarítmicos. La definición de *logaritmo* puede darse diciendo que es el exponente á que debe elevarse la base para que la potencia sea igual al número propuesto.

23. El inventor de los logaritmos fué un tal Neper, geó-

metra escocés, el cual adoptó una base bastante complicada; pero Brigss después propuso la base 10, que es la misma de nuestro sistema de numeración, la cual fué aceptada por todos los matemáticos y por consiguiente es la usual.

24. Siendo, pues, la base 10 tendríamos el sistema de logaritmos siguiente:

Logaritmos: 0.1 . 2 . 3 . 4 .5 . 6 etc·
Números.... 1:10:100:1000:10000:100000:1000000 etc.

en el cual se vé que el logaritmo de 1 es *cero*, el de 10, 1 y el de 100, 2 etc., pero como entre los números 1 y 10, están los números 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, los logaritmos de estos números estarán comprendidos entre *cero* y *uno*, lo mismo que los logaritmos de los números 10 á 100, estarán comprendidos entre 1 y 2, y así de los demás, y efectivamente así es, pues los logaritmos de todos los números, excepción hecha de las potencias de 10, constan de dos partes: *entera* y *decimal*; la parte entera se llama *característica* y la parte decimal, *mantisa*.

25 Los logaritmos de las potencias de la base 10 se componen solo de parte entera; es decir, solo tienen la *característica* y ésta tiene tantas unidades, como ceros acompañan á la unidad; los demás números no tienen logaritmos exactos, sino sólamente aproximados.

26. En vista de las grandes ventajas que se han observado en el cálculo por medio de logaritmos, no han faltado matemáticos que se han ocupado en reunir, formando tablas, los números desde 1 hasta cierto límite y sus correspondientes logaritmos; y entre ellos tenemos á Brigss, que fué el primero que construyó tablas del sistema ordinario; Callet, cuyas tablas llegan hasta el número 108000; Calvet, hasta 100000; Vazquez Queipo, hasta 11000; Lalande, hasta 10000 etc. También se diferencian unas tablas de otras en el número de cifras decimales que tienen las mantisas, así vemos las de Callet con siete cifras decimales, las de Vazquez Queipo con seis, las de Lalande con cinco y estas mismas reformadas por M. Marie, con siete. Las más usadas son esas y las de Vazquez Queipo.

27. Los logaritmos facilitan notablemente el cálculo en la multiplicación y división; pero sobre todo en la elevación á potencias y extracción de raíces. Veamos al efecto como se practican estas operaciones por medio de los logaritmos.

Multiplicación.

28. Para multiplicar varios números por este medio, se buscan en las tablas los logaritmos correspondientes á ellos, se suman éstos, y la suma será el logaritmo del producto, el cual se busca en las tablas

Ejemplo. Hallar el producto de 18×13 por medio de los logaritmos.

Diré:	Log. de 18. . .	1'255273	Buscando en las tablas el número correspondiente á este logaritmo, encontramos el 234 que es el producto de 18×13.
	Log. de 13. . .	1'113943	
	Suma	2'369216	

División.

29. Para efectuar la división de dos números, se hallan los logaritmos del dividendo y divisor y se restan; el resto será el logaritmo del cociente, el cual se busca en las tablas, y á su frente estará el cociente.

Ejemplo. Dividir 5684 por 98 por medio de los logaritmos.

Diré:	Log. de 5684 . .	3'754654	Buscando en las tablas este logaritmo encuentro que corresponde al número 58 que es el cociente de 5684 : 98.
	Log. de 98 . .	1'991226	
	Resta	1'763428	

Elevación á potencias.

30. Para elevar un número á una potencia se halla su logaritmo, se multiplica por el exponente de la potencia, y el producto será el logaritmo de dicha potencia, se busca en las tablas el número correspondiente á este logaritmo y tendrémos la potencia que se desea.

Ejemplo. Elevar el número 6 á la 5.ª potencia.

Diré: Long. de 6=0778151×5=3'890755 Buscando este log. en las tablas encuentro que corresponde al número 7776: luego 6^5=7776.

Extracción de raíces.

31. Para extraer la raíz cualquiera de un número, se busca en las tablas su logaritmo; éste se divide por el índice de la raíz y el cociente será el logaritmo de dicha raíz; se busca éste en las tablas y el número á él correspondiente será la raíz que se desea.

Ejemplo. Cuál es la $\sqrt[4]{4096}$?

Diré: Log. de 4096=3'612360 : 4=0'903090. Buscando éste log. en las tablas encuentro que el número correspondiente á él es 8: luego $\sqrt[4]{4096}=8$

32. De todo esto se deduce que una proporción podrá resolverse también por medio de los logaritmos, sin más que convertir las operaciones de multiplicar en sumar y las de dividir en restar, v. g. Sea la proporción 12 : 36 :: 15 : x. Diríamos: Log. X=Log. 15 + log. 36—log. 12=1'176091 + 1'556303—1'079181=1'653213; logaritmo que corresponde al núm. 45: luego X=45.

33. Varias son las dificultades que se pueden presentar al buscar en las tablas ya el logaritmo correspondiente á un número dado, ya el número correspondiente á un logaritmo. Estas dificultades son: 1.ª Que el número no se halle en las tablas por exceder de sus límites. 2.ª Que el logaritmo no esté en las tablas por la misma razón. 3.ª Que al buscar en las tablas un logaritmo se encuentre su característica y alguna de las cifras decimales pero no todas. Veámos como se resuelven.

34. Hallar el logaritmo de un número que sea mayor que el límite de las tablas.

Sea el número 64586 cuyo log. queremos obtener por medio de unas tablas cuyo límite es 10000. Desde luego sabemos que la característica es 4.

1.° Prescindiré de tantas cifras de la derecha del número cuantas sean necesarias para que el número esté contenido en las tablas que en el caso presente es de una, quedando el número convertido en 6458'6.

2.° Busco en las tablas el logaritmo correspondiente al número 6458 que en este caso es 3'810098.

3.° Hallarémos la diferencia que hay entre este logaritmo y el del número siguiente 6459, que en este caso es 67 millonésimas y formarémos la siguiente proporción: si 1 unidad dá en sus logaritmos la diferencia 67; 0'6 que es la diferencia que hay entre 6459 y 6459'6 dará x, esto es, 1 : 67 :: 0'6 : x, de donde x=40 millonésimas.

4.° Hallada esta diferencia la sumamos con el logaritmo hallado, y añadiendo á su característica tantas unidades como cifras hemos separado tendrémos que el logaritmo de 64586=4'810138.

Si las cifras de que se ha prescindido fuesen ceros, entonces no habría que hacer otra cosa sino aumentar á la característica tantas unidades como ceros se han separado.

35. Hallar el número correspondiente á un log. que no se encuentra en las tablas por exceder también de sus límites.

Sea el logaritmo 7'950170.

1.° Quitamos á la característica tantas unidades como sean necesarias para que ésta pueda encontrarse en las tablas, que en este caso son 4, quedando el logaritmo propuesto reducido á 3'950170.

2.° Busco este logaritmo en las tablas y veo que le corresponde el número 8916.

3.° Añado á la derecha de este número tantos ceros como unidades he quitado á la característica, que son cuatro y tendrémos que el número correspondiente al logaritmo 7'950170 es 89160000.

36. Hallar el número correspondiente á un logaritmo tal que solo se encuentran en las tablas sus primeras cifras.

Sea el logaritmo 3'243266.

Buscando este logaritmo en las tablas encuentro que se halla comprendido entre los correspondientes á los números 1750 y 1751: luego el número correspondiente es 1750 y una fracción ¿cual será esta? Vamos á verlo.

Hallo la diferencia que hay entre el logaritmo propuesto y el de 1750 que en este caso es 228 millonésimas.

Hallo también la diferencia que hay entre los logaritmos de 1751 y 1750 que en este caso es 248 millonésimas y con estas diferencias formo la siguiente proporción: Si 248 dan una unidad de diferencia, 228 qué diferencia darán?

$$248 : 1 :: 228 : x,$$

de donde $x = \frac{228}{248} = \frac{57}{62}$ ó sea 0'92: luego el número correspondiente al logaritmo 3'243266 es 1750'92.

CAPÍTULO III.

Sistemas de numeración.

37. Dijimos (22) al hablar de la numeración que había diferentes sistemas de numeración y que recibían diferentes

nombres, según fuése la base: así que si se toma por base el número 2 se llamaba *binario*, si el 3, ternario, si el 4 cuaternario etc. y vimos como pueden representarse todos los números con diez cifras ó guarismos, según el sistema decimal. Vamos á ver ahora como pueden también representarse con dos, tres, cuatro etc. cifras según sea la base que se adopte.

38. Al efecto sentaremos el principio *convencional* de que en todo sistema de numeración se necesitan para representar los números tantas cifras ó guarismos, incluyendo el *cero*, cuantas unidades tenga la base; y que toda cifra colocada á la izquierda de otra representa unidades tantas veces mayores que la de su derecha cuántas tenga la base. Así en el sistema binario se necesitan dos cifras, á saber: 1 y 0; en el ternario, tres cifras, 1, 2 y 0; en el duodecimal 12, á saber 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 y otros dos signos que representen el 10 y el 11 que se suelen representar con las letras *a* y *b* del alfabeto griego. Y toda cifra colocada á la izquierda de otra representa unidades dos veces mayores que la de su derecha en el sistema binario, tres veces mayores que la de su derecha en el ternario; doce veces mayores en el duodecimal etc.; ó lo que es lo mismo toda cifra en el primer lugar de la derecha representa unidades simples, en el segundo, la primera potencia de la base, en el 3.° la 2.ª potencia, en el 4.° la 3.ª en el 5.° la 4.ª en el 6.° la 5.ª y así sucesivamente.

39. Según esto veamos ahora como pueden representarse todos los números enteros en el sistema quinario, por ejemplo. Al efecto, abservarémos que las cifras empleadas en este sistema son 1, 2, 3, 4, 0, y que cada cifra colocada á la izquierda de otra ha de representar unidades 5 veces mayores que ella. Por lo tanto los números 1, 2, 3 y 4 se representarán con éstas cifras colocadas en el primer lugar, así: 1=uno; 2=dos; 3=tres; 4=cuatro.

Para representar el número 5 escribirémos el 1 en el 2.° lugar y el cero en el 1.° así: 10=5; para el seis el 1 en primer lugar que vale uno y otro en el segundo que vale cinco, así 11=6, y así sucesivamente de modo que los números correlativos, uno, dos, etc., se representan así:

uno,	*dos,*	*tres,*	*cuatro,*	*cinco,*	*seis,*	*siete,*	*ocho,*	*nueve,*	*diez,*
1...	2...	3...	4...	10...	11..	12...	13...	14...	20.

once,	*doce,*	*trece,*	*catorce,*	*quince,*	*diez y seis,*	*diez y siete,*
21...	22..	23..	24...	30...	31 ...	32...

40. Sabido esto, sepamos como un número escrito en el sistema decimal se traduce á otro sistema cualquiera.

Para esto se divide el número propuesto y los cocientes que vayan resultando por el que represente la base del sistema á que se quiere reducir hasta llegar á obtener un cociente menor que dicha base, en cuyo caso la cifra de éste cociente, será la primera de la izquierda ó de orden superior y los resíduos sucesivos las demás cifras del número en orden inverso á su obtención. Ejemplo: traducir el número 5789 al sistema cuaternario.

Disposición.

```
             5789 | 4
             1121  1447 | 4
             000.  0203  361 | 4
             .  0  .  00.  90 | 4
             .  .  .  12  22 | 4
             .  .  .  0.  02  5 | 4
             .  .  .  .  .  1   1 : Luego el n.°
buscado será 1. . 3. . 1.  2 . 2  1. . 1
             7.ª 6.ª 5.ª 4.ª 3.ª 2.ª 1.ª
```

ó sea 1122131.

41. Escrito este número, podremos traducirlo al sistema decimal, examinando el valor de cada una de sus cifras según el lugar que están ocupando y sumando después las diferentes unidades, nos volverá á dar el número propuesto que nos servirá de comprobación de la regla anterior.

En efecto el 1 que ocupa el primer lugar de la derecha vale unidades simples. 1

el 3 que ocupa el 2.° vale base $4 \times 3 =$. . . 12

el 1 del 3 °, base $4^2 \times 1 =$ 16

el 2 del 4.° base $4^3 \times 2 =$ 128

el 2 del 5.° base $4^4 \times 2 =$ 512

el 1 del 6.° base $4^5 \times 1 =$ 1024

el 1 del 7.° base $4^6 \times 1 =$ 4096

Suma. . 5789 igual al número propuesto.

FIN DE LA ARITMÉTICA.

ÍNDICE.

Primera parte.

Cuarta parte.

COMPLEMENTO.

ADVERTENCIA.

Para evitar falsificaciones todos los ejemplares van sellados por el Autor de quien es propiedad esta obra.