

75

R

664



N.º 98.

TRATADO ELEMENTAL

DE

ARITMÉTICA Y GEOMETRÍA

POR

D. FELICIANO CATALAN Y MONROY,

Profesor por oposición
del Grupo de Ciencias en la Escuela
Normal de Maestros de Logroño

1.ª PARTE. — ARITMÉTICA



LOGROÑO:

Imprenta, librería y encuadernación de EL RIOJANO.

1901



R. 20.769

Esta obra es propiedad de su autor, que ha hecho el depósito que marca la ley, debiendo llevar todos los ejemplares la correspondiente contrasena.

Los pedidos pueden dirigirse al autor ó á los Sres. Hijos de Alesón.—Logroño.

Precio de la Aritmética con el apéndice.	4 pesetas.
Sin éste.	3,50 »
El apéndice suelto.	1,50 »



TRATADO ELEMENTAL
DE
ARITMETICA Y GEOMETRIA

POR
D. FELICIANO CATALÁN Y MONROY,

PROFESOR POR OPOSICIÓN, DEL GRUPO DE CIENCIAS EN LA
ESCUELA NORMAL DE MAESTROS DE LOGROÑO

1.^a PARTE



Feliciano Catalán y Monroy

LOGROÑO

Imprenta, Librería y encuadernación de El Riojano.

1901

Sr. D. Andrés López Sánchez

(Presbítero)

*A V. queridísimo amigo, que con interés paternal ha seguido el curso de mi vida, dándome alientos en las malas horas que he pasado, dedico esta obra, que, aunque insignificante, representa una serie no pequeña de trabajos y vigili-
as.*

Cumple así un deber de gratitud su muy obligado

Feliciano

Febrero, de 1901.

PRÓLOGO

Desde el año 1886, en que hice mis primeras armas explicando esta asignatura en la «Sociedad Cooperativa de Obreros de Toledo» hasta la fecha, no he cesado de ocuparme en la enseñanza de las ciencias matemáticas, y ya en el año 1888 escribí, con inconcebible atrevimiento, un tratadito teórico-práctico que valió un honroso diploma en la Exposición celebrada en el Centro Instructivo del Obrero, en Madrid. No cito estas dos fechas para darme aires de autoridad en una materia en la que no pretendo estar por cima del nivel de mis dignos compañeros, mi objeto al estamparlas, es, demostrar que dedicado por completo á estos estudios no es de estrañar que mi escasa práctica en asuntos literarios haga pobre el ropage con que se envuelven las ideas vertidas en el libro, por cuya causa resultará árido y vulgar

Nunca me hubiera decidido á escribirle, y mucho menos á publicarle, si la frecuencia con que me veo obligado á dar apuntes á mis alumnos, para suplir unas veces lo que no hay en el texto ó para aclarar lo que este dice, en otras, no me produjera mayor trabajo. Agréguese á esto, el que, ó son muy estensas ó muy compendiosas las obras que para explicar esta asignatura en las Escuelas Normales hay que elegir, y se tendrá explícita la causa que me decide á añadir una obra más, de poco mérito, á las muchas que ya se han producido.

Nada diré acerca del orden que en la exposición de teorías sigo, ni trato de justificarme, acerca de lo que de malo haya en la obra; me resigno al juicio que de ella formen mis compañeros, y admitiré con gusto cuantas observaciones se dignen hacerme, por si algún día me encuentro con fuerzas para reimprimirla corrigiendo sus defectos.

Que pueda facilitar el trabajo de mis compañeros y de los alumnos que estudien la honrosa carrera del Magisterio, es mi única aspiración.

Feliciano Catalán Monroy

ARITMÉTICA

CAPITULO 1.º

Ciencia. Es un conjunto de verdades relacionadas entre sí y dependientes de un mismo principio.

Cantidad. Con este nombre, y con el de magnitud, se designa á todo aquello que es capaz de aumentar ó disminuir, como las aprupaciones de objetos, los pesos, medidas, etc. Pero el aumento ó disminución no se verifica en toda clase de objetos de la misma manera, así vemos que mientras hay unos, como el tiempo y el espacio que crecen ó disminuyen por partes tan pequeñas como se quiera, otros solo sufren aumento ó decrecimiento por objetos ó partes completas, como un grupo de hombres, de árboles, de mesas, etc. Las primeras de estas cantidades se llaman continuas y las segundas discontinuas ó discretas.

Unidad. Todo objeto considerado en sí mismo, es decir, aislado de los demás, y hecha abstracción de su peculiar modo de ser, es lo que se conoce como unidad. Por ejemplo, el hombre, prescindiendo de las diferencias de sexos, razas, etc., es la unidad humana.

Medida, es el acto de poner en relación ó comparar una cantidad con otra de su misma especie y que nos es conocida, esta cantidad arbitrariamente elegida para la comparación, también se llama unidad.

Número, es el resultado de la medida ó comparación de la cantidad con la unidad elegida. Considérase por tanto como número á la reunión de unidades, y como ésta es la cantidad ya medida, de aquí el que por antonomasia se designe á los números con el nombre de cantidades.

Pero la unidad tipo, llamada también simple, es el elemento más sencillo que entra en la composición de las cantidades, distinguiéndose con el nombre de *unidad compuesta ó colectiva* á toda agrupación de objetos ó unidades simples que se elige para término de comparación de cantidades considerables. Un ejem-

plo aclarará esta distinción de unidad simple y unidad colectiva. El niño es el elemento más sencillo que entra á formar la cantidad de los que asisten á la escuela, es por lo tanto la unidad simple; pero al decir que hay un cierto número de secciones (suponiendo que están constituidas por igual número de niños) damos á conocer la cantidad, tomando como unidad colectiva á la sección.

Formas del Número. Al comparar la cantidad con su unidad, puede ocurrir que ésta esté contenida en aquella un número exacto de veces, y entonces la expresión de su medida se llama número *entero*: pero cuando la cantidad que ha de medirse es menor que la unidad de su especie y esta es susceptible de ser dividida en partes iguales, la cantidad contendrá una ó varias de estas partes, llamándose entonces número quebrado ó fraccionario al resultante de la comparación. En otras ocasiones, ó la unidad no admite la división en partes, ó la cantidad no contiene exactamente á ninguna de estas partes por pequeñas que sean, y como su medida no se puede expresar por ningún número entero, ni fraccionario, se dice que la cantidad es *incomensurable*.

El número, vulgarmente llamado mixto, consta de unidades enteras y fraccionarias.

Clasifícanse los números en *abstractos*, cuando no se refieren á especie determinada y *concretos*, cuando pertenecen á especies conocidas.

Ciencias matemáticas. Daban los griegos este nombre, á todos aquellos conocimientos evidentes ó demostrables que llegaron á poseer; para nosotros se conocen bajo este nombre, la agrupación de ciencias que, valiéndose de procedimientos rigurosamente exactos ó factibles de demostración, se ocupan de las leyes que rigen á la cantidad.

Las matemáticas se dividen en *puras* ó *abstractas* y *mixtas*, *aplicadas* ó *especiales*, según consideren la cantidad en sí misma, es decir, ajena á toda aplicación en el estudio de sus leyes generales, ó en sus múltiples relaciones con las demás ciencias.

Las matemáticas puras, se subdividen en *elementales* y *trascendentales* ó superiores. Las primeras se ocupan de los principios más sencillos, si bien más importantes, tales son: Aritmética, Álgebra, Geometría y Trigonometría. Las trascendentales ó superiores, analizan con gran profundidad los estudios propios de esta ciencia, comprenden los cálculos diferencial, integral, infinitesimal, etc.

Aritmética. Es la primera y más elemental rama de las ciencias matemáticas que *se ocupa de los números como determina-*

ciones de la cantidad, sus operaciones y propiedades. Se deriva esta palabra de las dos voces griegas, *arítmos* (número) y *techne* (ciencia).

Su antigüedad é importancia. Dificilísimo es fijar la antigüedad de la aritmética, pero observando las necesidades del individuo en sus relaciones con la Sociedad, puede arriesgarse la especie de que, si bien de una manera empírica, (como la conocen en la actualidad los pueblos salvajes) es tan antigua como el hombre. Las transacciones son indispensables en toda agrupación de individuos, y en ellas hay cálculo, ya sea más ó menos perfecto. Sin embargo, hasta Pitágoras no fueron reunidos en teorías los rutinarios conocimientos que poseían, cabiendo á este sabio inmortal la gloria de haber perfeccionado estos, y haberlos constituido científicamente.

Para demostrar patentemente la gran importancia de los estudios aritméticos, basta fijarnos en que de continuo tenemos que solucionar problemas, en los cuales interviene el cálculo de una manera directa.

Operaciones. Con este nombre se designan á las diversas maneras metódicas de proceder para transformar los números, bien en sentido de aumento ó en el de disminución, pero siempre conforme á reglas determinadas. Según que las operaciones tengan por objeto formar los números en sentido de aumento, ó hacerlos perder valor, se distinguen las operaciones en *de composición* y *de descomposición*.

Cálculo ó algoritmia: es el conjunto de las operaciones que se efectúan con los números. *Algoritmo*, es el modo peculiar de cada operación, y como estas tienen un símbolo especial que las representa, también se designa á éste con el mismo nombre.

Axioma se llama á toda verdad de reconocida evidencia, es decir que la prueba su propia enunciación. Ejemplo; el todo es mayor que cualquiera de las partes que le forman.

Postulado, se conoce con este nombre á las proposiciones, que, siendo menos evidentes que el axioma, tampoco necesitan ser probadas, porque los razonamientos que empleáramos obscurecerían su sencillez: Ejemplo: Una perpendicular y una oblicua, trazadas á una recta en puntos distintos, se encuentran.

Teorema. Es la enunciación de una verdad que necesita ser probada. Como todo número que divide á un producto de dos factores y es primo con uno de estos divide al otro. Los razonamientos que conduzcan á demostrar ó comprobar la verdad del enunciado de un teorema, deben basarse en verdades axiomáticas ó anteriormente admitidas como ciertas.

Lema. Es un teorema menos importante que otro que sirve para facilitar la demostración de este.

Corolario. Se distinguen con este nombre á las proposiciones menos importantes que los teoremas, deducidos de la demostración de alguno de ellos.

Escolio. Es una proposición en que se hace el resumen de las proposiciones demostradas en una teoría, aunque también se llama así á ciertas consecuencias de cálculo sencillo, derivadas de anteriores principios.

Problema. Es una proposición de carácter práctico, en la que nos proponemos hallar una ó más cantidades desconocidas (*incógnitas*) valiéndonos de las relaciones que tienen con otras que se nos dan (*datos*). En todo problema hay que distinguir dos partes: el *enunciado* que es la expresión de las relaciones que existen entre los datos y las incógnitas, y la *resolución* ó sea el esclarecimiento de los valores desconocidos.

Representar simbólicamente las relaciones consignadas en el enunciado de la cuestión es lo que se llama *plantear el problema*.

No pueden darse reglas fijas para la resolución de los problemas, pues tanto el planteamiento como la serie de operaciones que nos han de conducir á la resolución, dependen, en cada caso, del modo peculiar de ser la cuestión propuesta. Lo que desde luego puede aconsejarse en términos generales, es que, una vez fijadas las incógnitas, se supongan conocidas, representándolas por las últimas letras del alfabeto; plantéese en tal forma, que aparezcan claras y bien expresadas las relaciones establecidas en el enunciado y operando luego con las igualdades ó desigualdades, resultantes, de modo que no sufran alteración, tiéndase á aislar en cada miembro una cantidad desconocida y en el otro quedará su valor numérico.

Principales axiomas matemáticos. El todo es mayor que las partes.

Si con cantidades iguales se efectúan operaciones iguales, los resultados seguirán siendo iguales. Dos cosas iguales á una tercera, son iguales entre sí.

CAPITULO 2.º

Numeración. Es el conjunto de reglas que nos enseñan á formar, expresar y representar el número. Aunque sus principios son convencionales, es la parte más importante de los estudios aritméticos la numeración, porque en ella se fundamentan todas las teorías. Pero el número se puede expresar y se puede representar, es decir, la numeración se divide en *nomenclatura* ó sea

expresión verbal de los números, llamada también numeración hablada, y *notación numérica*, entendiéndose por tal al conjunto de símbolos con que en la escritura representamos los nombres de los números, llamada también numeración escrita.

Fundamento de la nomenclatura. Los números se forman por acumulación sucesiva de unidades, y como al mayor de los así obtenidos, siempre se le pueden agregar más unidades, obteniendo otros números superiores á él, se deduce que la serie de los números es ilimitada. Pues bien, si á cada número le asignáramos un nombre distinto, la serie de nombres que necesitaría retener la inteligencia humana para aplicar el cálculo á los usos más comunes de la vida, también sería indefinido y tan considerable que aun los hombres de mejor memoria, no podrían conservar los nombres de los números de que se tendrían que servir, de donde se deduce la necesidad de elegir para expresar estos un conjunto reducido de palabras que, combinadas sistemáticamente, no solo sirvan para enunciarlos, sino que á la vez den idea de su composición.

Bajo este concepto, será preciso distribuir los números en agrupaciones, que en su formación obedezcan á idénticos principios. Cada una de dichas agrupaciones, reconocerá una unidad colectiva, que llamaremos *unidad numerativa ó principal*, conservando el nombre de unidad fundamental á la unidad simple. Pues bien, la agrupación de unidades simples ó colectivas que sirven para formar una unidad numerativa del orden inmediatamente superior es lo que llamamos *base del sistema de numeración*. Así, será decimal el sistema cuando cada unidad numerativa se forme de las diez unidades del orden inmediato inferior. Será cuaternario el sistema, cuando cada cuatro unidades numerativas originen otra del orden superior. La base dá nombre al sistema, y como el menor número de unidades que pueden combinarse son dos, desde el binario pueden admitirse infinidad de sistemas numerativos.

Nomenclatura decimal. Siendo el sistema decimal el único que se sigue hoy en Europa y en la mayor parte de las naciones civilizadas, vamos á exponerle:

A la unidad simple, que es el primero de los números, se la llama vulgarmente *uno*; la reunión de una unidad con otra dá lugar al *dos*; la de dos unidades y una más origina el *tres*; y procediendo de este modo, ó sea aumentando una unidad al número antes formado se obtienen sucesivamente los conocidos con los nombres de: *cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve y diez ó decena*. Se cuenta luego por decenas como hasta aquí por unidades,

diciendo *dos decenas, tres decenas, cuatro decenas*, etc., hasta *diez decenas*, que se le ha llamado al número resultante *ciento ó centena*.

Se procedió á la formación de las centenas como antes, á las decenas dando lugar las *diez centenas* al número llamado *mil ó unidad de millar*.

Diez unidades de millar constituyen la *decena de millar ó diez mil*.
Diez decenas de millar » la *centena de millar ó cien mil*.
Diez centenas de millar » el *millar de millares ó millón*.

El millón es una unidad principal, contándose por millones como por unidades simples y repitiéndose por tanto para estos toda la nomenclatura antes expresada, sin más que añadirles el nombre de la nueva unidad.

El millón de millones forma el *billón*.
El » de billones » el *trillón*.
El » de trillones » el *cuatrillón*.
El » de cuatrillones » el *quillón*.
El » de quillones » el *sextillón*.
El » de sextillones » el *septillón*.
El » de septillones » el *octillón*, etc.

Ahora bien, entre cada orden de unidades y su inmediato superior se intercalan todos los nombres de los números antes formados; así vemos, que entre dos decenas consecutivas se interpondrán los nombres de los nueve primeros números; entre dos centenas los nombres de los noventa y nueve números primeros; entre dos millares los de los novecientos noventa y nueve primeros números y así sucesivamente en todos los demás.

Con los nombres antes apuntados se pueden formar todos los números, sin más que tener en cuenta el siguiente

TEOREMA. Todo número mayor que nueve puede descomponerse en colecciones de unidades cada una de las cuales contenga un número de ellas inferior á diez. En efecto, si el número consta de más de diez unidades dará origen á una ó varias decenas, quedando de las primeras menos de diez; si las decenas pasan de diez formarán un número de centenas y las decenas restantes no llegarán á diez y prosiguiendo del mismo modo vemos que se demostraría el principio enunciado.

Particularidades y modificaciones de la nomenclatura. La mayoría de los nombres de las unidades colectivas y muchos números del sistema decimal han sufrido en su nombre simplificaciones que tienden á facilitar su enunciación, así vemos que las decenas

se nombran diez, veinte, treinta, cuarenta, cincuenta, etc., y que entre la primera y segunda decena se dice: once, doce, trece, catorce, etc., en lugar de diez y uno, diez y dos, diez y tres, diez y cuatro, etc.

Debe observarse que las unidades principales son la unidad simple, el millón, billón, trillón, etc., y que el millar es entre las unidades intermedias la más importante; que los nombres de unidad, decena y centena se repiten dentro de cada orden principal para las unidades simples y para los millares.

Notación numérica. Así como hemos visto que para expresar los números era necesario adoptar un reducido conjunto de palabras, al darles representación escrita también se ha tratado de hacerlo mediante pocos símbolos llamados cifras ó guarismos, que son:

1	2	3	4	5	6	7	8	y	9
(uno),	(dos),	(tres),	(cuatro),	(cinco),	(seis),	(siete),	(ocho),	(nueve),	

A estas cifras se les ha dotado de dos valores, el *absoluto* que llevan en sí por las unidades que contienen y el *relativo* ó representativo que es accidental y depende de la colocación de las cifras en la escritura de los números, representa por tanto orden numerativo.

Pero ni las cifras bastarían para escribir todos los números, ni los valores de que se les ha dotado tendrían racional explicación, si no se admitiera como cierto el siguiente principio convencional: *Toda cifra colocada á la izquierda de otra representa unidades numerativas de la especie inmediata superior.* Así, en el número 759, el nueve será la cifra de unidades, el cinco decenas y el siete centenas; los valores relativos de sus cifras los expresan los nombres de unidades, decenas y centenas, respectivamente señalados al 9, al 5 y al 7 y sus valores absolutos son nueve, cinco y siete unidades.

Cifra cero. Al enunciar un número omitimos el nombre de la especie de unidades de que carece; pero al escribirle, si prescindieramos del lugar que habia de ocupar dicho orden, á todos los superiores á aquel les habríamos hecho descender un lugar hacia la derecha y por lo tanto no representarían su verdadero valor. Para obviar este inconveniente hemos admitido una nueva cifra, llamada cero (0), que careciendo de valores sirve para ocupar el sitio correspondiente á las especies de unidades que no contiene el número enunciado y que ha de escribirse. Así en 7080, el número carece de centenas y unidades y se leerá: siete millares y ocho decenas, ó sea, siete mil ochenta.

Representación de las unidades de diversos órdenes. Con la unidad simple y con el cero se pueden representar las unidades numerativas, sin más que escribir el número necesario de ceros á su derecha.

Así 10	será una	decena.	
100	»	»	centena.
1.000	»	»	unidad de millar.
10.000	»	»	decena de id.
100 000	»	»	centena de id.
1.000.000	»	»	unidad de millón.

Lectura y escritura numéricas. Para escribir los números se debe empezar por las unidades superiores y procurar que vayan consecutivas las cifras que representen todos los órdenes contenidos en ellos, colocando ceros en los que fuesen necesarios.

Para leer los números se les descompone en periodos de á seis cifras, á contar desde la primera de la derecha, poniendo entre la última de cada periodo y la primera del siguiente una indicación que corresponda á su orden; á su vez cada uno de estos periodos se descompone en dos de á tres cifras por medio de una pequeña coma colocada en la parte inferior.

Ejemplo: 3,504²862,930¹654,807, se leería de este modo: tres mil quinientos cuatro billones, ochocientos sesenta y dos mil novecientos treinta millones, seiscientas cincuenta y cuatro mil ochocientos siete unidades.

Notación romana. A título de curiosidad y porque aún se emplea en las inscripciones lapidarias y principios de los capítulos en que están divididos los libros, damos á conocer á continuación las cifras que constituyen la numeración romana.

I, V, X, L, C, D, M. } Las principales con-
(uno) (cinco) (diez) (50) (100) (500) (1000) } venciones admitidas
són: Toda cifra menor colocada á la izquierda de otra mayor la disminuye su valor y si vá situada á la derecha se le aumenta. Así XC (noventa) y CX (ciento diez) ó IV (cuatro) y VI (seis), dan suficiente idea de la aplicación práctica de este principio. Para hacer mil veces mayor á un número escrito en caracteres romanos basta colocarle un trazo horizontal en la parte superior: Así $\overline{\text{IV}}$ se leería cuatro mil y $\overline{\text{M}}$ (un millón).

Necesidad de la representación indeterminada para algunas demostraciones. La generalidad que alcanzan algunos principios aritméticos, que son ciertos cualquiera que sean los números á que se apliquen y el sistema numerativo á que estos pertenezcan, hace preciso el empleo de letras en la demostración, porque careciendo estas de valores particulares los resultados se obtienen

en forma funcional (fórmulas) y pueden hacerse fáciles aplicaciones.

El empleo de las letras en los cálculos aritméticos para la demostración de las propiedades generales de los números, ha hecho que algunos matemáticos comprendan con el nombre de Aritmología á esta parte general de las demostraciones aritméticas, uniéndolas con otras que hasta ahora solo eran estudiadas en el álgebra.

CAPÍTULO 3.º

Operaciones de composición: Adicción ó Suma. Se dá este nombre á la operación cuyo objeto es reunir en un solo número las unidades contenidas en otros varios. Los números conocidos cuyas unidades han de reunirse se llaman *sumandos* y al que resulta de su agregación *suma* ó total.

El algoritmo, propio de esta operación, es la interposición entre los sumandos de dos líneas cruzadas + (más) y para separar á estos del resultado se emplea el signo de igualdad, que consiste en dos pequeñas líneas horizontales y paralelas (=). En $a+b+c=m$, se expresa que reunidas las unidades de a , b y c forman el número m , y se lee *a mas b mas c igual á m*.

Procedimiento elemental. De la definición dada de la operación, se deduce que el más sencillo de los procedimientos de suma consiste en la descomposición de los sumandos en las unidades simples que contengan y su agregación sucesiva al primero. Así, si intentamos sumar $6+4+3$ descompondremos al 4 y al 3 en sus unidades y diremos $6+4+3=6+(1+1+1+1)$ $\left\{ \begin{array}{l} 6+1=7 \\ 7+1=8 \\ 8+1=9 \end{array} \right.$
 $+(1+1+1)$ y como el resultado de la agregación es 13, se deduce que $6+4+3=13$.

Pero si los sumandos tuvieren crecido número de unidades ó fuesen muchos, la operación efectuada de este modo sería pesada é interminable $\left\{ \begin{array}{l} 9+1=10 \\ 10+1=11 \\ 11+1=12 \\ 12+1=13 \end{array} \right.$ y de aquí nace la necesidad de estudiar medios más breves de realizarla, llamados *casos* y de los cuales los más importantes, que debemos considerar, son dos: 1.º Sumar números de una sola cifra ó dígitos y 2.º Sumar números compuestos ó de varias cifras.

Caso 1.º Para sumar números dígitos, pueden emplearse indistintamente el procedimiento elemental ó las tablas de sumar, que se retienen con facilidad en la memoria. Vamos á explicar una de las más sencillas, Se forma escribiendo en una línea hori-

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

zontal los diez primeros números á partir del cero, debajo de cada uno de los números que constituyen dicha fila, se escriben los que resultan de agregarlos una unidad, debajo de esta segunda fila se forma la tercera, incrementando á los de la segunda en una unidad y escribiendo el resultado, y por este mismo orden se continúa hasta un limite arbitrario, que suelen fijar la mayoría en el mismo número de filas que cifras tiene la primera. La manera de operar con ella es tan sencilla como su formación, basta al efecto buscar un sumando en la primera fila y otro en la primera columna y donde se encuentran las líneas que parten de ambos allí se hallará la suma. Ejemplo: Sumar 5 + 6, se pueden buscar de las dos maneras indicadas en la tabla y la suma es siempre 11.

Caso 2.º Sumar números de varias cifras. Para este caso, el procedimiento elemental no tiene aplicación, pero observando que todo número de varias cifras puede descomponerse en la suma de las colecciones de unidades que contiene y que se puede operar con estas, basándose en el axioma de que lo que se hace con las partes queda hecho con el todo, puede reducirse este caso al anterior en cuanto al principio operativo. Y antes de deducir la regla práctica vamos á razonar un ejemplo. Supongamos que se nos den para sumar los números 5692 y 7328. El 5692 se puede descomponer en 5 millares, 6 centenas, 9 decenas, y 2 unidades, así como el 7328 consta de 7 millares, 3 centenas, 2 decenas y 8 unidades: La reunión de las 8 unidades contenidas en el segundo con las 2 del primero dá 10 unidades, ó sea una decena, tenemos pues una decena de la suma de unidades, que reunida con las 9 del primero y las 2 del segundo son 12 decenas, que son 1 centena y 2 decenas, unida la centena resultante á las 6 del primero y 3 del segundo son diez centenas ó sea 1 millar y este reunido con los del 5 próximo y 7 del segundo dá 13 millares. Consta pues la suma de 13 millares, ninguna centena, dos decenas y ninguna unidad, es decir la suma sería 13020, escribiéndose así:

De lo antes expuesto, se deduce la siguiente regla práctica: Para sumar números de varias cifras se escriben unos debajo de otros, de modo que se correspondan las unidades del mismo orden, se empieza la suma por la columna de la dere-

$$\begin{array}{r} 5692 \\ 7328 \\ \hline 13020 \end{array} \begin{array}{l} \text{Sumandos} \\ \\ \text{Suma} \end{array}$$

cha que es la de orden inferior y se escriben debajo de cada columna las unidades que del mismo orden resulten, conservando las decenas para sumarlas con la columna siguiente.

Consecuencias: 1.^a El orden de colocación de los sumandos no influye en el valor del resultado, pues cualquiera que sea el sitio en que estén contribuirán á la suma con el mismo número de unidades.

2.^a Los aumentos ó disminuciones que sufran los sumandos se transmiten á la suma, puesto que siempre el valor de ésta se halla subordinado á los de aquellos.

3.^a Que aunque en la regla práctica hemos manifestado que conviene empezar la suma por la derecha, es indistinto cuando la suma parcial de cada columna no llegue á diez empezarla por cualquier lugar; pero, en general, es mucho más conveniente empezar por la derecha para evitar rectificaciones.

Prueba de una operación es otra que afirma la exactitud de la primera ó nos manifiesta si hemos cometido error. No cabe tener certeza absoluta de una operación, aunque se halle sometida á pruebas, pues consistiendo estas en otras operaciones, en las cuales cabe también equivocarse, no pueden dar de sí más que una certeza relativa.

La suma, como es la primera de las operaciones, tiene la comprobación en sí misma, es decir, basada en la primera de las consecuencias que antes hemos deducido del caso general. Una vez hecha la suma, cambiaríamos de lugar algunos sumandos y hecha nuevamente la operación si los resultados coinciden se puede tener certeza de ella. Por lo general no se cambia el orden de colocación de sumandos y lo que se hace es sumar de abajo arriba, ya que antes se había sumado de arriba abajo.

Operaciones implícitas. Se conoce con este nombre á las operaciones que se someten al cálculo sin efectuar, es decir, en forma indicada. Cuando se opera con números de valor determinado no es ventajoso siempre conservar las operaciones como se presentan, pero cuando se someten al cálculo números indeterminados, letras, por ejemplo, es imprescindible conservar dicha forma. De aquí la necesidad de aprender á operar con cantidades implícitas.

1.^a Sumar á un número la adición indicada de otros varios ó al contrario: Para ello basta reunir la suma al número ó el número á la suma mediante el signo correspondiente. Así $9 + (5 + 3 + 2) = 9 + 5 + 3 + 2$ y como el orden de sumandos no alteraría el valor del resultado $9 + (5 + 3 + 2) = (5 + 3 + 2) + 9 = 5 + 3 + 2 + 9$.

2.^a Para reunir varias sumas indicadas basta formar una sola

suma con todas ellas. En efecto: $(3+2+7)+(4+6+8)=12+(4+6+8)=12+4+6+8=(3+2+7)+4+6+8=3+2+7+4+6+8$.

Sustracción ó resta. Es la operación que tiene por objeto separar de un número, ó quitarle ó disminuirle, las unidades contenidas en otro número dado. El primero se llama *minuendo*, el segundo *sustraendo* y las unidades que le quedan al minuendo después de separarle las del sustraendo *resto*, *exceso* ó *diferencia*.

El algoritmo de esta operación consiste en una pequeña línea horizontal interpuesta entre el minuendo y sustraendo, separando estos de la diferencia por el signo igual. Así $a-b=d$, indica que quitando de las unidades que contiene a las existentes en b , quedan aún d unidades, y se lee *a menos b igual á d*.

Procedimiento elemental. El medio más sencillo de la sustracción consiste en considerar descompuesto al sustraendo en sus unidades simples é irselas disminuyendo una á una al minuendo, en esta forma: $7-4=7-1-1-1-1=5-1-1-1=5-1-1=4-1=3$, luego $7-4=3$.

Consecuencias. Siendo la diferencia el número que representa las unidades que han quedado en el minuendo después de separadas las del sustraendo, se deduce que el minuendo puede considerarse, y es en realidad, la suma de las unidades del sustraendo y la diferencia, pudiéndose dar para esta operación una nueva definición, diciendo que tiene por objeto conocida la suma de dos números y uno de ellos hallar el otro.

También se deduce que si altera el minuendo y no el sustraendo, la diferencia variará en el mismo sentido que aquél, porque para que una suma aumente ó disminuya es condición indispensable que aumente ó disminuya alguno de los sumandos. Si sufre alteración el sustraendo y no el minuendo, la diferencia variará en sentido contrario á aquél, pues para que no altere la suma es preciso que si aumenta ó disminuye un sumando otro sufra transformación contraria y en el mismo número de unidades. Cuando el minuendo y sustraendo varían en idéntico sentido, la diferencia no altera.

Casos. Hallar la diferencia entre dos números considerables por el procedimiento elemental resultaría muy pesado y con el fin de hacer más breve la operación se estudian varios casos.

1.º Restar de un número de una ó dos cifras otro de una sola cuando la diferencia no llegue á diez. Para efectuarlo se puede emplear el procedimiento elemental ó la tabla de sumar explicada en la anterior lección. La tabla se emplea del modo siguiente: en la fila horizontal primera se busca el sustraendo y descendiendo por la columna que este encabeza hasta hallar el minuendo

el número primero de la izquierda de la fila en que se encuentra dicho minuendo es el que expresa la diferencia que se busca.

2.º Restar números de varias cifras cuando todas las del minuendo son mayores que las del sustraendo. Propongámonos restar de 759 - 526 y consideremos descompuestos á ambos en sus colecciones de unidades, restando estas separadamente y uniendo las diferencias habrán quedado por completo restados los dos números y buscada su total diferencia. En efecto:

$$\begin{array}{l}
 7 \text{ centenas} - 5 \text{ centenas} = 2 \text{ centenas} \\
 5 \text{ decenas} - 2 \text{ decenas} = 3 \text{ decenas} \\
 9 \text{ unidades} - 6 \text{ unidades} = 3 \text{ unidades} \\
 759 - 526 = 233.
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{En la práctica se dis-} \\ \text{pone la operación} \\ \text{así } \left\{ \begin{array}{l} 759 \text{ minuendo} \\ 526 \text{ sustraendo} \\ \hline 233 \text{ diferencia} \end{array} \right.
 \end{array}$$

La regla práctica de este caso se puede enunciar en esta forma: Para restar números de varias cifras, cuando las del minuendo son mayores que las del sustraendo, se escribe este debajo de aquél, de manera que se correspondan las unidades del mismo orden y se efectúa la sustracción parcial de cada orden escribiendo debajo el resultado.

Caso 3.º Restar números de varias cifras cuando algunas del minuendo son mayores que sus correspondientes del sustraendo.

La operación se dispone del mismo modo que hemos explicado para el caso anterior y la resta se empieza por la derecha; pero al llegar á una cifra en el minuendo que sea menor que su correspondiente del sustraendo se incrementa á aquella en diez unidades del orden en que se opera y en una unidad á la cifra del orden inmediato superior del sustraendo, con lo cual la diferencia no altera. Ejemplo: Efectuemos la sustracción siguiente:

$$\begin{array}{r}
 25397 \\
 -19648 \\
 \hline
 5749
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l} \text{De 7 unidades no se pueden restar 8, pero aumentan-} \\ \text{do 10 unidades, de 17 se restan 8 y quedan 9; he-} \\ \text{mos aumentado 10 unidades al minuendo incremen-} \\ \text{tando el sustraendo en 1 decena, la diferencia no ha-} \\ \text{brá variado, y diremos 9 decenas menos 5 son 4 decenas. De 3} \\ \text{centenas no se pueden restar 6, pero 13 centenas menos 6 son 7} \\ \text{centenas: ahora, por idéntica consideración á la que antes he-} \\ \text{mos hecho aumentaríamos un millar á los 9 del sustraendo y se-} \\ \text{rían 10 que no pueden restarse de 5, pero si de 15, quedando 5,} \\ \text{aumentando al sustraendo una decena de millar á la que en él} \\ \text{hay serían 2, que restadas de las 2 del minuendo no dejan dife-} \\ \text{rencia alguna.} \end{array} \right.$$

La operación se dispone en la forma que queda indicada á la izquierda y la regla práctica es la siguiente: Para restar dos números de varias cifras se coloca el sustraendo debajo del minuen-

do, de modo que se correspondan las unidades del mismo orden, se empieza la sustracción por la derecha y cuando se llegue á una cifra del minuendo que sea menor que su correspondiente del sustraendo se incrementa aquella en diez unidades de su orden y en una unidad del orden inmediato superior al sustraendo, continuando la operación hasta haber restado las cifras del orden más elevado de ambos términos.

Aritméticamente es imposible toda sustracción en que el minuendo sea una cantidad menor que la del sustraendo.

Pruebas de la adición y sustracción. Hemos dicho que en toda sustracción, el minuendo es la suma de las unidades del sustraendo y de la diferencia, de aquí se deduce la prueba de esta operación, pues sumando el sustraendo y la diferencia el resultado debe ser igual al minuendo.

La sustracción nos proporciona un nuevo medio de comprobar la suma, basta al efecto, después de verificarla, prescindir de uno cualquiera de los sumandos, hacer la de los demás y la diferencia entre ambas sumas debe ser el sumando suprimido.

Operaciones implícitas. 1.^a Sumar á un número la diferencia indicada de otros dos. Basta para ello agregar al expresado número el minuendo y restar á la suma de ambos el sustraendo de la diferencia. En efecto, sea, $7+(8-5)$: agregar á 7 las 3 unidades de la diferencia $8-5$, equivale agregar al 7 las 8 unidades y restarle luego 5, es decir, que $7+(8-5)=7+8-5$.

2.^o Para sumar á un número ó á una suma una série de adiciones y sustracciones indicadas, se le agregan los sumandos y minuendo á la primera y del resultado se quitan los sustraendos. Así $(8+3+5)+(4+7-2+9-3)=(8+3+5)+4+7-2+9-3=8+3+5+4+7+9-2-3$, y cerrando en paréntesis los minuendos y sustraendos quedará $(8+3+5+4+7+9)-(2+3)$.

3.^a Restar de un número la diferencia de otros dos: Para esto basta agregar al número el sustraendo y restar el minuendo de la diferencia. Sea $7-(9-4)$. Si el minuendo y sustraendo se les hace sufrir un mismo aumento la diferencia no altera; incrementando 4 á los términos de la sustracción anterior $7-(9-4)=(7+4)-(9-4+4)$ y como $-4+4=0$, queda $(7+4)-9$, según enunciábamos.

4.^a Para restar á un número la suma de otros varios se restan estos del primero en orden sucesivo. Así $30-(9+5+3)=30-9-(5+3)=30-9-5-3=13$.

De aquí y de la operación anterior se deduce que para hacer explícito el sustraendo de una diferencia indicada, quitándole el paréntesis, hay que cambiar de signo á las cantidades que entren en el mismo.

5.^a Restar de un número ó de una operación indicada una serie de adiciones y sustracciones: Basta reunir los que tengan signos iguales, cerrándolos en paréntesis, é interponiendo entre ambos el signo de la resta. Así $(9+5)-(7-3+8-5+3-2)=9+5-7+3-8+5-3+2=(9+5+3+5+2)-(7+8+3)$.

Consecuencias. 1.^a La suma de dos números aumentada en su diferencia es igual al duplo del mayor. En efecto $(7+3)+(7-3)=7+3+7-3=7+7$.

2.^o La suma de dos números disminuida en su diferencia es igual al duplo del menor; Así $(7+3)-(7-3)=7+3+3-7=3+3$.

Complemento aritmético de un número es lo que le falta para valer una unidad del orden inmediato superior; así el complemento aritmético de 8 es 2 porque aumentándole al 8 dos unidades tenemos una decena; el de 754 es 246 que es lo que le falta al primero para valer un millar. Para hallar el complemento de un número se pueden restar todas sus cifras de 9 excepto la de las unidades que se resta de 10.

El complemento transforma en suma toda diferencia, pues si al minuendo le agregamos el complemento del sustraendo y le restamos la unidad del orden inmediato superior á las más elevadas del sustraendo se habrá conseguido el objeto propuesto. Por ejemplo: $2724-857=(2724 \text{ complemento de } 857)-(857+\text{complemento } 857)$ y como el complemento de 857 es 143, $2724-857=(2724+143)-(857+143)=2867-1000=1867$ y en efecto: $\begin{array}{r} 2724 \\ -857 \\ \hline 1867 \end{array}$

Así considerado, para una sola operación, el completo no representa ventaja alguna, pero si se considera aplicado á una serie de sumas y restas, entonces tiene una gran ventaja su empleo, porque simplifica las operaciones. Pongamos un ejemplo: Sea $7538 - 653 + 845 - 78 + 35 - 925 + 463 - 644 =$

<u>7538</u>		7538	653	
<u>1347</u>	Las operaciones necesarias para llegar al mismo resultado serían:	845	78	8881
<u>845</u>		35	925	-2300
<u>122</u>		463	644	<u>6581</u>
<u>35</u>		8881	<u>2300</u>	
<u>1075</u>				
<u>463</u>				
<u>1356</u>				
<u>6581</u>				

CAPITULO 4.^o

Multiplicación. Es la operación que tiene por objeto hacer á

un número tantas veces mayor como unidades tiene otro. El número que se va á hacer mayor se llama multiplicando, el que expresa las veces que ha de hacerse mayor multiplicador y producto al resultado de la operación. El multiplicando y multiplicador también reciben la denominación de factores del producto.

Consecuencias: El producto de un número por la unidad es el mismo número y el de cualquier número por cero es siempre cero, es decir nulo.

Se expresa la operación interponiendo entre los factores un aspa ó cruz inclinada, que se lee *multiplicado por* y también un punto, que tiene idéntica lectura. Así: 5×3 ó $5 \cdot 3$ indican igualmente que al 5 (multiplicando) hay que hacerle 3 (multiplicador) veces mayor.

Si alguno de los factores vá encerrado en un paréntesis se puede prescindir del signo: $(6+4+3) 5$ es lo mismo que $(6+4+3) \times 5$.

Procedimiento elemental. La forma más sencilla de hacer mayor á un número tantas veces como unidades tiene otro es la repetición como sumando del primero el número de veces expresado por las unidades del segundo; así al tratar de multiplicar 7×4 se formará una suma de cuatro sumandos iguales al 7; de donde se deduce una nueva definición que dice: la multiplicación es una suma abreviada en la cual se repite por sumando á un número (multiplicando) tantas veces como unidades tiene otro (multiplicador).

Pero este procedimiento elemental es lento y para efectuar con más brevedad la operación hay que considerar los casos siguientes:

1.º **Multiplicar números de una cifra.** Sería aplicable en este caso el procedimiento elemental, pero se halla el producto con más rapidez por medio de cualquiera de las tablas que se aprenden de memoria y cuyo fundamento reside en la llamada pitagórica por designarla con el nombre de su inventor. Se forma esta sencilla tabla colocando en fila horizontal los nueve primeros números

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

que son sus productos por la unidad; debajo de esta se escribe el resultado de sumar cada uno de los números de la primera consigo mismo, formándose los productos por 2; debajo se escribe el resultado de sumar ordenadamente los números de ambas filas y se obtienen los productos por 3; sumando los de la tercera y primera fila se forma la 4.ª, que contiene los productos de los nueve números primeros por 4 y se continúa del mismo modo hasta el límite que

se fije, que es generalmente 9. Para usar la tabla descrita se busca uno de los factores en la primera fila y el otro en la columna de la izquierda y en el encuentro de la columna y de la fila encabezadas por ambos números se halla su producto. Así $7 \times 6 = 42$.

Caso 2.º Multiplicar un número de varias cifras por otro de una sola. Sean 4728×5 ; según la definición habrá de repetirse á 4728 por sumando 5 veces, es decir $4728 \times 5 = 4728 + 4728 + 4728 + 4728 + 4728$, pero en esta suma las cifras de unidades, decenas, centenas y millares están repetidas cinco veces, luego si supusiéramos al número descompuesto en sus colecciones de unidades efectuando el producto aislado de cada una por 5 y sumando después los resultados, habrá quedado realizada la operación en esta forma:

$$\begin{array}{r}
 4728 \\
 \times 5 \\
 \hline
 40 \text{ unidades} \\
 10 \text{ decenas} \\
 35 \text{ centenas} \\
 20 \text{ millares} \\
 \hline
 23640
 \end{array}$$

En la práctica la operación se simplifica escribiendo solo las unidades de cada producto y agregando las decenas al siguiente, de este modo:

$$\begin{array}{r}
 4728 \\
 \times 5 \\
 \hline
 23640
 \end{array}$$

La regla práctica de este caso se podrá enunciar del modo siguiente: Para multiplicar un número de varias cifras por otro de una sola, se escribe este debajo de las unidades del multiplicando, trazando por su parte inferior una línea horizontal, se multiplica dicha cifra por todas las del multiplicando empezando por la derecha escribiendo debajo de cada cifra las unidades resultantes de su orden y reservando las decenas para agregarlas al producto siguiente ó escribiéndolas cuando no hay ya cifras superiores que multiplicar.

Casos particulares. 1.º Multiplicar un número por la unidad seguida de ceros. Es convertir al número en colección de unidades de la especie indicada por el multiplicador, para lo cual basta agregar á la derecha los ceros que este contenga. En efecto 728×1000 es hacer al 728 mil veces mayor ó convertirle en millares, luego el producto será 728000.

2.º Multiplicar un número por una cifra significativa seguida de ceros. Sea 527×300 , hay que formar una suma de 300 sumandos iguales, á 527, pero agrupando los sumandos de tres en tres quedarán 100 grupos cada uno de los cuales tendrá por valor 527×3 , luego los cien grupos valdrán $527 \times 3 \times 100$. Es decir que para realizar este caso basta multiplicar al multiplicando por la cifra significativa del multiplicador agregando los ceros á la derecha del producto.

Caso general. Multiplicar números de varias cifras.

Sean 7346×542 , el multiplicador es $500 + 40 + 2$, luego si hacemos al multiplicando $500 + 40 + 2$ veces mayor habremos obtenido el producto deseado, sumando los productos hallados que reciben el nombre de parciales para distinguirlos del total que es la suma de estos.

$$\begin{array}{r} 7346 \\ \times 542 \\ \hline 14692 \\ 293840 \\ 3673000 \\ \hline \end{array}$$

$$3,981.532 = 7346 \times (500 + 40 + 2)$$

Sabemos multiplicar por 2 por el caso 2.º, por 40 y por 500 por el segundo caso particular antes explicado, luego

En la práctica se prescinde de los ceros que expresan el orden inferior de las cifras del producto parcial, que depende del multiplicador, para que no haya confusiones se escribe dicha cifra debajo de la del multiplicador que la engendra de este modo:

$$\begin{array}{r} 7346 \\ \times 542 \\ \hline 14692 \\ 29384 \\ 36730 \\ \hline 3,981.532 \end{array}$$

OBSERVACIONES. Si uno ó los dos factores terminan en ceros se prescinde de ellos efectuando el producto como si no existieran, pero escribiéndolos luego á la derecha de este á fin de que no altere.

Cualquiera que sea el número de veces mayor ó menor que se haga á un factor, el producto se hace el mismo número de veces mayor ó menor.

El número de cifras de que consta el producto de dos números es tantas como tienen ambos factores ó una menos. Observemos en efecto, que multiplicando la menor cifra de unidades por sí misma dá una cifra para el producto teniendo dos los factores, hagamos la misma operación con la cifra 9, que es la mayor de unidades y dá 81, es decir un producto de dos cifras, teniendo dos los factores y persistiendo en las decenas, centenas, millares, etc., la misma relación puede establecerse la ley general enunciada.

Multiplicaciones implícitas. 1.ª Para multiplicar una suma indicada por un número, es suficiente multiplicar por dicho número á cada uno de los sumandos y efectuar la adición de los productos obtenidos. Sea en efecto, $(5+9+7) \times 4 = (5+9+7) + (5+9+7) + (5+9+7) + (5+9+7) = 5+5+5+5+9+9+9+9+7+7+7+7 = 5.4+9.4+7.4$.

Recíprocamente $6(3+5+2) = (6+6+6) + (6+6+6+6+6) + (6+6) = 6.3+6.5+6.2$, lo que traducido al lenguaje vulgar di-

ee, que para multiplicar un número por la suma indicada de otros varios se multiplica por cada uno de los sumandos, reuniendo luego los productos.

2.^a Para multiplicar la diferencia indicada de dos números por un tercero basta multiplicar al minuendo y sustraendo por dicho tercer número y restar los productos. Sea $(9 - 5) 3 = (9 - 5) + (9 - 5) + (9 - 5) = (9 + 9 + 9) - (5 + 5 + 5) = 9 \cdot 3 - 5 \cdot 3$.

Recíproco: $6 (9 - 5) = 6 \cdot 9 - 6 \cdot 5$ es decir que para multiplicar un número por la diferencia indicada de otros dos se multiplica á aquél por el minuendo y por el sustraendo de la diferencia restando los productos.

Escolio. Ocorre con frecuencia que un mismo número entre en operaciones indicadas multiplicando á otros varios ligados entre sí con los signos $+$ ó $-$, la operación que se lleva á cabo para simplificar aquellas colocando dentro de un paréntesis los números que son multiplicados y fuera el que los multiplica se llama *sacar factor común*.

3.^a Para multiplicar una suma indicada por otra se multiplican todos los términos de la primera por los de la segunda, sumando los productos. Sea $(7 + 3) (5 + 4) = (7 + 3) 5 + (7 + 3) 4 = 7 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 7 \cdot 4 + 3 \cdot 4$.

4.^a Para multiplicar la suma indicada de varios números por la diferencia de otros dos, se multiplica aquella por el minuendo y el sustraendo de la diferencia, restando luego los productos. Así: $(8 + 2) (7 - 4) = (8 + 2) \cdot 3 = 8 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 8(7 - 4) + 2(7 - 4) = 8 \cdot 7 - 8 \cdot 4 + 2 \cdot 7 - 2 \cdot 4 = 8 \cdot 7 + 2 \cdot 7 - 8 \cdot 4 - 2 \cdot 4 = (8 + 2) 7 - (8 + 2) 4$.

5.^a Para multiplicar una diferencia por otra se multiplican los dos términos de la primera por cada uno de los de la segunda, afectando á todos del signo correspondiente. Sea $(8 - 5) (7 - 3) = (8 - 5) 4 = 8 \cdot 4 - 5 \cdot 4 = 8(7 - 3) - 5(7 - 3) = 8 \cdot 7 - 8 \cdot 2 - (5 \cdot 7 - 5 \cdot 3) = 8 \cdot 7 - 8 \cdot 3 - 5 \cdot 7 + 5 \cdot 3 = (8 - 5) 7 - (8 - 5) 3$.

Cuando varios números están ligados entre sí por el signo de la multiplicación forman un producto de varios factores. Ejemplo: $6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5$. Es claro que la realización del producto de varios factores es bien sencilla, pues efectuaríamos, como se indica, la multiplicación del primer número por el segundo, la del producto por el tercero, la de este nuevo producto por el cuarto factor y así sucesivamente hasta llegar al último que nos daría el valor definitivo ó total del producto.

Ahora bien, cuando los factores son iguales, el producto se llama *potencia*, escribiéndose abreviadamente poniendo á la derecha del factor que se repite denominado *base* y en la parte superior, con cifra más pequeña, el que expresa las veces que se re

pite aquél; este pequeño número toma la denominación de **exponente**. El producto 7. 7. 7. 7. sería la cuarta potencia de 7, que es la base, cuatro es el grado ó exponente potencial y se escribiría así: 7^4 .

Toda potencia de la unidad es la misma unidad y cualquier potencia de 10 es la unidad seguida de tantos ceros como unidades contiene el exponente.

Para multiplicar un número por un producto de varios factores ó un producto de varios factores por un número, basta considerar al número como un factor más del producto. En efecto: $(8. 7. 5. 4). 3 = 8. 7. 5. 4 + 8. 7. 5. 4 + 8. 7. 5. 4 + 8. 7. 5. 4 = 8. 7. 5. 4. 3$ y $6(4. 2. 3) = 6. 4. 2. 3$.

Para efectuar la multiplicación de dos productos de varios factores basta considerarlos como uno solo, compuesto con los factores de ambos. Así $(5. 6. 4)(7. 3. 8) = 5. 6. 4. 7. 3. 8$.

Prueba. Proposición en que se funda.—Siendo distinto el papel que desempeñan en la multiplicación el multiplicando y el multiplicador, pues el primero es el sugeto y el segundo el agente pasivo, pudiera creerse que si se cambiaban de lugar los términos alteraría el producto y vamos á demostrar que no ocurre así, es decir, que el orden de factores no influye en el producto. Vamos á probar que $6 \times 3 = 3 \times 6$; en efecto:

$6 \times 3 = (1+1+1+1+1+1) = 3+3+3+3+3+3 = 3 \times 6$, que lo demuestra. Otro procedimiento.

$$6 \times 3 = \begin{array}{l} \{ 6=1+1+1+1+1+1 \\ 6=1+1+1+1+1+1 \\ 6=1+1+1+1+1+1 \end{array}$$

$$6 \times 3 = 3+3+3+3+3+3 = 3 \times 6$$

Ampliando el principio á cuando son varios los factores, vamos á demostrar que $7. 4. 5. 2. 6 = 7. 4. 2. 5. 6$; en efecto: $7. 4. 5. 2. 6 = 7. 4. (1+1+1+1+1). 2. 6 = (7. 4+7. 4+7. 4+7. 4+7. 4)2. 6 = (7. 4. 2+7. 4. 2+7. 4. 2+7. 4. 2+7. 4. 2) 6 = 7. 4. 2. 5. 6$ como se deseaba.

En este principio reside la prueba de la multiplicación, pues cambiando el papel de los factores ó su orden, subsistirá el producto.

El producto de varias potencias de un mismo número, es igual á otra potencia de este cuyo exponente sea la suma de los exponentes de los factores. Sea en efecto, $7^4 7^2 7^3$ colocándolos bajo forma factorial.

$$7^4 7^2 7^3 = (7. 7. 7. 7)(7. 7)(7. 7. 7) = 7. 7. 7. 7. 7. 7. 7. 7 = 7^9 = 7^{4+2+3}$$

CAPITULO 5.º

División: Es la operación que tiene por objeto averiguar las veces que un número contiene ó está contenido en otro. También se define como la operación que se propone hacer á un número tantas veces menor como expresa otro. El número que contiene ó se ha de hacer menor se llama *dividendo*, el que está contenido ó expresa las veces que el primero se ha de hacer menor *divisor* y el resultado de la operación *cociente*. Al dividendo y divisor se les denomina también términos de la división.

El algoritmo de esta operación consiste en dos puntos interpuestos entre el dividendo y divisor, que se leen *dividido por*, así 25: 5, se enuncia 25 dividido por cinco ó también 25 entre 5. Para indicar las divisiones de números en forma implícita se encierran entre paréntesis afectándoles del signo. También en la práctica se emplea lo que vulgarmente se llama *cajón de la división*, que consiste en separar el dividendo del divisor por una línea vertical y á este del cociente por otra horizontal, en esta forma.

$$\text{ma. D} \left| \begin{array}{r} d \\ \hline c \end{array} \right.$$

Procedimiento elemental. El medio más sencillo de averiguar las veces que un número contiene á otro, consiste en separar por restas sucesivas, del primero el segundo tantas veces como fuera posible, y es evidente que por cada sustracción que se hubiera efectuado constaría el cociente de una unidad. Supongamos la división de 24 entre 6; restemos del 24 el 6 cuantas veces se pueda y vemos que el 24 contiene al 6 cuatro veces exac-

$$\left. \begin{array}{l} 24-6=18 \\ 18-6=12 \\ 12-6=6 \\ 6-6=0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{tamente, luego el cociente de la división} \\ \text{es 4 y por tanto diremos que } 24:6=4. \text{ Ob-} \\ \text{servando que hemos repetido al divisor por} \\ \text{sustraendo tantas veces como unidades tiene} \\ \text{el cociente, y que por consiguiente el produc-} \end{array}$$

to de este por el divisor sería el dividendo, podemos dar otra nueva definición diciendo que la división es la operación inversa de la multiplicación, cuyo objeto es conocido un producto de dos factores y uno de estos hallar el otro.

La división que antes hemos efectuado, en la cual el dividendo contiene un número completo de veces al divisor se llama *exacta* para distinguirla de la inexacta en la cual queda una parte del dividendo que no llega á contener al divisor y se denomina *resto* ó *residuo*. Así en la división de 38 entre 7, los restos sucesivos son

$38-7=31$ } y como de 3 no puede restarse 7, 3 será el residuo.
 $31-7=24$ } En esta división el dividendo es el producto del divi-
 $24-7=17$ } sor por el cociente más el residuo.
 $17-7=10$ }
 $10-7=3$ }

Determinación del orden más elevado de las cifras del cociente y número de estas. Hemos visto que el producto del cociente por el divisor dá unas veces el dividendo y otras el número más aproximado que contiene al divisor, pues bien, multiplicando á este por la serie de unidades numerativas encontraremos al dividendo comprendido entre dos de estos productos y podremos limitar el orden más elevado de las cifras del cociente y el número de estas.

Sea $182,527:743$, vemos que

$$\left. \begin{array}{l} 743 \times 10 = 7430 < 182,527 \\ 743 \times 100 = 74300 < 182,527 \\ \text{pero } 743 \times 1000 = 743,000 > 182,527 \end{array} \right\}$$

luego *a priori* podemos deducir que pasando de una centena y no llegando á un millar el valor del cociente, el orden más elevado de sus cifras será el de centenas y el número de cifras el preciso para dicho orden, ó sea tres. Y fijándonos en que una vez conocido que el cociente oscila entre una y diez centenas, podíamos separar las centenas del dividendo que han de engendrar las del cociente, y visto que el número 1825 que así resulta contiene una ó más veces al divisor 743, pero no llega á contenerle diez veces, se puede formular la siguiente regla práctica: Separando de la izquierda del dividendo cifras suficientes para formar un número que contenga una ó más veces al divisor, sin llegar á contenerle diez, el orden de la última cifra separada será el de las unidades superiores del cociente y este constará de tantas cifras como tenga el dividendo más que el divisor si la primera de aquél es menor que la de este, ó una más en caso contrario.

Casos. Para el más fácil estudio de esta operación consideraremos tres casos: 1.º Dividir un número de una ó dos cifras por otro de una sola cuando el cociente sea inferior á diez. Para realizar la operación en este caso podemos hacer uso del procedimiento elemental ó de la tabla de multiplicar, esta se emplea del modo siguiente: en la columna encabezada por el divisor se descende hasta hallar el dividendo ó el número que más se le aproxime, y el que encabece la fila en que se halle este será el cociente. Ejemplo, sea dividir 51 entre 8, descenderíamos por la octava columna hasta encontrar 48 y 56, entre los cuales está comprendido 51, el que más se le aproxima es 48 y el número que encabeza la fila en que este se halla es 6, luego este es el cociente y

el resto la diferencia entre 51 y 48 que es 3.

2.º Dividir un número de varias cifras por otro de una sola. Sea 7843: 8, desde luego, con arreglo al principio práctico que antes expusimos, podemos afirmar que el cociente de esta división ha de tener tres cifras y que por tanto las de orden superior han de ser centenas, pero como las centenas del producto pueden ser originadas por el producto de las centenas de un factor y las unidades del otro, vemos que para hallar la cifra de las centenas del cociente bastará dividir las 78 centenas del dividendo por las 8 unidades del divisor, lo que sabemos hacer por el caso 1.º, hallada esta cifra del cociente, que es 9, averiguamos el resto de la división parcial realizada, para lo cual escribimos debajo de las centenas del dividendo el producto de la cifra 9 del cociente por el divisor 8, y restamos este producto que es 72 de 78, el resto pertenece al orden del dividendo, es decir, son centenas; reducidas á decenas, para lo que bastaría agregar un cero á su derecha, é

7 8 4 3	8	} fra del cociente, que es 9, averiguamos el resto de la división parcial realizada, para lo cual escribimos debajo de las centenas del dividendo el producto de la cifra 9 del cociente por el divisor 8, y restamos este producto que es 72 de 78, el resto pertenece al orden del dividendo, es decir, son centenas; reducidas á decenas, para lo que bastaría agregar un cero á su derecha, é
7 2	9 8 0	
6 4		
6 4		
0 3		
7 8 4 3	8	
3	9 8 0	

incrementadas en la cifra de las decenas del dividendo, que ocuparía el lugar de dicho cero, pasamos á obtener la cifra de decenas del cociente dividiendo 64 entre 8, que nos dá la cifra 8 para aquél y el residuo cero que no se puede reducir á unidades porque no las contiene, así es que se dividen las unidades del dividendo por el divisor y como no le contiene ninguna vez se pondrá cero para las unidades del cociente. La operación se dispone de la manera que se indica á la izquierda, y en la práctica se suele prescindir de escribir los productos del divisor por el cociente, efectuando simultáneamente la multiplicación y la resta, escribiendo solo las diferencias ó residuos para convertirlos en dividendos parciales, y en muchos casos, como es fácil retener estos en la memoria, se escribe solo debajo de las unidades del dividendo el residuo final de la operación.

Casos particulares: 1.º Para dividir un número por 10, 100, 1000, etc., basta separar de la derecha del dividendo tantas cifras como ceros acompañan á la unidad del divisor, siendo lo que queda á la izquierda el cociente y la parte separada el residuo. En efecto sea 75843: 100, es investigar el número de centenas que contiene 75843 y como estas son 758 y las 43 unidades no llegan al valor de una centena, diremos que el cociente de la división es 758 y el residuo 43.

2.º Para dividir un número cualquiera por una cifra significativa seguida de ceros, se separan de la derecha del dividendo tan-

tas cifras como ceros siguen á la cifra del divisor, se efectúa después la división de lo que queda á la izquierda en el dividendo por la cifra del divisor y se obtendrá el cociente, debiendo escribir á la derecha del residuo las cifras que separamos en el dividendo para obtener el verdadero resto final. Sea 93682:500, es averiguar las agrupaciones de á 5 centenas contenidas en el dividendo, pero estas solo pueden estar contenidas en las 936 centenas de este, luego dividiremos 936 entre 5; ahora bien el resto no llega á cinco centenas, es decir á una agrupación, y como escrito á su derecha el número 82, que no llega á una centena el valor del nú-

936,82	500	}	mero formado no alcanzará al de 500 que es el divisor, vemos que ese constituiría el residuo final. La operación se dispone como consta á la izquierda.
43	187		
36			
182			

Caso 3.º *Dividir números de varias cifras.* Sean 872834:647. Desde luego y siguiendo la regla general establecida trataríamos de determinar la especie superior de las unidades del cociente, para lo cual separaríamos de la izquierda del dividendo cifras bastantes para que conteniendo una ó más veces al 647 no llegaran á valer diez veces este número, la parte separada sería 872 y como el 2 pertenece al orden de los millares, la especie superior del cociente ha de ser de este mismo orden y la cifra correspondiente se hallará recordando que en los millares del dividendo se encontrarán los producidos por la multiplicación del divisor por la cifra de millares del cociente más los resultantes del producto de las centenas del cociente por el expresado divisor tendremos pues, para investigar dicha cifra, que buscar un número que multiplicado por el divisor esté contenido en la parte separada del dividendo, dejando un residuo inferior al mismo divisor y es claro que antes de poner en definitiva la cifra expresada hay que proceder por tanteos á determinarla; una vez fijada se escribe en el lugar correspondiente, se multiplica por el divisor y se escribe el producto debajo del dividendo, efectuando la sustracción correspondiente para conocer el residuo. Hallada la primera cifra del cociente, se baja á continuación del residuo la que haya quedado á la derecha de la parte separada del dividendo para hallar la segunda del cociente, efectuando también los tanteos necesarios, como antes se hiciera, y por razones iguales á las que expusimos al tratar del caso 2.º, bajando sucesivamente las cifras que quedarán á la derecha del dividendo y cada una de las cuales ha de engendrar una cifra en el cociente, según sabemos. La operación se dispone de cualquiera de las dos

$$\begin{array}{r}
 872,834 \quad | \quad 647 \\
 647 \\
 \hline
 2258 \\
 1941 \\
 \hline
 3173 \\
 2588 \\
 \hline
 5854 \\
 5823 \\
 \hline
 31
 \end{array}$$

formas indicadas á la izquierda, si bien en la práctica se usa más la segunda en la que solo se escriben los residuos efectuando la multiplicación y sustracción mentales y simultáneamente.

La regla práctica se puede enunciar del modo siguiente: Para dividir dos números de varias cifras se escribe el dividendo y á su derecha, separados por una línea vertical, el divisor, debajo de este se trazará una línea horizontal para separar el cociente. Una vez dispuestos de este modo, se toman de la izquierda del dividendo las cifras necesarias para que conteniendo el divisor no valgan diez veces este y efectuando la división del número

$$\begin{array}{r}
 872,834 \quad | \quad 647 \\
 2258 \\
 3173 \\
 5854 \\
 31 \\
 \hline
 \end{array}$$

separado por el divisor se halla la cifra primera del cociente, escrita esta debajo de aquél y efectuado el producto de la misma por todo el divisor, se escribe este producto debajo de la parte separada en el dividendo y se resta, obteniendo el primer residuo. A la derecha de este, se baja la cifra siguiente, formándose el segundo dividendo parcial, que dá la segunda cifra del cociente y el segundo residuo; procediendo del mismo modo hasta emplear la última cifra del dividendo que dará origen á la cifra de unidades del cociente y al residuo final de la operación.

Pruebas de la división y multiplicación. Desde luego se comprende que, como el dividendo se compone del producto del divisor por el cociente, en la división exacta y en la inexacta de ese mismo producto más el residuo, la prueba consistirá en efectuar el expresado producto, incrementándole en el residuo si lo hay en la operación, debiendo resultar un número igual al dividendo. Otra prueba de la multiplicación consistirá en dividir el producto por uno de las factores y el cociente exacto deberá ser el otro factor.

Alteraciones del cociente por las que sufrir puedan el dividendo y divisor. Considerado el cociente como un factor del producto dividendo y siendo el divisor el otro factor, se comprende fácilmente que las alteraciones del cociente y del dividendo se verifican en el mismo sentido y las del cociente y divisor en sentido contrario, pues ya hemos expuesto al tratar de la multiplicación que para que altere un producto es preciso y basta que uno de los factores se modifique en el mismo sentido, y que para que no

4.º Para dividir un producto por un número que esté contenido en uno de los factores, basta sustituir á este por el cociente que resulte de su división por aquél. Sea: $(7. 2. 4. 5):6$, como todo producto se puede sustituir por sus factores $(7. 2. 4. 5):6=(7. 6. 4. 5):6=7. 4. 5$, lo cual prueba la proposición.

5.º Cuando se hable de dividir un producto por un número que no esté contenido en ninguno de los factores, conviene efectuar aquél antes de llevar á cabo la división.

TEOREMA. Si en la división inexacta de dos números, se multiplica ó divide á éstos por un tercero, el cociente no altera, pero el residuo queda multiplicado ó dividido por dicho tercer número. Supongamos que al dividir D entre d fuera c el cociente, y r el residuo, sabemos que $D=d. c+r$ y multiplicando ó dividiendo ambos miembros de la igualdad por el número m , se transformará en $(D. m=(d. c). m+r. m=d. m. c+r. m)$ que demuestran el teorema.

El cociente de dos potencias de un mismo número es otra potencia de este cuyo exponente es la diferencia entre el del dividendo y divisor. Sea $7^6:7^4=(7. 7. 7. 7. 7. 7):(7. 7. 7. 7.)$ y prescindiendo en el dividendo y divisor de igual número de factores, quedan dos en el dividendo, que son los que forman el cociente, pudiéndose expresar de este modo $7^6:7^4=7^{6-4}=7^2$.

CAPITULO 6.º

Múltiplo de un número se llama al que resulta de la multiplicación de este por otro cualquiera; así 42 es múltiplo de 6, porque puede obtenerse del producto de 6×7 , el 6 recibe el nombre de factor, *divisor* ó *submúltiplo*, es decir, que entendemos por factor, divisor ó *submúltiplo* de un número al que está contenido exactamente en él. El número que á la vez es múltiplo de otros varios se llama *múltiplo común* de ellos y el que está contenido en otros varios se denomina su *divisor común*. El cero es múltiplo común de todos los números y la unidad es divisor común también de todos aquellos. Se indica que un número es múltiplo de otro poniendo sobre el divisor el signo factorial, así $24=6!$ y su lectura es 24 igual á un múltiplo de 6.

Los múltiplos de un número forman una serie ilimitada y para obtenerla bastaría multiplicar la serie natural de los números por aquél cuyos múltiplos se deseen formar.

La serie de divisores de un número está limitada por la unidad que es el menor divisor y el mayor que es el número mismo.

Proposiciones fundamentales. Teorema 1.º Todo número que di-

vide á otros varios divide á su suma. Efectivamente; cada sumando representa un número de partes iguales al divisor y estas partes se reúnen en la suma. Ejemplo: 5 divide á 35 á 60 y á 75, debe dividir también á 170 que es la suma de estos, como sucede, porque $\left. \begin{array}{l} 35=5 \cdot 7 \\ 60=5 \cdot 12 \\ 75=5 \cdot 15 \end{array} \right\}$ sumando estas igualdades se obtiene 170 de, porque $5 \cdot 7 + 5 \cdot 12 + 5 \cdot 15 = 5(7+12+15) = 5 \cdot 50$, siendo 170 múltiplo de 5, este está contenido en 170 un número exacto de veces, como se quería probar.

Consecuencias: 1.^a Todo número que divide á otro es divisor también de los múltiplos de este otro; porque siendo el múltiplo de un número la repetición de éste por sumando determinadas veces, el número que divide á uno de los sumandos divide á todos ellos, que son iguales, y por tanto á la suma que es el múltiplo.

Así 5 divide á 15, luego dividirá á $60 = 15 \times 4 = 15$.

2.^a El resto de la división de la suma de varios números con relación á otro, es el mismo que se obtiene sumando los restos de las divisiones de cada número por el divisor elegido, después de descontar los múltiplos del divisor que contenga la suma de los expresados restos. Esta proposición se puede enunciar más fácilmente diciendo: El resto de la suma es igual á la suma de los restos con respecto al mismo divisor.

$$\left. \begin{array}{l} 26=6 \times 4 + 2 = 6 + 2 \\ 33=6 \times 5 + 3 = 6 + 3 \\ 46=6 \times 7 + 4 = 6 + 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 26+33+46=6+2+3+4, \text{ es decir } 105= \\ 6+9=6+6+3=6+3 \text{ y en efecto } 105 \\ =6 \times 17 + 3. \end{array}$$

Teorema 2.^o Todo número que divide á otros dos divide á su diferencia. Para demostrarlo notaremos que tanto el minuendo como el sustraendo representan un número determinado de veces al divisor y la diferencia le tiene también que representar, por lo cual aquél será un divisor exacto de ella. Sean $72-48$, ambos divisibles por 6, su diferencia vamos á probar que también lo es, en efecto $\left. \begin{array}{l} 72=6 \cdot 12 \\ 48=6 \cdot 8 \end{array} \right\} = 6 \cdot 12 - 6 \cdot 8 = 6(12-8) = 6 \cdot 4 = 6$, es decir $24=6$, como lo es en realidad.

Consecuencias. 1.^a El número que divide á otros dos divide al residuo de su división, porque el residuo es la diferencia entre el dividendo y el múltiplo del divisor expresado por el cociente. Ejemplo $75:30$ dá 2 de cociente y 15 de residuo; 75 y 30 son divisibles por 5, por serlo 30 también lo será 30×2 que es múltiplo de 30 y consecuentemente $15 = 75 - 30 \times 2$.

2.^a Si al dividendo de una división se le aumenta ó disminuye

una cantidad múltipla del divisor, el residuo permanece inalterable. Es evidente que todo múltiplo del divisor no deja residuo, luego subsistirá el primitivo de la operación. Ejemplo: $52 : 6$ dá 8 de cociente y 4 de residuo, es decir que $52 = 6 \times 8 + 4$; aumentando ó disminuyendo 12 al dividendo, como 12 es múltiplo de 6, el cociente de la operación resultante variará, pero el residuo nó, así se observa en las siguientes igualdades:

$$\left\{ \begin{array}{l} 52 = 6 \times 8 + 4 \\ 12 = 6 \times 2 + 0 \end{array} \right\} 52 + 12 = 6(8+2) + 4.$$

3.^a La diferencia de dos números que hayan dejado restos iguales al ser divididos por otro, es múltiplo de este. En efecto:

$$\left\{ \begin{array}{l} 61 = 8 \times 7 + 5 \\ 37 = 8 \times 4 + 5 \end{array} \right\} \text{restando ordenadamente } 61 - 37 = 8(7-4) =$$

$$8 \times 3 = 24.$$

Teorema 3.^o El resto que deja el producto de varios factores con relación á un cierto divisor, es igual al producto de los residuos de dichos factores con respecto al mismo divisor, una vez descontados los múltiplos que este producto contenga, ó lo que es igual: El resto de un producto es igual al producto de los restos de los factores. Sean

$$\left. \begin{array}{l} 51 = 8 \times 6 + 3 = \dot{8} + 3 \\ 34 = 8 \times 4 + 2 = \dot{8} + 2 \end{array} \right\} \text{multiplicando ordenadamente las dos igualdades extremas:}$$

$51 \times 34 = (\dot{8} + 3)(\dot{8} + 2) = \dot{8} + 3 \cdot \dot{8} + \dot{8} \cdot 2 + 3 \cdot 2 = \dot{8} + 3 \cdot 2$, lo cual nos demuestra que si dividimos el producto de 51×34 entre 8, el residuo será $3 \cdot 2$, según se quiera probar.

Si fueran más de dos los factores del producto considerado, el procedimiento demostrativo sería idéntico, sin más que considerar el producto de los dos primeros y el tercer factor y así sucesivamente.

Consecuencias. 1.^a Todo número que divide á otros varios divide á su producto; puesto que entonces siendo nulos los restos de los factores también lo sería el del producto con respecto al mismo divisor.

2.^a El resto del dividendo en la división exacta, es igual al producto de los restos del divisor y del cociente, comparados con un mismo divisor. Pues considerado el dividendo como un producto y el divisor y cociente como sus factores, basta recordar lo demostrado en el anterior teorema.

Esta proposición es también cierta para la división inexacta, pero completándola del modo siguiente: El resto del dividendo es igual al producto de los restos del divisor y del cociente, más e

resto del residuo con respecto al mismo divisor. Pues el dividendo es la suma del producto del divisor por el cociente, más el residuo, y hemos demostrado antes que el resto de una suma es igual á la suma de los restos y el de un producto igual al del producto de sus factores.

Forma de una unidad de cualquier orden con relación á un cierto módulo ó divisor. Dividiendo la unidad seguida de uno, dos ó más ceros, podremos determinar el resto correspondiente á la unidad, decena, centena, etc., y en general se podrá representar bajo esta forma: $1000 = 10^3 = d + r$.

Cuando el resto ó residuo es mayor que la mitad del divisor, se puede suponer incrementando en una unidad el cociente y entonces el producto de éste por el divisor es mayor que el dividendo, hallándose la diferencia entre aquel producto y este, dicha diferencia se llama resto por exceso y se le afecta del signo — para distinguirlo del resto á que antes nos referíamos en las divisiones, llamado resto por defecto. Ambos se llaman complementarios porque reunidos suman el divisor. Cuando se aprecie el resto por exceso la forma de la unidad puede ser $10^n = d - r$, haciendo de ambas una fórmula general, $10^n = d + r$, que es siempre aplicable.

Forma de una colección de unidades y de un número. Una colección de unidades es el producto de la unidad de su orden por el número de las que contiene, por cuya razón su forma es $a \cdot 10^n = d + a \cdot r$.

Ahora bién, como todo número puede descomponerse en colecciones de unidades de diversos órdenes, á cuya suma es igual, se puede fácilmente determinar su forma.

Supongamos un número $M = a b c d e$, es decir, en el que e , d , c , b y a representan las cifras de unidades, decenas, centenas, millares etc., elijamos como divisor á m y sean q , r , s y t los restos correspondientes á una decena, centena, millar, etc., se tendrá:

$$\begin{array}{l}
 a \cdot 10^4 = m + a \cdot t \\
 b \cdot 10^3 = m + b \cdot s \\
 c \cdot 10^2 = m + c \cdot r \\
 d \cdot 10 = m + d \cdot q \\
 e = m + 1 \cdot e
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 \text{Sumando ordenadamente: } N = a \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10 + e = m + (e + d \cdot q + c \cdot r + b \cdot s + a \cdot t) \text{ y restando de ambos miembros de la igualdad la cantidad encerrada entre paréntesis:} \\
 N - (e + d \cdot q + c \cdot r + b \cdot s + a \cdot t) = m.
 \end{array}
 \right.$$

Esta fórmula nos demuestra que para que el número M sea divisible por m es condición precisa que también lo sea la cantidad encerrada entre paréntesis, porque solo cuando dos números dejan restos iguales su diferencia es múltipla del divisor. Y en ella se apoya la teoría de divisibilidad que nos permite ver cuándo un número está contenido ó no exactamente en otro sin necesidad de hacer la división.

Investigación de las condiciones de divisibilidad correspondientes á los divisores ó módulos 2, 3, 5, 7, 9 y 11.

Dividiendo en cada caso la unidad seguida de ceros por el divisor que se ensaya se vé, que los restos y condiciones son:

Para el 2, no dejan residuo más que las unidades, luego la condición para que cualquier número sea divisible por 2 es que lo sea la cifra de sus unidades, esto es, que el número termine en cero ó cifra par.

Para el 3, las unidades, decenas, centenas, etc., dejan 1 de resto, la condición será pues que la cifra de unidades, más la de decenas, más la de centenas, etc., compongan un múltiplo de 3, esto es, que la suma del valor absoluto de las cifras del número sea múltiplo de 3 y el número será también divisible.

Para el 9, los restos y condición són idénticos que para el 3.

Para el 5, no dejan residuo más que las unidades, luego la condición para que un número sea divisible por 5 es que lo sea su cifra de unidades, esto es, que dicha cifra sea cero ó 5.

Para el 7, los restos son, 1, 3, 2, 6, 4 y 5, pero como los tres últimos son mayores que la mitad del divisor, tomando los restos sustractivos ó por exceso, aquellos se formarán en este orden 1, 3, 2, —1, —3 y —2, ó sea: 1, 3, 2, —(1, 3, 2), y como se vé los restos de unidades, decenas y centenas se repiten para las unidades simples y para los millares, sin otra variación que el signo, esto nos permite deducir la siguiente condición: para investigar si un número es divisible por 7, se dividirá en periodos de á tres cifras empezando por la derecha, se sumarán los periodos de lugar impar y separadamente los de lugar par y restada de la primera suma la segunda, si la diferencia es múltipla de 7, también lo será el número. Si es preciso puede aumentarse al minuendo en uno ó varios múltiplos del divisor, pues para nada afecta al residuo de la operación.

De la consideración de los restos 1, 3, 2, —1, —3 y —2, se deduce también otra regla práctica para la condición de divisibilidad, que puede expresarse así: Para que un número sea divisible por 7, debe serlo el número que resulte sumando á la cifra de unidades el triplo de las decenas y el duplo de sus centenas, disminuí-

do en las unidades de millar, más el triplo de las decenas y el duplo de las centenas también de millar y continuando la operación con los millones etc.

Para el II. Los restos sucesivos son 1 y 10, 1 y 10, pero tomando el resto por exceso correspondiente al 10, serán 1 y -1, luego la condición de divisibilidad será que sumado el valor absoluto de las cifras de lugar impar y disminuido en la suma de las de lugar par, la diferencia sea cero, once ó múltiplo de once.

Aplicaciones. Pruebas. La suma y resta son tan sencillas que sus pruebas por los módulos resultan más difíciles y no tienen aplicación, daremos sin embargo idea de ellas, así como de las de multiplicación y división que son en las que más se emplean.

Los divisores ó módulos elegidos para las pruebas deben ser siempre aquellos en que se necesiten usar las cifras de todos los números, pues de lo contrario no resultarían tales pruebas, así como sencillos á fin de no hacer las pruebas mucho más complicadas que las operaciones mismas.

Para la suma: Se sumarían los restos de los sumandos y el de la suma sería igual á la suma de aquellos.

Para la sustracción: Se hallarían los restos del minuendo y del sustraendo y la diferencia entre ambos sería igual al resto de la diferencia.

Para la multiplicación: Se hallan los restos del multiplicando y del multiplicador y el producto de ambos restos debe ser igual al resto del producto.

Para la división: Se hallan los restos del divisor y del cociente, se multiplican, al producto se les suma el resto del residuo y el número que así resulte debe ser igual al resto del dividendo.

Ejemplos empleando el módulo 9.

$$\begin{array}{r}
 4825 \dots 1 \} 2 \\
 137 \dots 2 \} \\
 \hline
 33775 \\
 14475 \\
 4825 \\
 \hline
 661025 \dots 2
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{r} 4825 \\ 137 \\ 33775 \\ 14475 \\ 4825 \\ 661025 \end{array}} \right\} 0 \dots 68472 \left\{ \begin{array}{l} 325 \dots 1 \\ 347 \quad 210 \dots 3 \\ 222 \dots \dots \dots 6 \end{array} \right\} 3 \left\{ \begin{array}{l} 9 \dots 0 \end{array} \right.$$

CAPITULO 7.º

MÁXIMO COMÚN DIVISOR.

Ya hemos dicho que cuando varios números son divisibles por otro toma éste el nombre de divisor común. El máximo común

divisor será por lo tanto el mayor divisor que admitan los números considerados. Y como el mayor divisor de un número es el mismo, se deduce que el m. c. d. (1) de varios números tiene que ser igual ó menor que el más pequeño de los números.

Los números que solo admiten como divisor común á la unidad se llaman *primos entre sí*, ó primos dos á dos, ó tres á tres, según se consideren agrupados.

La obtención del m. c. d. de dos números se funda en el principio siguiente:

Teorema 1.º Cuando dos números no son divisibles entre sí, su m. c. d. lo es á la vez del resto de la división de ambos. Sean los dos números 77 y 28, dividiendo el primero por el segundo el residuo es 21. Ya hemos demostrado que todos los divisores del dividendo y divisor de una división inexacta lo son también del residuo, siendo pues los divisores de 77 y 28 comunes á los de 28 y 21, su m. c. d. también será el mismo.

Dedúcese de la anterior demostración que el procedimiento práctico para hallar el m. c. d. de dos números consistirá en dividir el mayor por el menor, éste por el resto, el primer resto por el segundo, el segundo resto por el tercero, prosiguiendo las divisiones hasta encontrar un cociente exacto, en cuyo caso el divisor de esa operación será el m. c. d. que buscamos. La forma práctica de realizar la operación puede verse en el ejemplo siguiente:

$$\begin{array}{r|l}
 21 & 77 \\
 21 & 28 \\
 \hline
 21 & 21 \\
 21 & 7 \\
 \hline
 21 & 0
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 3 \dots \text{cocientes} \\
 7 \dots \text{divisores} \\
 \dots \dots \dots \\
 \dots \dots \dots \text{residuos}
 \end{array}
 \quad \text{M. C. D. (77, 28)=7.}$$

Como los divisores del dividendo y divisor son comunes á los restos por defecto ó por exceso, se abrevia la investigación poniendo en lugar de los restos por defecto mayores que la mitad del divisor los restos por exceso. En la anterior operación en lugar del resto 21 pudimos tomar el resto por exceso que es $28-21=7$ y se habría simplificado teniendo una división menos, en esta forma:

$$\begin{array}{r|l}
 3 & 77 \\
 3 & 28 \\
 \hline
 3 & 7 \\
 3 & 0
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{Colorario. 1.º} \\
 \text{Cualquier número que divida á} \\
 \text{otros dos también divide á su m. c. d. Basta obser-} \\
 \text{var que todo número que divide á los dos dados es} \\
 \text{divisor del resto de la división de ambos, por divi-}
 \end{array}$$

(1.) Con las iniciales *m. c. d.* representaremos en adelante el nombre máximo común divisor, que algunos autores abrevian poniendo una *D* ante el paréntesis en que encierran los números.

dir al segundo de los números y al primer resto ha de dividir al resto segundo y continuando así el razonamiento veríamos que habría de dividir al m. c. d., que es uno de los restos de estas divisiones sucesivas.

Corolario 2.º Multiplicando ó dividiendo á dos números por un tercero, su m. c. d. queda multiplicado ó dividido por este tercer número. Recordemos que al multiplicar ó dividir los dos términos de la división por un número cualquiera, el cociente no varía, pero el resto sufre igual alteración que dichos términos. Y como al multiplicar ó dividir dos números cuyo m. c. d. hemos investigado, el resto de la división de ambos quedaría multiplicado ó dividido y todos los demás restos de las divisiones sucesivas irían sufriendo idéntica alteración, la habría de sufrir también el m. c. d. que es el penúltimo de los restos.

Corolario 3.º Los cocientes obtenidos al dividir á dos números por su m. c. d. son primos entre sí. Según lo expuesto en el corolario anterior, al dividir á los dos números por su m. c. d. este vendría dividido por sí mismo, es decir, sería la unidad; los cocientes resultantes de dividir á los dos números no tienen más divisor que la unidad, luego son primos entre sí.

Teorema 2.º Cuando un número que divide á un producto de dos factores es primo con uno de estos, divide forzosamente al otro.

Consideremos el producto 1971 compuesto de los dos factores 73 y 27; el número 9 divide á dicho producto y es primo con 73, vamos á probar que divide al 27. En efecto; por ser 73 y 9 primos entre sí su m. c. d. es la unidad y como hemos probado en el corolario 2.º que al multiplicar dos números por otro su m. c. d. sufre la misma alteración, el m. c. d. de 73×27 y 9×27 será $1 \times 27 = 27$. Ahora bién: 9 divide á $73 \times 27 = 1971$ por la hipótesis establecida, también divide á 9×27 por entrar como factor en tal producto, y como según el corolario 1.º cualquier divisor de dos números también lo es de su m. c. d., siendo 9 divisor de 73×27 y de 9×27 , es obligado divisor de 27 que es el m. c. d. de estos dos productos, lo cual prueba el enunciado.

Corolario. El m. c. d. de dos números no se altera cuando se multiplica ó divide á uno de ellos por factores primos con el otro. Porque se le aumentarían ó disminuirían al primero factores que no tendrían más divisor común con el segundo que la unidad, por la cual quedaría multiplicado ó dividido el m. c. d. que es tanto como no variar á este.

La investigación del m. c. d. de varios números se funda en el siguiente

Teorema 3.º El m. c. d. de varios números no altera al sustituir á dos de estos por su m. c. d. En efecto, suponiendo que se tratara de hallar el m. c. d. de 84, 144, 162 y 435 y sabiendo que el m. c. d. de 84 y 144 = 12, como todos los divisores de 84 y 144 lo son de 12 y los de este han de serlo de los dos números que son múltiplos suyos, vemos que el m. c. d. de 84, 144, 162 y 435 sería el mismo que el de 12, 162 y 435.

Luego en la práctica cuando se ha de buscar el m. c. d. de varios números se halla el de dos de ellos, luego el del m. c. d. de estos y del tercer número, después el del segundo m. c. d. hallado y el del número siguiente, continuando así hasta haber operado con todos los números. Conviene empezar la investigación por los números menores por si resultara un m. c. d. que fuera divisor de los números restantes, en cuyo caso no necesitaríamos seguir, pues ese sería el m. c. d. de todos ellos.

Procediendo á la determinación del m. c. d. de 84, 144, 162 y 435 se hallaría el de 84 y 144 que es 12, luego el de 12 y 162, que es 6 y finalmente el de 6 y 435 que es 3 y este será el m. c. d. de los cuatro números dados.

Todas las propiedades del m. c. d. de dos números son extensibles al de varios sin variar más que la forma demostrativa.

Corolario 1.º Todo divisor de varios números lo es de su m. c. d. Así todo divisor de 868 y 588 lo es de 28 que es el m. c. d. de dichos dos números y los de 868, 588 y 175 lo son de 28 y 175 y por tanto de 7 que es el m. c. d. de estos dos últimos y por tanto de los tres números 868, 588 y 175.

Corolario 2.º Si varios números se multiplican ó dividen por otro su m. c. d. queda también multiplicado ó dividido por el mismo número. Sean los números 84, 144, 162 y 435 cuyo m. c. d. = 3. La operación dispuesta del modo siguiente facilita el razonamiento.

$$\begin{array}{l}
 84 \\
 144 \\
 162 \dots \dots \dots \\
 435 \dots \dots \dots
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 \text{m. c. d.} = 12 \\
 \\
 \\
 \end{array} \right\}
 \begin{array}{l}
 \text{m. c. d.} = 6 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \\
 \end{array} \right\}
 \text{m. c. d.} = 3$$

$$\begin{array}{l}
 84 \times 5 \\
 144 \times 5 \\
 162 \times 5 \dots \dots \dots \\
 435 \times 5 \dots \dots \dots
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 \text{m. c. d.} = 12 \times 5 \\
 \\
 \\
 \end{array} \right\}
 \begin{array}{l}
 \text{m. c. d.} = 6 \times 5 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \\
 \end{array} \right\}
 \text{m. c. d.} = 3 \times 5$$

Por haberse multiplicado 84 y 144 por 5 su m. c. d. 12 también estará multiplicado por 5, el m. c. d. de 162×5 y 12×5 será también 6×5 y finalmente el m. c. d. de 435×5 y 6×5 será 3×5, lo que prueba la proposición. Del mismo modo se demuestra cuando se dividen.

Corolario 3.º Los cocientes que se obtienen al dividir varios números por su m. c. d. son primos entre sí. Aplicando lo demostrado en el corolario anterior, vemos que siendo 3 el m. c. d. de 84, 144, 162 y 435, el de $(84:3, 144:3, 162:3 \text{ y } 435:3) = 3:3 = 1$, lo cual prueba que los cocientes 28, 48, 54 y 145 son primos entre sí.

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

El mínimo común múltiplo (1) de varios números, es como su mismo nombre lo indica el menor de los múltiplos comunes á todos ellos. Y como el menor múltiplo de un número es él mismo, resulta que el m. c. m. tiene que ser igual ó mayor que el mayor de los números que se consideren.

Sirve de base al procedimiento práctico para obtener el m. c. m. de dos números el siguiente:

Teorema 1.º Dividiendo el producto de dos números por el m. c. d. de estos se obtiene el m. c. m.

Sean los números 104 y 96 cuyo m. c. d. es 8 y los cocientes primos de dividir aquellos por este son 13 y 12. Cualquier múltiplo de 104 y 96 lo es de 8×13 y de 8×12 , satisfaciendo por tanto á la condición de ser divisible por 8, 13 y 12 y siendo por consiguiente múltiplo del producto $8 \times 13 \times 12$. Inversamente todos los múltiplos de $8 \times 13 \times 12$ por serlo de 8×13 lo son de 104 y por serlo de 8×12 lo son de 96, luego los dos números 96 y 104 y el producto $8 \times 13 \times 12$, cuyos múltiplos son comunes, tienen el mismo m. c. m. y como el menor múltiplo de $8 \times 13 \times 12$ es este mismo número, se deduce que éste es el m. c. m. de 96 y 104. Pero $8 \times 13 \times 12$ no altera al hacerle 8 veces mayor y menor y se convierte en $8 \times 13 \times 12 \times 8 : 8$ y sustituyendo en lugar de 8×13 y de 12×8 sus iguales 96 y 104, toma esta forma $(96 \times 104) : 8$ conforme al enunciado del teorema.

Ahora bien, como $8 \times 12 \times 13$ es también igual á $96 \times 12 = 96 \times (104 : 8)$ ó á $104 \times (96 : 8)$, se deduce que en la práctica se puede hallar el m. c. m. de dos números multiplicando uno de ellos por el cociente que resulte de dividir el otro por el m. c. d. de ambos.

Corolario 1.º Los múltiplos de dos números lo son también de su m. c. m. En efecto, hemos visto que los múltiplos de 96 y 104 lo eran de $8 \times 13 \times 12$ ó de $(96 \times 104) : 8$ que era el m. c. m.

Corolario 2.º El m. c. m. de dos números primos entre sí es

(1) En adelante sustituiremos las tres palabras mínimo común múltiplo por sus iniciales m. c. m.

su producto, porque siendo su m. c. d. la unidad al dividir el producto de dichos números por la unidad el cociente será ese mismo producto.

Corolario 3.º Si se multiplican ó dividen dos números por otro, el m. c. m. de aquellos sufrirá la misma alteración. Ya hemos demostrado que si á los números 96 y 104 los multiplicamos por otro, tal como n , su m. c. d. quedarán también multiplicado por n y el m. c. m. adoptará entonces esta forma $(96 \times n \times 104 \times n) : (8 \times n)$, suprimiendo un factor n en el dividendo y divisor queda $96 \times 104 \times n : 8$ y como el dividendo de esta división está multiplicado aún por n también quedará multiplicado el cociente que es el m. c. m. De igual modo se procedería á demostrar que si se dividieran los dos números por otro el m. c. m. experimentaría igual alteración.

Corolario 4.º Dividiendo el m. c. m. por los números que le han originado los cocientes que se obtienen son primos entre sí. Desde luego si dividimos $(96 \times 104) : 8$ por 96 el cociente sería $104 : 8$ y si hubiéramos dividido aquél por 104 el cociente habría sido $96 : 8$, es decir que los cocientes de dividir el m. c. m. entre los números son los mismos que se obtienen al dividir los números por su m. c. d. y según ya tenemos probado estos son primos.

Quando se trata de investigar el m. c. m. de varios números se procede de un modo análogo á lo hecho en el m. c. d., esto es, se halla m. c. m. de los dos primeros números, luego el de este m. c. m. y el tercer número y se procede del mismo modo hasta haber empleado todos los números, siendo el último m. c. m. hallado el de los números dados. Se funda este procedimiento en el

Teorema 2.º El m. c. m. de varios números subsiste aunque se sustituyan dos de ellos por su m. c. m. Según lo demostrado en el corolario 1.º los múltiplos de dos números y de su m. c. m. son comunes, al sustituir en la investigación este por aquellos se conservan los múltiplos y por tanto el m. c. m. de los números dados. Conviene empezar la operación por los números mayores por si hallamos un m. c. m. que sea múltiplo de los demás. Así tratando de averiguar el m. c. m. de 68, 32, 24 y 16, procederíamos como á continuación se expresa.

$$\left. \begin{array}{l} 68 \\ 32 \\ 24 \\ 16 \end{array} \right\} \text{m. c. m.} = 544 \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right. \text{m. c. m.} = 1632 \left. \vphantom{\begin{array}{l} 68 \\ 32 \\ 24 \\ 16 \end{array}} \right\} \text{m. c. m.} = 1632.$$

Generalización de las propiedades del m. c. m. de dos números al de varios.

Corolario 1.º Todos los múltiplos de varios números lo son de

su m. c. m. Según lo ya demostrado los múltiplos de 68 y 32 lo son de 544, los de este número y 24 lo son de 1632 y como este es múltiplo de 16, 68, 32, 24, 16 y 1632 tienen iguales múltiplos comunes.

Corolario 2.º Si se multiplican ó dividen varios números por otro su m. c. m. sufre la misma alteración. Se sabe que al multiplicar 68 y 32 por 5, 544 también quedaría multiplicado por 5, por estarlo éste y 24 su m. c. m. 1632 también estaría multiplicado. De igual modo se prueba que al dividir los números por otro también el m. c. m. vendría dividido por el mismo número.

Corolario 3.º Si se divide el m. c. m. de varios números por cada uno de estos los cocientes que resultan son primos entre sí. Porque si no fueran primos admitirían un divisor común y dividiendo el m. c. m. por este divisor común, obtendríamos un cociente menor que dicho m. c. m., pero que sería múltiplo de los números dados, lo cual es contra razón, es decir absurdo, porque no puede haber ningún múltiplo menor que el m. c. m., luego absurdo es también que no sean primos los cocientes y por consecuencia lo són. A continuación puede verse la forma científica de esta demostración: Sean A, B, C y D, varios números cuyo m. c. m. llamaremos M.

$$\begin{array}{l}
 M : A = A' \\
 M : B = B' \\
 M : C = C' \\
 M : D = D'
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 \text{no siendo primos entre sí } A' \\
 B' C' \text{ y } D' \text{ admitirán un di-} \\
 \text{visor común } d \text{ y dejarán} \\
 \text{cocientes } A'' B'' C'' D''
 \end{array} \right.
 \left\{ \begin{array}{l}
 A' : d = A'' \\
 B' : d = B'' \\
 C' : d = C'' \\
 D' : d = D''
 \end{array} \right.
 \text{ Pero}$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 M = A \cdot A' = A \cdot d \cdot A'' \\
 M = B \cdot B' = B \cdot d \cdot B'' \\
 M = C \cdot C' = C \cdot d \cdot C'' \\
 M = D \cdot D' = D \cdot d \cdot D''
 \end{array} \right\} \text{ ó lo que es igual }
 \left\{ \begin{array}{l}
 M : d = A \cdot A'' = \dot{A} \\
 M : d = B \cdot B'' = \dot{B} \\
 M : d = C \cdot C'' = \dot{C} \\
 M : d = D \cdot D'' = \dot{D}
 \end{array} \right.$$

absurdo, luego A', B', C' y D' son primos entre sí.

CAPÍTULO 8.º

NÚMEROS PRIMOS.

Primeras proposiciones.

Llámanse números primos absolutos ó simplemente primos á aquellos que solo son divisibles por sí mismos y por la unidad.

Se diferencian los números primos absolutos de los primos entre sí en que mientras los primeros, además de no reconocer otro divisor común que la unidad, cada uno de por sí no tienen otro di-

visor que él mismo, los segundos considerados en agrupación solo reconocen como divisor común á la unidad, aunque particularmente cada uno de ellos admita varios divisores. Los números consecutivos son primos entre sí, 14 y 15 por ejemplo, aunque no sean primos absolutos, pues 14 tiene como divisores á 2 y 7, y 15 es divisible por 3 y 5. Los números primos se llaman también factores simples, designándose á los que no son primos con el nombre de números compuestos.

De la consideración que antes hemos hecho acerca de los números primos se deducen estas dos consecuencias:

1.^a Todo número primo absoluto es también primo agrupado con los demás números excepto con sus múltiplos.

2.^a Todo número primo que no divide á otro es primo con él; porque el único factor común que pueden tener es la unidad.

Teorema 1.^o Si un número no es primo admitirá un divisor primo.

En efecto, estando limitados los divisores de un número entre él mismo y la unidad, ha de haber forzosamente uno de estos divisores que solo tenga como factor á la unidad, es decir que sea primo.

Teorema 2.^o Si dos ó varios números no son primos entre sí, admiten un divisor primo común. En efecto, esos números tendrán un m. c. d. distinto de la unidad, que si no es primo admitirá un divisor primo que por entrar á formar parte del m. c. d. será divisor de los números.

Teorema 3.^o La série de los números primos no reconoce límite.

Representemos por n un número primo y por P el producto de todos los números primos desde 1 hasta n . Añadiendo á P una unidad se formará el número $P+1$, con el cual pueden ocurrir dos casos: 1.^o que sea primo, y puesto que es mayor que P en el cual entra como factor n , evidentemente será un número primo mayor que n , límite fijado. 2.^o Que $P+1$ no sea primo, en cuyo caso, según lo dicho en el teorema 1.^o tendrá un divisor primo que no puede ser menor que n , pues si entrara como factor en P , tendría que dividir á la diferencia $(P+1)-P=1$, lo cual es absurdo, ha de ser pues el divisor primo de $P+1$ mayor que n que era el límite. En ambos casos se vé que hay siempre un número primo mayor que el elegido como límite, luego este límite no existe.

Teorema 4.^o Si en la série natural de los números tachamos los que se encuentren cada tres, cuatro, etc., lugares, á partir de los números 3, 4, etc., habremos hecho desaparecer los múltiplos de 2, 3, etc. Observemos que difiriendo todo número del que le precede un lugar en una unidad, del que le precede en tres, cuatro, etc. lugares diferirá en tres, cuatro, etc. unidades y como

partimos de los números 3, 4, etc. habremos tachado los múltiplos de estos números, como puede verse en los ejemplos adjuntos:

$$\begin{array}{l}
 3 + 3 = 3 \times 2 = \dot{3} \\
 2 \cdot 3 + 3 = 3 \times 3 = \dot{3} \\
 3 \cdot 3 + 3 = 3 \times 4 = \dot{3}
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 4 + 4 = 4 \times 2 = \dot{4} \\
 4 \cdot 2 + 4 = 4 \times 3 = \dot{4} \\
 4 \cdot 3 + 4 = 4 \times 4 = \dot{4}
 \end{array} \right\} \text{ ó } \left. \begin{array}{l}
 4 + 4 = 4 \times 2 = \dot{4} \\
 4 \cdot 2 + 4 = 4 \times 3 = \dot{4} \\
 4 \cdot 3 + 4 = 4 \times 4 = \dot{4}
 \end{array} \right\}
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 \text{Este principio sirvió} \\
 \text{de base á Eratóstenes} \\
 \text{para construir su tabla} \\
 \text{de números primos, lla-} \\
 \text{mada } \textit{criba}.
 \end{array}$$

Al formar una tabla de números primos, hay que advertir que una vez tachados los múltiplos de 2, para suprimir los del 3, se empieza desde el cuadrado de este número, que es 9 porque el primer múltiplo de 3 es $3 \times 1 = 3$, que es primo, el segundo múltiplo es $3 \times 2 = 6$, que es á la vez múltiplo de tres, otro tanto ocurre, por ejemplo, al querer hacer borrar los múltiplos de 7, de los cuales el primero es 7, que es primo, el segundo es $2 \times 7 = 14$, el tercero es $3 \times 7 = 21$, el cuarto $4 \times 7 = 28$, el quinto $5 \times 7 = 35$, el sexto $6 \times 7 = 42$, luego el primer múltiplo que habrá de tacharse es $7 \times 7 = 49$, lo que generalizando dá lugar al siguiente precepto: Una vez empezada á formar la tabla de números primos para tachar los múltiplos de cada uno de estos se empieza por su cuadrado y se suprimen de tantos en tantos lugares como unidades tiene el número, no averiguando los múltiplos inferiores al cuadrado porque deben estar suprimidos por ser múltiplos también de otros números menores que el que se considera.

La regla práctica para formar una tabla de números primos se puede expresar en estas palabras: Escrita la serie de los números impares, sin suprimir el 2, hasta el límite que se nos haya propuesto, á partir del nueve se tachan los que se encuentren cada tres lugares, á partir del 25 los que estén cada cinco lugares, á partir del 49 los que disten entre sí 7 lugares, procediendo de igual manera hasta llegar á un número primo cuya segunda potencia sea mayor que el límite elegido. Los números que no resulten tachados serán primos.

Los números primos inferiores á 200 son: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197 y 199.

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS PRIMOS

Teorema 1.º Si un número primo divide á un producto de va-

rios factores tiene que ser divisor de uno de ellos. Sea 3 un número primo que divide al producto de $16 \times 17 \times 18$, vamos á probar que tiene que dividir á uno de los tres factores. Dicho producto $16 \times 17 \times 18$ se puede considerar compuesto de estos dos factores 16 y 17×18 , si 3 dividiera al primero quedaría probada la cuestión, pero si no le divide será primo con él y conforme á lo demostrado en el teorema 2.º del m. c. d. tendrá forzosamente que dividir al otro factor 17×18 , el cual á su vez se compone de dos factores 17 y 18, si 3 dividiera al primero la cuestión quedaba probada y si no le dividiera sería primo con él y dividiría forzosamente al 18, como en realidad sucede.

Corolario 1.º Cuando un número divide á un producto y es primo con todos los factores menos uno, divide á este factor. El producto puede suponerse descompuesto en dos factores, uno que contenga á todos los que son primos con el divisor y el otro al factor que no sea primo con éste, al cual, según lo demostrado en el teorema tendría que dividir.

Corolario 2.º El número primo que divide á la potencia de otro número es factor de la base. En efecto, si 5 divide á $3375 = 15^3$ será divisor de 15, porque $3375 = 15^3 = 15 \cdot 15 \cdot 15$ y como 5 divide al producto tiene que dividir á uno de los factores y siendo todos estos iguales á 15 tendrá que ser divisor de este número, que es la base de la potencia considerada.

Corolario 3.º Un número es primo con un producto cuando no divide á ninguno de los factores de que este está compuesto. Porque si dividiera á uno de los factores formaría parte del producto que es múltiplo de ellos.

Corolario 4.º Las potencias de cualquier grado de dos números primos entre sí, son también cantidades primas entre sí. De lo contrario admitirían un factor primo común que por dividir á las potencias sería divisor de las bases, que por hipótesis son números que no admiten divisor común.

Teorema 2.º Un número divisible por otros varios primos entre sí, es divisible por el producto de estos. Sea 630 que es divisible por 5, 7 y 9 que entre si son primos, vamos á probar que también será divisible por el producto $5 \times 7 \times 9$. En efecto, dividiendo 630 entre 5, el cociente exacto es 126 y por tanto $630 = 5 \times 126$; el factor 7 divide al primer término de la igualdad, ha de dividir por consiguiente al segundo, pero es primo con 5, luego debe dividir á 126, efectuando la división de 126 entre 7 el cociente es 18 y como $126 = 7 \times 18$, substituyendo este valor en el de 630 quedará $630 = 5 \times 7 \times 18$; ahora bien 9 divide al primer miembro de la igualdad y por lo tanto al segundo, pero es primo con

5 y 7, luego ha de dividir á 18, de cuya división por 9 queda el cociente 2, siendo $18=9 \cdot 2$ y $630=5 \times 7 \times 9 \times 2$, luego $630:(5 \times 7 \times 9)=2$, según tratábamos de demostrar.

Este teorema nos permite explicar de nuevo modo por qué el m. c. m. de varios números primos entre sí es su producto, porque habiendo de ser el m. c. m. divisible por los números y siendo estos primos entre sí, no podría ser inferior al producto de ellos, puesto que también por el producto había de ser divisible.

DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL

La descomposición de un número en sus factores primos nos permite apreciar á simple vista su forma factorial, conociendo en virtud de ella los divisores que el número que apreciamos puede admitir. Se funda esta operación en el teorema siguiente:

Teorema 3.º *Todo número compuesto es igual á un producto de factores primos.* Supongamos el número 90, sabemos que por terminar en cero es divisible por el número primo 2, dando como cociente 45. Si este cociente fuera primo, el número 90 se compondría de los dos factores primos en que se había descompuesto al dividirle por 2; pero 45 no es primo porque el valor absoluto de sus cifras suma 9 y por tanto 45 es múltiplo de 3, dando por cociente la división de 45 entre 3, 15. Si 15 fuera primo, como 90 es igual á $2 \times 3 \times 15$, quedaba probada la proposición; pero como también 15 es múltiplo de 3 y el cociente de la división de 15 entre 3 es 5, que es primo, se halla para 90 el valor $2 \times 3 \times 3 \times 5$ que es un producto de factores primos. Como el factor 3 está repetido dos veces se abrevia la forma factorial poniendo la potencia de los factores que estén repetidos, así $90=2 \times 3^2 \times 5$.

Debe empezarse la descomposición por los divisores primos menores que, aparte de ser sencillas las condiciones de divisibilidad por ellos, permiten operar con mayor facilidad.

Corolario. *No existe más que un solo producto de factores primos igual á un número determinado* Si un número se pudiera descomponer en dos productos distintos de factores primos, la diferencia entre ellos consistiría ó en el valor de los factores ó en las veces que cada uno entrase en la formación del número, lo cual como vamos á probar es absurdo. Efectivamente, si suponemos que un número N se pudiera descomponer en los dos productos distintos de factores primos $a. b. c. d.$ y $p. q. r.$ como ambos son iguales al número serían iguales entre sí, es decir que $a. b. c. d.=p. q. r.$; ahora bien, cada factor primo de los que entran en el primer miembro de la igualdad tiene que dividir á los números del segundo miembro, que son primos y como para que un número primo

divida á otro también primo tiene que ser igual á él, se verificaría, por ejemplo, que $a=p$, $b=q$, $c=r$ y $d=1$, lo cual prueba que no son dos productos distintos sino un mismo producto, toda vez que los factores son iguales.

Lo demostrado en este corolario nos permite adoptar para la descomposición factorial los medios más rápidos y sencillos que nos sean conocidos.

La forma que se usa en la descomposición puede verse en los ejemplos siguientes, fáciles de comprender:

$$\begin{array}{l}
 90 \ 2 \\
 45 \ 3 \\
 15 \ 3 \ 90=2 \cdot 3^2 \cdot 5 \\
 5 \ 5 \\
 1
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} 90 \\ 45 \\ 15 \\ 5 \\ 1 \end{array}} \right\} 600=6 \times 100 \left\{ \begin{array}{l} (6=2 \cdot 3) \\ (10=2 \cdot 5) \\ (10=2 \cdot 5) \end{array} \right\} 6 \cdot 10 \cdot 10=600=2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$$

FORMACIÓN DE LA TABLA DE DIVISORES DE UN NÚMERO.

Ampliando lo dicho al tratar de la divisibilidad á cuando los números están descompuestos en factores primos demostraremos el siguiente

Teorema 4.º *Un número será divisible por otro cuando los factores primos de que éste conste se hallen en aquél afectados de igual ó mayor exponente.* En efecto, el número divisible es el dividendo que ha de contener las diversas partes de que el divisor conste, ó sean sus factores primos, formándose el cociente del exceso de factores primos comunes ó distintos que tenga el primero de los números más que el segundo. Así para que un número sea divisible por 15 tiene que serlo por 3 y por 5, pues 15 contiene á estos dos factores y todos los múltiplos suyos también los han de contener.

Del teorema anterior se deduce que si se combinan entre sí, de cuantas maneras sea posible, los factores primos de que consta un número, se habrá hallado la tabla de sus divisores. La regla práctica puede expresarse así: Colocadas en diversas líneas horizontales la unidad y todas las potencias de los factores primos que el número dado tenga, se multiplican entre sí los términos de que consten las líneas como si se operase en multiplicación de sumas indicadas y los productos obtenidos son todos los divisores del número propuesto.

Propongámonos, por ejemplo, averiguar los divisores del número 4400 que descompuesto en factores primos es igual á $2^4 \cdot 5^2 \cdot 11$.



$$\begin{array}{l}
 1 \dots 2 \dots 2^2 \dots 2^3 \dots 2^4 \\
 1..2..2^2..2^3..2^4 \dots \\
 1..5..5^2 \\
 1..11
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 1 \dots 2 \dots 2^2 \dots 2^3 \dots 2^4 \\
 5 \dots 2 \dots 5 \dots 2^2 \dots 5 \dots 2^3 \dots 5 \dots 2^4 \dots 5 \\
 5^2 \dots 2 \dots 5^2 \dots 2^2 \dots 5^2 \dots 2^3 \dots 5^2 \dots 2^4 \dots 5^2 \\
 11 \dots 2 \dots 11 \dots 2^2 \dots 11 \dots 2^3 \dots 11 \dots 2^4 \dots 11 \\
 5 \dots 11 \dots 2 \dots 5 \dots 11 \dots 2^2 \dots 5 \dots 11 \dots 2^3 \dots 5 \dots 11 \dots 2^4 \dots 5 \dots 11 \\
 5^2 \dots 11 \dots 2 \dots 5^2 \dots 11 \dots 2^2 \dots 5^2 \dots 11 \dots 2^3 \dots 5^2 \dots 11 \dots 2^4 \dots 5^2 \dots 11
 \end{array}
 \right.$$

FORMA PRÁCTICA:	1—2—4—8—16	1	2	4	8	16
	1—5—25	5	10	20	40	80
	1—11	11	22	44	88	176
		55	110	220	440	880
		275	550	1100	2200	4400

Explicación: Escrita la primera línea, que contiene las potencias de 2, se multiplican sus términos por 1, por 5 y por $5^2=25$, formándose las tres primeras filas de los productos de la derecha, que multiplicados por 11 dan las otras tres filas que están debajo de aquellas.

Aunque al poner las potencias de los factores primos contenidos en el número se empieza por la unidad, que es la potencia cero de todos, no se multiplica más que la unidad de las dos primeras filas factoriales, pues no tomándola más en cuenta se evitan repeticiones inútiles, toda vez que no aporta divisores que no existan ya.

Antes de llevar á cabo la formación de la tabla de los divisores de un número pueden fijarse los que habrá, sin más que observar que cada série factorial de las que se someten á la multiplicación consta de tantos términos como unidades tenga el exponente del factor primo más uno, que es la potencia cero del mismo, y como estas séries se multiplican entre sí se *formarán tantos divisores del número como arroje el producto de los exponentes de sus diversos factores primos incrementados en una unidad*. Así, en el ejemplo anterior, el exponente de 2 era 4, el de 5 era 2 y el de 11 era 1, incrementando estos exponentes en una unidad y efectuando su producto $(4+1)(2+1)(1+1)=5 \cdot 3 \cdot 2=30$. luego 30 serán los divisores de 4400, como puede verse.

La descómposición de los números en factores primos nos proporciona la ventaja de investigar con rapidez y seguridad el m. e. d. y m. c. m. de varios de ellos sin las prolijas operaciones que antes hemos explicado.

Observando que para que un número sea divisor de otros va-

rios no puede contener otros factores primos que los que sean comunes á estos, con exponentes iguales ó menores que los más pequeños que en dichos números tengan, se deducirá que *el m. c. d. de varios números, una vez descompuestos estos en factores primos, es el producto de los factores que sean comunes afectados del menor exponente.*

Así como *el m. c. m. de varios números descompuestos en factores primos es el producto de los factores primos comunes afectados del mayor exponente y los no comunes con el que tengan.* Porque ha de ser múltiplo de todos los números y por consiguiente divisible por ellos, lo cual quiere decir que no puede dejar de contener ninguno de los factores de que aquellos consten.

Ejemplo: Hallar por el procedimiento que acabamos de explicar el m. c. d. y m. c. m. de 720, 840, 6562 y 56200.

$$\begin{array}{l}
 720 = 2^4 3^2 5 \\
 840 = 2^3 3 \cdot 5 \cdot 7 \\
 6562 = 2 \cdot 17 \cdot 193 \\
 56200 = 2^3 5^2 \cdot 281
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\}
 \begin{array}{l}
 \text{M. C. D.} = 2 \\
 \text{M. C. M.} = 2^4 3^2 5^2 7 \cdot 17 \cdot 193 \cdot 281 = \\
 23, 233! 417,200.
 \end{array}$$

CAPÍTULO 9.º

FRACCIONES Ó QUEBRADOS COMUNES.

Ya expusimos en el capítulo 1.º que al medir una magnitud podía darse el caso de tener que dividir la unidad en partes, siendo la expresión de las partes que la magnitud contiene lo que dá origen al número quebrado ó fraccionario.

Otro origen de la fracción reside en las divisiones inexactas ó indicadas, irrealizables, porque sea menor el dividendo que el divisor ó porque se deséen conservar así.

Todo quebrado ó fracción consta de dos términos: el *denominador*, que indica las partes en que se divide la unidad y el *numerador* que manifiesta el número de esas partes que la magnitud contiene.

Algoritmo y lectura de la fracción: Se escribe una fracción ó quebrado poniendo el numerador encima del denominador separados por una pequeña línea recta. Así $\frac{4}{7}$ expresa que dividida en 7 partes la unidad la magnitud con quien la hemos comparado solo contiene 4 de dichas partes: 7 es el denominador y 4 el numerador.

Una fracción se lee nombrando el numerador y enseguida el denominador añadiendo la terminación *avos* cuando este pasa de diez, pues no llegando á dicho número se le llaman *medios, tercios, cuartos, quintos, sextos, séptimos, octavos, novenos y décimos,*

Según que el denominador sea respectivamente 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ó 10. Así la fracción $\frac{8}{14}$ (8 partido por 14) se leerá *ocho catorceavos* y la $\frac{5}{7}$ (5 partido por 7) *cinco séptimos*.

Unidad entera y fraccionaria. Una fracción cuyo numerador y denominador sean iguales, valdrá siempre una unidad entera, porque se toman todas las partes en que la unidad fué dividida.

Llábase *unidad fraccionaria* á la fracción cuyo numerador es la unidad.

Las fracciones se distinguen con los nombres de *propias é impropias* segun valgan menos ó mas que la unidad entera, es decir, que las propias deben tener menor el numerador que el denominador, mientras que en las impropias se verifica lo contrario: $\frac{6}{9}$ es una fracción propia y $\frac{27}{13}$ es impropia.

Valiendo la fracción impropia mas que la unidad entera, podemos proponernos averiguar el número de unidades enteras que contiene y su parte fraccionaria, lo cual se hace con suma sencillez teniendo en cuenta que el valor que tendría una unidad entera, al expresarse en partes alicuotas iguales á las de la fracción impropia que se considere, sería el de una fracción cuyo numerador y denominador fueran idénticos al denominador de dicha fracción impropia y por consiguiente esta tendría tantas unidades enteras como veces contuviera su numerador al denominador mas la parte fraccionaria que no alcanzara al valor de una de estas unidades. Así $\frac{46}{6}$ contendría 7 unidades enteras, que son las veces que 46 contiene á 6, mas cuatro sextas partes, luego $\frac{46}{6} = 7 \frac{4}{6}$.

Y como apuntamos al principio de esta lección que una fracción equivale á una división indicada, en la que el dividendo hace de numerador y el divisor de denominador, se puede deducir que para completar el cociente de la división de enteros, habremos de agregar, á lo que hasta aquí hemos llamado cociente incompleto ó inexacto y en adelante debemos llamar parte entera del cociente, una fracción que se dice complementaria, y que tendrá por numerador el residuo de la división y por denominador el divisor. La expresión $7 \frac{4}{6}$ que antes hemos deducido como valor de la fracción $\frac{46}{6}$ puede ser representación fiel del cociente completo de la división de 46 entre 6, pues aplicando el principio de que en la división inexacta ha de ser el dividendo igual al producto del divisor por el cociente más el residuo, $46 = 6 \times 7 + 4$, se ve que es perfectamente realizable.

Llábase *expresión fraccionaria* á la reunión, por medio del signo de la suma ó sin signo alguno, de números enteros y fraccionarios, siendo la más sencilla de todas sus formas el *número mixto* que se compone de un entero y una fracción, como $9 \frac{5}{12}$.

Toda expresión fraccionaria se puede transformar en fracción sin más que reducir la parte entera á la especie de la fracción que la acompaña, lo cual es fácil recordando la forma de la unidad entera al transformarse en fracción, pudiéndose dar la siguiente regla práctica; para reducir una expresión fraccionaria ó número mixto á fracción se multiplica el entero por el denominador de la fracción sumándole el numerador de ésta y poniendo el número obtenido como numerador de la fracción resultante á la que se le pondrá el mismo denominador que la primera tuviera. Así $9\frac{5}{11} = \frac{9 \cdot 11}{11} + \frac{5}{11} = \frac{99+5}{11} = \frac{104}{11}$.

Por la analogía que hemos señalado entre las fracciones y las divisiones indicadas, podíamos pasar por alto las variaciones que sufren aquellas, concretándonos á citar el párrafo correspondiente á la división, pero nuestro deseo es aclarar y dar á conocer con la extensión y profundidad necesarias las partes más importantes de esta asignatura. Pasemos pues á tratar de las alteraciones de la fracción.

Teorema 1.º *De dos ó más fracciones que tengan el mismo denominador es mayor aquella cuyo numerador lo sea también.* Es evidente que cuando la unidad esté dividida en igual número de partes, será mayor la magnitud que más partes contenga y como estas las dá á conocer el numerador, serán mayores las fracciones de mayor numerador: Así $\frac{12}{9} > \frac{7}{9} > \frac{3}{9} > \dots$.

Teorema 2.º *De dos ó más fracciones de igual numerador es mayor la que tenga menor denominador.* La certeza de este principio se comprueba con solo tener en cuenta que siendo constante la unidad cuanto menor sea el número de partes en que se la divide mayor será cada una de ellas y como en todas las fracciones se toman las mismas partes, representará mayor magnitud aquella cuyo denominador sea menor: Así $\frac{5}{3} > \frac{5}{9} > \frac{5}{12} > \dots$.

Teorema 3.º *Cuando se multiplica ó divide el numerador de una fracción por un número cualquiera el valor de la fracción queda multiplicado ó dividido por el mismo número.* Sea la fracción $\frac{9}{12}$, al multiplicar 9×3 , se forma la fracción $\frac{9 \times 3}{12} = \frac{27}{12}$; obsérvese que la unidad sigue dividida en igual número de partes y que en la $\frac{27}{12}$ tomamos tres veces más partes que en la $\frac{9}{12}$, luego la magnitud cuyo valor representa aquella es tres veces mayor, lo cual quiere decir que ha sido multiplicada por 3.

Si en vez de multiplicar hubiéramos dividido 9 por 3 la fracción resultante $\frac{3}{12}$ indicaría que se tomaba tres veces menos magnitud ó que el valor de la fracción era tres veces menor, esto es, se dividía por 3.

Teorema 4.º Cuando se multiplica ó divide el denominador de una fracción por un número cualquiera, el valor de la fracción queda dividido ó multiplicado por el mismo número, es decir, que experimenta alteración igual pero en sentido contrario. Para demostrarlo comparemos la fracción $\frac{12}{18}$ con la $\frac{12}{18 \times 6} = \frac{12}{108}$; observamos que en esta segunda tomamos igual número de partes de la unidad que en la primera, pero estas partes son seis veces menores, pues siendo el valor de la unidad constante se ha dividido en seis veces más partes, luego el valor de la fracción se ha hecho seis veces menor, quedando dividido por el mismo número por quien se ha multiplicado al denominador.

Si por el contrario dividimos el denominador de la fracción $\frac{12}{18}$ por 6, en la resultante $\frac{12}{18:6} = \frac{12}{3}$ las partes en que la unidad se ha dividido son seis veces menos, luego cada una de ellas es seis veces mayor y como el número de partes que contiene la magnitud es el mismo en ambas fracciones, el valor de la primera será seis veces menor que el de la segunda, esto es que se ha hecho á la fracción tantas veces mayor como indica el número por quien se ha dividido al denominador.

Corolario. Una fracción no altera si á la vez se multiplican ó dividen sus dos términos por un mismo número. Pues según se deduce de las consideraciones hechas en los teoremas anteriores se hace la fracción el mismo número de veces mayor y menor.

Consecuencia de este corolario son dos operaciones importantes que pueden realizarse con las fracciones, que son, la *reducción á un común denominador* y la *simplificación*.

Reducir fracciones á un denominador común es conseguir que varias fracciones tengan el mismo denominador sin que el valor de ellas haya alterado, lo cual se consigue, con suma facilidad, multiplicando los dos términos de cada una por los denominadores de las otras.

Sean $\frac{4}{7}$, $\frac{2}{5}$ y $\frac{8}{9}$ las fracciones que queremos reducir á común denominador.

Observemos que:	}	$\frac{4}{7} = \frac{4 \cdot 45 \cdot 9}{7 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 9} = \frac{180}{315}$	} Transformación que no ha variado el valor de las fracciones porque se han multiplicado sus dos términos por cantidades iguales y sin embargo nos las presenta á todas con el mismo denominador.
		$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 9}{5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} = \frac{126}{315}$	
		$\frac{8}{9} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 5}{9 \cdot 7 \cdot 5} = \frac{280}{315}$	
		$\frac{4}{7} = \frac{4 \cdot 45 \cdot 9}{7 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 9} = \frac{180}{315}$	
		$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 9}{5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} = \frac{126}{315}$	

La operación de reducir fracciones á común denominador es importantísima porque sin ella sería imposible la comparación

fraccionaria y la homogeneidad de partes necesaria para algunos cálculos.

Simplificar una fracción es reducir sus términos ó hacerlos más pequeños, sin que el valor de ella cambie. Esto se consigue dividiendo el numerador y denominador por los factores comunes que contengan. La simplificación es posible hasta que se lleguen á convertir los términos de la fracción en números primos, llamándose á la así obtenida *fracción irreducible*. Es claro que para conseguir la irreducción ó simplificación total de una fracción basta dividir á sus dos términos por el m. c. d. de los números que los representan.

Teorema 5.º *Cuando una fracción es irreducible cualquiera otra que le sea igual tiene sus términos equimúltiplos (1) de los de aquella.* Sea $\frac{7}{11}$ la fracción irreducible y supongamos que sea igual á la $\frac{m}{n}$, vamos á probar que m es múltiplo de 7 en el mismo grado que n lo es de 11. Reduciendo ambas fracciones á común denominador, para compararlas, se tendrá $\frac{7.n}{11.n} = \frac{m.11}{n.11}$ y como las fracciones son iguales y los denominadores idénticos entre los numeradores habrá igualdad, es decir que $7.n = m.11$. Pero 7 divide al primer miembro de la igualdad, luego dividirá al segundo y como es primo con 11 tendrá que dividir á m , esto es, $m:7$ dará un cociente exacto que podremos representarle por 5, por ejemplo, de donde $m = 7.5$ y como $7.n = m.11$, sustituyendo en lugar de m su valor 7.5. se verificará que $7.n = 7.5.11$ y suprimiendo 7 en ambos miembros de la igualdad, $n = 5.11$, lo que prueba el enunciado, puesto que la fracción $\frac{m}{n}$ se puede poner bajo la forma $\frac{7.5}{11.5}$.

Una fracción simplificada totalmente se dice también que está reducida á su más simple expresión.

Las fracciones pueden reducirse al mínimo denominador común, estén ó no simplificadas, hallando el m. c. m. de los denominadores y multiplicando los dos términos de cada fracción por el cociente que resulte de dividir dicho m. c. m. por el denominador respectivo. Esta operación se emplea con ventaja cuando los denominadores de las fracciones no son primos entre sí, si bien prácticamente tiene poca aplicación por ser más larga que la reducción á común denominador antes explicada. Aplicando á un ejemplo, sean las fracciones $\frac{3}{8}$, $\frac{6}{15}$ y $\frac{7}{12}$.

(1) Equimúltiplos, quiere decir múltiplos en el mismo grado.

$$\left. \begin{array}{l} 8=2^3 \\ 15=3 \cdot 5 \\ 12=2^2 \cdot 3 \end{array} \right\} \text{m. c. m.} = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120 \left\{ \begin{array}{l} 120 : 8 = 15, \quad \frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 15}{8 \cdot 15} = \frac{45}{120} \\ 120 : 15 = 8, \quad \frac{6}{15} = \frac{6 \cdot 8}{15 \cdot 8} = \frac{48}{120} \\ 120 : 12 = 10, \quad \frac{7}{12} = \frac{7 \cdot 10}{12 \cdot 10} = \frac{70}{120} \end{array} \right\}$$

La sencillez con que las operaciones están hechas no necesita explicación alguna.

Otras alteraciones experimentan las fracciones distintas de las que antes hemos explicado y que por su importancia merecen no ser pasadas por alto, son éstas las que afectan por suma ó resta á los términos de la fracción y de las que vamos á ocuparnos en las proposiciones siguientes.

Teorema 6.º *Si á los dos términos de una fracción se les suma una misma cantidad la fracción resultante se acerca más al valor de la unidad, para lo cual si es propia aumenta y si es impropia disminuye.* Sea la fracción propia de $\frac{6}{7}$, que por ser menor que la unidad tiene menor numerador que denominador, es decir $6 < 7$, aumentemos á los dos miembros de esta desigualdad la cantidad m , resultará $6+m < 7+m$; comparando ahora la unidad con cada una de las fracciones $\frac{6}{7}$ y $\frac{6+m}{7+m}$, se vé que con la primera la unidad $\frac{7}{7}$ diferiría de la fracción $\frac{6}{7}$ en $\frac{1}{7}$, mientras que la unidad $\frac{7+m}{7+m}$ comparada con la fracción $\frac{6+m}{7+m}$ diferiría en $\frac{1}{7+m}$ y como $\frac{1}{7} > \frac{1}{7+m}$ vemos que $\frac{6}{7} < \frac{6+m}{7+m} < 1$.

Si la fracción fuera impropia, tal como $\frac{9}{5}$, por ser $9 > 5$, $9+m > 5+m$ y la comparación entre la unidad $\frac{5}{5}$ y la fracción $\frac{9}{5}$ daría un exceso de $\frac{4}{5}$ mientras que la unidad $\frac{5+m}{5+m}$ comparada con la fracción $\frac{9+m}{5+m}$ dará sólo de exceso $\frac{4}{5+m}$ partes y como $\frac{4}{5} > \frac{4}{5+m}$, se verificará que $\frac{9}{5} > \frac{9+m}{5+m} > 1$, según se pretendría demostrar.

Corolario. *Si á los dos términos de una fracción se le resta una misma cantidad la fracción resultante se aleja de la unidad para lo cual si es propia disminuye y si es impropia aumenta.* La simple consideración de las desigualdades finales de los razonamientos hechos en el teorema anterior nos permiten sin gran esfuerzo ver la certeza de esta proposición, pues si $\frac{6}{7} < \frac{6+m}{7+m} < 1$, se comprende que la $\frac{6}{7}$ que resultaría de restar de la fracción propia $\frac{6+m}{7+m}$ en sus dos términos, la cantidad m se aleja más del valor de la

unidad que esta segunda, para lo cual le ha sido preciso disminuir. Por el mismo medio probaríamos que la $\frac{9}{5}$ se aleja más de la unidad que la fracción impropia $\frac{9+m}{5+m}$ para lo cual le ha sido preciso aumentar y que la primera se deduce de restar en los dos términos de la segunda la cantidad m .

Teorema 7.º Si se suman miembro á miembro dos fracciones desiguales la resultante se halla comprendida entre ambas, es decir, que es menor que la mayor y mayor que la menor. Sean las fracciones $\frac{a}{b} > \frac{m}{n}$, reduciéndolas á común denominador, para com-

pararlas, $\frac{a \cdot n}{b \cdot n} > \frac{m \cdot b}{n \cdot b}$ y puesto que los denominadores son iguales la desigualdad existirá entre los numeradores, siendo $a \cdot n > m \cdot b$. Comparando ahora cada fracción con la $\frac{a+m}{b+n}$ que resulta de sumarlas miembro á miembro, se verificará que

$$\left. \begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{a(b+n)}{b(b+n)} = \frac{a \cdot b + a \cdot n}{b(b+n)} \\ \frac{a+m}{b+n} &= \frac{(a+m)b}{(b+n)b} = \frac{a \cdot b + m \cdot b}{(b+n)b} \end{aligned} \right\} a \cdot b + a \cdot n > a \cdot b + m \cdot b$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{a+m}{b+n} &= \frac{(a+m)n}{(b+n)n} = \frac{a \cdot n + m \cdot n}{(b+n)n} \\ \frac{m}{n} &= \frac{m(b+n)}{n(b+n)} = \frac{m \cdot b + m \cdot n}{n(b+n)} \end{aligned} \right\} a \cdot n + m \cdot n > m \cdot b + m \cdot n$$

luego: $\frac{a}{b} > \frac{a+m}{b+n}$

luego: $\frac{a+m}{b+n} > \frac{m}{n}$

En resumen:

$$\frac{a}{b} > \frac{a+m}{b+n} > \frac{m}{n}, \text{ según se quiere demostrar.}$$

Consecuencias 1.ª Si se sumaran varias fracciones desiguales, miembro á miembro, la fracción resultante se hallaría comprendida entre la mayor y la menor. **2.ª** Si se sumaran fracciones iguales, numerador con numerador y denominador con denominador, la fracción resultante sería igual á cualquiera de ellas.

CAPITULO 10.

OPERACIONES CON LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS.

Adición. Ampliando la definición dada antes, diremos que es la operación que se propone reunir en un solo número las unidades ó partes de la unidad contenidas en otros varios.

El algoritmo es el mismo que empleábamos al efectuar la operación con números enteros.

Los casos que vamos á considerar son:

- 1.º Sumar fracciones de igual denominador.
- 2.º Sumar fracciones de denominadores distintos
- 3.º Sumar á un entero una fracción ó inversamente.
- 4.º Sumar expresiones fraccionarias ó números mixtos.

Caso 1.º La suma arbitraria de las fracciones sería inexplicable puesto que no habría medio capaz de expresar la relación que existiera entre la suma y los sumandos, ni entre aquella y el módulo ó unidad.

De esta reflexión y de la correlación que existe entre la idea de homogeneidad en los enteros é igualdad de denominadores en las fracciones podríamos deducir la regla para este caso, pues bastaría reunir las partes que cada sumando contuviera, que nos son conocidas por el numerador y referirlas á la misma unidad á que aquellas pertenecían, para lo cual conservaríamos el denominador, expresando la regla en estos términos: Cuando las fracciones que hayan de sumarse tengan el mismo denominador bastará sumar los numeradores poniendo al resultado el denominador de aquellas. Así: $\frac{5}{18} + \frac{3}{18} + \frac{4}{18} = \frac{5+3+4}{18} = \frac{12}{18}$.

Pero vamos á razonar por qué se procede así. Sabemos que el valor de una fracción depende de la relación que existe entre el numerador y el denominador y como á este valor le podemos dar una representación gráfica cualquiera, en las fracciones $\frac{5}{18}$, $\frac{3}{18}$ y $\frac{4}{18}$ podemos llamarle m , n y p , se tendrá pues que $\frac{5}{18} = m$, $\frac{3}{18} = n$ y $\frac{4}{18} = p$. Pero una fracción es un cociente indicado y cuando éste se conoce el dividendo se obtiene multiplicando el divisor por el cociente (1), luego $5 = 18.m$, $3 = 18.n$ y $4 = 18.p$ y sumando miembro á miembro las tres igualdades: $5+3+4 = 18(m+n+p)$, en cuya igualdad dividiendo por 18 á los dos miembros y recordando los valores de m , n y p , se verifica que $\frac{5+3+4}{18} = m+n+p = \frac{5}{18} + \frac{3}{18} + \frac{4}{18}$, según quería demostrarse.

Caso 2.º Como siempre es posible reducir fracciones cuyo denominador sea diferente á otros que le tengan igual, sin alterar su valor, es claro que este caso es solo una consecuencia del anterior, y su regla se puede expresar así: Para sumar fracciones de denominador distinto se reducen á un común denominador, se suman los numeradores de las resultantes y á la suma se le afecta

(1) El valor de una magnitud es igual al producto de la unidad de su especie por la medida de aquella: el valor está representado por el dividendo ó numerador, la unidad de la especie por el divisor ó denominador y la medida por el cociente ó lo que antes llamamos valor de la fracción (que se conoce implícitamente).

del denominador común. Ejemplo: Sea sumar $\frac{2}{7} + \frac{11}{23} + \frac{6}{9}$, véase á continuación la manera de proceder:

$$\begin{array}{r} \frac{2}{7} = \frac{2 \cdot 23 \cdot 9}{7 \cdot 23 \cdot 9} = \frac{414}{1449} \\ \frac{11}{23} = \frac{11 \cdot 7 \cdot 9}{23 \cdot 7 \cdot 9} = \frac{693}{1449} \\ \frac{6}{9} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 23}{9 \cdot 7 \cdot 23} = \frac{966}{1449} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{7} + \frac{11}{23} + \frac{6}{9} = \frac{414}{1449} + \frac{693}{1449} + \frac{966}{1449} = \frac{414+693+966}{1449} = \frac{2073}{1449} \\ 1 \frac{624}{1449} \end{array} \right.$$

Caso 3.º Recordando que todo entero se puede transformar en fracción multiplicándole por el mismo número que haya de llevar como denominador, no ofrece dificultad dar la regla práctica de este caso, que será: Para sumar á un entero una fracción ó á una fracción un entero se suma al numerador de la fracción el producto del denominador por el entero, poniéndole á esta suma el mismo denominador que la fracción tenga. Así:

$$9 + \frac{3}{11} = \frac{9 \cdot 11}{11} + \frac{3}{11} = \frac{99+3}{11} = \frac{102}{11}; \text{ ó } \frac{4}{15} + 3 = \frac{4}{15} + \frac{3 \cdot 15}{15} = \frac{4+3 \cdot 15}{15} = \frac{49}{15}.$$

Transformación idéntica á la que se hace para reducir el número mixto á fracción.

Caso 4.º Dos medios á cuál más sencillos nos ofrece la simple observación para efectuar la suma de números mixtos ó expresiones fraccionarias, en que entran, como sabemos, parte entera y fracciones; uno consiste en separar los enteros de las fracciones, efectuar la suma independiente de ambos grupos y unir las sumas; el segundo es transformar los números mixtos en fracciones, sumar estas y averiguar la parte entera y fraccionaria que la suma contenga. Aunque ambos procedimientos son igualmente sencillos, muchos recomiendan el primero porque operando con números menores es de creer que sea más difícil cometer errores ó equivocaciones; nosotros exponemos á continuación un ejemplo resuelto de ambos modos.

$$\begin{array}{l} 14 \frac{3}{5} \\ 8 \frac{7}{8} \\ 4 \frac{5}{6} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{5} + \frac{7}{8} + \frac{5}{6} = \frac{144}{240} + \frac{210}{240} + \frac{200}{240} = \frac{554}{240} = 2 \frac{74}{240} = 2 \frac{37}{120} \\ \left(14 \frac{3}{5} \right) + \left(8 \frac{7}{8} \right) + \left(4 \frac{5}{6} \right) = \frac{73}{5} + \frac{71}{8} + \frac{29}{6} = \frac{3504}{240} + \frac{2130}{240} + \frac{1160}{240} \\ \frac{6794}{240} = 28 \frac{74}{240} = 28 \frac{37}{120} \end{array} \right.$$

Sustracción. Ampliando la definición dada en los números enteros, diremos que es la operación cuyo objeto consiste en separar de un número las unidades ó partes de la unidad que otro contiene.

El algoritmo y nomenclatura son los ya conocidos en los enteros al tratar de esta operación.

- Casos.** 1.º Restar fracciones de igual denominador.
 2.º Restar fracciones de denominador diferente.
 3.º Restar de un entero una fracción.
 4.º Restar de una fracción un entero.
 5.º Restar expresiones fraccionarias ó números mixtos.

Caso 1.º Por consideraciones análogas á las que hemos hecho en el primer caso de la suma de fracciones, podríamos deducir la siguiente regla operativa, que vamos á demostrar por el cálculo: Para restar fracciones que tengan igual denominador se restan los numeradores afectando á la diferencia del denominador común. Sean: $\frac{12}{17} = m$ y $\frac{8}{17} = n$, como ya hemos expuesto $12 = 17 \cdot m$, y $8 = 17 \cdot n$, restando miembro á miembro ambas igualdades $12 - 8 = 17(m - n)$ y dividiendo por 17, $\frac{12-8}{17} = m - n = \frac{12}{17} - \frac{8}{17}$, que confirma la regla.

Caso 2.º Se le puede referir al anterior una vez que las fracciones se reduzcan á denominador común, dando la regla siguiente: Para restar fracciones de distinto denominador, se reducen á un común denominador restando los numeradores de las resultantes y poniéndole á la diferencia el denominador común. Ejemplo:

$$\frac{6}{7} - \frac{5}{11} = \frac{66}{77} - \frac{35}{77} = \frac{66-35}{77} = \frac{31}{77}$$

Caso 3.º Para expresar la regla basta recordar la forma fraccionaria que se le puede dar al entero, pudiendo ser expuesta en estos términos: Para restar de un entero una fracción se multiplica el entero por el denominador de esta, del producto obtenido se resta el numerador, poniendo á la diferencia el denominador de la fracción. Así: $4 - \frac{5}{7} = \frac{4 \cdot 7}{7} - \frac{5}{7} = \frac{4 \cdot 7 - 5}{7} = \frac{23}{7}$

Caso 4.º Es condición indispensable para la realización de este caso que la fracción minuendo sea impropia y de mayor valor que el entero que ha de restarse, por lo demás, bastará restar del numerador de la fracción el producto del denominador por el entero, poniendo á la diferencia el mismo denominador de la fracción. En efecto: $\frac{68}{13} - 4 = \frac{68}{13} - \frac{4 \cdot 13}{13} = \frac{68 - 4 \cdot 13}{13} = \frac{68 - 52}{13} = \frac{16}{13} = 1 \frac{3}{13}$

Caso 5.º Dos procedimientos operativos pueden darse para la sustracción de números mixtos, uno es restar separadamente las partes enteras y fraccionarias reuniendo luego las diferencias, y el otro consiste en transformar los números mixtos en fracciones restando luego estas conforme á las reglas dadas. En el procedimiento primero puede ocurrir que sea la fracción del número mixto sustraendo mayor que la del minuendo, en cuyo caso se toma una unidad (ó más si fuera preciso) de la diferencia de los enteros

reduciéndola á la forma fraccionaria y agregándosele á la fracción minuendo. A continuación vá expuesto un ejemplo de cada clase.

$$\begin{array}{r}
 14 \frac{5}{6} \\
 - 9 \frac{3}{7} \\
 \hline
 = 5 \frac{17}{42}
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 16 \frac{2}{9} \\
 - 12 \frac{4}{5} \\
 (-1) \\
 = 3 \frac{15}{45}
 \end{array}
 \right\}
 \left(1 + \frac{10}{45} \right) - \frac{36}{45} = \frac{55}{45} - \frac{36}{45} = \frac{19}{45}$$

$$\left(14 \frac{5}{6} \right) - \left(9 \frac{3}{7} \right) = \frac{89}{6} - \frac{66}{7} = \frac{623}{42} - \frac{396}{42} = \frac{227}{42} = 5 \frac{17}{42}$$

$$\left(16 \frac{2}{9} \right) - \left(12 \frac{4}{5} \right) = \frac{146}{9} - \frac{64}{5} = \frac{730}{45} - \frac{576}{45} = \frac{154}{45} = 3 \frac{19}{45}$$

Multiplicación. No necesita ser modificada la definición general que dimos de esta operación diciendo que en ella se trata de hallar un número que se forme del multiplicando como el multiplicador se forma de la unidad.

El algoritmo es el ya conocido y los casos que vamos á considerar son:

- 1.º Multiplicar una fracción por un entero.
- 2.º Multiplicar un entero por una fracción.
- 3.º Multiplicar dos fracciones.
- 4.º Multiplicar números mixtos.

Caso 1.º Sea multiplicar $\frac{4}{9} \times 5$, es formar una suma de tantos sumandos iguales al multiplicando como unidades tiene el multiplicador, esto es: $\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = \frac{4+4+4+4+4}{9}$, pero en el numerador está repetido 4 cinco veces por sumando, lo cual puede sustituirse por el producto 4×5 ; por tanto $\frac{4}{9} \times 5 = \frac{4 \times 5}{9}$; lo que dá origen á la regla siguiente: Para multiplicar una fracción por un entero basta multiplicar por dicho entero el numerador de la fracción conservando el denominador. Regla que también tiene su comprobación en lo dicho acerca de las alteraciones, pues quedó demostrado que al multiplicar el numerador de una fracción por un número, el valor de la fracción quedaba hecho el mismo número de veces mayor, que es otra de las acepciones de esta operación.

Caso 2.º Sea $9 \times \frac{6}{11}$, recordando la definición, nos proponemos hallar un número que se componga de 9 como $\frac{6}{11}$ se compone de la unidad, luego el producto habrá de ser las 6 onzabas partes del multiplicando 9 y como una onzaba parte de 9 es $\frac{9}{11}$ las seis onzabas partes serán $\frac{9}{11} \times 6 = \frac{9 \times 6}{11}$. Lo que nos permite

formular esta regla: Para multiplicar un entero por una fracción, se multiplica el entero por el numerador de la fracción poniendo al producto el denominador de esta. Confirma la comparación de este caso y el anterior, que el orden de factores no afecta al valor del producto, aunque estos factores sean de diferente forma.

Caso 3.º Tratemos de multiplicar $\frac{5}{9} \times \frac{6}{7}$, y como antes hemos dicho, el producto se formará de $\frac{5}{9}$, como $\frac{6}{7}$ se forma de la unidad, esto es el producto será las seis séptimas partes de $\frac{5}{9}$ y como una séptima parte es $\frac{5}{9 \times 7}$, las seis séptimas partes serán

$\frac{5}{9 \times 7} \times 6 = \frac{5 \times 6}{9 \times 7}$, lo cual dá lugar á la siguiente regla: El producto de dos fracciones se obtiene multiplicando sus numeradores y denominadores y partiendo el producto de los primeros por el de los segundos. Para razonar este caso hemos podido fundarnos también en las alteraciones.

Caso 4.º Multiplicar números mixtos: se efectúa con suma facilidad esta operación reduciéndolos á fracciones y multiplicándolos bajo esa forma, aunque más adelante veremos que hay otro medio de realizar la operación aunque sea con menos brevedad.

$$\text{Ejemplo } \left(8\frac{6}{7}\right)\left(4\frac{2}{11}\right) = \frac{62}{7} \times \frac{46}{11} = \frac{62 \times 46}{77} = \frac{2852}{77} = 37\frac{3}{77}$$

División. El concepto que formamos de esta operación al explicarla en los números enteros nos permite prescindir de la definición y algoritmo que son perfectamente aplicables á las fracciones, por cuya razón pasamos á explicar los casos que son:

- 1.º Dividir una fracción por un entero.
- 2.º Dividir un entero ó fracción por otra fracción.
- 3.º Dividir números mixtos.

Caso 1.º Recordando que manifestamos en las alteraciones que una fracción se hacía un cierto número de veces menor dividiendo al numerador ó multiplicando al denominador, y como se trata de hacer á la fracción tantas veces menor como exprese el entero divisor, se puede afirmar que para dividir una fracción por un entero se divide al numerador por dicho entero, cuando la operación sea posible, conservando el denominador, ó bien se conserva el numerador de la fracción poniéndole como denominador el producto del que tenía antes la fracción por el número entero. Así: $\frac{4}{9} : 2 = \frac{4:2}{9} = \frac{2}{9}$ y también $\frac{4}{9} : 2 = \frac{4}{9 \times 2} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$.

Caso 2.º Sea D un número entero ó fraccionario que deseamos dividir por $\frac{7}{9}$ y representemos por C el cociente, entero ó fraccionario, que ha de resultar. En toda división sabemos que el di-

viendo es igual al producto del divisor por el cociente, luego $D = \frac{7}{9} \cdot C$, es decir que D es las siete novenas partes de C , tomando una séptima parte de la igualdad anterior $\frac{1}{7} D = \frac{7:7}{9} C = \frac{1}{9} C$; siendo, como se vé en esta igualdad, la séptima parte de D igual á la novena parte de C y necesitándose nueve novenos de C para conocer su valor se tendrá $\frac{9}{7} D = \frac{9}{9} C = C$, lo que prueba que para hallar dicho cociente hay que multiplicar al dividendo por la fracción divisor invertida.

Aplicando el principio deducido á casos concretos vemos que:

$$\frac{7}{11} \cdot \frac{4}{5} = \frac{7 \times 5}{11 \times 4} = \frac{35}{44}$$

La certeza de esta operación se prueba viendo

si el producto del cociente $\frac{7 \times 5}{11 \times 4}$ por el divisor $\frac{4}{5}$ produce el divi-

dendo, después de simplificar, como así es, porque $\frac{7 \times 5}{11 \times 4} \times \frac{4}{5} = \frac{7}{11}$.

También es cierto que $6 : \frac{3}{8} = \frac{6 \times 8}{3} = \frac{48}{3}$, pues $6 = \frac{6}{1}$ y $\frac{1}{1} : \frac{3}{8} = \frac{6 \times 8}{1 \times 3}$.

Cuando sea posible efectuar la división de los numeradores y denominadores, puede realizarse la operación en esta forma, siendo el cociente una fracción cuyo numerador sea el cociente de los numeradores y el denominador el de los denominadores. Ejemplo:

$$\frac{28}{56} : \frac{7}{8} = \frac{28 : 7}{56 : 8} = \frac{4}{7} \text{ porque también } \frac{7}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{7 \times 4}{8 \times 7} = \frac{28}{56}$$

Caso 3.^o La manera más práctica y sencilla de dividir dos números mixtos es reducirlos á fracciones y operar como ya se ha dicho para estas. Ejemplo: $(6 \frac{2}{5}) : (3 \frac{4}{7}) = \frac{32}{5} : \frac{25}{7} = \frac{32 \times 7}{5 \times 25} = \frac{224}{125}$

$$1 \frac{29}{125}$$

Generalización de algunas reglas:

Todo el procedimiento operativo explicado al tratar de los números enteros de forma implícita es aplicable á las fracciones, sin otra variación que la que impone la manera especial de ser estas. Pasando por alto lo menos importante, vemos, por ejemplo, que para multiplicar una suma por un entero, se multiplicaba cada sumando; pues bien, así los términos de la suma como el número por quien se ha de multiplicar pueden ser fraccionarios, realizándose no obstante la operación de idéntica manera. Ejemplos: $(\frac{4}{7} + \frac{5}{9} + \frac{3}{8}) \times 6 = \frac{4}{7} \times 6 + \frac{5}{9} \times 6 + \frac{3}{8} \times 6$, porque para hacer seis veces mayor á la suma hay que hacer seis veces mayores á los sumandos. Si fuera $(3 + 4 + 5) \frac{6}{7}$ indicaría que habrían de tomarse las $\frac{6}{7}$ de la suma, que se compondría de la suma de las seis séptimas partes de los sumandos y sería igual á $3 \times \frac{6}{7}$

$$+4 \times \frac{6}{7} + 5 \times \frac{6}{7}. \text{ Finalmente si la operación fuera } \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{7} + \frac{8}{9}\right) \frac{2}{6} = \frac{4}{5} \times \frac{2}{6} + \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} + \frac{8}{9} \times \frac{2}{6}.$$

Del mismo modo se multiplicaría una diferencia de números enteros ó fraccionarios por un entero ó una fracción y podrían generalizarse las proposiciones todas explicadas para los enteros.

Se vé que, como decíamos en la multiplicación de números mixtos, se pueden someter estos al cálculo en su propia forma, y aplicando el mismo ejemplo vemos que $\left(8\frac{6}{7}\right)\left(4\frac{2}{11}\right) = \left(8 + \frac{6}{7}\right)\left(4 + \frac{2}{11}\right) = 8 \cdot 4 + \frac{6 \cdot 4}{7} + 8 \cdot \frac{2}{11} + \frac{6}{7} \cdot \frac{2}{11} = 32 + \frac{24}{7} + \frac{16}{11} + \frac{12}{77} = 32 + \frac{254}{77} + \frac{112}{77} + \frac{12}{77} = 32 + \frac{388}{77} = 37 + \frac{3}{77}$, que nos dá el mismo resultado.

Varios números fraccionarios ligados por el signo de multiplicar dan lugar al producto de varios factores fraccionarios, y la práctica operativa con estos es la que explicamos para los enteros, que consiste en multiplicar el primer factor por el segundo, este por el tercero, este por el cuarto y así sucesivamente

hasta haberlos multiplicado á todos. Ejemplo: $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{6}{8} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 8}$.

$$\frac{4}{9} \cdot \frac{6}{8} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 8}$$

Si los factores de un producto son iguales forman la potencia, según sabemos y aplicado á las fracciones diremos que la potencia de una fracción está formada de las potencias del grado indicado del numerador y denominador, pues $\left(\frac{5}{7}\right)^4 = \frac{5}{7} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{5}{7} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{5^4}{7^4}$.

No siempre se presentan los términos de la fracción en forma tan clara como los hemos considerado, sino que á veces la realización de ciertas operaciones nos conduce á hallarlos en otra más complicada. Examinemos la expresión $\frac{7}{6}$ su denominador es

otra fracción ó cociente, luego puede ponerse bajo la forma $\frac{7}{4 \cdot 6} = \frac{7 \times 6}{4}$. En el caso en que fuera $\frac{5}{4}$, en que el numerador es fraccionario su valor se transforma en $\frac{5 \cdot 6}{4} = \frac{5}{4 \times 6}$. También pueden

ser fraccionarios los dos términos, afectando la forma $\frac{\frac{4}{5}}{\frac{6}{7}} = \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 7} =$

$\frac{4 \times 7}{5 \times 6}$, que es lo mismo que $\frac{4 \cdot 5}{6 \cdot 7}$, cuyo valor podía dar idea del de la primera. Esto es lo que algunos llaman fracción de fracción y otros fracción múltiple.

Expusimos que si dos números son primos sus potencias también lo son y esto nos induce á deducir una consecuencia de las potencias de las fracciones y es que cuando una fracción es irreducible sus potencias también serán fracciones irreducibles.

CAPITULO 11

FRACCIONES Ó NÚMEROS DECIMALES

Se llama fracción decimal á la que tiene por denominador la unidad seguida de ceros; así $\frac{358}{100}$ y $\frac{96}{1000}$ son fracciones decimales.

Las unidades fraccionarias decimales son $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$ que se llaman respectivamente *décima*, *centésima*, *milésima*, *diezmilésima*, etc., partes de la unidad. Puede observarse que cada unidad fraccionaria decimal es diez veces menor que la que le precede y diez veces mayor que la que le sigue y que guardan por tanto los diversos órdenes decimales, en cuanto á su formación, igual ley que la establecida para los números enteros, de lo cual cabe deducir que, adoptado un medio para separar la parte entera de la fraccionaria decimal no habría inconveniente en escribir las cifras decimales del mismo modo que las de los enteros, este medio es la coma de la escritura, que se coloca en la parte superior derecha (1) de la cifra de las unidades. Así $\frac{4728}{100} = 47 \frac{28}{100} = 47,28$.

Las denominaciones de los órdenes decimales guardan perfecta analogía con las de los enteros, tomando como punto de partida las unidades, á la derecha de estas se escriben las décimas, centésimas, milésimas, diezmilésimas, cienmilésimas y millonésimas, etc., á su izquierda las decenas, centenas, miles ó millares, decenas de millar ó diezmiles, centenas de millar ó cienmiles y millones, etc.

A la fracción decimal que contiene unidades enteras se la llama generalmente número decimal.

Como regla para la escritura de números decimales puede decirse que se empieza por escribir la parte entera ó un cero si no la hubiese y á continuación la parte decimal, separándolas con una

(1) Algunos colocan la coma en la parte inferior, lo cual puede conducir á errores en el curso de una operación.

coma y cuidando de poner ceros en los órdenes de unidades cuya denominación se omitiese en el número.

La lectura de los números decimales se hace empezando por la parte entera y agregando á la expresión de la parte decimal la denominación de su última cifra. Ejemplo: 4'7905 se leerá cuatro enteros, siete mil novecientos cinco diezmilésimas.

En algunas ocasiones se lee la parte entera y decimal sin hacer separación alguna, pero expresando la especie decimal inferior que el número contenga. Así: 16'84, se puede leer mil seiscientos ochenta y cuatro centésimas.

Todo número decimal, como antes hemos visto, es equivalente á una fracción que tiene por numerador las cifras que forman el número y por denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene. 85'324 se puede expresar en forma fraccionaria de este modo $\frac{85324}{1000}$. Bajo este concepto podrían someterse los números decimales al procedimiento operativo de las fracciones ordinarias, de las que solo son un caso particular, pero también se pueden llevar á las transformaciones del cálculo en forma entera, lo cual ofrece notables ventajas, de aquí el que se haga su estudio independiente del de las fracciones en general y como extensión del de el sistema décuplo de numeración dentro del cual cabe esta teoría, así como sus operaciones sin más que alguna pequeña modificación.

Propiedades de los números decimales. 1.^a Una fracción ó número decimal se hace diez, ciento, mil ó más veces mayor ó menor según se corra la coma á la derecha ó á la izquierda uno, dos, tres, ó más lugares. Si en el número 683'5426 corremos la coma dos lugares á la derecha, se convertirá en 68354'26, comparando este con el anterior se observa que cada una de las cifras ha quedado hecha cien veces mayor y como lo que se hace con las partes queda ya hecho con el todo, el número 68354'26 es cien veces mayor que 683'5426.

Si por el contrario hubiéramos corrido la coma en el primero de los números dos lugares á la izquierda, se habría obtenido 6'835426, cada una de las cifras del cual ha descendido dos lugares en la escala de las denominaciones, es decir se ha hecho cien veces menor y por lo tanto el número 6'835426 es cien veces menor que 683'5426.

Consecuencia: Hacer al número diez, ciento ó mil veces mayor es multiplicarle por 10, 100 ó 1000, y hacerle ese número de veces menor es dividirlo por 10, 100 ó 1000, luego aplicando la propiedad antes enunciada diremos que para multiplicar ó dividir

un número decimal por 10, 100, 1000, etc., bastará correr la coma á la derecha ó á la izquierda uno, dos, tres, etc., lugares.

2.^a Un número decimal no altera cualquiera que sea el número de ceros que se agreguen ó quiten de su derecha. En efecto, la situación de las cifras del número con respecto á la coma no variará aunque se agreguen ó quiten ceros y como el valor del número solo depende de aquella circunstancia, mientras subsiste el número no cambia de valor. Así $3.85 = 3.85000$. También puede probarse esta propiedad escribiendo el número decimal en forma fraccionaria y observando que al agregar ceros se le multiplica y divide á la vez por la misma potencia de 10, lo cual hace que el número no altere. Refiriéndonos al ejemplo anterior, se vé que

$$3.85 = \frac{385}{100} \text{ y } 3.85000 = \frac{385000}{100000} = \frac{385 \times 1000}{100 \times 1000} = \frac{385}{100} = 3.85.$$

OPERACIONES CON LOS NÚMEROS DECIMALES

Adición Los números decimales se someten á la suma de la misma manera que los enteros, escribiendo unos debajo de otros de modo que se correspondan sus diversos órdenes de unidades y es claro que la coma que separa las partes enteras y decimales se corresponderá también. Empiézase la suma por la derecha y se escriben las unidades procedentes de cada columna debajo de esta y agregando las decenas á la columna siguiente, teniendo cuidado de colocar en la suma la coma de modo que se corresponda con las de los sumandos, con lo cual el resultado tendrá tantas cifras decimales como el dato que más contenga.

Ejemplo:

37'485	}	37'4850
9'0682		9'0682
214'36		214'3600
28'934		28'9340
0'62		0'6200
290'4672		290'4672

Sustracción Se efectúa esta operación como con los números enteros, es decir, escríbese el sustraendo debajo del minuendo de modo que se correspondan las cifras de sus diversos órdenes y con ellas las comas, pudiendo agregar ceros á la derecha del minuendo si la parte decimal no existiera ó fuese menor que la del sustraendo, poniendo tras la parte entera la coma en el primer caso, y realizando la resta del modo explicado para los enteros, no olvidándose de colocar la coma en la diferencia, de modo que se corresponda ó forme columna con las del minuendo y sustraendo. Ejemplos:

$$\begin{array}{r}
 64'3285 \quad 25'3200 \\
 -37'542 \quad -19'1584 \\
 \hline
 26'7835 \quad 6'1616
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{No es preciso en este} \\ \text{caso agregar los ceros} \\ \text{al minuendo.} \end{array}
 \left(\begin{array}{l} 68'000 \\ 36'528 \\ \hline 31'472 \end{array} \right)$$

Multiplicación. Esta operación conserva la definición, signo y forma que hemos explicado al tratar de los números enteros, pero en cuanto á la especie del producto hemos de considerar los casos siguientes:

- 1.º Multiplicar un decimal por un entero.
- 2.º Multiplicar un número entero por un decimal.
- 3.º Multiplicar dos números decimales.

Caso 1.º Sea multiplicar 75'328 por 27, equivale según sabemos á formar una suma de 27 sumandos iguales á 75'328 y como los sumandos y la suma tendrían el mismo número de cifras decimales, equivaliendo esta al producto, se podrá dar la regla siguiente: Para multiplicar un número decimal por un entero se efectúa la operación como si se tratase de enteros, separando luego en el producto tantas cifras decimales como tenga el multiplicando. En el ejemplo antes citado se procedería así:

$$\begin{array}{r}
 75'328 \\
 \times 27 \\
 \hline
 527296 \\
 150656 \\
 \hline
 2033'856
 \end{array}$$

Caso 2.º Podríamos basar el razonamiento de este caso en el principio demostrado de que el orden de factores no altera el producto, pero puede también deducirse su regla observando un ejemplo: Sea $2874 \times 5'23$, sabemos que el producto es respecto al

multiplicando lo que el multiplicador es respecto á la unidad, y como este es 523 centésimas partes de la unidad, el producto será las 523 centésimas partes del multiplicando y es claro que si el producto expresa centésimas, tendrá que constar de dos cifras decimales que serán las de su derecha; de donde se deduce la regla práctica siguiente: Para multiplicar un entero por un decimal se efectúa la operación prescindiendo del carácter del multiplicador, esto es, como si se operase con enteros, separando en el producto tantas cifras decimales como contenga dicho multiplicador. Haciendo el ejemplo arriba expuesto, se procederá así:

$$\begin{array}{r}
 2874 \\
 \times 5'23 \\
 \hline
 8622 \\
 5748 \\
 14370 \\
 \hline
 15031,02
 \end{array}$$

Tanto este caso como el anterior pueden razonarse también fundándose en que al prescindir de la coma en el factor decimal se le hace mayor, reflejándose en el producto la misma alteración, y para conseguir que este sea el verdadero, se hará tantas veces menor como mayor se le hizo al factor al suprimirle la coma.

Caso 3.º Tratemos de efectuar la multiplicación de 65'324 por

3'45, y prescindiendo de la coma del multiplicador, con lo que se le hace cien veces mayor, queda reducido al caso 1.º y como ya hemos expuesto en él separaríamos en el producto las tres cifras decimales que el multiplicando tiene, pero este producto es cien veces mayor que el verdadero, por la alteración sufrida en el multiplicador, haciéndole pues cien veces menor, para lo cual bastará correr la coma dos lugares hacia la izquierda, nos encontraremos en él con cinco cifras en la parte decimal, ó lo que es lo mismo tantas como suman las del multiplicando y multiplicador. De lo cual podemos deducir la regla siguiente: Para multiplicar dos números decimales se hace la operación como si fuesen enteros, separando de la derecha del producto tantas cifras decimales como ambos contengan. Realizando el ejemplo citado:

$\begin{array}{r} 65'324 \\ \times 3'45 \\ \hline 326620 \\ 261296 \\ 195972 \\ \hline 225'36780 \end{array}$	<p>Si en un producto entraran varios factores decimales se efectuaría, prescindiendo del carácter de estos, pero separando en el producto tantas cifras decimales como reuniesen todos los factores.</p> <p>Considerada la potencia de un número como el caso particular de un producto de varios factores</p>
---	--

en que todos son iguales, se deduce que la potencia de un número decimal constará de tantas cifras decimales como dé el producto de las que cuente el número por el grado de la potencia; así la quinta potencia de $6'328$, ó sea, $6'328^5$, tendrá $3 \times 5 = 15$ cifras decimales.

División. Como en la anterior operación se conservan la definición, algoritmo y forma que conocíamos al ocuparnos de esta operación con números enteros, solo hay que atender á la especie de unidades del cociente conforme á las que contengan el dividendo y divisor, para lo cual vamos á considerar los siguientes casos:

- 1.º Dividir un número decimal por un entero.
- 2.º Dividir un decimal por otro cuando el dividendo tenga más cifras decimales que el divisor.
- 3.º Dividir un decimal por otro que tenga igual ó menor número de cifras decimales.
- 4.º Dividir un entero por un decimal.

Caso 1.º Propongámonos hallar el cociente de dividir $345'47$ por 65 , y como sabemos que el cociente se forma del dividendo de modo análogo á como el divisor se forma de la unidad, siendo centésimas el dividendo y unidades el divisor el cociente serán centésimas, es decir, que contendrá dos cifras decimales que son tantas como el dividendo tiene; de donde se deduce que, para dividir un decimal por un entero se efectúa la operación prescin-

diendo de la cualidad del dividendo, pero al cociente se le hace pertenecer al mismo orden, para lo cual se separan de su derecha tantas cifras decimales como tenga aquél. Realizando el ejemplo anterior:

$$\begin{array}{r} 345'47 \overline{) 65} \\ 240 \quad 5'31 \\ 097 \\ 0,32 \end{array}$$

Tanto en este caso como en los demás de que vamos á ocuparnos, el resto ó residuo pertenece siempre á la especie de unidades del dividendo que le engendra.

Caso 2.º Vamos á dividir 75'3248 por 3'15. Si corriéramos la coma tantos lugares en el dividendo como cifras decimales tiene el divisor no alterará el cociente, aunque el resto vendria multiplicado por ciento, con lo cual quedaba este caso reducido al anterior, pues habria de dividirse 7532'48 por 315, y por lo tanto el cociente constaria de dos cifras decimales, que son las que tiene más el dividendo que el divisor. Unicamente al resto habrá que considerarle con cuatro cifras decimales. La regla práctica puede expresarse del modo siguiente: Para dividir un decimal por otro cuando contenga mayor número de cifras decimales el dividendo que el divisor, se efectúa la operación como si se tratase de números enteros, separando en el cociente tantas cifras decimales como contenga el dividendo más que el divisor. También se puede razonar este caso fundándonos en la multiplicación, considerando al dividendo como un producto cuyos factores son el divisor y el cociente y ya sabemos que el producto tiene tantas cifras decimales como los factores, luego si el producto tenia cuatro y dos un factor, el otro tendria que contener otras dos cifras decimales. Realizando el anterior ejemplo:

$$\begin{array}{r} 75'3248 \overline{) 3'15} \\ 1232 \quad 23,91 \\ 2874 \\ 0398 \\ 0'0083 \end{array}$$

Caso 3.º Si el dividendo y divisor tienen igual número de cifras decimales el cociente es entero, porque al correr en aquellos la coma á la derecha el mismo número de lugares se convierten en enteros sin que el cociente haya sufrido alteración, luego también será entero.

Si el dividendo tuviera menos cifras decimales que el divisor, podríamos conseguir que se igualaran agregándole los ceros necesarios al primero y es claro que hecho esto el cociente de la división seria entero.

Ejemplos de ambas formas: $326'45 : 4'23$ y $65'3 : 2'345$.

$$\begin{array}{r} 326'45 \overline{) 4'23} \\ 3035 \quad 77 \\ 0'74 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 65'300 \overline{) 2'345} \\ 18400 \quad 27 \\ 1'985 \end{array}$$

Caso 4.º Todo número entero puede reducirse á decimal, ó

hacerle que tome esta forma, agregándole ceros á la derecha después de poner la coma correspondiente, lo cual no afecta al valor del número, siendo esto siempre factible queda reducida la división de un entero por un decimal al caso anterior y ambos son considerados como derivaciones del segundo. Realicemos el ejemplo siguiente: $47 : 0.325$.

47'000	0.325	Si hubiéramos deseado obtener en el cociente
1450	1,44	algunas cifras decimales bastaría haber agregado
1500		más ceros al dividendo, aunque podrían añadirse
0.200		le después de llegar á la forma en que la división

está, sin más precaución que la de poner la coma á la derecha de las cifras halladas para el cociente entero á fin de separarle de la parte decimal que se obtuviera.

CAPÍTULO 9.º

EVALUACIÓN FRACCIONARIA

Reducir una fracción á otra de denominador dado es expresar la exacta ó aproximadamente en partes alícuotas de la unidad de las que indica el nuevo denominador. Se comprende que no siendo posible efectuar con exactitud siempre esta reducción, conviene investigar las condiciones en que puede llevarse á cabo.

Teorema 1.º *Para que se pueda transformar una fracción irreducible en otra de denominador dado, es condición indispensable que el nuevo denominador sea múltiplo del que antes tenía la fracción.* Sea la fracción irreducible $\frac{3}{5}$ que queremos expresarla en q ésimas partes de la unidad, representando por x al numerador desconocido de la fracción equivalente, habrá de verificarse para que la transformación sea exacta, que $\frac{3}{5} = \frac{x}{q}$ y reduciéndola

á un común denominador $\frac{3q}{5q} = \frac{5x}{5q}$, prescindiendo de los denominadores $3q = 5x$ y dividiendo por 5, para hallar el valor de x , $x = (3q) : 5$; habiendo de dividir 5 al producto $3q$ y siendo primo con 3 deberá dividir forzosamente á q , pues si esta condición no se cumpliese el valor de x no podría ser exacto.

Teorema 2.º Si una fracción no es exactamente reducible á otra de denominador dado, está comprendida entre dos que tendrán como denominador el número dado y como numeradores el cociente de dividir al producto del numerador de la fracción y el número dado por el denominador de aquella, y el número in-

mediato superior á este cociente. En efecto sean $\frac{a}{b}$ la fracción y x y $x+1$ los que expresen el número de $q^{\text{ésimas}}$ partes que dicha fracción contenga, se verificará que $\frac{x}{q} < \frac{a}{b} < \frac{x+1}{q}$ y multiplicando por q los miembros de esta desigualdad: $x < \frac{a \cdot q}{b} < x+1$, x y $x+1$ representan los numeradores que comprenderían el de la fracción $\frac{a}{b}$ reducido á $q^{\text{ésimas}}$ y estos se obtienen por defecto y exceso de la división de $a \cdot q$ entre b , lo cual prueba el enunciado.

REDUCCIÓN DE LA FRACCIÓN ORDINARIA Á DECIMAL

La mayor aplicación que tienen en la actualidad las fracciones decimales que las ordinarias hace conveniente y en muchos casos precisa esta reducción que ofrece por otra parte notables ventajas en la práctica de las operaciones.

Puede considerarse la evaluación decimal de los quebrados ordinarios como un caso particular de la reducción de fracción á otra de denominador dado, pues aunque en muchos casos no se fije de antemano la unidad decimal que ha de representar el grado de la aproximación, podemos fijarla de un modo arbitrario.

Si quisiéramos reducir la fracción ordinaria $\frac{19}{13}$ á número decimal, asignando á la evaluación un error menor que una milésima, sabemos que la fracción á que habría de convertirse la $\frac{19}{13}$ tendría como denominador mil, luego multiplicaríamos el numerador por 1000, dividiríamos el producto por el denominador 13 y el cociente obtenido representaría el mayor número de milésimas contenidas en dicha fracción por defecto, y el número obtenido incrementando á dicho cociente una unidad las milésimas que por exceso contendría la fracción dicha. De donde podemos deducir esta regla: Para reducir una fracción ordinaria á decimal, con un error menor que una unidad decimal dada, se multiplica el numerador de la fracción por la potencia de 10 indicada en la aproximación, divídese el producto por el denominador de la fracción y en el cociente se separan tantas cifras decimales como ceros se añadieron al numerador. Haciendo aplicación al ejemplo antes citado:

$$\begin{array}{r} 19000 \overline{) 13} \\ 60 \\ 080 \\ 020 \\ 7 \end{array}$$

Podría establecerse que $1'461 < \frac{19}{13} < 1'462$ y como los términos extremos de la limitación difieren en una milésima, menor será la diferencia que existe entre cualquiera de los dos valores y el de la fracción $\frac{19}{13}$.

Cuando no se marque la aproximación puede efectuarse la división del numerador por el denominador, añadiendo ceros al resto y separando las cifras que se obtengan para el cociente de las que antes hubiera por medio de una coma. Así $\frac{7}{11}$ reducida á fracción decimal sería igual á 0'6363.

70 40 70 4	11 0'636	En el teorema 1. ^o hemos demostrado que para que una fracción pudiera reducirse á otra de denominador q , era condición indispensable que el denominador de la fracción dividiere á q ; siendo q un múltiplo de 10, al efectuarse la transformación de una fracción ordinaria á decimal, se comprende que para que un número le divida no podrá contener otros factores que los que este contenga, que son 2 y 5, luego toda fracción ordinaria irreducible en cuyo denominador entren solo los factores 2 y 5, se reducirá exactamente á decimal y aquellas cuyo denominador no cumpla con esta condición no se podrán reducir exactamente, dando origen á fracciones decimales indefinidas.
---------------------	-------------	--

Observando que en toda división el número de residuos distintos que puede haber son tantos como unidades menos una tenga el divisor y que en cuanto se repitiera un residuo en la reducción de fracciones á decimales se repetiría el dividendo parcial y con él la cifra obtenida antes para el cociente, vemos que las fracciones decimales engendradas pueden tener partes que se repitan en un orden determinado, que es lo que llamamos *periodo*, denominándose á las fracciones decimales en que esto sucede *periódicas*, y distinguiéndose en puras y mixtas, según que el periodo empiece en la primera cifra decimal, ó en una cualquiera que no sea la primera. Un ejemplo de fracción decimal periódica pura sería 3'568568568....., que con objeto de simplificar su representación se escribe: 3'568, uno de periódica mixta sería 0,23194194..... cuya forma abreviada es: 0'23194, la parte sobre la cual está colocada la línea se lee independientemente del resto del número, añadiéndole la palabra *periodo*, así las fracciones decimales antes consideradas, se leerían de este modo: *tres enteros, quinientos sesenta y ocho periodo y cero enteros, veintitres, ciento noventa y cuatro periodo.*

Conversión de la fracción decimal en ordinaria: Es hallar una fracción ordinaria equivalente á la cantidad decimal conocida.

La fracción ordinaria á que se reduce una decimal se llama fracción generatriz.

Se comprende fácilmente que para hallar la fracción ordinaria generatriz de una decimal limitada, basta poner á esta como

numerador, prescindiendo de la coma y como denominador á la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tuviera aquella. Así $0'843 = \frac{843}{1000}$ y $24'715 = \frac{24715}{1000} = \frac{3943}{200}$.

Teorema 3.º La fracción generatriz de una decimal periódica pura se halla poniendo por numerador el período y por denominador tantos nueves como cifras tenga el período, si la decimal no contuviese parte entera, pero si esta existiera se antepondría al período restándola después.

La principal dificultad al tratar de reducir exactamente á fracción ordinaria una decimal periódica, estriba en que el período se repite infinitamente, pero observando que el valor de los últimos períodos sería infinitamente pequeño, vamos á probar el enunciado del teorema. Sea $\frac{m}{n} = 0'3\overline{24}$, multiplicando por 1.000 los dos miembros de la anterior igualdad $1.000 \frac{m}{n} = 324'3\overline{24}$ y restando de esta segunda la primera, miembro á miembro; $999 \frac{m}{n} = 324$, de donde $\frac{m}{n} = \frac{324}{999}$, que evidencia la parte primera del teorema.

Si: $\frac{m}{n} = 6'3\overline{24}$ } y restando: $999 \frac{m}{n} = 6324 - 6$, de donde $\frac{m}{n}$
 $1.000 \frac{m}{n} = 6324'3\overline{24}$ } $= \frac{6324-6}{999}$, que completa la demostración.

Teorema 4.º La fracción generatriz de una decimal periódica mixta que no tenga parte entera se forma poniendo como numerador la parte no periódica seguida del período menos la parte no periódica y por denominador un número compuesto de tantos nueves como cifras periódicas existan y tantos ceros como cifras no periódicas haya en el número decimal.

Sea la fracción $f = 0'346\overline{21}$.

{ multiplicando por 100.000, $100.000 f = 34621'6\overline{21}$ } Restando
 { Id. por 100. $100 f = 34'6\overline{21}$ } ordenada-
 mente y observando que los períodos se destruyen, $99.900 f =$
 $34621 - 34$ y dividiendo por 99.900, $f = \frac{34621-34}{99.900}$, que demuestra el
 enunciado.

Si la fracción decimal contuviera parte entera, bastaría anteponerla á la parte no periódica, sin que se altere lo demás. Así, siendo $f = 8'346\overline{21}$; $100000 f = 834621'6\overline{21}$, y restando $99.900 f$
 $100 f = 834'6\overline{21}$ } $= 834621 - 834$, divi-
 diendo ahora por 99.900, quedaría $f = \frac{834621-834}{99900}$.

Teorema 5.º *Cuando una fracción ordinaria se reduce exactamente á decimal consta la decimal equivalente de tantas cifras decimales como unidades contenga el mayor exponente de los factores 2 ó 5 de su denominador.*

Sabemos, en efecto, que para que una fracción ordinaria irreducible se convierta exactamente á decimal no debe contener su denominador más factores primos que el 2 y el 5 ó uno cualquiera de ellos, será pues de la forma: $\frac{m}{2^a \cdot 5^b}$, multiplicando los dos términos de esta fracción por 5^a se transformará, sin variar su valor,

en $\frac{m \cdot 5^a}{2^a \cdot 5^a} = \frac{m \cdot 5^a}{10^a}$, que como se vé constará de tres cifras decimales, ó sean tantas como unidades tenía el exponente de 2 que es el mayor. Así la fracción $\frac{13}{16} = \frac{13}{2^4}$ se reducirá exactamente á decimal con cuatro cifras, en efecto: $\frac{13}{16} = 0.8125$, que podíamos haber reducido multiplicando los dos términos de la fracción por $5^4 = 625$, reduciéndola á $\frac{13 \times 625}{2^4 \times 5^4} =$

$$\begin{array}{r|l} 130 & 16 \\ 20 & 0.8125 \\ 40 & \\ 80 & \\ 0 & \end{array}$$

$\frac{8125}{10^4} = 0.8125$.

Teorema 6.º *La fracción ordinaria cuyo denominador no contenga los factores 2 y 5 originará una decimal periódica pura, en la que el número máximo de cifras decimales será tantas menos una como unidades haya en el denominador.*

Como los residuos son menores siempre que el divisor, al cabo de unas cuantas divisiones, que serán á lo sumo tantas como unidades menos una tenga el divisor, se repetirá uno de aquellos y tras él reaparecerán los que antes le seguían dando cifras iguales para el cociente, que desde luego podemos afirmar que será una fracción decimal periódica, no pudiendo dar lugar á una fracción periódica mixta, porque al volver á reducir esta á ordinaria contendría ceros el denominador, admitiendo por lo tanto los factores 2 y 5, que es contra el supuesto, luego tiene que ser periódica pura.

Teorema 7.º *La fracción ordinaria irreducible en cuyo denominador entren, á la vez que otros, los factores primos, 2 y 5, originará una decimal periódica mixta, en la cual el número de cifras no periódicas es igual al de las unidades del mayor exponente de dichos factores 2 y 5. Sea $\frac{17}{120}$ cuyo denominador descompuesto*

en factores primos es igual á $2^3 \times 5 \times 3$, si multiplicamos los dos miembros por 5^2 , se convierte en $\frac{17.5^2}{2^1.5^3.3} = \frac{17.5^2}{3} \times \frac{1}{10^3}$, la primera de estas dos fracciones en que se ha descompuesto el valor de la fracción $\frac{17}{120}$, da lugar á una fracción decimal periódica pura

con parte entera, pero al multiplicar por $\frac{1}{10^3}$, que es lo mismo que dividir por 10^3 , hay que correr la coma á la izquierda tres lugares, entrando á formar parte decimal no periódica tres cifras (ó ceros y cifras) de la parte entera, con lo cual queda demostrado el teorema.

Y en efecto: $\frac{17}{120} = 0'1416666\dots = 0'141\bar{6}$.

Una fracción decimal que conste de número considerable de cifras que no se repitan periódicamente, es imposible poderla reducir á fracción ordinaria, pero observando que aún exigiéndose en el cálculo gran exactitud hay ciertos valores que por su insignificancia no pueden influir sensiblemente en las operaciones á que hubieran de ser sometidos, por cuya razón y para simplificar el mecanismo de esas operaciones, deben despreciarse; no hay inconveniente en admitir un pequeño error á fin de encontrar el valor aproximado de una fracción indefinida y no periódica al tratar de hallar su generatriz. Para ello, pueden despreciarse las cifras que sigan á la del último orden decimal que quiera apreciarse, incrementando en una unidad á la inferior que quede si la primera que se despreja es igual ó mayor que 5 y no variándola cuando sea menor. Así, la fracción ordinaria generatriz de la decimal $0'842965328\dots$ apreciando hasta las millonésimas sería $\frac{842965}{1000000} = \frac{168593}{200000}$.

CAPITULO 13.

Potencias. Propiedades generales. Ya hemos definido la potencia de un número como el resultado de repetir á éste varias veces por factor, hemos visto las potencias del número entero y fraccionario y algunas de sus propiedades, vamos ahora á estudiar las potencias de los números que estén expresados en forma implícita.

Teorema 1.º *La potencia de cualquier grado de un producto, es igual al producto de las potencias del mismo grado de los factores.* Sea $(7 \cdot 3 \cdot 5)^4$, sabemos que equivale á un producto de cuatro factores iguales á $7 \cdot 3 \cdot 5$, esto es, $(7 \cdot 3 \cdot 5)(7 \cdot 3 \cdot 5)(7 \cdot 3 \cdot 5)(7 \cdot 3 \cdot 5)$

$= 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$, puesto que el orden de factores no influye en el valor del producto; pero observando que en el producto obtenido los factores 7, 3 y 5 están repetidos cuatro veces, se podrá poner en forma potencial, siendo igual á $7^4 \cdot 3^4 \cdot 5^4$, como se desea demostrar.

Teorema 2.º *La potencia de un cociente, es igual al cociente de las potencias del mismo grado del dividendo y divisor.* $20 : 5 = 4$, vamos á demostrar que $20^3 : 5^3 = 4^3$; en efecto, antes hemos visto que siendo $20 = 5 \times 4$ y $20^3 = 5^3 \times 4^3$, dividiendo por 5^3 , queda la igualdad reducida á esta otra $20^3 : 5^3 = 4^3$, como pretendíamos demostrar. Esta proposición se generaliza más haciendo que la división tome la forma fraccionaria, porque sabemos que la potencia de una fracción es igual á la potencia del mismo grado del numerador y denominador: Así $(20:5)^3 = \left(\frac{20}{5}\right)^3 = \frac{20^3}{5^3} = 20^3 : 5^3$.

Teorema 3.º *La potencia de la potencia de un número es el mismo número afectado de un exponente igual al producto del que antes tenía por el que expresa el grado á que se la quiere elevar.* En efecto $(7^4)^3$ indica que á 7^4 hay que repetirlo tres veces por factor, siendo el producto $7^4 \cdot 7^4 \cdot 7^4$ y como para multiplicar potencias de la misma base se suman los exponentes, dicho producto se podrá poner bajo la forma $7^{4+4+4} = 7^{12}$, que es lo que se quería demostrar.

Teorema 4.º La condición general con que han de cumplir los números para ser potencias perfectas de un grado determinado, es que los exponentes de los factores primos de que aquellos consten sean múltiplos de dicho grado. Sea N un número que es potencia quinta de otro tal como A, y supongamos que descompuesto A en sus factores primos sean estos a, b^m y c, se podrán establecer las igualdades siguientes:

$N = A^5$ $A^5 = (a \cdot b^m \cdot c)^5 = a^5 \cdot b^{m^5} \cdot c^5$ La igualdad última de $A = a \cdot b^m \cdot c$ $N = A^5 = a^5 \cdot b^{m^5} \cdot c^5$ } muestra el enunciado, porque vemos que N se compone de los factores a, b y c elevados á potencias múltiplas de 5.

De aquí se deduce que para que sea un número cuadrado perfecto sus factores primos deben estar elevados á potencias pares y para que sea cubo perfecto los exponentes de dichos factores deben ser múltiplos de 3.

Teorema 5.º Si un número entero no fuera potencia perfecta de otro entero tampoco lo sería de una fracción. Porque esta fracción tendría que ser irreducible y ya sabemos que las potencias de una fracción irreducible son también fracciones irreducibles. No puede ser potencia de una fracción reducible porque al

simplificarla se convertiría en irreducible ó en un número entero y por hipótesis no es potencia de otro entero.

Cuadrado. Se llama cuadrado de un número á su segunda potencia, es decir, al resultado de repetirle dos veces por factor.

Los cuadrados de los diez primeros números son:

De	{	1 — 1	El cuadrado goza de algunas propiedades particulares de las cuales las que mas nos interesa conocer son las siguientes:
		2 — 4	
		3 — 9	
		4 — 16	Teorema 1.º <i>El cuadrado de la suma de dos números se compone: del cuadrado del primer sumando más el duplo del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.</i> Sea: $(5+8)^2 = (5+8)(5+8) = (5+8)5 + (5+8)8 = 5 \cdot 5 + 8 \cdot 5 + 5 \cdot 8 + 8 \cdot 8 = 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 8 + 8^2$, al sim-
		5 — 25	
		6 — 36	
		7 — 49	
		8 — 64	
		9 — 81	
		10 — 100	

plificar la suma obtenida de multiplicar todos los sumandos del multiplicando por cada uno de los del multiplicador, los dos sumandos $8 \cdot 5$ y $5 \cdot 8$ los hemos puesto bajo la forma del producto $2 \cdot 5 \cdot 8$ que le es igual y que nos ha conducido al resultado que nos proponíamos. Como aplicación del anterior teorema se obtiene el siguiente:

Corolario: El cuadrado de un número compuesto de decenas y unidades, es igual al cuadrado de las decenas más el duplo de las decenas por las unidades más el cuadrado de las unidades. Todo número compuesto de decenas y unidades puede descomponerse en dos sumandos, las decenas que irán seguidas de un cero ó multiplicadas por 10 serán uno y el otro las unidades, hecho lo cual no hay más que aplicar el teorema precedente. Así: $28^2 = (20+8)^2 = 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 8 + 8^2$ y también $28^2 = (2 \cdot 10 + 8)^2 = 2^2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 8 + 8^2$.

Teorema 2.º *El cuadrado de la diferencia de dos números es igual á la suma de los cuadrados de dichos números menos el doble de su producto.* Sea: $(11-7)^2 = (11-7)(11-7) = (11-7) \cdot 11 - (11-7)7 = (11 \cdot 11 - 7 \cdot 11) - (11 \cdot 7 - 7 \cdot 7) = 11^2 - 7 \cdot 11 - 11 \cdot 7 + 7^2 = 11^2 + 7^2 - 2 \cdot 11 \cdot 7$.

Corolario 1.º La diferencia entre los cuadrados de dos números sucesivos es igual al doble del menor más una unidad. En efecto: $9^2 - 8^2 = (8+1)^2 - 8^2 = 8^2 + 2 \cdot 8 + 1^2 - 8^2 = 2 \cdot 8 + 1$. Esta demostración nos permite hallar el cuadrado de un número conociendo el del superior ó inferior sin más que disminuirle ó aumentarle á aquél el duplo del menor y una unidad. Por ejemplo, sabiendo que el cuadrado de 12 es 144, averiguarlos de 11 y 13; $11^2 = 12^2 -$

$$(2 \cdot 11 + 1) = 144 - 23 = 121 \text{ y } 13^2 = 12^2 + (2 \cdot 12 + 1) = 144 + 25 = 169.$$

Corolario. 2.º El producto de la suma de dos números por su diferencia es igual á la diferencia entre los cuadrados de dichos números. Sean $(8+5)(8-5) = (8+5) \cdot 8 - (8+5) \cdot 5 = (8 \cdot 8 + 5 \cdot 8) - (8 \cdot 5 + 5 \cdot 5) = 8^2 + 5 \cdot 8 - 8 \cdot 5 - 5^2 = 8^2 - 5^2$.

Puede reconocerse á simple vista, en muchos casos, si un número es ó no cuadrado perfecto por las circunstancias que en él concurren, sin que sea preciso descomponerle en factores primos, quedando desde luego excluidos de serlo aquellos que no reúnan ciertos requisitos que algunos autores dan prolijamente en esta teoría con el nombre de *caracteres de exclusión* y de los cuales no hemos de considerar sino los más esenciales, por la índole elemental de este tratado.

Habiendo de terminar el cuadrado de un número en la misma cifra que el de sus unidades y no terminando el cuadrado de ninguna de las nueve primeras cifras en 2, 3, 7 ni 8, podremos afirmar desde luego que todo número que termine en cualquiera de estas cuatro cifras no es cuadrado perfecto. Tampoco lo será el número que terminando en ceros no entren estos en número par, porque los cuadrados de los múltiplos de 10 tienen un número par de ceros en su terminación.

También deja de ser cuadrado perfecto el número que terminando en 5 no tenga 2 como cifra de decenas y una cifra par en sus centenas; porque suponiendo el cuadrado de un número cuyas decenas fueran d y las unidades 5, se verificaría que $(d \cdot 10 + 5)^2 = d^2 100 + 2 \cdot d \cdot 10 \cdot 5 + 5^2 = d^2 100 + d \cdot 100 + 25$ y sacando á $d \cdot 100$ factor común en los dos primeros sumandos, se obtendría $d \cdot 100(d+1) + 25$; como el producto de los dos números consecutivos d y $d+1$ es siempre par y representa centenas, por estar multiplicado por 100 ó terminado en dos ceros, cuyos lugares serían ocupados por las cifras 2 y 5, al sumar $d(d+1) \cdot 100$ y 25, vemos que las centenas deberían ser en número par, 2 las decenas y 5 las unidades: Faltando cualquiera de estas cifras dejaría de ser el número cuadrado perfecto.

Una fracción ordinaria será cuadrado perfecto de otra cuando sus términos lo sean considerados como enteros y también cuando lo fuera el producto de dichos términos, porque si suponemos que la fracción $\frac{A}{B}$ fuera cuadrado perfecto de la irreducible $\frac{a}{b}$, la primera había de tener sus términos equimúltiplos de la segunda, es decir, que siendo $\frac{A}{B} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$, el menor valor de A sería a^2 y el de B sería b^2 ; pero si fueran

$A = m \cdot a^2$ } multiplicando ordenadamente $A \cdot B = m^2 a^2 b^2$, que
 $B = m \cdot b^2$ } comprueba lo que antes establecíamos.

Una fracción decimal será cuadrado perfecto cuando conste de número par de cifras decimales y lo sea considerándola como entero. En efecto, para que el número decimal $mnpq$ sea cuadrado perfecto, puesto bajo la forma de fracción ordinaria $\frac{mnpq}{10000}$, constando de número par de cifras decimales que hace que el denominador lo sea, es preciso que lo fuera el numerador que es el número decimal, abstracción hecha de su cualidad, es decir, considerado como entero. Si el número constase de impar cifras decimales, se puede hacer que tenga un número par de aquellas agregando á su derecha un cero, pero entonces el número no es cuadrado perfecto, porque ningún entero terminado en impar ceros lo es.

Cubo: es la tercera potencia de un número ó el resultado de repetirle por factor tres veces.

Los cubos de los diez primeros números son el de:

1 - 1	} Las propiedades particulares más interesantes del cubo son las siguientes:
2 - 8	
3 - 27	
4 - 64	
5 - 125	
6 - 216	
7 - 343	
8 - 512	
9 - 729	
10 - 1000	

Teorema 1.º *El cubo de la suma de dos números es igual al cubo del primer sumando, más el triplo del cuadrado del primero por el segundo, más el triplo del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo sumando. Sean $(7+4)^3 = (7+4)^2(7+4) = (7^2+2 \cdot 7 \cdot 4+4^2) \cdot 7 + (7^2+2 \cdot 7 \cdot 4+4^2) \cdot 4 = (7^2+2 \cdot 7 \cdot 4+4^2) \cdot 7 + (7^2+2 \cdot 7 \cdot 4+4^2) \cdot 4 = 7^3+2 \cdot 7^2 \cdot 4+4^2 \cdot 7+7^2 \cdot 4+2 \cdot 7 \cdot 4^2+4^3 = 7^3+3 \cdot 7^2 \cdot 4+3 \cdot 7 \cdot 4^2+4^3$.*

$7 \cdot 4^2+4^3$, conforme se quería probar.

Corolario 1.º El cubo de un número compuesto de decenas y unidades es igual al cubo de las decenas más el triplo del cuadrado de las decenas por las unidades más el triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades, más el cubo de las unidades. En efecto $27^3 = (20+7)^3 = 20^3+3 \cdot 20^2 \cdot 7+3 \cdot 20 \cdot 7^2+7^3$, ó bien $27^3 = (2 \cdot 10+7)^3 = 2^3 \cdot 10^3+3 \cdot 2^2 \cdot 10^2 \cdot 7+3 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 7^2+7^3$

Corolario 2.º La diferencia entre los cubos de dos números sucesivos es igual al triplo del cuadrado del menor, más el triplo del menor más una unidad. Sean $8^3-7^3 = (7+1)^3-7^3 = 7^3+3 \cdot 7^2 \cdot 1+3 \cdot 7 \cdot 1^2+1^3-7^3 = 3 \cdot 7^2+3 \cdot 7+1$.

La aplicación de este corolario nos permite hallar el cubo de un número inmediatamente menor ó mayor que otro conocido, sin más que incrementarle en el primer caso ó restarle en el segundo

el triple cuadrado del menor más el triple del menor más una unidad. Sabiendo, por ejemplo, que $8^3=512$ hallar los cubos de 7 y 9.

$$\begin{aligned} 7^3 &= 8^3 - (3 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7 + 1) = 512 - 169 = 343. \\ 9^3 &= 8^3 + (3 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8 + 1) = 512 + 217 = 729. \end{aligned}$$

Siendo los caracteres de exclusión del cubo menos usuales que los del cuadrado, solo consignaremos los más principales. Para que un número terminado en ceros sea cubo perfecto, es preciso que el número de ceros sea múltiplo de tres, pues siendo el cubo de 10ⁿ mil, por cada cero que un número contenga debe tener tres su cubo.

Un número entero no puede ser cubo perfecto, si siendo múltiplo de 3 no lo es á la vez de 9, ó si aumentado ó disminuido en una unidad no es múltiplo de 9, porque siendo todo número de una de estas tres formas: 3 , $3+1$ y $3+2=3-1$, que se reducen á dos: 3 y $3+1$, para que sea cubo perfecto de otro entero habrá de verificarse, llamando N al número, que $N=3^3=27=9$, ó que $N=(3+1)^3=27+27+9+1=9+1$, luego $N+1=9$, que confirma lo expuesto antes.

Una fracción ordinaria será cubo perfecto cuando los sean sus dos términos considerados como enteros, ó cuando lo sea el producto del numerador por el cuadrado del denominador, pues si $n=a^3$ y $l=b^3$, $\frac{m}{n} = \frac{a^3}{b^3} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$ y si $\frac{A}{B} = \left(\frac{p}{q}\right)^3 = \frac{p^3}{q^3}$, $A=m \cdot p^3$ y $B^2=l \cdot m^2$ q^6 de donde $A \cdot B^2 = m^3 \cdot p^3 \cdot q^6 = (m \cdot p \cdot q^2)^3$

Finalmente para que un número decimal sea cubo perfecto, además de serlo considerado como entero debe contener un número de cifras decimales múltiplo de tres.

CAPITULO 14.

Radicación. De las raíces en general. Llamamos raíz m de un número á otro que elevado á la potencia del grado m reproduce el dado. A la operación cuyo objeto es hallar la raíz de un número se la llama *extracción de raíces ó radicación*.

Para indicar que ha de extraerse la raíz de cualquier grado de un número se coloca á este bajo el signo $\sqrt{\quad}$ llamado *radical*, expresando numéricamente el grado de la raíz ó *índice* en el ángulo de dicho signo, exceptuándose solo el caso de extraer la raíz cuadrada en el cual puede prescindirse del índice según uso muy general. Para expresar la raíz séptima de 48, se indicaría $\sqrt[7]{48}$.

Como no todos los números son potencias perfectas del grado cuya raíz se quiera hallar, no todos tendrán raíz exacta de ese grado, luego el problema que generalmente pretendemos resolver es extraer la raíz de un cierto grado exactamente si los números son potencias perfectas de él, aproximada en menos de una unidad de la especie inferior representada en la raíz si no son potencias perfectas y con el grado de aproximación que se marque cuando se exprese esta condición.

Las raíces inexactas son generadoras de números incommensurables.

Las reglas generales comunes á toda clase de raíces, se comprenden en los siguientes principios:

Teorema 1.º La raíz del grado n de un producto de varios factores, es igual al producto de las raíces *enésimas* de dichos factores. Sea $\sqrt[n]{A \cdot B \cdot C}$, supongamos que

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt[n]{A} = a \\ \sqrt[n]{B} = b \\ \sqrt[n]{C} = c \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{elevando á la potencia } n \text{ es:} \\ \text{estas igualdades se obtendrá:} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} A = a^n \\ B = b^n \\ C = c^n \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{de donde } A \cdot B \cdot C = \\ a^n b^n c^n = (a \cdot b \cdot c)^n \\ \text{y extrayendo la} \\ \text{raíz } n : \sqrt[n]{A \cdot B \cdot C} = \end{array}$$

$a \cdot b \cdot c = \sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B} \cdot \sqrt[n]{C}$, según queríamos demostrar.

Teorema 2.º La raíz de grado n del cociente de dos cantidades es igual al cociente de las raíces *enésimas* de dichas cantidades.

$\sqrt[n]{A : B}$; establezcamos como en el teorema anterior que

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt[n]{A} = a \quad A = a^n \\ \sqrt[n]{B} = b \quad B = b^n \end{array} \right\} \begin{array}{l} A : B = a^n : b^n = (a : b)^n \\ \sqrt[n]{A : B} = a : b = \sqrt[n]{A} : \sqrt[n]{B} \end{array} \text{ que prueba el teorema.}$$

Corolario. Siendo un cociente equivalente á una fracción en la que el dividendo es numerador y el divisor denominador, se deduce que $\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}} = \sqrt[n]{\frac{A}{B}} = \sqrt[n]{A} : \sqrt[n]{B} = \frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}$, la raíz del grado n de una fracción se hallará mediante la determinación

de las raíces de ese mismo grado del numerador y denominador.

Raíz cuadrada. Aplicando la definición antes dada diremos que la raíz cuadrada de un número es otro que elevado al cuadrado reproduce el propuesto. Y que por lo tanto vamos á proceder á hallar las raíces cuadradas exactas de los números que sean cuadrados perfectos y las aproximadas en menos de una unidad de los que no cumplan aquella condición.

Consideraremos dos casos: 1.º que el número sea menor que 100 y 2.º que sea mayor que 100.

En el primer caso la raíz cuadrada será menor que 10, puesto que este número lo es de 100, constará por tanto de una sola cifra y se averiguará recordando los cuadrados de los nueve primeros números. Así $\sqrt{25} = 5$ y $\sqrt{40}$ es mayor que 6 y menor que 7; 6 representaría la raíz cuadrada por defecto y 7 por exceso de 40.

Denominamos *resto ó residuo* de la extracción á la diferencia entre el número y el cuadrado de la mayor raíz contenida en él: así cuatro es el resto de la extracción de la raíz cuadrada de 40, porque es igual á $40 - 6^2 = 40 - 36$. También se puede considerar el resto por exceso que es la diferencia que existe entre el cuadrado inmediatamente superior al número dado y este; refiriéndonos al ejemplo anterior 9 es el residuo por exceso, pues es igual á $7^2 - 40 = 49 - 40$.

2.º Caso. Cuando un número es mayor que 100 su raíz cuadrada es mayor que 10, constará por lo tanto de decenas y unidades y vamos á estudiar en los teoremas que á continuación se insertan el modo de investigar las cifras de la raíz y conocer por consiguiente esta.

Teorema 1.º *La cifra de las decenas de la raíz cuadrada de un número se obtiene extrayendo la raíz cuadrada de las centenas de dicho número.*

Representemos por N un número cuya raíz cuadrada conste de d decenas y u unidades. Todo número es igual al cuadrado de su raíz cuadrada más el residuo que podemos representarle por r ; luego $N = (d \cdot 10 + u)^2 + r$ y desarrollando el cuadrado indicado: $N = d^2 \cdot 100 + 2d \cdot 10 \cdot u + u^2 + r$; será pues $N \geq d^2 \cdot 100$ y $N < (d + 1)^2 \cdot 100$ y como $d^2 \cdot 100$ y $(d + 1)^2 \cdot 100$ expresan números exactos de centenas, representando por C las contenidas en N , $C \geq d^2$ y $C < (d + 1)^2$ y extrayendo la raíz cuadrada de ambas desigualdades $\sqrt{C} \geq d$ y $\sqrt{C} < d + 1$, lo que demuestra que la cifra d de las decenas de la raíz se obtiene de la \sqrt{C} , que es lo que pretendíamos demostrar.

Este teorema nos permite descomponer en periodos de á dos cifras el número cuya raíz cuadrada quiere obtenerse, empezando por la derecha.

Teorema 2.º *Si después de restar de un número el cuadrado de las decenas de su raíz cuadrada se dividen las decenas que en*

aquel quedan por el duplo de las de la raíz, se obtiene la cifra de las unidades ó un cociente mayor.

Sea $N = (d \cdot 10 + u)^2 + r$, que ya hemos visto que se convierte en $N = d^2 \cdot 100 + 2d \cdot 10 \cdot u + u^2 + r$; restemos de los dos miembros de esta igualdad $d^2 \cdot 100$, que es el cuadrado de las decenas de la raíz y quedará $N - d^2 \cdot 100 = 2d \cdot 10 \cdot u + u^2 + r$, despreciamos $u^2 + r$, y observando que $2d \cdot 10 \cdot u$ por entrar el factor 10^2 terminaría en cero y sería un número exacto de $2 \cdot d \cdot u$ decenas, llamando D las decenas de la diferencia entre N y $d^2 \cdot 100$, se tendrá que $D > \text{ó} = 2 \cdot d \cdot u$ y dividiendo por $2d$, $D : 2d > \text{ó} = u$, según deseábamos demostrar.

Ahora bien, una vez obtenida la cifra de unidades y no habiendo restado del número más que $d^2 \cdot 100$ que es el cuadrado de las decenas, falta por restar $2 \cdot d \cdot 10 \cdot u + u^2$, en cuya suma, sacando factor común á u se obtiene $u(2d \cdot 10 + u)$, lo que expresado en el lenguaje vulgar quiere decir que una vez hallada la cifra de las unidades de la raíz cuadrada se escribiría á la derecha del duplo de las decenas (pues en la suma $2 \cdot d \cdot 10 + u$, el primer sumando terminaría en un cero, cuyo lugar ocuparía la cifra u) y el número así formado se multiplicaría por dicha cifra de unidades, restando el producto de la diferencia que hubiera quedado entre el número y el cuadrado de las decenas de la raíz. Cuando esta diferencia no pueda efectuarse, la cifra de las unidades es mayor que la verdadera y habría que ir la rebajando unidades hasta hallar la cifra que fuera buena; pero, si por el contrario, después de restar aquel producto la diferencia ó residuo es mayor que el duplo de la raíz más una unidad, la cifra es menor que la verdadera y habría que aumentarla unidades hasta encontrar una cuyo resto no excediese del duplo de la citada raíz, porque siendo la diferencia entre los cuadrados de dos números sucesivos igual al duplo del menor más una unidad, siempre que el resto fuera mayor que el duplo de la raíz, el número sería mayor que el cuadrado de la cantidad inmediata superior á aquélla.

Vamos á aplicar los anteriores principios á la extracción de la raíz cuadrada de 5834. Por ser este número mayor que 100 su raíz constará de decenas y unidades y como según el teorema 1.º la raíz cuadrada de las 58 centenas dará la cifra de las decenas de la raíz, vemos que esta no puede ser otra que 7, cuyo cuadrado es el mayor contenido en 58; elevemos 7 al cuadrado y será 49, y como 7 pertenece al orden de decenas terminará en un cero y su cuadrado en dos, es decir que habrá que restar de 5834, 4900, siendo la diferencia 934. Según lo expuesto en el teorema

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{58.34\ 76} \text{ (d.10+u) (raíz)} \\
 \underline{49\ 00} \\
 9\ 34 \quad 146 \times 6 \text{ (2d.10+u) } \times u \\
 \underline{8\ 76} \\
 r = 58
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 2.^\circ \text{ habrá que separar} \\
 \text{las 93 decenas de la di-} \\
 \text{ferencia y dividir las} \\
 \text{por 14 duplo de la ci-} \\
 \text{fra 7 hallada en la raíz,} \\
 \text{el cociente es 6, luego}
 \end{array} \right\}$$

esta es la cifra de unidades, que para comprobarla hemos de escribir la á la derecha del duplo de la raíz formándose el n.º 146 que multiplicado por esa cifra nos dá el duplo de decenas por unidades más el cuadrado de unidades, representado por $876 = 140 \times 6 + 6 \times 6$, y que restado de la diferencia 934 antes obtenida, nos deja el residuo 58 que es bueno. La raíz de 5834 será pues 76 y el residuo 58. La operación se dispone en la forma que más arriba lo dejamos hecho, si bien en la práctica se prescinde de los ceros que siguen al 49 y de las anotaciones que, á fin de que se comprenda mejor la operación, hemos puesto.

Si el número cuya raíz cuadrada se quiere hallar tuviese más de dos períodos, se bajaría á continuación del resto el tercer período, considerando como decenas la raíz obtenida y procediendo por razonamiento análogo al que hemos hecho para hallar la cifra 6, á buscar la que en este caso sería de las unidades y comprobándola luego en forma igual á la antes empleada se encontraría el residuo ó se continuaría de la misma manera la operación hasta haber empleado todos los períodos en que hubiese sido descompuesto el número. Puede establecerse en vista de la operación antes efectuada la siguiente regla práctica:

Para extraer la raíz cuadrada de un número mayor que 100 se le descompone en períodos de á dos cifras empezando por la derecha, pudiendo tener dos ó una el primero de la izquierda. Hecho esto se extrae la raíz cuadrada del primer período de la izquierda, obteniéndose la cifra de orden superior de la raíz, esta cifra se eleva al cuadrado, el cual se resta del primer período. A continuación del resto obtenido se escribe el segundo período, separando del número formado la cifra de la derecha y dividiendo lo que queda á la izquierda de esta por el duplo de la raíz hallada; el cociente de esta división nos dará la segunda cifra de la raíz, la cual se escribe á continuación del duplo de la cifra antes obtenida para la raíz, el número así constituido se multiplica por dicha segunda cifra restando el producto del número formado por el primer residuo y el segundo período. Al resultado de esta sustracción se le escribe á la derecha el tercer período, separando la cifra de las unidades y dividiendo el total de las decenas por el duplo del número formado por las dos cifras de que ya consta

la raíz, escribiendo á la derecha de este número el cociente que se obtenga y multiplicando el que se forme por la tercera cifra, restando el producto de la segunda diferencia seguida del tercer período. Bajando á la derecha del residuo el cuarto período y continuando la operación de modo idéntico al artes expresado hasta apurar los períodos en que se hubiera descompuesto al número. Aplicando la regla á un ejemplo y omitiendo el razonamiento por lo muy repetido que va ya, sea

$$\begin{array}{r|l}
 \sqrt{6.27.28.54} & 2504 \\
 4 & \\
 \underline{22\ 7} & 45 \times 5 \\
 225 & \\
 \underline{22\ 85\ 4} & 50 - 0 \\
 20\ 01\ 6 & 5004 \times 4 \\
 \underline{2\ 83\ 8} &
 \end{array}$$

Hiremos observar que si las decenas del número que se forme ponienlo á la derecha de un resto el período que corresponda bajar no contienen al duplo de la raíz hallada, la cifra cero representará el orden correspondiente á este período en la raíz, bajándose á continuación el período siguiente y pudiendo utilizar el duplo antes

hallado para la raíz sin más que añadir un cero á su derecha.

La simple observación hace ver que la raíz constará de tantas cifras como períodos tenga el número.

Pruebas. Se comprueba la extracción elevando al cuadrado la raíz é incrementando á este con el residuo, si el número resultante es igual á aquél del cual ha sido extraída la raíz, la operación estará bien hecha, de lo contrario habrá que rectificarla.

También puede comprobarse por medio de los restos eligiendo un divisor en que como el 9, el 7 ó el 11 se opere con todos los números. Para ello se averigua el resto de la raíz con relación al divisor elegido, se le eleva al cuadrado, se le añade el resto del residuo respecto al mismo divisor, se descuentan los múltiplos de este que contengan y el resto final debe ser igual al que resulte de la comparación del número cuya raíz se ha extraído, con el divisor fijado. Aplicando esta prueba al anterior ejemplo vemos que el resto de la raíz con respecto al divisor 9 es 2, su cuadrado 4, el resto del residuo es 3, sumados este y el anterior dan $4+3=7$, que es el mismo que deja el número 6,272,854 con respecto al divisor 9.

Raíz cuadrada de las fracciones. Consideremos tres casos: 1.º que la fracción esté formada por números que sean cuadrados perfectos; 2.º que el denominador sea cuadrado perfecto y el numerador no; 3.º que ninguno de los dos términos lo sea:

1.º En el corolario del teorema 2.º de las raíces en general, hemos demostrado que para extraer la raíz de grado n ésimo de una fracción se extrae la raíz de ese mismo grado de sus dos términos, aplicando este principio se demostraría que la raíz de una

fracción cuyos términos sean cuadrados perfectos se parte la raíz cuadrada del numerador por la del denominador. Pero también puede probarse directamente. Sea $\sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2}$, la raíz ha de ser una cantidad tal que al elevarla al cuadrado reproduzca la subradical y en este caso no puede ser otra que $\frac{a}{b}$ que cumple las condiciones enunciadas, por ser $a = \sqrt{a^2}$ y $b = \sqrt{b^2}$.

2.º Cuando el denominador sea cuadrado perfecto y no lo sea el numerador se extrae la raíz aproximada de éste y se parte por la exacta de aquél; así viendo la fracción $\frac{22}{64}$, sabemos que $\sqrt{32} > \frac{5}{6}$ luego $\frac{5}{8} < \sqrt{\frac{32}{64}} < \frac{6}{8}$; pudiéndose tomar como raíces aproximadas $\frac{5}{8}$ y $\frac{6}{8}$ la primera por defecto y la segunda por exceso y deferenciándose cualquiera de ellas de la verdadera en menos de $\frac{1}{8}$.

3.º No siendo ninguno de los dos términos de la fracción cuadrado perfecto es necesario conseguir que el denominador lo sea, toda vez que no puede considerarse dividida la unidad en un número incompleto de partes, para conseguirlo sin alterar el valor de la fracción se pueden multiplicar los dos términos de esta por los factores que le faltan al denominador para ser cuadrado perfecto, es decir, para que los exponentes de dichos factores sean pares.

Ejemplos: $\sqrt{\frac{13}{3780}} = \sqrt{\frac{13}{2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7}} = \sqrt{\frac{13 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2}} = \sqrt{\frac{13 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{(2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7)^2}}$

$$\sqrt{1365} = \sqrt{1365} > \frac{36}{63} \quad \sqrt{6} = \sqrt{6 \times 11} = \sqrt{66} > \frac{8}{11}$$

$$2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \quad \sqrt{630} < \frac{37}{63} \quad \sqrt{11} = \sqrt{11^2} = 11 < \frac{9}{11}$$

La raíz cuadrada de los números decimales se extrae del mismo modo que la de los enteros, con la sola diferencia de tener que completar los grupos ó periodos de cifras decimales de modo que no resulte ninguno conteniendo parte entera y decimal, pues entonces habría una cifra en la raíz cuya especie no podría determinarse, y teniendo presente que por cada grupo decimal hay que separar una cifra en la raíz, contándose de derecha á izquierda, puede añadirse algún cero para hacer que las cifras decimales entren en número par. Reside el fundamento en la transformación siguiente:

$$\sqrt[4]{46253} = \frac{\sqrt{46253}}{\sqrt[4]{10000}} = \frac{\sqrt{46253}}{\sqrt{10^4}} = \frac{\sqrt{46253}}{10^2} = \frac{215}{100} = 2.15 \text{ que consta de}$$

tantas cifras decimales como grupos de á dos contenía el número. Si

$$\text{hubiera sido } \sqrt{6.354} = \frac{\sqrt{63540}}{\sqrt{10000}} = \frac{\sqrt{63540}}{10^2} = \frac{253}{100} = 2.53.$$

No podría conservarse el número 6.354 porque su denominador, habría sido 1.000 que no es cuadrado perfecto.

Raíz cuadrada con aproximación. Hallar la raíz cuadrada de un número con un error menor que una enésima parte de la unidad es hallar el mayor número de enésimas cuyo cuadrado esté contenido en el número dado.

Teorema 3.º Para extraer la raíz cuadrada un número con un error menor que $\frac{1}{n}$ basta multiplicar al número por n^2 , extraer la raíz cuadrada del producto y poner á esta el denominador n .

Sea extraer la $\sqrt{578}$ en menos de $\frac{1}{7}$, y representemos por x el mayor número de séptimos, contenido en dicha raíz, se verificará que

$$\frac{\infty}{7} < \sqrt{578} < \frac{\infty+1}{7} \text{ elevando al } \infty^2 \text{ cuadrado } \frac{\infty^2}{7^2} < 578 < \frac{(\infty+1)^2}{7^2} \text{ multipli-}$$

cando por 7^2 , extrayendo la raíz cuadrada y dividido por 7 :

$$\frac{\infty}{7} < \frac{\sqrt{578 \cdot 7^2}}{7} < \frac{\infty+1}{7} \text{ y es claro que habiendo si lo } 7 = n, \text{ con las}$$

mismas operaciones habríamos llegado á la siguiente desigualdad:

$$\frac{\infty}{n} < \frac{\sqrt{A \cdot n^2}}{n} < \frac{\infty+1}{n}, \text{ que confirma el enunciado del teorema.}$$

Corolario. Para extraer la raíz cuadrada de un número con un error menor que una unidad decimal del orden enésimo $\left(\frac{1}{10^n}\right)$

basta multiplicar al número por el cuadrado de 10^n extraer la raíz cuadrada del producto y copiar en este n cifras decimales, que equivale á dividir por 10^n á dicha raíz. En efecto, si tratamos de extraer la $\sqrt{236}$ con error menor que 0.01 observando que 0.01

$$= \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}, \text{ según lo dicho en el anterior teorema habrá que}$$

multiplicar á $236 \times (10^2)^2 = 236 \times 10^4$, extraer la raíz de este producto y dividirla por 10^2 . La operación práctica sería:

$\sqrt{2.36.00\ 00}$	$15'36$	$15'36 < \sqrt{236} < 15'37$ desigualdad que prueba que cualquiera de los dos números $15'36$ ó $15'37$ pueden tomarse como valores de la $\sqrt{236}$ con error menor que $0'01$.
136	25×5	
1100	303×3	
19100	3066×6	
0704		

Si el número cuya raíz aproximada quiere hallarse fuera fraccionario ó decimal se procede de análoga manera, sin más que efectuar la división del producto del numerador y la aproximación por el denominador antes de extraer la raíz ó separar las cifras decimales, según el caso. Si la aproximación fuera decimal, se reduciría la fracción ordinaria á decimal calculando duplo número de ceros de los que se pidan en la aproximación, y si la fracción es decimal se añadirán los ceros necesarios hasta tener tantos períodos decimales como cifras de esta especie se pidan en la aproximación, ó despreciando las cifras que sobrasen si constase aquél de más que las necesarias. En los ejemplos que ponemos á continuación van expuestas las formas de proceder en cada

caso. $\sqrt{\frac{5}{7}}, E < \frac{1}{9}, \sqrt{\frac{5 \times 9^2}{7}}, \sqrt{\frac{58}{9}} = \frac{7}{9}, \sqrt{0'43}, E < \frac{1}{8}$

$\sqrt{27,52}$	$5'2$	$\sqrt{\frac{5'2}{102 \times 2}, \frac{5'2}{8}}$
2 52	48	

$\sqrt{\frac{6}{7}}, E < \frac{1}{100} = 0'01$	$\frac{6}{7} = 0'8571$	$\sqrt{0'85.71}$	$0'92$	$\sqrt{\frac{6}{7}} = 0'92$
		471	182×2	
		107		

$\sqrt{5'34258}, E < 0'001$	$\sqrt{5'34.25.80}$	$2'311$
	1 34	43×3
	0525	461×1
$\sqrt{5'34258} = 2'311$	64805	4621×1
	1859	

$\sqrt{0'832596425} \quad E < 0'001$

$\sqrt{0'83.25.96}$	$0'912$	$\sqrt{0'8325964} = 0'912$
2 25	181×1	
04496	1822×2	
0852		

CAPITULO 15.

RAÍZ CÚBICA

La raíz cúbica de un número es otro número que elevado al cu-

bo reproduce el primero. Como hemos visto, no siendo todos los números cubos perfectos, tampoco tendrán raíz cúbica exacta, luego el problema que en esta teoría nos proponemos resolver es la extracción de la raíz cúbica exacta de los números que sean cubos perfectos ó la aproximada de los que no cumplan esta condición.

Lo mismo que en la extracción de la raíz cuadrada, tenemos que considerar en la cúbica dos casos: 1.º que el número sea menor que mil y 2.º que sea mayor que esta cantidad.

Caso 1.º Siendo el número menor que 1.000, su raíz cúbica será menor que 10, constando por consiguiente de una sola cifra, para hallar la cual basta recordar los cubos de los nueve primeros números. El resto ó residuo de la extracción es la diferencia entre el número dado y el mayor cubo contenido en él. $\sqrt[3]{343}=7$ y $\sqrt[3]{615}$ varía entre 8 y 9, pudiendo ser el primero de estos números la raíz cúbica por defecto de 615 y el segundo su raíz cúbica por exceso, siendo en el primer caso el residuo $615-512=103$, y en el segundo $729-615=114$.

Caso 2.º Cuando el número cuya raíz cúbica quiera extraerse sea mayor que 1000 aquella será mayor que 10 constando de decenas y unidades y para determinarla se precisa el conocimiento de los teoremas siguientes:

Teorema 1.º *La cifra de las decenas de la raíz cúbica de un número se obtiene extrayendo la raíz cúbica de los millares de dicho número.* Sea en efecto, N un número cuya raíz cúbica conste de d decenas y u unidades. Siendo el número igual al cubo de su raíz cúbica más el residuo, $N=(d \cdot 10+u)^3+r=d^3 1000+3d^2 100 \cdot u+3d \cdot 10 \cdot u^2+r$, prescindiendo de lo que sigue en este último término de la igualdad al primer sumando, se tendrá $N \geq d^3 1000$ y $N < (d+1)^3 1000$ y como los segundos miembros de estas desigualdades son números exactos de millares, representando por M los que N contenga, se verificará que $M \geq d^3$ y $M < (d+1)^3$ y extrayendo la raíz cúbica: $\sqrt[3]{M} \geq d$ y $\sqrt[3]{M} < d+1$, no pudiendo contener la raíz cúbica más decenas que d con lo cual queda demostrada la proposición.

Mediante lo que se deduce de esta demostración, se efectúa la descomposición del número cuya raíz cúbica quiere hallarse en periodos de á tres cifras, principiando por la derecha, ó sea por

las unidades inferiores, y pudiendo contener tres, dos ó una cifra el primer periodo de la izquierda.

Teorema 2.º *Si después de restar de un número el cubo de las decenas de su raíz cúbica, se dividen las centenas que en aquél quedan por el triplo cuadrado de las decenas de la raíz se obtiene la cifra de las unidades de esta ó un cociente mayor.* Sea $N = (d \cdot 10 + u)^3 + r$, que como hemos visto en el teorema anterior se convierte en $N = d^3 \cdot 1000 + 3 d^2 \cdot 10 \cdot u + 3 d \cdot 10 \cdot u^2 + u^3 + r$; restemos de los dos miembros de esta igualdad $d^3 \cdot 1000$ y se reducirá á $N - d^3 \cdot 1000 = 3 d^2 \cdot 100 \cdot u + 3 d \cdot 10 \cdot u^2 + u^3 + r$, despreciemos lo que sigue en el segundo miembro al primer sumando $3 d^2 \cdot 100 \cdot u$ y observando que por entrar 100 en este producto será un número exacto de centenas y representando por C las unidades de este orden contenidas en la diferencia $N - d^3 \cdot 1000$, se verificará que $C \geq 3 d^2 \cdot u$ y dividiendo por $3d^2$ ambos miembros de la desigualdad: $C \geq 3 d^2 \cdot u$, que es lo que queríamos demostrar.

Una vez hallada la cifra de las unidades y habiendo restado del número solamente el cubo de las decenas, falta que segregarse de aquél el triplo del cuadrado de las decenas por las unidades, más el triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades más el cubo de unidades y lo que después quedara constituirá el residuo. Pero $3 d^2 \cdot 100 \cdot u + 3 d \cdot 10 \cdot u^2 + u^3 = u(3 d^2 \cdot 100 + 3 d \cdot 10 \cdot u + u^2)$ y sacando nuevamente el factor común u que hay en el segundo y tercer sumando del paréntesis, se obtiene: $u(3d^2 \cdot 100 + (3 d \cdot 10 \cdot u + u^2)u)$; lo que traducido al lenguaje común quiere decir que obtenida la cifra de las unidades se escribe á la derecha del triplo de las decenas multiplicando el número así formado por la expresada cifra y sumando el producto al triplo cuadrado de las decenas seguido de dos ceros (ó corriendo aquel producto dos lugares á la derecha) se vuelve á multiplicar la suma obtenida por la cifra de las unidades y si se puede restar el producto de lo que en el número quedó después de segregarse el cubo de las decenas, dicha cifra de unidades es buena; de no poder restarse sería esta mayor que la verdadera y habría que rebajarla unidades hasta encontrar una que sometida á las operaciones dichas cumpliera la expresada condición. Si no solo pudiera restarse el número antes obtenido, sino que el resto que dejara fuera mayor que el triplo cuadrado de la raíz hallada más el triplo de dicha raíz, la cifra de las unidades sería menor que la verdadera y habría que incrementarla unidades hasta que se obtuviera una que dejara un resto menor que la suma del triplo de la raíz con el de su cuadrado. Que no debe llegar

el resto al valor del triplo cuadrado de la raíz más el triplo de esta, se deduce de que la diferencia entre los cubos de dos números consecutivos es igual triplo cuadrado del menor más el triplo del menor más una unidad, si el resto excediera de aquella cantidad nos demostraría que en el número estaría contenido el cubo de otra raíz mayor que la hallada.

Procedamos á la aplicación de los anteriores principios extrayendo la $\sqrt[3]{98.396}$. Según lo dicho en el teorema 1.º la cifra de las decenas de la raíz cúbica se encontrará extrayendo la raíz de este grado de los 98 millares del número dado y como el mayor número cuyo cubo está contenido en 98 es 4, esta será la cifra de las decenas de la raíz. Si de 98396 restamos el cubo de (4.10) la diferencia será de 34396, en la cual para buscar la cifra de unidades de la raíz hay que separar conforme á lo dicho en el teorema 2.º, las centenas, que son 343 y dividir las por el triplo cuadrado de 4 que es 48; pero este cociente que es 7, escrito á la derecha del triplo de las decenas, multiplicando por el número formado (127×7) y sumando el producto (889) con el triplo cuadrado de las decenas seguido de dos ceros, dá como suma 5689 que multiplicada por 7 es igual á 39823 que no puede restarse de 34396, por cuya razón hay que rebajar al 7 una unidad sometiendo el número 6 que resulta á las operaciones que antes hicimos con 7, dándonos como producto definitivo 33336 que puede restarse de 34396, por cuya razón la cifra 6 es buena para las unidades, siendo el resto final 1060 que cumple la condición de no exceder al triplo cuadrado de la raíz más el triplo de la misma. La raíz cúbica de 98396 aproximada en menos de una unidad es pues 46. Se dispone la operación práctica como consta á la izquierda y se puede dar la siguiente regla práctica: Para extraer la raíz cúbica

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{98.396} & 46 \\ 64\ 000 & 3 \times 4^2 = 48 \quad (3 \times 4 = 12), 126 \times 6 = 756 \\ \hline 343.96 & 756 \\ 333\ 36 & 5556 \times 6 = 33336 \\ \hline 1060 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{98396} & 46 \\ 64 & 48 \quad 126 \times 6 \\ \hline 343.96 & 756 \\ 333\ 36 & 5556 \times 6 \\ \hline 1060 & \end{array}$$

ca de un número mayor que 1000, se divide en períodos de á tres cifras, empezando por la derecha, pudiendo contener una, dos ó tres el primero de la izquierda; se extrae la raíz cúbica del primer pe-

riodo de la izquierda y la cifra que se obtenga será la del orden más elevado de la raíz; se resta el cubo de esta cifra de dicho primer período y á continuación de la diferencia se escribe el segundo período separando las dos cifras de la derecha y dividiendo lo que queda á la izquierda del número formado por el triplo cuadrado de la primera cifra de la raíz escrito, á este efecto, á la derecha de la línea que separa al número de la raíz y debajo de ésta, la cifra hallada para el cociente se coloca á la derecha del triplo de la raíz multiplicando el número que así se forma por la expresada cifra y sumando el producto con el triplo cuadrado de la raíz, como si estuviera éste seguido de dos ceros, es decir corriendo aquél dos lugares á la derecha, á la suma obtenida se la multiplica por la cifra últimamente hallada, restando el producto del número que se formó con el resto del primer período y el segundo de éstos. A la derecha del nuevo resto se baja el período siguiente y para hallar la nueva cifra para la raíz se procede de análoga manera á como se ha dicho para la segunda, sin otra particularidad que la de poder obtener el triplo cuadrado de la raíz hallada sumando el cuadrado de la última cifra con el triplo de la primera por el cuadrado de la segunda más el número que se obtuvo de sumar á éste el triplo cuadrado de la primera cifra. Se continúa el procedimiento expuesto hasta haber utilizado todos los períodos en que fué descompuesto el número dado.

Cada período del número debe producir una cifra en la raíz y por lo tanto cuando añadiendo á la derecha de un resto el período siguiente no contenga el número de sus centenas al triplo cuadrado de la raíz, la cifra correspondiente será cero.

En la práctica se adoptan formas diversas para algunas operaciones, por cuya razón y solo á título de curiosidad, sin comentar las ventajas ó inconvenientes que presenten las damos á conocer, realizando un ejemplo con cada una.

$\begin{array}{r} \sqrt[3]{15.6125} \\ \underline{8} \\ 76,25 \\ \underline{76\ 25} \\ 0 \end{array}$	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding-right: 10px;">25</td> <td rowspan="3" style="font-size: 3em; vertical-align: middle;">}</td> <td style="padding-left: 10px;">$3 \times 2^2 \times 5 \dots 60$ centenas</td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 10px;">12 ... 5</td> <td style="padding-left: 10px;">$3 \times 2 \times 5^2 \dots 150$ decenas</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="padding-left: 10px;">$5^3 \dots 125$ unidades</td> </tr> </table>	25	}	$3 \times 2^2 \times 5 \dots 60$ centenas	12 ... 5	$3 \times 2 \times 5^2 \dots 150$ decenas		$5^3 \dots 125$ unidades	$\underline{7625}$
25	}	$3 \times 2^2 \times 5 \dots 60$ centenas							
12 ... 5		$3 \times 2 \times 5^2 \dots 150$ decenas							
		$5^3 \dots 125$ unidades							

$$\begin{array}{r|l}
 \sqrt[3]{14.716.125} & 245 \\
 \underline{8} & 12 \dots 4 \mid 24^3 = 13824 \\
 67,06 & \\
 \underline{147 \ 16} & \\
 138 \ 24 & \\
 \underline{8 \ 921,25} & 1728 \dots 5 \mid 245^3 = 14,716.125 \\
 14.716.125 & \\
 \underline{14 \ 716.125} & \\
 0 &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 \sqrt[3]{14.761.125} & 245 \\
 \underline{8} & 12 \ 64 \times 4 \\
 6716 & 256 \\
 \underline{5824} & 1456 \times 4 \\
 8821,25 & \underline{16} \\
 \underline{8821 \ 25} & 1728 \ 725 \times 5 \\
 0 & \underline{3625} \\
 & 176425 \times 5
 \end{array}$$

Pruebas. Se comprueba la extracción de la raíz cúbica de un número elevándola al cubo y sumándola el resto, el número resultante debe ser igual á aquel cuya raíz cúbica hemos extraído.

También se puede someter esta operación á la prueba de los restos hallando el de la raíz, elevándole al

cubo, sumándole al resto del residuo de la extracción y descontando los múltiplos del divisor elegido, se debe obtener un resto igual al que deje el número dado al compararle en el mismo divisor.

Así en la extracción de la $\sqrt[3]{98396}$, el resto de la raíz es, con respecto al divisor $9, 4 + 6 = 10, 10 - 9 = 1, 1^3 + 7$ que es el resto del residuo, es igual á 8, resto que se obtiene también comparando 98396 con el divisor 9, lo cual demuestra que se había efectuado bien la operación.

Raíz cúbica de las fracciones. Consideremos tres casos: 1.º que la fracción sea cubo perfecto de otra; 2.º que siendo cubo perfecto el denominador no lo sea el numerador y 3.º que ninguno de los dos términos sea cubo perfecto.

1.º Aplicando el corolario del teorema 2.º de las raíces en general, habrá que hallar la fracción que elevada al cubo dé el valor de la propuesta, lo que se conseguirá extrayendo la raíz cúbica exacta del numerador y dividiéndola por la del denominador.

En efecto: $\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)^3} = \frac{a}{b}$ Ejemplo $\sqrt[3]{\frac{125}{512}} = \sqrt[3]{\frac{5^3}{8^3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{5}{8}\right)^3} =$

$$\frac{5}{8} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{512}}$$

2.º En el caso de que sea cubo perfecto el denominador, se extraerá la raíz cúbica aproximada del numerador, partiéndola por la exacta de aquél. Tratándose de hallar la $\sqrt[3]{\frac{248}{729}}$ como

$$\sqrt[3]{248} > 6, \frac{6}{9} < \sqrt[3]{\frac{248}{729}} < \frac{7}{9},$$

se pueden tomar como valores aproximados los términos extremos de la limitación anterior que diferenciándose entre sí en $\frac{1}{9}$, se diferencian del valor exacto de dicha raíz en menos de $\frac{1}{9}$.

3.º No siendo ninguno de los dos términos de la fracción cubo perfecto hay que hacer que lo sea el denominador sin que el valor de aquella altere, por la consideración expuesta al tratar de este caso en la raíz cuadrada, lo cual se consigue fácilmente multiplicando á los dos términos de la fracción por los factores necesarios para que los del denominador tengan exponentes múltiplos de 3. Así:

$$\sqrt[3]{\frac{13}{1200}} = \sqrt[3]{\frac{13}{2^4 \cdot 3 \cdot 5^2}} = \sqrt[3]{\frac{13 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3}{2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^3}} = \sqrt[3]{\frac{13 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3}{2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^3}} = \frac{13}{2^2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{13}{60}$$

La raíz cúbica de las fracciones decimales se extrae de modo análogo á la de los enteros, sin otra diferencia que la de tener que completar los grupos de las cifras decimales, de modo que la parte decimal conste de un número exacto de ellos y que no puede haber ningún grupo en que entren parte entera y decimal, pues no se le podría asignar especie á la cifra que en la raíz se originara por este. Tal transformación obedece á los sencillos principios aplicados á la siguiente igualdad:

$$\sqrt[3]{26'3846} = \sqrt[3]{\frac{26384700}{1000000}} = \sqrt[3]{\frac{26384700}{10^6}} = \frac{\sqrt[3]{26384700}}{10^2}$$

Hallada la raíz del numerador, que es decimal, considerándole como entero, pero completados los periodos decimales, se le divide por la unidad, seguida de tantos ceros como periodos de á tres cifras decimales contenía el número. Si se hubiera conservado el número 26'3847 al ponerle como denominador la unidad seguida de ceros esta no había resultado cubo perfecto y para conseguirlo ha sido preciso completar las cifras decimales hasta que resultara un número de ellas múltiplo de tres.

Raíz cúbica con aproximación. Teorema 3.º Para extraer la raíz cúbica de un número en menos de $\frac{1}{n}$ hay que multiplicar al número por n^3 , extraer la raíz del grado indicado del producto y ponerle á ésta como denominador á n .

Sea extraer la $\sqrt[3]{76}$ en menos de $\frac{1}{9}$, representando por x el número de *novenos* contenidos en la expresada raíz, se verificará que $\frac{x}{9} < \sqrt[3]{76} < \frac{x+1}{9}$, elevando al cubo esta limitación $\frac{x^3}{9^3} < 76 < \frac{(x+1)^3}{9^3}$, multiplicándola por 9^3 , $x^3 < 76 \cdot 9^3 < (x+1)^3$ y extrayen-

do la raíz cúbica: $x < \sqrt[3]{76 \cdot 9^3} < x+1$, encontrado el valor de x , efectuando la raíz cúbica del producto de 76×9^3 , solo habrá luego que dividirlo por 9, así $\frac{38}{9} < \sqrt[3]{76} < \frac{39}{9}$.

Si el número hubiera sido A y el grado de aproximación dado n

$\frac{x}{n} < \sqrt[3]{\frac{A \cdot n^3}{n}} < \frac{x+1}{n}$, que confirma la proposición.

Corolario. Para extraer la raíz cúbica de un número con un error menor que la unidad decimal del orden *enésimo* $\left(\frac{1}{10^n}\right)$, basta multiplicar al número por 10^{3n} , extraer la raíz cúbica del producto y dividirla por 10^n , ó sea separar de su derecha n cifras decimales, con lo cual sus unidades inferiores serán del orden pedido en la aproximación. No hay más que aplicar el teorema anterior y haciendo que n se convierta en 10^n y se tendría que $\frac{x}{10^n}$

$< \sqrt[3]{\frac{A}{10^n}} < \frac{x+1}{10^n}$, elevando al cubo y multiplicando por 10^{3n} , $x^3 < A \cdot 10^{3n} < (x+1)^3$ y extrayendo la raíz cúbica y dividiendo

luego por 10^n , queda $\frac{x}{10^n} < \frac{\sqrt[3]{A \cdot 10^{3n}}}{10^n} < \frac{x+1}{10^n}$, que confirma el

enunciado. Ejemplo: extraer la $\sqrt[3]{42}$ con un error menor que $0.01 = \frac{1}{100}$, habrá que extraer la $\sqrt[3]{42 \times 100^3} = \sqrt[3]{42000000}$ y separar

luego dos cifras decimales en la raíz. Resultaría pues $3^47 < \sqrt[3]{42} < 3^48$ y como $3^48 - 3^47 = 0.01$ el error cometido al tomar cual-

$\sqrt[3]{42.000.000}$	3'47
27	27 94×4
150.00	376
123 04	3076×4
26960.00	16
24779 23	3468 1027×7
2180 77	7189
	353989×7

quiera de estos dos números como raíces cúbicas de 42, se aproximan á la verdadera en menos de 0'01.

Si el número cuya raíz aproximada quiere hallarse fuera fraccionario ó decimal se procede de manera análoga sin más que efectuar la división del produc-

to del numerador y la aproximación por el denominador ó tener en cuenta las cifras decimales, según la clase de fracción. Si la fracción, cuya raíz aproximada se desea en menos de una unidad decimal, fuera ordinaria se reduciría á decimal calculando el triple número de cifras decimales que las pedidas en la raíz; pero si fuera decimal bastaría considerar un grupo de á tres cifras de esta clase por cada una de las que en la aproximación se pidieran, añadiendo ceros si no alcanzaban las cifras dadas ó despreciando las que excediesen de las necesarias. Por la sencillez con que están hechas las operaciones que á continuación insertamos, no creemos preciso dar explicaciones detalladas para aclarar en cada caso el modo de proceder.

$$\sqrt[3]{\frac{3}{5}}, E < \frac{1}{7} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt[3]{\frac{3 \times 7^3}{5}} = \sqrt[3]{\frac{3 \times 343}{5}} = \sqrt[3]{\frac{1029}{5}} = \frac{5}{7} \end{array} \right. \quad \sqrt[3]{0'23}, E < \frac{1}{3}$$

$$\sqrt[3]{0'23 \times 3^3} = \sqrt[3]{6'210} = 1'8 = 0'6 \sqrt[3]{\frac{4}{11}}, E < 0'01 \quad \frac{4}{11} = 0'363636$$

$$\sqrt[3]{\frac{4}{11}} = \sqrt[3]{0,363636} = 0'71 \quad \sqrt[3]{4'7932} E < 0'01$$

$\sqrt[3]{0'363636}$	0'71	$\sqrt[3]{4'793.200}$	1'68
20636	147 211×1	37.93	3 36×6
5725	211	6 972.200	216
	14911×1	515 68	516×6
			36
			768 488×8
			3904
			80704×8

$$\sqrt[3]{4'7932} = 1'68 \quad \sqrt[3]{3'842695321} \quad E < 0'1$$

$$\begin{array}{r} \sqrt[3]{3'843} \quad 1'5 \\ 28,43 \quad 3 \quad 35 \times 5 \\ 468 \quad 175 \\ \hline 475 \times 5 \end{array} \quad \sqrt[3]{3'482695} = 1'5$$

CAPÍTULO 16.

SISTEMA MÉTRICO DECIMAL

En el estudio que llevamos hecho de los números los hemos considerado en el concepto de pluralidad de unidades, pero haciendo abstracción de las distintas especies á que pudieran referirse, esto es en su forma *abstracta*, pero en el momento en que éstos números se aplican á la resolución de los problemas prácticos de la vida tienen ya especie conocida, es decir se hacen *concretos*, y si bien las reglas operativas dadas les son aplicables, hay diversos medios de proceder en sus operaciones, por cuya razón creemos de necesidad el estudio independiente de ellos, empezando por el conocimiento de las especies de unidades á que puedan referirse.

Al estudio de las unidades concretas ó prácticas le llaman algunos autores *metrología*, palabra derivada de las griegas *metrón* (medida) y *logos* (tratado), ó sea tratado de las medidas.

De largos años viene planteado en las naciones no solo del continente Europeo sino también en América, el problema de unificar los sistemas, de pesas medidas y monetario, reduciéndolos á un tipo común. Sentíase en España aún más esta necesidad por la considerable variedad de medidas que estaban en uso en sus diversas provincias, haciendo fatigosos los cálculos precisos para las transacciones comerciales.

Puestas de acuerdo algunas naciones (Francia y España, entre estas) para elegir una unidad fija é invariable á la que poder referir las demás del sistema de medidas, fué encargada una comisión de sabios (1) para efectuar la medición del cuadrante del meridiano terrestre que desde el polo Norte vá al Ecuador y se designó por ellos la diezmillonésima parte de dicha longitud, su-

(1) Representaron á nuestra patria en dicha Comisión los eminentes D. Jorge Juan y D. Antonio Ulloa.

puesta su medida sobre un plano, como el tipo fundamental para el sistema, llamándosele *metro* y construyéndose de platino los modelos ó patrones que la representasen con la mayor exactitud posible. El patron del *metro* que se construyó para España obra en el Archivo de Simancas.

De esta unidad fundamental recibió nombre el sistema y para armonizarlo con el de numeración se convino en que sus múltiplos y divisores se adaptaran á la escala decimal, de cuyas circunstancias tomó la última parte de la denominación con que se le distingue.

Fué adoptado el Sistema Métrico Decimal por Ley de 19 de Julio de 1849, pero la rutina, enemiga de todo progreso, fué suscitando obstáculos á su propagación y á pesar de que en 1.º de Enero de 1869 se decretó como obligatorio su uso, no puede asegurarse aún que se practique, con excepción de todo otro medio de pesar ó medir, en todos los pueblos. (2)

Ya hemos dicho que la unidad fundamental es el *metro*, que sirve para medir las longitudes y que se escribe abreviadamente con la letra *m*.

Las unidades principales son:

De superficie: el metro cuadrado, m^2 , que es un cuadrado cuyo lado mide un metro.

De capacidad, cúbica ó de volumen: el metro cúbico, m^3 , que es un cubo que tiene de arista un metro.

De capacidad para áridos y líquidos el *litro* (l), que es un cubo cuya arista es la décima parte del metro.

De peso: el *gramo* (g) que es lo que pesa (en el vacío) la cantidad de agua destilada á 4 grados centígrado contenida en un centímetro cúbico.

De numerario ó monetario: la *peseta*, moneda acuñada, de plata, de 5 gramos de peso y 23 milímetros de diámetro.

Se forman los múltiplos de las unidades principales anteponiendo al nombre de estas las palabras griegas:

<i>Deca</i>	que significa	<i>diez</i>	y se escribe	<i>D</i>
<i>Hecto</i>	»	<i>ciento</i>	»	<i>H</i>
<i>Kilo</i>	»	<i>mil</i>	»	<i>K</i>
<i>Miria</i>	»	<i>diez mil</i>	»	<i>M</i>
<i>Mega</i>	»	<i>un millón</i>	»	<i>Meg</i>

Los divisores se forman anteponiendo también á las unidades principales los nombres siguientes, tomados en latín:

(2) Reciente es la publicación de la Ley y Reglamentos que regulan el uso del Sistema Métrico decimal, se dió la primera con fecha 8 de Julio de 1892 y el segundo en 5 de Septiembre de 1895.

Deci que significa *décima* y se escribe *d*
Centi » *centésima* » *c*
Mili » *milésima* » *m*

Hace pocos años que en las obras de ciencia se admite un divisor, aun menor, formado con la palabra griega *micron*, que significa millonésima y el nombre de la unidad.

Múltiplos y divisores de las diferentes especies de unidades y sus valores.

Longitudinales.

Megámetro (Meg.m)	1000.000	metros
Miriámetro (Mm)	10.000	»
Kilómetro (Km)	1.000	» (unidad itineraria)
Hectómetro (Hm)	100	»
Decámetro (Dm)	10	»
Metro (m)		(unidad lineal)
Decímetro (dm)	0'1	»
Centímetro (cm)	0'01	»
Milímetro (mm)	0'001	»
Micrómetro	0'000.001	»

Superficiales.

Si construido un cuadrado dividimos dos lados contiguos en diez partes iguales cada uno y por los puntos de división trazamos paralelas á los lados, se formarán cien cuadrados iguales cada uno de los cuales tendrá por lado una longitud igual á la décima parte del valor del lado del primero, de donde se deduce que cada unidad superficial equivale á cien veces su inmediata inferior y que por consiguiente las unidades superficiales crecen y decrecen de ciento en ciento. La série de múltiplos y divisores será:

Miriámetro cuadrado (Mm ²)	100,000.000	metros cuadrados
Kilómetro id. (Km ²)	1,000.000	id.
Hectómetro id. (Hectárea) (Hm ²)	10.000	id.
Decámetro id. (Area) (Dm ²)	100	id. (Unidad
Metro cuadrado (Centiárea) (m ²)	1	agraria)
Decímetro id. (dm ²)	0'01	id.
Centímetro id. (cm ²)	0'0001	id.
Milímetro id. (mm ²)	0'000001	id.

De volumen.

Un cubo es un cuerpo geométrico regular terminado por seis planos perpendiculares dos á dos é iguales llamados *caras*. *Aristas* del cubo son las intersecciones de las caras, que también son entre sí perpendiculares. *Vértices* son los puntos en que se reúnen cada tres planos y por lo tanto las aristas de éstos.

Si dividimos en diez partes iguales cada una de las tres aristas que se reunen en un vértice del cubo y trazamos por cada división planos paralelos á las caras opuestas, se formarán diez lechos de á cien cubos, ó sean mil cubos, iguales, cada uno de los cuales tiene por arista la décima parte de la del primero. Luego cada unidad cúbica contiene mil veces á su inmediata inferior y puede deducirse que las unidades cúbicas crecen y decrecen de mil en mil. Los múltiplos y divisores son:

Miriámetro cúbico	(Mm ³)	1 ² 000.000'000.000	metros cúbicos.
Kilómetro	íd. (Km ³)	1.000 ² 000.000	»
Hectómetro	íd. (Hm ³)	1'000.000	»
Decámetro	íd. (Dm ³)	1000	»
Metro	íd. (M ³)	1	
Decímetro	íd. (dm ³)	0'001	»
Centímetro	íd. (cm ³)	0'000.001	»
Milímetro	íd. (mm ³)	0'000.000.001	»

De capacidad para áridos y líquidos.

Miriálitro (Ml)	.. 10.000	litros	
Kilólitro (Kl)	... 1.000	»	(Se le llama también tonelada de arqueo.)
Hectólitro (Hl)	... 100	»	
Decálitro (Dl)	... 10	»	
Litro (L.)	... 1	»	
Decilitro (dl)	... 0'1	»	
Centilitro (cl)	... 0'01	»	
Mililitro (ml)	... 0'001	»	

Ponderales ó de peso.

Aunque ya hemos dicho que la unidad principal es el gramo, para los usos comerciales se admite como tal el Kilógramo por ser aquella excesivamente pequeña y se han aumentado dos múltiplos más, que son la tonelada y el quintal métrico.

Tonelada métrica (T _m ^a)	... 10 00	Kg ó	1'000.000	gramos
Quintal métrico (Q _m ^o ó qq)	10 0	» ó	100.000	íd.
Miriagramo (Mg)	... 10	» ó	10.000	íd.
Kilógramo (Kg)	... 1	» ó	1 000	íd.
Hectógramo (Hg)	... 0'1	» ó	100	íd.
Decágramo (Dg)	... 0'01	» ó	10	íd.
Gramo (G)	... 0'001	» ó	1	íd.
Decígramo (dg)	... 0'0001	» ó	0'1	íd.
Centígramo (cg)	... 0'00001	» ó	0'01	íd.
Milígramo (mg)	... 0'000001	» ó	0'001	íd.

De escasa importancia comercial, pero de frecuente uso en Farmacias y Droguerías son los divisores del gramo.

De numerario.

Las monedas sirven para facilitar los cambios de las cosas, representando un valor convencional. La división que se hace de ellas es en *efectivas, imaginarias, de cuenta y de cambio*. Efectivas son las monedas acuñadas con arreglo á las prescripciones legales. Imaginarias son las que no estando acuñadas tienen asignado un valor que se refiere al de aquellas que lo están.

Son de cuenta las usuales comunmente y de una manera oficial y de cambio las cartas órdenes, libranzas y demás documentos de crédito que facilitan las transacciones comerciales.

Los metales empleados para fabricar las monedas son: oro, plata, cobre y bronce.

Para dar consistencia al oro y la plata se les mezcla una cantidad determinada de cobre, denominándose *ley de aleación* la cantidad de metal puro que contienen expresada en milésimas.

Llámase *pie ó talla* al número de monedas que pueden sacarse de una barra de aleación del diámetro de aquellas y de un Kilógramo de peso. Se conceden sin embargo ciertos *permisos ó tolerancias* en razón á lo difícil que es obtener en la acuñación igual peso en todas las monedas.

Aunque en el D. de 19 de Octubre de 1868 se establecían las diversas clases de monedas que habrían de ser acuñadas, en virtud de modificaciones posteriores no se han puesto en circulación más que las siguientes:

METAL	VALOR de las monedas	PESO EN GRAMOS		DIÁMETRO en m/m
		Exacto	Tolerancia	
Oro.	100 ptas.	32'258	0'001	35
	25 »	8'0645	0'002	24
	5 »	25'000	0'003	37
Plata.	2 »	10'000	0'005	27
	1 »	5'000	0'005	23
	0'50 »	2'000	0'007	18
	0'10 »	10'100	0'01	30
Bronce.	0'05 »	5'000	0'01	25
	0'02 »	2'000	0'015	20
	0'01 »	1'000	0'015	15

SISTEMA ANTIGUO DE PESAS Y MEDIDAS

El defectuoso sistema que se ha venido siguiendo en España desde el 26 de Enero de 1801 hasta la implantación del métrico-de-

cimal, es el siguiente, salvo las modificaciones regionales de que no es posible tratar en esta clase de obras.

Medidas longitudinales.

Legua=1666 $\frac{2}{3}$ estadales. Estadal=4 varas. Vara=3 piés. Pié=12 pulgadas. Pulgada=12 líneas. Línea=12 puntos.

También se dividía la vara en 4 cuartas y estas en 12 dedos.

Patrón: la vara de Burgos.

Superficiales.

Fanega=1 $\frac{11}{25}$ aranzadas. Aranzada=8 $\frac{1}{3}$ celemines. Celemin=4 cuatro cuartillos. Cuartillo=12 estadales cuadrados. Estadal cuadrado=16 varas cuadradas. Vara cuadrada=9 piés cuadrados.

Cúbicas ó de volumen.

Tonelada de arqueo=8 codos cúbicos de rivera ó 70'189 piés cúbicos.

Vara cúbica=27 piés cubicos. Pié cúbico=1728 pulgadas cúbicas.

Dé capacidad para áridos.

Cahiz=12 fanegas. Fanega=12 celemines. Celemin=4 cuartillos. Cuartillo=4 ochavas.

Patrón: la media fanega de Avila.

De capacidad para líquidos.

Moyo=16 cántaras. Cántara=4 cuartillas. Cuartilla=2 azumbres. Azumbre=4 cuartillos. Cuartillo=4 copas.

Patrón: la cántara de Toledo.

Para aceite.

La arroba=25 libras. Libra=4 panillas. Panilla=4 onzas.

Ponderales:

Tonelada=4 quintales. Quintal=4 arrobas. Arroba=25 libras. Libra=16 onzas. Onza=8 dracmas. Dracma=2 adarmes. Adarme=3 tomines. Tomín=12 granos.

Para metales y piedras preciosas: Marco=8 onzas. Onza=8 ochavas. Ochava=6 tomines. Tomín.=3 quilates.

En las Farmacias: libra=12 onzas. Onza=8 dracmas Dracma=3 escrúpulos.

Patrón: el marco (media libra) del Consejo de Castilla.

Monetario.

Oro. Onza=320 reales, media onza=160 reales. Doblón=80 reales. Escudo=40 reales. Veinten=20 reales.

Plata: Peso fuerte ó duro=20 reales. Escudo=10 reales. Peseta columnaria=5 reales. Peseta ordinaria 4 reales. Media peseta columnaria=2 y $\frac{1}{2}$ reales. Media peseta ordinaria=2 reales. Real=34 maravedises.

Bronce: Medio real=17 maravedises. Dos cuartos=8 maravedises. Cuarto=4 maravedises, ochavo=dos maravedises. El *maravedí* puede considerarse como moneda imaginaria, pues apenas si tuvo circulación.

Principales equivalencias entre las unidades del sistema antiguo de pesas y medidas y el métrico decimal.

Los datos que á continuación insertamos, están tomados de los publicados oficialmente por la Comisión designada al efecto.

Unidades longitudinales.

1 Legua = 5572'705 metros (1)	1 Kilómetro=0'179446 leguas.
1 Estadal= 2'3436 »	1 metro =1'196308 varas.
1 Vara = 0'8359 »	3'58892 piés.
1 Pié =0'2786 »	1 centímetro= 0, 431 pugsds.
1 pulgds.=0'0232 »	»

Para cálculos de poca precisión se pueden tomar como equivalentes 6 varas y 5 metros, es decir que cualquier número de varas pueden reducirse á metros descontándole su sexta parte, y por el contrario cualquier número de metros se puede reducir á varas aumentándole su quinta parte.

Superficiales.

1 Vara cuadrada =	0'698737 m ²
1 Pié cuadrado =	0'07 763746 m ²
1 Fanega =	64'3956 Areas ó Dm ²
1 Celemin =	5'3663 Areas ó Dm ²
1 m ² =	1'431153 varas cuadradas.
1 Hectárea (Hm ²)=	1'5529 fanegas
1 Area =	143'11528 varas cuadradas.

De volumen:

1 vara cúbica=	0'584078 m ³ .	1 m ³ =	1'7121 varas cúbicas.
1 pié cúbico=	0'0216325 m ³ .		
1 codo » =	0'17306 m ³ .		
1 tonelada de arqueo=	2'518 m ³ .		

De capacidad

Para áridos.

1 fanega =	55'501 litros	Litro=	0'216212 celemines.
1 celemin=	4'625 »	℥	=1'801769 fanegas.

Para líquidos.

1 cuartillo=	0'5042 lits.	1 L =	1'98251 cuartillos.
1 cántara =	16'133 lits.		

Para aceite:

1 Libra =	0'503 lit.	1 L =	1'989977 libras.
-----------	------------	-------	------------------

(1) Esta medida itineraria puede computarse por 20.000 piés geométricos equivalentes á 5555'55 metros, siendo de 20 al grado.

1 arroba. = 12'563 litros.

Ponderales:

1 Libra = 460 gramos 1 Kilógramo = 2173'47 litros.
1 arroba = 11'502 kilgrms. 1 Ton.^a métr.^a = 21'734 qtles. castellanos
1 quintal = 46'009 Kilgrms. 1 quintal métrico = 2'173474 «
1 tonelada = 920'186 » 1 Gramo = 20'03074 granos.

CAPITULO 17.

NÚMEROS CONCRETOS

Según hemos dicho en la lección anterior, se llaman números concretos á aquellos cuya especie es determinada ó se nos da á conocer. Se dice que varios de estos números son homogéneos cuando pertenecen á la misma especie y son heterogéneos si su especie es diferente. Así 12 hombres, 15 hombres, y 27 hombres, son números homogéneos; 13 mesas, 20 bancos y 6 libros son números heterogéneos.

Se dividen los números concretos en complejos é incomplejos; en los primeros existen varios órdenes de unidades de la misma especie; en los incomplejos no hay más que un solo orden de unidades. Ejemplos: 24 arrobas, 3 libras y 9 onzas es un complejo de peso y 250 metros es un incomplejo de longitud; 7 cahices, 3 fanegas y 8 celemines es un complejo de medida y 238 fanegas es un incomplejo de igual especie.

Como en las operaciones con los números concretos no solo debemos atender á las reglas que para realizarlas llevamos conocidas sino también á la especie á que el resultado ha de pertenecer, se hace necesario en muchas ocasiones preparar los datos con que ha de operarse á fin de que siendo lo más sencillos posible no puedan dar lugar á errores. La preparación obedece á los siguientes principios.

1.º *Para transformar un incomplejo en otro de orden inferior se multiplica á aquel por el número de veces que sus unidades contienen á las del orden en que se quiere expresar, y para reducirle á otro de orden superior se le divide por el número de veces que sus unidades estén contenidas en el de aquel al cual le vamos á referir.*

Si queremos saber las onzas que tiene el incomplejo ($7\frac{1}{3}$) arrobas, observaremos que hemos de pasar por los órdenes libras y onzas, cuyas equivalencias, según sabemos son $\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ arbs.} = 25 \text{ lbs.} \\ 1 \text{ lbs.} = 16 \text{ onz.} \end{array} \right\}$ luego, siendo $1 \text{ arbs.} = 25 \times 16 \text{ onz.}$, las ($7\frac{1}{3}$) arbs. = $(7\frac{1}{3}) \times 25 \times 16 = 2880 \text{ onz.}$

Supongamos que se trate de averiguar el número de cahices que alcanzarán 396 celemines: para elevarse de este orden al de cahices ha de pasarse por los de fanegas y cahices, cuyos equivalentes son $\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ cel.} = \frac{1}{12} \text{ fanegas} \\ 1 \text{ fag.} = \frac{1}{12} \text{ de cahiz} \end{array} \right\}$ luego $1 \text{ cel.} = \frac{1}{12 \times 12} \text{ cahiz} = \frac{1}{144}$ cahiz y por consiguiente $396 \text{ cels.} = \left(396 \times \frac{1}{144} \right) \text{ cahiz} = \frac{396}{144} \text{ Ch.} = 2 \frac{108}{144} \text{ Ch.} = 2 \frac{3}{4} \text{ Ch.}$

2.º Para transformar un complejo en incomplejo de orden inferior, se reducen las unidades de cada orden á las de su inmediato inferior agregándole las que el número contenga de este y efectuando la misma operación hasta que se obtenga aquél en que ha de expresarse; pudiendo llegar también á igual resultado considerando cada orden de unidades como un incomplejo que se ha de reducir á la especie inferior conocida y sumando después los equivalentes obtenidos. Sea el complejo 3 arbs., 16 libs. y 9 onz. que queremos expresar en onzas, las dos formas que nos conducen al resultado deseado son las siguientes:

3	arbs.	}	3 arbs. = $3 \times 25 \times 16$ onz. = 1200 onz.	
á 25	libs.		16 libs. = 16×16 onz. = 256 onz.	
	75		libs.	+ 9 onz.
+	16			= 1465 onz.
	91		libs.	
á 16	onz.	}	3.º Para transformar un complejo de orden superior ó intermedio, se reduce á incomplejo del inferior y se divide por los equivalentes necesarios para llegar al orden que se desea obtener. Sean: 1.º reducir 3 cahices, 6 fanegas y 9 celemines á incomplejo de cahiz y 2.º expresar el número de horas que compondrán 3 días, 11 horas y 37 minutos.	
	546			
	91			
	1456		onz.	
+	9			
	1465	onz.		

En el ejemplo primero reduciremos los 3 cahices, 6 fanegas y 9 celemines á incomplejo de celemin y luego dividiremos por 12×12 que son los equivalentes necesarios para pasar del celemin al cahiz, en esta forma:

3 cahices = $3 \times 12 \times 12 = 432$ celems. más 6 fangs. = $6 \times 12 = 72$ celems., más los 9 que el número contiene que hacen en total 513 celems., que reducidos ahora á cahices serían $\frac{513}{12 \times 12} = \frac{513}{144} = 3 \frac{9}{16}$ cahices.

También puede plantearse así la operación:

$$3 \text{ ch. } 6 \text{ fangs. y } 9 \text{ celems.} = 3 + \frac{6}{12} + \frac{9}{12 \times 12} = 3 + \frac{6 \times 12}{12 \times 12} + \frac{9}{12 \times 12} = 3 + \frac{6 \times 12 + 9}{12 \times 12} = \frac{3 \times 12 \times 12 + 6 \times 12 + 9}{12 \times 12} = \frac{513}{144} = 3 \frac{9}{16}$$

En el segundo ejemplo: 3 días, 11 horas y 37 minutos = $(3 \times 24 + 11 + \frac{37}{60})$ horas = $83 \frac{37}{60}$ horas. Este mismo resultado habríamos obtenido reduciéndolo todo á minutos y dividiendo por 60 que es el equivalente en minutos de una hora.

4.º Para reducir un incomplejo á complejo de órdenes inferiores, cuando tiene la forma fraccionaria, se extraen los enteros que contenga, los cuales pertenecerán al orden del incomplejo, la fracción complementaria del cociente hallado se reducirá al orden inferior inmediato, averiguando después la parte entera que contenga que expresará unidades de este orden, y se continúa operando del mismo modo hasta llegar al orden inferior que queramos expresar, si antes no se ha obtenido un cociente exacto. Supongamos que deseamos investigar las arrobas, libras y onzas contenidas en la fracción $\frac{11}{7}$ de arroba, se procederá del modo siguiente:

11 arbs.	7	Luego $\frac{11}{7}$ arbs. = 1 arbs. 14 libs. y $4\frac{1}{7}$ onzas.
4	1 arbs.	
à 25 libs.	7	5.º Para trasformar un incomplejo en complejo de órdenes superiores se le divide sucesivamente por las unidades de cada orden que equivalen á una del inmediato superior, siendo los restos de las divisiones que realicemos los representantes del orden de que provienen.
100 libs.	14 libs.	
30	7	
2 libs.	7	
à 16 onzas	4 onzas	
32 onzas		
4 »		

Así al querer expresar el incomplejo 923 cuartillos en complejo de órdenes superiores, habría que efectuar las operaciones siguientes:

923 cuarts.	4 (cuarts. que tiene la azumbre)	
12	230 azumbres	8 (azumbres que tiene la cántara)
03 cuarts.	70	28 cántaras
	6 azumbres	12 cántaras
		1 moyo

luego 923 cuartillos = 1 moyo, 12 cántaras, 6 azumbres y 3 cuartillos.

Transformaciones con los números métricos decimales.

Adaptándose estos al sistema de numeración ofrecen gran ventaja para la práctica de sus transformaciones, que vamos á considerar en las reglas siguientes:

1.^a Para expresar unidades de longitud, peso ó capacidad en otras de orden inferior se correrá la coma tantos lugares á la derecha como grados se desciende en la escala de las denominaciones, agregando los ceros que sean necesarios. Recíprocamente: Para expresar en unidades de orden superior otras de peso, longitud ó capacidad dadas, se correrá la coma á la izquierda tantos lugares como grados se avancen en la mencionada escala.

Ejemplos:

1.º Reducir á centilitros 2'9 Hl. $\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ Hl.} = 10 \text{ Dc.} \\ 1 \text{ Dl.} = 10 \text{ l.} \\ 1 \text{ L.} = 10 \text{ dl.} \\ 1 \text{ DL.} = 10 \text{ cl.} \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{luego } 2'9 \text{ Hl.} \\ = 29000 \text{ cen-} \\ \text{tilitros.} \end{array} \right.$

2.º Expresar en Kms: 27386'25 ms. $\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ Km.} = 10 \text{ Hm.} \\ 1 \text{ Hm.} = 10 \text{ Dm.} \\ 1 \text{ Dm.} = 10 \text{ m.} \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{luego} \\ 27386'25 \text{ ms.} \\ = 27'38625 \\ \text{Kilómetros.} \end{array} \right.$

3.º Que número de Kgs. compondrán 14983 gs. 1 Kg. = 1000 g. luego 14983 gs. = 14'983 Kgs.

2.^a Verificándose el crecimiento ó descenso en las unidades superficiales de 100 en 100 y de las cúbicas de 1000 en 1000, para expresar en su orden inferior ó superior cualquier número de unidades de superficie ó volúmen habrá que correr la coma á la derecha ó á la izquierda tantas veces dos ó tres lugares como grados se descienda ó avance en la escala de las denominaciones.

Ejemplos:

Cuántos metros superficiales constituirán 72'5 Hm.². $\left. \begin{array}{l} 72'5 \text{ Hm.}^2 = 725000 \text{ m.}^2 \\ 1 \text{ Hm.}^2 = 100 \text{ Dm.}^2 \\ 1 \text{ Dm.}^2 = 100 \text{ m.}^2 \end{array} \right\}$

Que número de metros cúbicos tendrán 75283 cm.³. $\left. \begin{array}{l} 75283 \text{ cm.}^3 = 0'075283 \text{ m.}^3 \\ 1 \text{ m.}^3 = 1000 \text{ dm.}^3 \\ 1 \text{ dm.}^3 = 1000 \text{ cm.}^3 \end{array} \right\}$

3.^a Las unidades de longitud, peso y capacidad que se presentan en forma compleja se reducen á incomplejo escribiendo unas á continuación de otras las cifras que manifiestan sus diversos órdenes y poniendo la coma á la derecha de la que exprese aquél al que ha de referirse el incomplejo, después de colocar ceros en los órdenes intermedios que carezcan de representación. Ejemplos:

8 Kg., 6 Dg., 8 g. y 5 cg. qué gramos contendrán? puede observarse que faltan los órdenes de hectogramos y decigramos, luego

poniendo ceros en su lugar y la coma después de los gramos, el número de estos será 8 968,05; qué número de metros constituirán 3 Km., 2 Hm., 8m., 9 nm. y 6 cm. ?faltan los decímetros y decímetros, que sustituidos con ceros dan 3208'096 ms.

4.^a Las unidades superficiales y cúbicas que se presenten en forma compleja se reducen á incomplejo escribiendo las cifras á continuación unas de otras si por cada orden superficial hay dos y por cada uno de los cúbicos tres, ó completando estas con los ceros necesarios y poniendo la coma en el lugar correspondiente á la denominación del incomplejo.

Ejemplos: ¿Cuántos metros cúbicos compondrán 6 Hm.³, 28 Dm.³, 513 dm.³ y 72 cm.³? Observemos que en los decímetros falta una cifra, en los metros tres, y en los centímetros una, luego poniendo los ceros, serán 6028000'513072 m.³, ¿Qué metros superficiales compondrán 28 Hm.², 5 Dm.², 3 m.², 17 dm.² y 5 cm.²? falta una cifra en los decímetros, metros y centímetros, supliéndolas con ceros, serán: 280503'1705 m.²

5.^a Se reduce á complejo un incomplejo de longitud, peso ó capacidad separando sus unidades de diversos órdenes y asignándolas la denominación correspondiente.

Así: 32728'45 m. = 3 Mm. 2 Km. 7 Hm. 2 Dm. 8 m. 4 dm. y 5 cm.
2469'53 litros. = 2K. 4 Hl. 6 Dc. 9 l. 5 dl. y 3 cl.

6.^a Se reducen á complejo los incomplejos superficiales ó de volumen separando agrupaciones de dos ó tres cifras y dándolas la denominación correspondiente á su orden.

Así: 589624'635892 m³ = 589 Dm³, 624 m³, 635 dm³ y 892 cm³.
269042806'24 m² = 2 Mm², = 69 Km², 4 Hm², 28Dm², 6m² y 24 dm².

OPERACIONES CON LOS NÚMEROS CONCRETOS

Adición. Siendo la homogeneidad el caracter distintivo de la suma, es aquí aplicable cuanto acerca de esta operación hemos dicho antes al tratar de los números enteros y fraccionarios.

Los sumandos pueden estar expresados en forma compleja ó incompleja, siendo siempre posible reducirlos á incomplejo del orden en que se desee la suma; pero cuando esta condición no sea precisa se conservan en la forma en que se den, procediendo con arreglo á la siguiente regla práctica:

Para sumar números concretos se colocan unos debajo de otros, de modo que sus diferentes especies de unidades ofrezcan regularidad en cuanto á su colocación, se principia la operación por la columna de clase inferior, extrayendo de la suma de cada columna las unidades que resulten del orden inmediato supe-

rior que se conservan para agregárselas oportunamente y escribiendo debajo de aquella las sobrantes de dicha extracción, procediendo de la misma manera hasta haber sometido á la operación los diferentes órdenes de unidades contenidos en los sumandos.

La operación se dispone de este modo:

	(1)	(1)	2358'45 metros
24 días	8 horas	7' 15''	32'346 «
	3 «	42' 19''	728'265 «
6 «	2 «	26' 34''	64'43 «
<hr/>			
30 días	14 horas	(76) (68)	3183'491 metros
		16' 8''	

Sustracción.

El caracter especial de esta operación consiste en descomponer un número concreto (minuendo) en dos partes homogéneas con aquél y entre sí (sustraendo y resto ó diferencia).

Los términos de la sustracción pueden estar expresados en forma compleja ó incompleja, pero siempre es factible su reducción á incomplejos del orden en que se quiera la diferencia; no obstante si se desea conservar la forma compleja, puede aplicarse la siguiente regla:

Para restar dos números concretos se coloca el sustraendo debajo del minuendo cuidando que se correspondan las unidades de cada orden, se restan estos empezando por el inferior, como si fueran abstractos, y si en alguna de estas operaciones fuera el sustraendo mayor que el minuendo, se toma una unidad del orden inmediato superior descomponiéndola en sus equivalentes del que se considera, teniendo presente que hemos de disminuir dicha unidad al operar en su respectiva columna. Ejemplos:

24 quintales 2 arbs. 17 libs. 9 onzas	}	684,35 Kgs.
— 15 « 3 « 20 « 6 «	}	— 96'418 «
<hr/>		
8 « 2 « 22 « 3 «	}	587'932 «

30 días — $19\frac{3}{4}$ días = 30 días — (19 días y 18 h.) = 10 días y 6 horas.

Multiplicación. Esta operación referida á los números concretos se propone hallar el equivalente de cierto número de unidades, conociendo el de una unidad y el número de estas. Es claro que para llevar á cabo la operación no hay más que recordar que el producto se forma del multiplicando, como el multiplicador se compone de la unidad, de lo cual resulta que el multiplicando debe ser siempre el equivalente de la unidad conocida,

pues á su especie ha de referirse el producto, y el multiplicador es el número de unidades expresado en incomplejo del orden á que pertenezca la unidad dada.

Por no hacer más complicada esta operación, que en sí es sencilla, no vamos á considerar los casos de multiplicar incomplejos ó complejos, pues reducidos á incomplejos sus términos siempre es posible transformar el producto en complejo someténdole á los principios que ya nos son conocidos.

Razonemos la multiplicación en este ejemplo: Por una fanega de trigo nos ofrecen 3 arbs., 6 libs. y 9 onzas de garbanzos, qué cantidad de estos nos darán por 3 cahices, 4 fanegas y 8 celemines? Siendo 3 arbs., 6 libs. y 9 onzas el equivalente de la unidad actuará de multiplicando y el multiplicador será 3 cahices, 4 fanegas y 8 celemines reducido á incomplejo de fanega que es la especie correspondiente á la unidad. El multiplicando puede reducirse á incomplejo de onza y la operación se indicará y realizará del modo siguiente:

$$(3 \text{ arbs. } 6 \text{ libs. } 9 \text{ onzas})(3 \text{ cahs. } 4 \text{ fags. } 8 \text{ clms.}) = 1305 \text{ onzas } \frac{488}{12}$$

$$= \frac{1305 \cdot 488}{12} \text{ onzas} = \frac{636840}{12} \text{ onzas} = 398 \text{ qqs. } 2 \text{ libs. } 8 \text{ onzas.}$$

La costumbre generalizada de tomar en la práctica como multiplicando el número de unidades y como multiplicador el equivalente de una, se basa en que siendo conocida la especie del producto, se consideran los factores como números abstractos en los que sabemos que el orden en que se tomen no afecta al valor ni á la especie del producto. Así cuando deseamos saber cuánto valdrán 835'400 Kgrams de una sustancia cualquiera cuyo precio es 1'45 ptas. el Kg^o. se suele tomar como multiplicando el número de Kilogramos, no debiendo ser así, pues el producto y el multiplicando han de ser homogéneos, pero sabemos desde luego que el valor de los citados Kilogramos ha de ser un número de pesetas y céntimos que lo mismo puede obtenerse multiplicando 835'400 \times 1'45 que 1'45 por 835'400, aunque esta segunda forma sea la racional.

División.

Dos problemas podemos resolver en la división de concretos, el primero, inverso del que hemos estudiado en la multiplicación, se propone darnos á conocer el equivalente de una unidad, cuando sabemos el de varias y el número de ellas; el segundo, derivado también de aquél, nos facilita el medio de hallar las unidades á que equivale un valor dado sabiendo el precio de una unidad.

En el primero como en el segundo es dividiendo el equivalente de las varias unidades, el divisor en el primero es el número de unidades, mientras que en el segundo es el equivalente de una unidad y puede fundamentarse el razonamiento en ambos casos considerando esta operación como inversa de la anterior y relacionando el producto que hace de dividendo, con el divisor y cociente que son sus factores.

Vamos á realizar algunos ejemplos de las dos clases.

1.º Hemos adquirido en 342'20 ptas. 236 metros de tela; á qué precio nos habrá resultado el metro? Se comprende que 342'20 ptas. equivalente de los 236 metros ha de ser el dividendo y este último número el divisor y que la operación se reducirá á hallar el cociente (342'20 : 236), que és 1'45.

2.º Si por 3 arbs., 4 libs. y 8 onzas de una sustancia nos han dado 6 moyos, 9 cántaras y 3 cuartillas de líquido ¿cuánto corresponderá á 1 libra?

El dividendo será 6 moyos, 9 cántaras y 3 cuartillas, el divisor 3 arbs., 4 libs. y 8 onzas expresado en incomplejo de la unidad libra y el cociente será el valor de esta. La operación se dispone y efectúa de este modo:

(6 moyos, 9 cántaras y 3 cuartillas):(3 arbs. 4 libs. y 8 onzas)=
 423 cuartillas: $\frac{1304}{16}$ libs. = $\frac{423 \times 16}{1304}$ cuartillas = $5 \frac{31}{163}$ cuartillas = 1
 cántara 1 cuartilla y $\frac{85}{163}$ cuartillas.

PASAR DE LA CAPACIDAD AL VOLUMEN Ó AL PESO.

Al tratar de los números métrico decimales, dijimos que el litro era un cubo cuya arista era el decímetro, cualquier número de litros de capacidad equivaldrá á igual número de decímetros cúbicos y por lo tanto un metro cúbico será la capacidad de mil litros es decir un kilómetro.

Esta sencilla relación nos permite resolver con suma sencillez los problemas de la capacidad refiriéndolos al volumen, ó inversamente el volumen de una basija de capacidad conocida.

Si tuviéramos un tonel cuyo volumen fuera 11'64 m³ y deseáramos saber el número de litros que podía contener bastaría convertir á aquel en dm³ para lo cual no hay mas que suprimirle la coma y agregarle un cero y el número resultante 11640 resolvería la cuestión.

El gramo decíamos que era lo que pesaba en el vacío un centímetro cúbico de agua á 4º, centígrado, que es cuando el agua alcanza el máximo de densidad, y como un dm.³=1000 cm.³, el

peso de 1 dm.³ de agua será aproximadamente 1 kilogramo y el de 1 m.³ 1000 kilogramos ó sea una tonelada.

Para iguales volúmenes la relación entre el peso de un cuerpo y el del agua se llama *densidad* de dicho cuerpo. Si pues representamos por p y por v el peso y el volumen del agua, sabemos que

$\frac{p}{v} = 1$, llamando P al peso de otro cuerpo V á su volumen y D á su

densidad $\frac{P}{V} = D$, de donde se deduce que $P = V \cdot D$, es decir que el peso de un cuerpo es el producto del volumen expresado en cm.³ por la densidad expresada en gramos. De la relación anterior también se deduce que $\frac{P}{D} = V$, esto es, que el cociente de dividir el peso de un cuerpo cualquiera por su densidad, expresados ambos en gramos, dá el volumen del mismo en centímetros cúbicos.

CAPITULO 18.

RAZONES Y PROPORCIONES.

Se llama *razón* la relación que liga á dos cantidades de la misma especie ó al cociente indicado de su división. La primera de dichas cantidades se llama antecedente, la segunda consecuente y ambas términos de la razón.

Se expresa una razón escribiéndola en forma de fracción ó cociente, poniendo como dividendo ó numerador el antecedente y como divisor ó denominador el consecuente. Así $\frac{A}{B}$ ó $A : B$, son razones y se léen A. es á B.

Teorema I.º *La relación que liga á dos magnitudes de la misma especie es igual á la que existe entre los números que las miden cuando se comparan con una tercera tomada como unidad.* Sean P , y Q dos magnitudes, elijamos U . para su medida y sean p . y q . los números que expresan las veces que U . está contenida respectivamente en aquellas.

Toda magnitud es igual á la unidad de su especie multiplicada por su medida, así, una pieza de tela siempre será igual á la longitud del metro por el número que indique las veces que éste se halla contenido en aquella.

Luego serán $\left\{ \begin{array}{l} P. = U. p. \\ Q. = U. q. \end{array} \right\}$ y dividiendo miembro á miembro las dos igualdades: $\frac{P}{Q} = \frac{U.p}{U.q}$ y simplificando esta segunda fracción $\frac{P}{Q} = \frac{p}{q}$, que demuestra la proposición.

Para obtener una razón igual á otra conocida basta multiplicar ó dividir los términos de esta por una misma cantidad.

Cuando varias razones tienen un mismo valor sin que sus términos sean idénticos se dice que forman una série de razones iguales. Así: $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{E}{F} = \frac{G}{H} = \dots$ son una série de razones iguales en a; y se verifica constantemente que $\frac{A+C+E+G}{B+D+F+H} = \frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{E}{F} = \dots$

lo que traducido al lenguaje vulgar nos dice, que *en toda série de razones la suma de antecedentes guarda con respecto á la de los consecuentes la misma relación que cualquiera antecedente con su consecuente.*

La igualdad de dos razones forma una proporción, (1) llamada también igualdad fraccionaria por la manera de representarla, pues se suele escribir $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, si bien muchos autores conservan la costumbre de unir las razones por medio de cuatro puntos, simétricos dos á dos, de este modo A:B::C:D. En ambos casos se lee *A es á B como C es á D*, ó *A partido por B igual á C partido por D.*

Cualquiera que sea la forma que se adopte para representar las proporciones se denominan términos *extremos* el antecedente de la primera razón y el consecuente de la segunda y *medios* el consecuente de la primera y el antecedente de la segunda. En las proporciones: $\frac{45}{5} = \frac{36}{4}$ ó 45:5::36:4, 45 y 4 son los extremos y 5 y 36 los medios.

Cuando los medios son iguales la proporción se llama *continua* y el término igual *medio proporcional*. En la proporción: 40:20::20:10, 20 es el medio proporcional entre 40 y 10. La proporción continua se escribe abreviadamente $\frac{40}{20} = \frac{20}{10}$, que se lee *como 40 es á 20 es á 10.*

Teorema 2.º *En toda proporción ó igualdad fraccionaria el producto de los términos extremos es igual al de los medios.* Sea la proporción $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$, reduzcamos las dos razones á un denominador común y se transformará en $\frac{a.n}{b.n} = \frac{b.m}{b.n}$ y como cuando dos fracciones iguales tienen el mismo denominador la igualdad de sus numeradores es evidente; $a.n = b.m$, nos prueba el enunciado.

Recíprocamente. *Si cuatro números son tales que el producto de dos de ellos es igual al de los otros dos, con ellos puede formarse*

(1) Algunos autores la designan también con el nombre de *equicoeficiente* ó proporción geométrica y llaman proporción aritmética ó *equidiferencia* á la igualdad de dos diferencias.

una proporción ó igualdad fraccionaria. (1) En efecto si $14 \times 3 = 7 \times 6$, dividiendo los dos miembros de la igualdad por 7×3 , se verificará que $\frac{14 \times 3}{7 \times 3} = \frac{7 \times 6}{7 \times 3}$ y simplificando ambas fracciones. $\frac{14}{7} = \frac{6}{3}$ nos dá la proporción.

Consecuencias. 1.^a Que aunque se cambien de lugar los términos de una proporción ésta subsistirá siempre que se verifique la igualdad del producto de extremos y el de medios.

2.^a Que en la proporción continua el producto de los extremos es igual al cuadrado del término medio.

3.^a Que un extremo será siempre igual al producto de medios dividido por el otro extremo. Porque siendo en la proporción $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$, $a \cdot n = b \cdot m$; $a = \frac{b \cdot m}{n}$ ó $n = \frac{b \cdot m}{a}$.

4.^a Que un medio será siempre igual al cociente de dividir por otro medio al producto de los extremos. Pues siendo $a \cdot n = b \cdot m$. $b = \frac{a \cdot n}{m}$ y $m = \frac{a \cdot n}{b}$.

5.^a Que en la proporción continua un extremo será igual al cociente de dividir el cuadrado del término medio por el otro extremo, y el medio es igual á la raíz cuadrada del producto de los extremos. En efecto siendo $\frac{a}{m} = \frac{m}{b}$, es evidente que $m^2 = a \cdot b$ y $m = \sqrt{a \cdot b}$ ó $a = \frac{m^2}{b}$ y $b = \frac{m^2}{a}$.

La operación de cambiar de lugar los medios de una proporción se llama *alternar* y no varía el valor de aquella y denominamos invertir al acto de pasar los antecedentes á consecuentes y estos al lugar de aquellos. Alternando é invirtiendo en orden sucesivo, se pueden deducir de una proporción, ocho iguales.

Sea: $14 : 7 :: 6 : 3$

alternando $14 : 6 :: 7 : 3$	al invertir esta última se obtiene la primera. Obsérvese que en todas ellas se verifica que $14 \times 3 = 7 \times 6$.
invirtiendo $6 : 14 :: 3 : 7$	
alternando $6 : 3 :: 14 : 7$	
invirtiendo $3 : 6 :: 7 : 14$	
alternando $3 : 7 :: 6 : 14$	
invirtiendo $7 : 3 :: 14 : 6$	
alternando $7 : 14 :: 3 : 6$	
alternando $7 : 14 :: 3 : 6$	

Teorema 3.^o Una proporción en la que sea fraccionario alguno de los términos, se podrá expresar en forma entera suprimiendo el denominador de aquél y multiplicando á los demás por dicho denominador.

(1) En adelante prescindiremos del nombre de igualdad fraccionaria aunque lo es perfectamente aplicable cuanto acerca de las proporciones vamos á decir

En efecto, esta operación equivale á multiplicar por un mismo número las razones que forman la proporción, con lo cual esta no varía porque aquellas tampoco sufren alteración. Así $a : \frac{b}{c} : : m : n$, se transforma en $a \cdot c : b : : m \cdot c : n \cdot c$.

Teorema 4.º Si multiplicamos ordenadamente los antecedentes y consecuentes de dos proporciones, los productos obtenidos guardan proporción.

Sean $\left\{ \begin{array}{l} 8 : 4 : : 22 : 11 \\ 24 : 6 : : 12 : 3 \end{array} \right\}$ ó $\left\{ \begin{array}{l} \frac{8}{4} = \frac{22}{11} \\ \frac{24}{6} = \frac{12}{3} \end{array} \right\}$ multiplicando miembro á miembro estas dos igualdades resulta una nueva igualdad, en la que $\frac{8}{4} \cdot \frac{24}{6} = \frac{22}{11} \cdot \frac{12}{3}$, es decir, $\frac{8 \times 24}{4 \times 6} = \frac{22 \times 12}{11 \times 3}$, ó $8 \times 24 : 4 \times 6 : : 22 \times 12 : 11 \times 3$, ó sea $192 : 24 : : 264 : 33$ que es verdadera.

Corolario 1.º Si se dividen ordenadamente los antecedentes y consecuentes de dos proporciones los cocientes guardan proporción.

Vimos antes que $\left\{ \begin{array}{l} \frac{8}{4} = \frac{22}{11} \\ \frac{24}{6} = \frac{12}{3} \end{array} \right\}$ en las que dividiendo $\frac{8}{4} : \frac{24}{6} = \frac{22}{11} :$

$\frac{12}{3}$ ó $\frac{8 : 24}{4 : 6} = \frac{22 : 12}{11 : 3}$ y también $\frac{8 \times 6}{4 \times 24} = \frac{22 \times 3}{11 \times 12}$.

Corolario 2.º Formando cuatro números proporción, sus potencias ó raíces de igual grado también la formarán. En efecto,

siendo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{c}{d}\right)^m$, es decir $\frac{a^m}{b^m} = \frac{c^m}{d^m}$, ó $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{\frac{c}{d}}$ que es lo

mismo que $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{d}}$.

Teorema 5.º Si dos proporciones tienen una razón común con las otras dos razones puede formarse proporción.

Sean $\left\{ \begin{array}{l} 8 : 4 : : 22 : 11 \\ 22 : 11 : : 30 : 15 \end{array} \right\}$ ó $\left\{ \begin{array}{l} \frac{8}{4} = \frac{22}{11} \\ \frac{22}{11} = \frac{30}{15} \end{array} \right\}$ como dos cosas iguales á una tercera lo son entre sí, $\frac{8}{4} = \frac{30}{15}$, según quería demostrarse.

Corolario. Cuando los antecedentes ó consecuentes de dos proporciones son iguales, con los otros términos se forma proporción.

Sean: $\left\{ \begin{array}{l} 72 : 9 : : 32 : 4 \\ 45 : 9 : : 20 : 4 \end{array} \right\}$ alternando en ambas, se convierten en

{ 72 : 32 :: 9 : 4 } de donde, según lo demostrado en el teorema
 { 45 : 20 :: 9 : 4 } anterior, 72 : 32 :: 45 : 20. Si las proporciones
 hubieran sido: { 75 : 25 :: 24 : 8 } alternando { 75 : 24 :: 25 : 8 }
 { 75 : 15 :: 24 : 4'8 } en las dos: { 75 : 24 :: 15 : 4'8 }
 de donde se obtiene 25 : 8 :: 15 : 4'8.

Teorema 6.º En toda proporción se verifica que la suma ó diferencia del antecedente y consecuente de la primera razón es á la suma ó diferencia de iguales términos de la segunda, como el antecedente ó consecuente de la primera son al antecedente ó consecuente de la segunda. Sea la proporción

$\frac{72}{9} = \frac{32}{4}$, sabemos que sumando ó restando una misma cantidad á los dos miembros de una igualdad esta no altera, luego $\frac{72 \pm 9}{9} = \frac{32 \pm 4}{4}$ y efectuando las operaciones indicadas: $\frac{72 \pm 9}{9} = \frac{32 \pm 4}{4}$,

en las que alternando: $\frac{72 \pm 9}{32 \pm 4} = \frac{9}{4}$ y como en la proporción primera,

después de alternar se tiene $\frac{72}{32} = \frac{9}{4}$, vemos que $\frac{72 \pm 9}{32 \pm 4} = \frac{72}{32} =$

$\frac{9}{4}$, que demuestra el enunciado.

Corolario. En toda proporción la suma ó diferencia de los antecedentes partida por la suma ó diferencia de los consecuentes es igual á un antecedente partido por su consecuente. En efecto, en

la proporción $\frac{32}{8} = \frac{16}{4}$, alternando $\frac{32}{16} = \frac{8}{4}$ y según lo demostrado en el teorema precedente $\frac{32 \pm 16}{8 \pm 4} = \frac{32}{8} = \frac{16}{4}$, que prueba la proposición.

Consecuencia. Tanto en el teorema anterior como en el corolario puede observarse que si separamos la suma de la diferencia y se alterna después la proporción que resulta de igualarlas, se obtendrá 1.º que la suma de antecedente y consecuente de la primera razón es á su diferencia, como la suma de antecedente y consecuente de la segunda es á su diferencia; porque siendo

$\frac{72 \pm 9}{32 \pm 4} = \frac{72}{32}$ { $\frac{72+9}{32+4} = \frac{72}{32}$ } que forman la proporción $\frac{72+9}{32+4} = \frac{72-9}{32-4}$, en la
 $\frac{72-9}{32-4} = \frac{72}{32}$ { $\frac{72-9}{32-4} = \frac{72}{32}$ } que alternando se tiene $\frac{72+9}{72-9} = \frac{32+4}{32-4}$, 2.º que

la suma de antecedentes es á su diferencia como la suma de consecuentes es á la suya, pues por ser $\frac{32 \pm 16}{8 \pm 4}$ separable en las dos

proporciones $\left\{ \begin{array}{l} \frac{32+16}{8+4} = \frac{32}{8} \\ \frac{32-16}{8-4} = \frac{32}{8} \end{array} \right\}$ será: $\frac{32+16}{8+4} = \frac{52-16}{8-4}$ y alternando: $\frac{52+16}{32-16} = \frac{8+4}{8-4}$

Los valores que hemos sometido á las transformaciones de la proporcionalidad dependen constantemente de las magnitudes en que se originan, y para establecerlos es preciso conocer de antemano el sentido de dicha proporcionalidad.

Se dice que dos magnitudes son directamente proporcionales, cuando varían en la misma relación, es decir, que el crecimiento ó disminución de la una supone alteraciones iguales en la otra, por ejemplo: las distancias recorridas por dos móviles, en un mismo tiempo, son directamente proporcionales á sus velocidades, porque el de mayor velocidad recorrerá mayor distancia. La obra realizada, en un tiempo determinado, es directamente proporcional al número de operarios que á ella se dedican, porque mayor número de operarios producirán mayor trabajo. Por el contrario, dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando varían en sentido contrario, es decir, que el aumento de la una lleva consigo el decrecimiento de la otra. Por ejemplo: Para un mismo espacio, los tiempos empleados por dos móviles en recorrerle son inversamente proporcionales á sus velocidades; porque á mayor velocidad corresponderá menor tiempo invertido en el recorrido. Para una obra determinada, el número de obreros que la realizan es inversamente proporcional al tiempo que en hacerla inviertan, porque aumentando los obreros tardarán menos tiempo en concluirla.

Llamamos valores simultáneos de dos magnitudes á los que se verifican al mismo tiempo; cada serie de valores simultáneos de dos ó varias magnitudes propias pueden provenir de comparaciones distintas.

La demostración científica de los principios antes enunciados para reconocer el sentido de la proporcionalidad, se explica en el teorema siguiente.

Teorema 7.º *Cuando dos magnitudes son directamente proporcionales, se reconoce, en que al multiplicar un valor de una de ellas, por cualquier número, su simultáneo de la otra queda también multiplicado por el mismo número, y si aquellas son inversamente proporcionales y al valor de una de ellas se le multiplica por un número su simultáneo de la otra magnitud queda dividido por el mismo número.*

Sean A y B dos magnitudes a' y a'' dos valores de la primera que se verifican simultáneamente con los b' y b'' de la otra,

siendo aquellas directamente proporcionales se podrá establecer que $\frac{a''}{a'} = \frac{b''}{b'}$ y si suponemos que $\frac{a''}{a'} = m$, ó que $a'' = a'.m$, $\frac{b''}{b'}$ también será igual á m y por consiguiente $b'' = b'.m$.

Pero si suponemos que fueran las magnitudes inversamente proporcionales la relación sería $\frac{a''}{a'} = \frac{b'}{b''}$ y si $\frac{a''}{a'} = m$ ó $a'' = a'.m$, $\frac{b'}{b''} = m$ ó $b' = b''.m$ y $b'' = b':m$.

El recíproco del anterior teorema es cierto, porque si:

$$\left. \begin{array}{l} a'' = a'.m \\ b'' = b'.m \end{array} \right\} \frac{a''}{a'} = m \quad \left\{ \frac{a''}{a'} = \frac{b''}{b'} \text{ y por el contrario, siendo } \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} a'' = a'.m \\ b'' = b':m \end{array} \right\} \frac{a''}{a'} = m \quad \left\{ \frac{a''}{a'} = \frac{b'}{b''}; \text{ que dá á conocer en los dos ca-} \right.$$

sos que las magnitudes varían en la misma relación ó en relación distinta siendo directa ó inversamente proporcionales.

Las relaciones $\frac{a''}{a'} = \frac{b''}{b'}$ transformable en $\frac{a''}{b''} = \frac{a'}{b'}$ y la $\frac{a''}{a'} = \frac{b'}{b''}$ en la que $a''.b'' = a'.b'$ nos dicen que en las magnitudes directamente proporcionales la relación entre los valores simultáneos es constante y en las inversamente proporcionales el producto de dichos valores simultáneos es también constante.

Regla de tres.

Entre las más importantes aplicaciones de la proporcionalidad figura indudablemente la que con el nombre de *regla de tres* ó *de oro* se dá á conocer en las aritméticas y tratados de cálculos mercantiles.

El objeto de esta regla es la resolución de los problemas relativos á las magnitudes proporcionales.

Se divide en *simple* y *compuesta*, según que sean dos ó más de dos las especies que se relacionan, en el primer caso basta para solucionar las cuestiones una sola proporción, en la segunda hay que plantear dos ó más proporciones.

Debe su nombre á que se dan conocidas tres cantidades para hallar la cuarta (incógnita ó desconocida) en función de aquellas.

La regla de tres simple se subdivide en *directa* ó *inversa*, conforme á la especie de proporcionalidad que una á las magnitudes.

Teorema 1.º *En toda regla de tres simple directa, el valor des-*

conocido de una magnitud se obtiene multiplicando el valor conocido de la misma por la relación que existe entre el nuevo valor y el que antes tenía la otra magnitud.. Sabemos que cuando dos magnitudes M y N son directamente proporcionales la relación entre sus valores simultáneos es constante. Bajo tal hipótesis si llamamos m' y n' dos de dichos valores y queremos hallar el correspondiente á M, cuando n' cambia en n'' , representándole por x , se puede establecer que $\frac{x}{m'} = \frac{n''}{n'}$ en cuya proporción: $x = m' \cdot \frac{n''}{n'}$, conforme al enunciado.

Teorema. 2.º En toda regla de tres simple inversa, el valor desconocido de una magnitud se obtiene multiplicando el valor conocido de la misma por la relación que existe entre el valor que antes tenía y el actual de la otra magnitud. Cuando dos magnitudes P y Q son inversamente proporcionales el producto de sus valores simultáneos es constante, si pues representamos por p' y p'' los valores de la primera y q' y q'' los de la segunda, se verificará que $p'q' = p''q''$ x y en esta igualdad $x = \frac{p'q'}{q''} = q'' \frac{p'}{p''}$, según hemos dicho en el enunciado.

Ejemplos. Una locomotora recorre 15000 metros en 60' cuánto tardará en atravesar una distancia de 2000 metros? Para espacio ilimitado y velocidad constante el camino recorrido es directamente proporcional al tiempo empleado, luego $\left\{ \begin{array}{l} 15000 \\ 2000 \end{array} \right\} = \frac{60'}{x}$, de donde $x = 60' \cdot \frac{2000}{15000} = 8'$

45 obreros tardan 90 días en realizar una cierta obra, empleando 60 obreros ¿cuánto tiempo tardarían en hacer otra obra igual? Para un trabajo determinado los hombres y el tiempo están en relación inversa, luego $\frac{45}{60} = \frac{x}{90} \left\{ x = 90 \cdot \frac{45}{60} = 67 \text{ d y } 12 \text{ h.} \right.$

Hay otro procedimiento para resolver los problemas de la regla de tres, conocido con el nombre de *método de reducción á la unidad*, fundado en que cuando está determinado el valor de una unidad es fácil de averiguar el de un número cualquiera de unidades homogéneas con aquella. De la manera de proceder en él nos dará idea la resolución de los problemas siguientes:

1.º Si 10 obreros fabrican en una semana 85 cajas ¿cuántas harán 25 obreros en igual tiempo?

Resolución: Si 10 obreros hacen 85 cajas, un obrero en el mismo periodo de días hará $\frac{85}{10}$ cajas y 25 obreros harán $\frac{85}{10} \times 25 = 212$ cajas y media.

Sabiendo que 22 hombres han tardado 20 días en realizar un trabajo determinado, averiguar el número de días que tardarán 8 hombres en hacer otro trabajo igual.

Si 22 hombres tardan 20 días, un hombre tardará 20 veces más, esto es 22×20 días y 8 hombres emplearán $\frac{22 \times 20}{8}$ días = 55 días.

La regla de tres compuesta se aplica á la resolución de problemas en que entran más de dos especies proporcionales.

Para resolverla desde luego basta examinar si la proporcionalidad que liga á la especie de la incógnita con las otras dadas es directa ó inversa, multiplicando el valor conocido de la especie de la incógnita por las relaciones de los nuevos valores á los que antes tenían las magnitudes directamente proporcionales y de los valores anteriores á los nuevos las inversamente proporcionales.

Ejemplo: 16 hombres en 29 días han abierto una zanja de 124 metros de longitud por 9 de profundidad y 4 de ancho; se desea saber los días que tardarán 20 hombres en hacer otra zanja de 150 metros de largo por 7 de profundidad y 6 de ancho.

El planteamiento se hace de este modo:

	Especies.	hombres	días	ms. long.	ms. ms.	ancho	ms. profund.
1. ^{os}	Valores simultáneos.	16	29	124		4	9
2. ^{os}	id. id.	20	X	150		6	7

Proporcionalidad entre hombres y días inversa, entre días y trabajo directa, luego $x = 29 \cdot \frac{16}{20} \cdot \frac{150}{124} \cdot \frac{6}{4} \cdot \frac{7}{9} = \frac{29 \times 16 \times 150 \times 6 \times 7}{20 \times 124 \times 4 \times 9} = \frac{2923200}{84280} = 32.75$ días.

También puede resolverse la regla de tres compuesta estableciendo las diversas proporciones á que darían origen las reglas de tres simples que contuviera, suponiendo en el planteamiento de cada una las otras condiciones comunes. La incógnita de la última proporción sería la verdadera solución del problema y para hallarla pueden seguirse dos caminos distintos, uno no investigar el valor de las incógnitas accidentales que se introdujeran y que al multiplicar las proporciones se destruirían y otro ir hallando el valor de dichas incógnitas y sustituyéndolas sucesivamente hasta llegar al deseado.

Aplicando ambos medios al ejemplo antes resuelto diríamos:

1.^o Si 16 hombres hacen una zanja en 29 días ¿cuánto tardarían 20 hombres en hacer otra igual? $\frac{16}{20} = \frac{y}{29}$.

2.^o En y días se ha hecho una zanja de 124 metros longitud ¿cuánto se tardará en hacer otra de 150? $\frac{150}{124} = \frac{z}{y}$.

3.º En z días se ha hecho una zanja de 4 metros ancha ¿cuántos emplearán en hacer otra de 6 metros? $\frac{6}{4} = \frac{n}{z}$.

4.º En u días se ha construido una zanja de 9 metros de profundidad ¿cuánto tardarán en hacer otra de 7 metros? $\frac{7}{9} = \frac{x}{u}$.

Multiplicando ordenadamente las cuatro proporciones, se tiene:

$\frac{16}{20} \times \frac{150}{124} \times \frac{6}{4} \times \frac{7}{9} = \frac{y}{29} \times \frac{z}{y} \times \frac{n}{z} \times \frac{x}{u}$, es decir $\frac{16 \times 150 \times 6 \times 7}{20 \times 124 \times 4 \times 9} = \frac{x}{29}$, en donde $x = 29 \cdot \frac{16 \times 150 \times 6 \times 7}{20 \times 124 \times 4 \times 9} = 32,75$.

El segundo procedimiento á que antes nos referimos consiste en hallar el valor de y en la proporción primera, sustituirlo en la segunda, despejar en este el de z , sustituir este en la tercera, en la que se encontraría el de u , que en la cuarta serviría para hacernos conocer el de x .

Cualquiera de estos procedimientos ofrece menos ventajas y es más expuesto á errores y más lento que el primero que explicamos.

El método de reducción á la unidad, aunque también es aplicable á la regla de tres compuesta, es mucho más lento en su desarrollo y no ofrece ventaja de ningún género, por cuya razón omitimos su exposición.

CAPITULO 19.

PARTICIONES PROPORCIONALES, REGLAS DE COMPAÑÍA, INTERÉS Y FONDOS PÚBLICOS.

Dividir un número en partes proporcionales á otros dados, es descomponer el primero en números tales que la relación que guarden con los dados sea constante.

El repartimiento proporcional de una cantidad en orden á otras que le son afines es el fundamento de la regla de compañía.

Teorema. Una cantidad se reparte proporcionalmente á varios números dados multiplicando aquella por las relaciones que tenga cada uno de los números con la suma de todos ellos.

Vamos á repartir el número 672 en partes proporcionales á 7, 8 y 9. Representemos por x , y y z las partes correspondientes á

dichos números y deberá verificarse que $\begin{cases} x + y + z = 672, & \text{porque} \\ \frac{x}{7} = \frac{y}{8} = \frac{z}{9}, & \text{el todo} \end{cases}$ es igual á la suma de las partes, y como en toda serie de razones la suma de antecedentes es respecto á la de consecuentes como un ante-

cedente es á su consecuente: $\frac{x+y+z}{7+8+9} = \frac{x}{7} = \frac{y}{8} = \frac{z}{9}$: Igualando cada razón con la primera, después de sustituir en esta en lugar de $x+y+z$ su valor 672, se tendrá:

$$\frac{672}{7+8+9} = \frac{x}{7} \left\{ \text{en la que: } x = \frac{672 \times 7}{7+8+9} = 672 \cdot \frac{7}{7+8+9} \right\} \frac{672}{7+8+9} = \frac{y}{8}, y$$

$$= 672 \cdot \frac{8}{7+8+9} \left\{ \frac{672}{7+8+9} = \frac{z}{9}, z = 672 \cdot \frac{9}{7+8+9} \right.$$

De cuyas igualdades deducimos los tres valores desconocidos,

siendo $\left. \begin{array}{l} x=196 \\ y=224 \\ z=252 \end{array} \right\} x+y+z=672$, que demuestran el teorema.

Si los números en quien hubiera de repartirse la cantidad fueran fraccionarios se podrian reducir á común denominador y distribuirse proporcionalmente á los numeradores de las fracciones resultantes, siguiendo el procedimiento antes empleado con los enteros.

Llábase *regla de compañía ó sociedad* á la que tiene por objeto determinar la ganancia, pérdida ó parte del capital que corresponde á cada uno de los individuos que se asociaron para realizar una empresa, proporcionalmente á los capitales que aportaron y al tiempo que estuvieron dedicados á ella.

Su fundamento reside en que el que puso mayor capital ó estuvo en la empresa mayor tiempo corrió riesgos mayores y con arreglo á ellos debe contribuir á la ganancia ó pérdida comun.

Descartado el caso en que los asociados impusieran capitales iguales y estuvieran un mismo tiempo, porque se resuelve mediante una simple división, hemos de considerar los siguientes:

- 1.º Que sean iguales los capitales y distintos los tiempos.
- 2.º Que sean iguales los tiempos y diferentes los capitales.
- 3.º Que los capitales y los tiempos sean distintos.

1.º Cuando los capitales sean iguales la ganancia ó pérdida debe distribuirse proporcionalmente á los tiempos.

Ejemplo: Establecido un comercio el dueño admitió al año un socio que le entregó un capital igual al que empleó aquél para abrir su establecimiento, 2 años más tarde se les unió un tercer socio entregando un capital igual al que aquellos habian puesto. Hecha la liquidación dos años más tarde resultó una utilidad de 145 000 pesetas ¿qué parte le corresponderá á cada uno?

El 1.º arriesgó su capital, 5 años, el 2.º 4 años y el 3.º 2 años, luego les toca percibir al 1.º $145000 \times \frac{5}{5+4+2} = 65.909'10$

al 2.º $145000 \times \frac{4}{5+4+2} = 52.727'27$

$$\text{y al 3.}^\circ 145000 \times \frac{2}{5+1+2} = \frac{26.363'63}{145.000'00}$$

2.º Cuando los tiempos son iguales y los capitales diferentes, la ganancia ó pérdida se reparte proporcionalmente á los capitales.

Ejemplo: Cuatro socios establecieron una casa de banca, aportando uno 30000 pesetas, otro 27000, el 3.º 43000 y el 4.º 20000, al liquidar se ha tenido una pérdida de 5000 pesetas y deseamos saber cuánto debe abonar cada uno.

$$\text{El 1.}^\circ 5000 \times \frac{30.000}{120.000} = 1.250 \text{ pesetas}$$

$$\text{El 2.}^\circ 5000 \times \frac{27.000}{120.000} = 1.125 \text{ «}$$

$$\text{El 3.}^\circ 5000 \times \frac{43.000}{120.000} = 1.791,67 \text{ «}$$

$$\text{El 4.}^\circ 5000 \times \frac{20.000}{120.000} = 833'33 \text{ «}$$

3.º Cuando los capitales y los tiempos son distintos la ganancia ó pérdida debe distribuirse proporcionalmente á los productos de los capitales por los tiempos.

Ejemplo: Tres individuos llegaron á constituir sociedad en esta forma: el primero aportó 16000 pesetas y estuvo año y medio, el 2.º concurrió con 12000 pesetas que retiró á los 3 años y el 3.º puso 9000 pesetas que retiró á los 5 años ¿Cuánto debe percibir cada uno de las 50.000 pesetas que ganaron?

$$\text{El 1.}^\circ 50.000 \times \frac{16000 \times 1\frac{1}{2}}{16000 \times 1\frac{1}{2} + 12000 \times 3 + 9000 \times 5} = 11.428'57$$

$$\text{El 2.}^\circ 50.000 \times \frac{12000 \times 3}{16000 \times 1\frac{1}{2} + 12000 \times 3 + 9000 \times 5} = 17.142,86$$

$$\text{El 3.}^\circ 50.000 \times \frac{9000 \times 5}{16000 \times 1\frac{1}{2} + 12000 \times 3 + 9000 \times 5} = 21.428'57$$

50.000'00

Las sumas que figuran como suma en los ejemplos antes resueltos son la comprobación natural de las operaciones efectuadas.

Regla de interés.

Se dá el nombre de interés al beneficio que reporta un capital al que le presta ó impone en una negociación durante cierto tiempo. La regla de interés resuelve los problemas relativos á éste.

Llámanse tanto *por ciento* al interés que en la unidad de tiempo producen cien unidades de dinero. La unidad adoptada generalmente como tipo del tiempo es el año, fraccionable en 12 meses ó en 360 días, para los usos mercantiles.

El interés puede ser *simple* y *compuesto*: es simple cuando se considera solo el beneficio que devenga anualmente el capital, sin que sufra éste incremento; es compuesto cuando al finalizar cada año se acumulan los intereses al capital para que á su vez re-
ditúen.

Las cantidades que entran en la determinación del interés son el capital, el tiempo y el tanto por ciento. La proporcionalidad que une á los intereses y capitales es directa, la de intereses y tiempos, tantos por cientos é intereses son directas también. Pueden, por consiguiente, resolverse los problemas del interés por medio de la regla de tres.

Interés simple.

Tratemos de hallar el interés que producirá un capital $c.$, im-
puesto al tanto por ciento $t.$ durante $a.$ años. Desde luego podrá establecerse que si: 100 unidades de dinero en 1 año producen $t.$
 $c.$ » » » en $a.$ » producirán $I.$

luego $I = t \cdot \frac{a}{1} \cdot \frac{c}{100} = \frac{t \cdot a \cdot c}{100}$: cuya fórmula traducida al lenguaje usual nos expresa que *para hallar el interés producido por un cierto capital, se multiplica éste por el número de años y por el tanto por ciento, dividiendo por 100 el producto.*

Si, $a=1$, $I = \frac{t \cdot c}{100} = c \cdot \frac{t}{100}$, luego para determinar el interés anual basta multiplicar al capital por el *tanto por uno*, que es el cociente de dividir por 100 el tanto por ciento.

Si $a = \frac{m}{12}$ que expresa un número cualquiera de meses:

$$I = t \cdot \frac{m}{12} \cdot \frac{c}{100} = \frac{t \cdot m \cdot c}{1200} = \frac{t \cdot m \cdot c}{12 \times 100} = \frac{t \cdot m \cdot c}{1200}$$

Si, $a = \frac{n}{360}$ que indica un número de días.

$$I = t \cdot \frac{n}{360} \cdot \frac{c}{100} = \frac{t \cdot n \cdot c}{360 \times 100} = \frac{t \cdot n \cdot c}{36000}$$

De la fórmula $I = \frac{t \cdot a \cdot c}{100}$, se deduce que $I \cdot 100 = t \cdot a \cdot c$, y esta

igualdad nos proporciona los medios de hallar los valores de

$$\left\{ \begin{array}{l} c. = \frac{I. 100}{t. a.} \\ t. = \frac{I. 100}{a. c.} \\ a. = \frac{I. 100}{t. c.} \end{array} \right\} \text{cuya traducción verbal es bien sencilla, y que pueden reducirse también á los casos en que sea } a. = \frac{m}{12} \text{ ó } a. = \frac{n}{360}, \text{ convirtiéndose en:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c. = \frac{I. 1200}{t. m.} \\ t. = \frac{I. 1200}{m. c.} \\ m. = \frac{I. 1200}{t. c.} \end{array} \right\} \text{ ó } \left\{ \begin{array}{l} c. = \frac{I. 36000}{t. n.} \\ t. = \frac{I. 36000}{n. c.} \\ n. = \frac{I. 36000}{t. c.} \end{array} \right\} \text{ Problemas 1.º Se han impuesto 8000 ptas. al 6 por } \frac{\%}{a} \text{ por el plazo de un año ¿qué interés nos reportarán?}$$

$$\left. \begin{array}{l} 100 \text{ ptas. en 1 año rentan } 6 \\ 8000 \text{ » en » » rentarán } x. \end{array} \right\} x. = 6. \frac{8000}{100} = 8000 \frac{6}{100} = 8000 \times 0.06 = 480 \text{ pesetas.}$$

2.º ¿Cuánto producirán en 9 meses 1700 ptas. prestadas al 8 por %?

$$\left. \begin{array}{l} 100 \text{ ptas. en 1 año producen } 8 \\ 17000 \text{ » en } \frac{9}{12} \text{ » » » } I. \end{array} \right\} I = \frac{8 \times 17000 \times \frac{9}{12}}{100} = \frac{8 \times 17000 \times 9}{1200} =$$

1020 pesetas.

Si en lugar de $\frac{9}{12}$ hubiéramos puesto $\frac{270}{360}$ que expresa los meses en días.

$$I = \frac{8 \times 17000 \times 270}{36000} = 1020 \text{ pesetas.}$$

3.º ¿Qué capital necesitaremos imponer al 12 por % para que nos rente 2500 ptas. al año? Planteando, sin utilizar la fórmula á pesar de que con esta nos ahorraríamos el planteamiento, diremos

$$\left. \begin{array}{l} 100 \text{ ptas. en 1 año producen } 12 \\ c. \text{ » en » » » } 2500 \end{array} \right\} c. = 100 \times \frac{2500}{12} = 20833.33 \text{ pesetas.}$$

4.º Hace 8 meses que invertimos 18000 ptas. en un negocio que nos ha producido un beneficio de 1300 ¿á qué tanto por ciento anual resultará el interés?

$$\text{Por la fórmula: } t. = \frac{1200 \times 1300}{1800 \times 8} = 10.83. \text{ Por planteamiento}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 100 \dots 1 \dots t. \\ 18000 \dots 8 \dots 1300 \end{array} \right\} \text{ de donde } t. = 1300 \frac{12}{8} \times \frac{100}{18000} = \frac{1300 \times 1200}{8 \times 18000} = 10.83.$$

5.º ¿Qué tiempo tardaremos en sacar un beneficio de 1100 pesetas á un capital de 30.000 al 12 por % anual?

$$a. = \frac{100 \times 1,100}{30000 \times 12} = \frac{110000}{360000} = \frac{11}{36} \text{ de año} = 110 \text{ días.}$$

Caso particular.

Cuando al finalizar el plazo por que está impuesto un capital se desean retirar éste y los intereses, bastará acumular estos al capital y llamando C . á la suma del capital é intereses, su valor será:

$$C = c + I = c + \frac{t \cdot a \cdot c}{100} = \frac{c}{100} (100 + t \cdot a) = \frac{c \cdot (100 + t \cdot a)}{100}$$

Si conociéramos el capital é intereses y desconociéramos el capital:

$$C \cdot 100 = c \cdot (100 + t \cdot a) \text{ y } c = \frac{C \cdot 100}{100 + t \cdot a}$$

Ambas fórmulas, que son directamente aplicables, pueden expresarse también en el lenguaje usual. Del valor de la primera pueden deducirse además las correspondientes al tiempo y al tanto por ciento, que en nada varían de las obtenidas antes, porque si bien estas aparecen bajo la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} t = \frac{100 I}{c \cdot a} \\ a = \frac{100 I}{c \cdot t} \end{array} \right\} \text{ y ahora son } \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{100 (C - c)}{c \cdot a} \\ a = \frac{100 (C - c)}{c \cdot t} \end{array} \right\} \text{ como } C = c + I \text{ y por tanto } I = C - c, \text{ las segundas son idénticas á las primeras.}$$

Interés compuesto.

Ya hemos dicho que cuando al capital se le acumulan los intereses para que estos á su vez produzcan ó reñitución, el interés se llamaba *compuesto*.

Podría hallarse el interés compuesto producido por un capital efectuando tantas operaciones como años duró la imposición, pero siendo pesado tal procedimiento, vamos á demostrar que para hallar el valor de un capital y sus intereses compuestos en un número determinado de años, basta multiplicar el capital por la potencia de uno más el tanto por uno cuyo exponente sea el número de años.

Siendo t . el tanto por uno anual, el interés de c , será al año $c \cdot t$. y sumando este interés al capital, este acumulado con su interés será al final del primer año $C' = c + c \cdot t = c \cdot (1 + t)$; este es el capital al empezar el segundo año y su interés durante él $c \cdot (1 + t) \cdot t$. así que el capital más el interés será $C'' = c \cdot (1 + t) + c \cdot (1 + t) \cdot t = c \cdot (1 + t) (1 + t) = c \cdot (1 + t)^2$, cuyo capital devenga en el tercer año $c \cdot (1 + t)^2 t$ y acumulándose á aquél $C''' = c \cdot (1 + t)^2 + c \cdot (1 + t)^2 t = c \cdot (1 + t)^2 (1 + t) = c \cdot (1 + t)^3$. Fórmulas que generalizadas para a años, dán, $C^a = c \cdot (1 + t)^a$.

Cuando se conociera C^n y se desconociera c , dividiendo los dos miembros de la igualdad anterior por $(1+t)^n$ se tendría $c = \frac{C^n}{(1+t)^n}$, que expresa su valor.

Ejemplos: ¿Qué capital tendremos al cabo de dos años, prestando 26000 ptas. al 6 por % de interés compuesto?

$C^2 = 26000 (1+0.06)^2 = 26000 \times 1.1236 = 26000 \times 1.1236 = 29203.60$ pesetas.

¿Qué capital habrá sido preciso imponer para que en 3 años al 12 por % se convierta en 5898.50 pesetas.

$$C = \frac{5898.50}{1.124} = \frac{5898.50}{1.523} = 3860.34 \text{ pesetas.}$$

Fondos públicos.

Como aplicación de la regla de tres se estudian también los problemas relacionados con los *fondos públicos*, con cuyo nombre se conoce á los títulos de renta que los Gobiernos emiten cuando, para cubrir atenciones de importancia, contratan un empréstito.

Los títulos de la Deuda ó papel del Estado representan una cantidad que se llama su valor nominal: á la cual tiene derecho el que los adquiere, pues como son negociables en las Bolsas ó establecimientos de crédito, unas veces domina la demanda y sube el precio de los títulos y otras veces escasea y baja dicho precio; las cantidades que en moneda de cuenta se satisfacen por aquellos se llama *valor efectivo*. *Cambio corriente* es el precio á que se pagan en metálico cada cien unidades del valor nominal.

El precio que por cada cien unidades nominales fijó el Gobierno al poner el papel en circulación se llama *cambio de emisión*.

La Deuda se divide en *amortizable* cuando tiene un plazo limitado para extinguirla mediante sorteos que se verifican en periodos regulares (generalmente por semestres) y *perpétua* cuando no se le ha fijado plazo de amortización. Tanto una como otra están divididas en series atendiendo al valor de los títulos y épocas de las emisiones.

El interés que satisface el Gobierno por cada cien unidades nominales se llama *tanto por ciento nominal* y el que resulta para cada cien unidades en metálico se denomina *tanto por ciento efectivo*.

Las cuestiones que se nos pueden presentar son las siguientes:

1.^a Para hallar el capital efectivo que habrá de emplearse para adquirir un capital nominal determinado, se multiplica el capital nominal por el cambio corriente y se divide por 100 al producto.

Ejemplo ¿Cuánto costarán 50.000 pesetas en papel amortizable cuyo cambio está al 72 p/o?

Planteamiento $\left\{ \begin{array}{l} 100 \text{ unidades nominales cuestan } 72 \\ 50.000 \text{ « « « « « costarán } v_e \end{array} \right\}$ de donde
 $v_e = 72 \times \frac{50.000}{100} = 36.000.$

2.ª Cuando se desee saber el capital nominal que podrá adquirirse con un capital efectivo conocido, se multiplicará éste por ciento dividiendo al producto por el cambio.

Ejemplo: Empleando 14000 pesetas al 70% ¿qué cantidad adquiriremos en títulos de la Deuda?

Planteamiento $\left\{ \begin{array}{l} 100 \text{ unidades nominales valen } 70 \text{ efectivas} \\ v_n \text{ « « « « « } 14000 \text{ « en} \end{array} \right.$
 donde $v_n = 100 \times \frac{14000}{70} = 20.000$ pesetas.

3.ª Si conocemos el valor nominal y el efectivo y deseamos saber el precio del cambio, bastará multiplicar por 100 el valor efectivo y dividir el producto por el valor nominal.

Ejemplo: Habiendo pagado 13700 pesetas por 16000 nominales ¿a cómo nos salió el cambio?

Planteamiento $\left\{ \begin{array}{l} 16000 \text{ costaron } 13700 \\ 100 \text{ « « « « « } x \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x = 13700 \times \frac{100}{16000} = \\ 85,61 \text{ p/o.} \end{array} \right.$

Las fórmulas para determinar el tanto % efectivo conociendo el nominal así como para aplicar estas cuestiones a la regla de interés se comprenden fácilmente y para el manejo práctico de las operaciones resolveremos los dos ejemplos siguientes:

1.º Qué tanto % efectivo cobraremos de la deuda amortizable del 4 %, habiendo estado el cambio cuando adquirimos los títulos al 75 %?

75 producen $\left\{ \begin{array}{l} 4 \\ 100 \text{ producirán } x \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x = 4 \times \frac{100}{75} = \frac{400}{75} = 5,33 \end{array} \right.$

2.º Qué capital habremos de invertir en títulos de la deuda del 5% adquiriéndolos al 68 p/o de cambio para tener una renta anual de 2500 pesetas.

68 producen $\left\{ \begin{array}{l} 5 \\ c \text{ producirán } 2500 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} c = 68 \times \frac{2500}{5} = \frac{170.000}{5} = 34000 \text{ pesetas.} \end{array} \right.$

CAPÍTULO 20.

REGLAS DE DESCUENTO, ALIGACIÓN y CONJUNTA.

Se da el nombre de *descuento* a la cantidad que percibe de m e

nos el que *presenta al cobro* ó hace efectiva una letra antes del día en que vence.

Es costumbre, muy extendida en el Comercio, la de pagar los géneros que se adquieren al por mayor, en los grandes depósitos ó almacenes, en un plazo prudencial que suele ser de 90 días. Pero cuando el almacenista necesita reunir fondos entrega letras á los Banqueros para su negociación y si estos consideran que aquél reúne garantías bastantes por su crédito se las pagan anticipadamente y sin perjuicio de devolverle las que no sean admitidas por aquellos sobre quienes van giradas.

Pero así como el almacenista recibe antes de su debido tiempo cantidades que manejadas convenientemente pueden reportarle beneficios, el Banquero ó el pagador de la letra se desprende de un dinero que hasta el cobro de las letras le podría producir intereses, por cuya causa el primero pierde una parte del valor de las letras proporcional al beneficio que el segundo obtendría negociando su dinero, y que en compensación recibe éste.

Tal es el fundamento de la regla de descuento, que no es sino una aplicación del interés, pues se descuenta lo que rentaría el valor de la letra desde el día que se presenta al cobro hasta aquél en que vence, á un tanto por ciento estipulado y que varía segun las plazas comerciales.

Las fórmulas que hemos deducido en la regla de interés simple en el caso en que viniera expresado el tiempo en días, son aplicables aquí, sin más que poner en lugar del capital el valor nominal de la letra, esto es, la cantidad que por ella debe pagarse á su vencimiento, y en lugar del interés el descuento, porque el tanto por ciento subsiste.

Se obtendrá pues el descuento comercial de una letra, multiplicando el valor nominal de esta por el número de días que se anticipa el cobro y por el tanto por ciento y dividiendo este producto por 36000; que expresado en fórmula es: $d = \frac{V_n \times p \times t}{36000}$, de cuyo valor se deduce que $d \cdot 36000 = V_n \cdot p \cdot t$ y por tanto

$$\left. \begin{array}{l} V_n = \frac{d \cdot 36000}{p \cdot t} \\ t = \frac{d \cdot 36000}{V_n \cdot p} \\ p = \frac{d \cdot 36000}{V_n \cdot t} \end{array} \right\} \text{ Este descuento se considera abusivo, porque se hace sobre un valor que realmente no tiene la letra y ha dado origen al llamado descuento matemático, que se verifica sobre el valor exacto de la letra y es en su consecuencia la diferencia entre los valores nominal y efectivo de aquella.}$$

Para determinar el valor efectivo de la letra se hace uso de la fórmula que en el caso particular del interés simple nos dá el valor

del capital, que era: $c = \frac{C \cdot 100}{100 + a \cdot t}$. En esta se hacen $\left\{ \begin{array}{l} c. = V_e. \\ C. = V_n. \\ P. \\ a = \frac{P.}{360} \end{array} \right\}$ y se

convierten en $V_e = \frac{V_n \cdot 100}{100 + t \cdot P} = \frac{V_n \cdot 36000}{36000 + t \cdot P}$, y como el descuento matemático ($d.$) es la diferencia entre el valor nominal y el efectivo,

se hallará de la fórmula $= V_n. - V_e. = V_n. - \frac{V_n \cdot 36000}{36000 + t \cdot P} = \frac{V_n \cdot 36000 + V_n \cdot t \cdot P - V_n \cdot 36000}{36000 + t \cdot P} = \frac{V_n \cdot t \cdot P}{36000 + t \cdot P}$. Ciertamente es que este descuento

es menor que el comercial, por tener mayor divisor, pero para letras cuyo valor no sea excesivamente grande es tan insignificante la diferencia que, atendiendo á la brevedad con que se opera en el segundo, se desprecia aquella.

Ejemplo: ¿Qué descuento había de sufrir una letra de 1400 pesetas que se presenta al cobro 60 días antes de su vencimiento, con un 6 por $\%$ de daño.

$$d. = \frac{1400 \times 60 \times 6}{36000} = 14 \text{ pesetas. } d.' = \frac{1400 \times 60 \times 6}{36000 + 60 \times 6} = 13'86; d. - d.' = 14 - 13'86 = 0'14.$$

Las fórmulas que antes hallamos para V_n , t , y P , nos proporcionan los medios para investigar cualquiera circunstancia que fuera desconocida al negociar una letra, la primera dá el valor nominal, la segunda el tanto por ciento y la tercera el número de días; hay sin embargo un caso que exige cálculo particular, es este, cuando se desconoce el capital sobre el cual se ha verificado un descuento sabiendo el líquido satisfecho, el tiempo que se apreció y el tanto por $\%$ y para hallar aquél se multiplicará 100 por la cantidad pagada y el producto se divide por 100 menos la parte del tanto por $\%$ correspondiente al tiempo.

Ejemplo: Hemos satisfecho 12300 pesetas por una letra que se pagó 60 días antes de vencer al 9 por $\%$ de daño, ¿Cuál sería su importe?

$$x. = \frac{12300 \times 100}{100 - 9 \times 60} = \frac{12300 \times 100}{100 - 54} = 12489'35 \text{ pesetas.}$$

Regla de aligación.

Dois clases de problemas se tratan de resolver en esta regla; el primero consiste en hallar el precio medio de una mezcla cuando se conocen las cantidades que han de mezclarse y sus respectivos precios; en el segundo se pretende descubrir la proporción en

que se habrán de mezclar dos ó más substancias cuyos precios conocemos para que resulte al precio medio fijado de antemano.

Tanto al problema primero como al segundo pertenecen todos los que por su significación les sean similares; tal es determinar, por ejemplo, la graduación media que alcanzará un líquido en cuya composición hayan entrado cantidades varias de graduación diferente, ó hallar las cantidades de ciertos líquidos que han de mezclarse para que resulte el compuesto á determinada graduación.

Problema 1.º Se comprende desde luego que el precio medio que nos proponemos hallar debe ser tal, que multiplicándole por las cantidades mezcladas dé un total igual al que se obtenga multiplicando las cantidades por sus precios respectivos; luego podrá conocerse dividiendo á la suma de los productos de las cantidades por sus precios por la suma de dichas cantidades. En efecto sean: { a. b. d. e.... las cantidades } y P^m el precio me-

dió, se verificará que:
 $P^m (a. + b. + c. + d. + \dots) = a. p. + b. p. + c. p. + d. p. + \dots$,
 luego $P^m = \frac{a. p. + b. p. + c. p. + d. p. + \dots}{a. + b. + c. + \dots}$.

Ejemplo: Se han mezclado 95 fanegas de trigo de 12 pesetas con 145 de á 13 y 342 de á 11 pesetas. ¿á qué precio medio resultará la fanega de mezcla?

95 fangs. á 12 ptas. valen 1140 ptas.	}	1 fanega valdrá $\frac{6787}{582}$ ptas. = 11'66 pesetas.
145 » á 13 » » 1885 »		
342 » á 11 » » 3762 »		
582 fangs. » 6787 »		

Problema 2.º Las cantidades que han de entrar á formar parte de una mezcla son inversamente proporcionales á las diferencias entre sus precios y el precio medio, por cuya razón la cantidad que haya de tomarse de cada precio está expresada por la diferencia entre su opuesto y el precio medio. Hemos visto en el problema primero que:

$P^m (a. + b.) = a. p. + b. p.$; si suponemos $p. > p.$ y desarrollamos el producto indicado en el primer miembro de la igualdad

$P^m a. + P^m b. = a. p. + b. p.$ (y como $P. > P^m. > p.$) $P^m b. - p. b. = a. p. - P^m a.$ y $b (P^m - p.) = a. (p. - P^m.)$ y como siendo el producto de dos cantidades igual al de otras dos con las cuatro se puede formar proporción, siendo medios las de un miembro y extremos las del otro, $\frac{P^m - p.}{p. - P^m} = \frac{a}{b}$, de donde $\left\{ \begin{matrix} a. = P^m - p. \\ b. = p. - P^m. \end{matrix} \right.$ según antes expresábamos. Pero el problema en estas condiciones es indeterminado porque la fracción $\frac{a.}{b.}$ no solo es igual á la $\frac{P^m - p.}{p. - P^m.}$ si-

no á las que resulten de multiplicar ó dividir los dos miembros de esta por un mismo número. Para que el problema sea determinado necesita conocerse ó una de las cantidades ó el valor de la suma ó diferencia de ellas, y entonces no habría más que aplicar el teorema de la proporcionalidad que fuera necesario.

Cuando las cantidades que se hayan de mezclar sean más de dos, se combinan entre sí, dos á dos los precios que comprendan al medio dado.

Ejemplos 1.º ¿Qué número de litros de alcohol de á 60.º habrá que mezclar á otros de 27 para que resulte una graduación media de 35.º?

60 8 l. } Para cada 8 litros de á 60.º hay que mezclar 25 de á 27.º así como también pueden
35 }
27 25 l. } combinarse los mismos múltiplos de 8 y 25, ó sus cocientes para igual divisor.

2.º Cuántas arrobas de garbanzos de á 14 pesetas arroba habrá que mezclar á otros de á 9 para que nos resulte la mezcla á 10'50, haciendo la mezcla un total de 40 arrobas?

14. . . . 1'50 arbs. x. }
10'50 } $\frac{3'50+1'50}{40} = \frac{3'50}{y} = \frac{1'50}{x}$; de donde
9. . . . 3'50 " y. }
} $\frac{5}{40} = \frac{1'50}{x}$ x. = $\frac{1'50 \times 40}{5} = 12$ arbs. } Luego para 12 arbs. de á
} $\frac{5}{40} = \frac{3'50}{y}$ y. = $\frac{3'50 \times 40}{5} = 28$ arbs. } 14 pesetas se mezclarán 28
} } } arbs. de á 9 ptas. y resulta-
rán las 40 arbs. á 10'50 pesetas según se deseaba.

3.º Tenemos alcohol de estos cuatro precios por Hl. 85, 100, 130 y 140 pesetas y queremos hallar las cantidades en que se deben mezclar para que resulte el Hl. á 120 pesetas.

Precios.

Cantidades.

85

20

100

10

Pm. = 120

130

20

140

35

} Se pueden referir á los múltiplos ó divisores del Hl. así como también

pueden tomarse los múltiplos de las cuatro cantidades ó sus cocientes para un mismo divisor.

La comprobación de este ejemplo se verificaría del modo siguiente:

20 Hl. á 85 ptas. valen 1700 ptas.

10 " á 100 " " 1000 "

20 " á 130 " " 2600 "

35 " á 140 " " 4900 "

85 " á 120 " " 10200 "

luego es cierta la operación.

Regla conjunta.

Se llama así á la que nos enseña los medios de investigar el valor de las unidades de una especie determinada por las equivalencias que guardan con otras conocidas.

Bajo este punto de vista se establecen, mediante ella las relaciones que existen entre los pesos medidas, y monetario de diferentes naciones y aun las de un mismo país. Esta circunstancia, nos permite tratar en esta lo que algunos autores llaman *regla de cambio internacional*, que no es otra cosa que la reducción recíproca de las unidades monetarias entre plazas mercantiles de distintas naciones.

Denominase *cambio internacional* al premio que recibe ó descuento que sufre el que reduce monedas de una nación á las de otra. El cambio está con beneficio cuando se recibe mayor número de unidades equivalentes que las que se entregan, en el caso contrario se dice que sufre quebranto ó está con daño.

El cambio está á la par cuando se reducen unidades monetarias de una á otra nación sin beneficio ni daño.

Se dice que el cambio es directo cuando en la operación no intervienen mas que las dos *plazas*, la remitente y la aceptante, y es indirecto cuando hay que servirse de varias plazas mercantiles. Si, por ejemplo, queremos pagar una factura en París y en esta plaza se admite la moneda española, con beneficio ó quebranto, el cambio será directo; pero si necesitamos negociar un crédito en Grecia y para ello tenemos que reducir nuestro dinero á francos y estos á libras esterlinas para pagar en estas monedas que allí circulan ó reducirlas á *dracmas*, que son las del país, la operación realizada habrá sido de cambio indirecto.

Como la mayoría de los casos en que tiene aplicación esta regla es para la reducción monetaria, á esta clase vamos á referirnos en los problemas, que pueden resolverse con suma sencillez, bien tengan dos ó más especies equivalentes, sin mas que tener en cuenta que deben relacionarse estas de tal modo que cada equivalencia contenga su primer miembro homogéneo con el segundo de la anterior y que resulte ser la incógnita ó el primer miembro de la primera equivalencia ó el segundo de la última, que deben tambien ser homogéneos.

Ejemplos. 1.º Estando el cambio de pesetas á francos con el 30 p/o de daño ¿cuántos francos valdrán 915 pesetas?

$$\begin{array}{l} 100 \text{ francos} = 130 \text{ pesetas} \\ 915 \text{ pesetas} = x \text{ francos} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{100 \times 915}{130} = 703'84 \text{ francos.} \end{array} \right.$$

2.º A cuántos marcos equivaldrán 9200 pesetas sabiendo que

250 pesetas valen 200 francos, 56 francos valen 2 lbs. y que 12 lbs. valen 375 marcos?

$$\begin{array}{l}
 x^m = 9200 \text{ ps.} \\
 250 \text{ ps.} = 200 \text{ frs.} \\
 56 \text{ fr.} = 2 \text{ lbs.} \\
 12 \text{ lbs.} = 375 \text{ m.}
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \right.
 x^m = \frac{9200 \times 200 \times 2 \times 375}{250 \times 56 \times 12} = 8214.28 \text{ marcos.}$$

3.º Averiguar el cambio á que habrán resultado 16 libras esterlinas por las que hemos abonado 520 pesetas. Las 16 lbs. á la par monetaria valdrían á 25 pesetas una 400 pesetas, luego $520:400::100+x:100$, de donde $x = \frac{520 \times 100}{400} - 100 = \frac{52000}{400} - 100 = 130 - 100 = 30$: el cambio ha sido cobrado al 30 pº de beneficio para las libras.

PAR MONETARIA DE ALGUNAS NACIONES Comparativamente á la española (excluido el cambio).

NACIONES	MONEDAS	VALOR en pesetas
Alemania.	Marco.	1.25
Austria-Ungria.	Corona.	1.00
Bélgica.	Franco.	1.80
Brasil.	Milreis.	2.00
Bulgaria.	Lea.	1.00
Colombia.	Peso.	5.00
Chile.		
Dinamarca.	Corona.	1.35
Egipto.	Piastra.	0.25
Estados Unidos.	Dollar.	5.10
Francia.	Franco.	1.00
Grecia.	Dracma.	1.00
Holanda.	Florin.	2.00
Inglaterra.	Libra esterlina.	25.00
Italia.	Lira.	1.00
Japón.	Yen.	5.00
Marruecos.	Piastra.	5.80
Méjico.	Peso.	5.40
Suecia y Noruega.	Corona.	1.30
Perú.	Sol.	5.00
Portugal.	Milreis.	5.50
Rusia.	Rublo.	4.00
Suiza.	Franco.	1.00
Turquía.	Piastra.	0.25
Repúblicas Americanas	Peso.	5.00

APÉNDICE



CAPITULO 1.º



Teoría general de los sistemas de numeración.

Al hablar de los fundamentos sobre que se establecía la numeración, en el capítulo 2.º, digimos que las leyes á que obedece la formación de las unidades numerativas es convencional, si bien son constantes dentro de cada sistema, una vez elegida la base; que ésta daba nombre á aquél y que desde el *binario* puede considerarse un número indefinido de sistemas.

Si conservando como fijo el principio de que *toda cifra colocada á la izquierda de otra representa unidades numerativas tantas veces mayores como unidades simples contenga la base*, pretendiéramos formar un sistema de numeración cuya base fuera b , en el cual podríamos establecer arbitrariamente los nombres de las unidades y números, la forma que estos y aquellas tendrían sería la siguiente:

Unidad simple.....1—igual para todos los sistemas.

Base ó unidad de 2.º orden... b . Las $b-1$ cifras primeras serían simples y podrían representarse por las que se han adoptado para el sistema decimal, añadiendo ó quitando, segun fuera $b > 6$ < 10 .

Unidad de 3.º orden... b^2 —Porque b veces b es igual $b \times b = b^2$.

“ de 4.º id. ... $b^3 = b$ veces b^2 .

“ de 5.º id. ... $b^4 = b$ “ b^3 .

Suponiendo que las cifras de este sistema fueran m, n, p, q, r, s, t, u , y tratando de averiguar la forma de un número $N > b$, dividiríamos $N:b$ y representando por N' el cociente y por q el resto:

$N = b \cdot N' + q$. Si $N' > b$ y llamámos N'' al cociente de la división de N' entre b , siendo p el resto: $N' = b \cdot N'' + p$. Siendo $N'' > b$ y originándose de la división del primero por el segundo el cociente N''' y el residuo t , $N'' = b \cdot N''' + t$. Procediendo con los cocientes sucesivos de la misma manera y suponiendo que llegáramos á uno Q en el que $Q = b \cdot Q' + s$, siendo $Q' < b$, Q' tendría que ser igual á una de las cifras m, n, p, q, r, s, t, u del sistema; sea $Q' = n$, y el número N estaría expresado bajo la forma:

$N = b^m n + b^{m-1} s + \dots + b^2 t + b p + q$ porque siendo $N = b.N' + q$ y $N' = b.N'' + p$, $N = b(b.N'' + p) + q = b^2.N'' + b p + q$ y como $N'' = b.N''' + t$, $N = b^2(b.N''' + t) + b p + q = b^3.N''' + b^2 t + b p + q$ y continuando las sustituciones, y suponiendo que hubiera m igualdades hasta la de $Q' = n$, se obtendría la fórmula antes anotada, en la cual q representaría unidades de primer orden, p de segundo, t de tercero y..... n de emésimo.

Dos clases de problemas podemos proponernos al operar con números que pertenezcan á sistemas de numeración diferentes:

1.º Dados ciertos números expresarlos en otro sistema distinto y 2.º Operar con los números de cualquier sistema.

El primero vamos á estudiarle dividido en tres partes: 1.ª Dado un número de cualquier sistema expresarle en el decimal. 2.ª Convertir un número del sistema decimal á otro sistema de distinta base y 3.ª Pasar de uno á otro sistema un número dado.

Problema 1.º — 1.ª Parte. Dado un número de cualquier sistema expresarle en el decimal.

Co no hemos visto antes, las unidades numerativas de cualquier sistema son las potencias sucesivas de la base. Multiplicando pues las cifras que representasen los órdenes de unidades que el número contuviera por el valor de las unidades numerativas correspondientes, expresadas por una potencia de la base cuyo exponente sería igual al número de cifras que sigan á cada una de las que se consideren, la suma de los productos sería el número decimal equivalente.

Ejemplo: El número 54 m 27 n del sistema duodecimal expresarle en el decimal. Admitamos que las cifras del sistema decimal hayan servido para el duodecimal añadiendo m cuyo valor sea 10 y n que valga 11.

Las unidades numerativas en el sistema duodecimal valen	}	unidades.	—	1
		decenas (b).	—	12
		centenas (b^2).	—	144
		millares (b^3).	—	1728
		decenas de millar (b^4)	—	20736

las cifras que constituyen el número 54 m 27 n valdrán	}	$n =$	11
		$7.b = 7.12 =$	84
		$2.b^2 = 2.144 =$	288
		$m.b^3 = 10.1728 =$	17.280
		$4.b^4 = 4.20736 =$	82.944
		$5.b^5 = 5.248832 =$ 1.244.160	

luego en el sistema decimal 54 m 27 n = 1.344,767

Si el sistema en el cual se diera expresado el número fuera in-

ferior al decimal habría algunas cifras de este que carecerían de representación en aquél. Así en el sistema octogesimal, las cifras 8 y 9 no existirían.

2.^a Parte Convertir un número del sistema decimal á otro de distinta base.

Recordando el procedimiento que hemos seguido para investigar la forma que afectaría un número, cualquiera que fuera el sistema de numeración, al suponer que este tuviera á *b* como base, se deduce que bastará dividir dicho número por la base, así como también á los cocientes sucesivos que se obtengan hasta llegar á uno menor que la expresada base, siendo los restos por el orden en que se producen de unidades, decenas, centenas...y el último cociente la cifra del orden superior del número buscado.

Ejemplo: Expresar en el sistema duodecimal el número 1344767 del decimal. Operaríamos del modo siguiente:

1344767	12					
14	112063	12				
24	40	9338	12			
076	46	93	778	12		
47	103	98	58	64	12	
11=n	7	2	10=m	4	5	

}

El número del sistema duodecimal equivalente al 1344767 del decimal será 54 m 27 n.

3.^a Parte Pasar de uno á otro sistema un número dado.

Este caso podría resolverse fácilmente pasando el número dado al sistema decimal y luego del decimal á aquél en el cual quisiera expresársele, pero puede efectuarse desde luego la operación sin más que tener en cuenta que cada cifra ó resto antes de ser unido á la cifra siguiente debe ser multiplicado por la base.

Ejemplo sea el n.^o del sistema duodecimal 43 n 8 m que se desea expresar en el octogesimal. El procedimiento operativo sería el siguiente:

43 n 8 m	8					
3 n	65 n 7	8				
78	5 n	98 n	8			
4 m	77	18	127	8		
2	3	4 n	67	19	8	
		3	7	5	2	

}

Explicación del procedimiento operativo: 4 decenas duodecimales valen 48 unidades más las 3 de las dos cifras primeras del número son 51 que dividido entre 8 dá 6 de cociente y 3 de residuo; este reducido á unidades inferiores vale $3 \times 12 = 36$ y añadiéndole la cifra $n = 11$ que existe de ese orden alcanza á 47, que dividido por 8 dá de cociente 5 y de resto 7; este resto 7 expresado en el orden siguiente vale $7 \times 12 = 84$ incrementado en las 8 unidades de ese orden asciende á 92, que dividido entre 8 dá para cociente 11 y para residuo 4. Del mismo modo sigue efectuándose la opera

ción hasta obtener el cociente $2 < 8$. Resulta pues que el número $43n8m$ del sistema duodecimal equivale al 257332 del octogesimal.

Problema 2.º Efectuar las operaciones fundamentales con números de cualquier sistema.

Prescindiendo de la manera de ser particular del sistema decimal, las leyes operativas en él establecidas son aplicables á números de cualquiera otro, sin más consideraciones que las que se deducen del conocimiento de la base. Así, por ejemplo, para sumar números del sistema sexagesimal se escribirán unos debajo de otros de modo que se correspondan sus órdenes de unidades y por cada *seis* que sume una columna se agregará una unidad á la del orden inmediato superior. Véase la forma de la operación en el ejemplo siguiente:

3254	}	La suma de unidades es 14 que forman 2 decenas y
2031		2 unidades; la de decenas es 15, ó sean 2 centenas y 3
435		decenas; la de centenas es 11, que forman un millar y
1324		5 centenas, y la de millares 7 que hacen 1 millar y
11532		una decena de millar.

En la sustracción se conserva el procedimiento operativo y cuando alguna cifra del sustraendo sea menor que la del mismo orden del minuendo se le agrega á este una unidad del orden superior inmediato descompuesta en las equivalentes de su orden y para que no altere la diferencia se le agrega otra unidad del mismo orden de la del minuendo al sustraendo.

Ejemplo, en el sistema octogesimal $\left\{ \begin{array}{l} 42354 \\ 16237 \\ 24115 \end{array} \right\}$ al restar las unidades la cifra 4 es menor que la 7 del sustraendo, para efectuar la operación agregamos una decena, que consta de 8 unidades, al minuendo 4, convirtiéndose este en 12 del cual puede restarse 7 dejando 5 de diferencia. La decena agregada al minuendo se compensa añadiéndole otra á la cifra 3 del sustraendo que expresa las decenas y que puede restarse ya con dicho aumento de 5 dejando para diferencia 1. La sustracción de las centenas no ofrece dificultad, pero la de millares hay que efectuarla agregando una decena de ese orden como antes hicimos en las unidades simples.

Para la multiplicación es preciso formar primero la tabla correspondiente al sistema en que haya de operarse, á menos que se prefiera reducir los factores al decimal y pasar luego el producto al sistema en que se daban los datos. Como ejemplo efectuaremos el producto de 3524×467 en el sistema octogesimal, cuya tabla insertamos á continuación:

1	2	3	4	5	6	7
2	4	6	10	12	14	16
3	6	11	14	17	22	25
4	16	14	20	24	30	34
5	12	17	24	31	36	43
6	14	22	30	36	44	52
7	16	25	34	43	52	61

$$\begin{array}{r} 3524 \\ \times 467 \\ \hline 31514 \\ 25770 \\ 16520 \\ \hline 2143414 \end{array}$$

Para efectuar el producto se hace uso de la tabla y se siguen las leyes generales de la multiplicación sin otra particularidad que la de tener en cuenta en la suma de los productos parciales que cada 8 unidades de cualquier orden forman una del superior inmediato.

En la división es conveniente empezar formando los múltiplos del divisor, en la base elegida, practicándose la operación de igual modo que

hemos estudiado con los números del sistema décuplo.

Ejemplo: Dividir 26542 por 534, en el sistema octogesimal, los productos del divisor por los 7 números dígitos del sistema son:

$$\left(\begin{array}{l} 534 \cdot 1 = 534 \\ 534 \cdot 2 = 1270 \\ 534 \cdot 3 = 2024 \\ 534 \cdot 4 = 2560 \\ 534 \cdot 5 = 3314 \\ 534 \cdot 6 = 4050 \\ 534 \cdot 7 = 4604 \end{array} \right) \quad \begin{array}{r} 2654.2 \overline{)534} \\ \underline{2560} \quad 41 \\ \quad 742 \\ \quad \underline{534} \\ \quad \quad 206 \end{array}$$

CAPITULO 2.º

AMPLIACIÓN DE LA TEORÍA DE FRACCIONES

Fracciones continuas.

Al resolver un problema cualquiera ó al efectuar una operación en el resultado podemos encontrarnos con una fracción irreducible, de términos bastante grandes para formar á simple vista idea de su valor. Por no ser simplificable hay que someter-

la á transformaciones tales que nos permitan apreciar la cantidad de magnitud que mide. Supongamos que la fracción sea $\frac{15347}{2435}$, que es irreducible, hallando su parte entera será igual á $6 + \frac{737}{2435}$ y como la fracción complementaria es aún bastante considerable tratemos de reducirla á otra menor sin que altere su valor, para ello, dividiendo los dos términos por el numerador, se obtiene $\frac{737}{2435} = \frac{1}{2435:737} = \frac{1}{3 + \frac{224}{737}}$ y verificando igual operación con

la $\frac{224}{737} = \frac{1}{737:224} = \frac{1}{3 + \frac{65}{224}}$, en la que $\frac{65}{224} = \frac{1}{224:65} = \frac{1}{3 + \frac{29}{65}}$ y continuando

del mismo modo se harían cada vez menores las fracciones complementarias de los cocientes; pero si hacemos las correspondientes sustituciones se tendrá:

$$\frac{15347}{2435} = 6 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{7}{29}}}}}$$

Esta nueva forma de la fracción es la que llamamos *continua*, y se puede definir diciendo que es una expresión compuesta de una parte entera, que puede ser cero, más una fracción que tiene

por numerador á la unidad y por denominador una parte entera más una fracción que tiene por numerador á la unidad y por denominador una parte entera etc. Las partes enteras de los denominadores se llaman *cocientes incompletos* y se llama *reducida* á la parte de la fracción continua comprendida entre el primer cociente incompleto y cada uno de los demás; así la primera reducida será 6, la segunda $6 + \frac{1}{3}$, la tercera $6 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3}}$ y así sucesiva-

mente.

Dado el valor de una fracción cualquiera, ordinaria ó decimal, podría transformarse en continua obedeciendo al procedimiento de divisiones sucesivas que antes hemos apuntado y que es idéntico al que se emplea para hallar el m. c. d. de dos números, como puede comprobarse con el anterior ejemplo. También es fácil pasar de una fracción continua limitada á la ordinaria ó decimal que la dió origen, pero en cambio la indefinida solo puede calcularse por aproximación.

Clasificanse las fracciones continuas indefinidas en periódicas puras y mixtas según que se repitan los cocientes incompletos á

partir del primero ó desde cualquiera otro que no sea aquel, pero guardando el mismo orden que en los números decimales.

Aunque ligeramente, porque este estudio tiene poca aplicación práctica, vamos á examinar algunas propiedades de las reducidas, partiendo de su formación.

Teorema 1.º Una reducida se forma multiplicando el cociente incompleto que la corresponde por los términos de la reducida anterior, y sumando con el producto la anteprecedente miembro á miembro.

Sea la fracción continua

$$F = m + \frac{1}{n + \frac{1}{p + \frac{1}{q + \frac{1}{r + \dots}}}}$$

La primera reducida es $m = \frac{m}{1}$ la segunda es $m + \frac{1}{n} = \frac{m \cdot n + 1}{n}$; la tercera es $m + \frac{1}{n + \frac{1}{p}} = m + \frac{1}{\frac{pn+1}{p}} = m + \frac{p}{pn+1}$

$= m + \frac{p}{n \cdot p + 1} = \frac{m \cdot n \cdot p + m + p}{n \cdot p + 1} = \frac{p(m \cdot n + 1) + m}{n \cdot p + 1}$ que vemos que se forma conforme hemos dicho en el enunciado del teorema, luego para formar la 4.ª multiplicariamos por q á los términos de la 3.ª y les sumariamos al numerador y denominador los de la segunda, luego sería:

$$4.ª = \frac{q(m \cdot n \cdot p + m + p) + (m \cdot n + 1)}{q(p \cdot n + 1) + n}$$

De la demostración de este teorema se deduce que los términos de las reducidas son cada vez mayores, por ser de suma y multiplicación las operaciones que con ellos se efectúan.

Teorema 2.º La diferencia entre cada dos reducidas sucesivas es igual á una fracción que teniendo por numerador á la unidad se forma su denominador del producto de los de aquellas.

Considerando la fracción continua que antes establecimos y tratando de hallar la diferencia entre las reducidas 2.ª y 1.ª, 2.ª y 3.ª, 4.ª y 3.ª, etc., después de reducirlas á común denominador:

$$2.ª - 1.ª = \frac{m \cdot n + 1}{n} - \frac{m}{1} = \frac{m \cdot n + 1 - m \cdot n}{n \cdot 1} = \frac{1}{n}$$

$$2.ª - 3.ª = \frac{m \cdot n + 1}{n} - \frac{m \cdot n \cdot p + m + p}{n \cdot p + 1} = \frac{m \cdot n^2 \cdot p + m \cdot n + n \cdot p + 1}{n(n \cdot p + 1)} - \frac{m \cdot n^2 \cdot p + m \cdot n + n \cdot p}{n(n \cdot p + 1)}$$

$$= \frac{1}{m(n \cdot p + 1)}$$

Examinando ahora los resultados, que desde luego prueban el teorema, se deduce que, siendo $\frac{1}{n} > \frac{1}{n(n \cdot p + 1)}$, las diferencias entre las reducidas son cada vez menores y que, habiendo de restarse de cada reducida par la impar que la antecede ó la que le sigue,

podrá establecerse que una reducida será mayor ó menor que las dos entre quienes se halla situada según sea par ó impar.

Corolario 1.º Las reducidas sucesivas si son pares aumentan y si son impares disminuyen.

Hemos deducido que entre las tres primeras reducidas, la $1.ª < 2.ª > 3.ª$, ahora bien la diferencia $2.ª - 1.ª > 2.ª - 3.ª$ y como á mayor diferencia, para igual minuendo, corresponde menor sustraendo, $1.ª < 3.ª$, esta sería á su vez menor que las siguientes, luego las impares crecen.

Partamos ahora de la desigualdad $2.ª > 3.ª < 4.ª$ y viendo que las diferencias $2.ª - 3.ª > 4.ª - 3.ª$, cuyo sustraendo es igual, corresponde el mayor minuendo á la mayor diferencia, es decir que $2.ª > 4.ª$ y esta sería á su vez mayor que las siguientes, luego las reducidas pares decrecen:

Corolario 2.º Cualquiera reducida par es mayor que las reducidas impares.

Del corolario anterior deducimos que estableciendo separadamente las reducidas pares é impares por orden de magnitud: $\left. \begin{array}{l} 1.ª < 3.ª < 5.ª < 7.ª \\ 2.ª > 4.ª > 6.ª > 8.ª \end{array} \right\}$ Como la última reducida par, que es la menor de las de esta clase, es mayor que la última impar, que es á su vez la mayor de todas las de la suya, no cabe duda que cualquiera par supera á la mayor de las impares y por tanto á cualquiera de estas.

Aproximándose por defecto el valor de las reducidas impares al de la fracción continua de que proceden y las pares por exceso, se deduce que el valor exacto de ella está comprendido entre cada dos reducidas sucesivas y que es tanto más próximo cuanto menos se diferencien entre si las reducidas, es decir, cuanto más distantes se hallen de la primera.

Escolio. Las propiedades establecidas en los corolarios anteriores nos permiten apreciar el título de fracciones convergentes con que algunos designan á las reducidas, pues en efecto unas en su crecimiento y otras en su disminución de valor tienden á aproximarse al de la fracción continua total, que es una constante siendo las variables los valores de las reducidas, esa constante se llama *límite* y es superior para las reducidas impares que aunque aumentan no llegan á igualarle, é inferior para las pares que al disminuir tampoco le alcanzan.

Lo antes expuesto se refiere á las fracciones continuas indefinidas, pues en las limitadas pueden determinarse con exactitud su valor que será el mismo de la última reducida.

Para calcular con un grado de aproximación determinado el valor de la fracción continua indefinida, basta hallar una reduci-

da cuyo denominador exceda al de la aproximación, ó en la anterior siempre que el cuadrado de su denominador cumpla con igual condición.

CAPÍTULO 19.

TEORÍA LOGARÍTMICA

PROGRESIONES POR DIFERENCIA



Se llama progresión aritmética ó por diferencia una série de números tales que la diferencia entre cada dos consecutivos es constante. Dicha diferencia se denomina *razón* de la progresión y los números que forman esta son los *términos*. La progresión puede ser creciente cuando los términos van aumentando y decreciente cuando van disminuyendo. Es *limitada* si consta de un número de términos conocido y es *indefinida* cuando no se conocen el término primero ó último ó ninguno de los dos. En la progresión limitada el primero y último término se llaman extremos, en la indefinida los extremos son arbitrarios.

Se escribe una progresión por diferencia poniendo al principio los dos puntos de la división separados por una pequeña línea horizontal y separando los términos por medio de un punto, en esta forma, $\dot{-} 5 . 7 . 9 . 11 . 13 \dots$ y se lee: *como cinco es á siete, es á nueve, es á once*, etc., pudiendo decirse tambien: *como cinco es aritméticamente á siete* etc.

La progresión: $\dot{-} 9 . 12 . 15 . 18 . 21 \dots$ es creciente y su razón es 3, en cambio la progresión $\dot{-} \dots 24 . 20 . 16 . 12 \dots$ es decreciente y su razón es 4.

De la simple inspección de los términos de ambas progresiones, se deduce que en la creciente todo término es igual al anterior más la razón y en la decreciente un término cualquiera es igual al que le antecede menos la razón. Tanto en la una como en la otra conocido el primer término y la razón se pueden deducir de aquél los demás. Así la progresión $\dot{-} 9 . 12 . 15 . 18 . 21 \dots$ se puede escribir también bajo esta forma $\dot{-} 9 . (9+3) . (9+2 \cdot 3) . (9+3 \cdot 3) . (9+4 \cdot 3) \dots$ lo cual permite formular el siguiente principio: en toda progresión aritmética creciente, un término cualquiera es igual al primero aumentado en el producto de la razón por el número que exprese los términos que hay entre el primero y el que se considera, y que por lo tanto el último siempre

será igual al primero más el producto de la razón por el número de términos de que conste la progresión menos uno. En la anterior progresión $21=9+4.3$, puesto que 21 ocupa el quinto lugar.

En la progresión decreciente un término cualquiera es igual al primero disminuído en el producto de la razón por el número que exprese los términos que hay á la izquierda del que se considera; así en la progresión $\therefore 24. 20. 16. 12$, $12=24-(4.3)$, puesto que á la izquierda de este término hay 3.

Teorema 1.º *En toda progresión por diferencia, un término cualquiera es igual á otro de los que le anteceden más ó menos tantas veces la razón como términos hay entre ambos, ó á uno de los que le siguen menos ó más tantas veces la razón como lugares hay desde el considerado hasta el que le sigue, según la progresión sea creciente ó decreciente.*

Supongamos la progresión creciente $\therefore t, . t^2 . t \dots p . t \dots p+1 \dots t . p+1 \dots t^q$, cuya razón sea r , se podrán establecer las igualdades siguientes.

$t_{p+1}=t_p+r$	}	Sumando ordenadamente: $t_{p+1}+t_{p+2}+t_{p+3}+\dots+t_{p+m}=t_p+t_{p+1}+t_{p+2}\dots$ $+t_{p+(m-1)}+m. r$, y suprimiendo cantidades iguales de ambos terminos: $t_{p+m}=t_p+m. r$, ó $t_p=t_{p+m}-m. r$.
$t_{p+2}=t_{p+1}+r$		
$t_{p+3}=t_{p+2}+r$		
\dots		
$t_{p+m}=t_{p+(m-1)}+r$		

Si la progresión hubiera sido decreciente:

$t_{p+1}=t_p-r$	}	y sumando: $t_{p+1}+t_{p+2}+t_{p+3}+\dots+t_{p+m}=\dots$ $t_p+t_{p+1}+t_{p+2}+\dots+t_{p+(m-1)}-m. r$ y suprimiendo términos comunes: $t_{p+m}=t_p-m. r$ ó $t_p=t_{p+m}+m. r$; con lo cual queda aprobada la proposición.
$t_{p+2}=t_{p+1}-r$		
$t_{p+3}=t_{p+2}-r$		
\dots		
$t_{p+m}=t_{p+(m-1)}-r$		

El teorema antes demostrado nos proporciona el medio más fácil de hallar cualquiera término de una progresión por diferencia, conociendo la razón y alguno de los que antecedan ó sigan á aquél así como el sentido de la progresionalidad.

Ejemplos: 1.º Hallar el 5.º término de una progresión por diferencia creciente cuyo 2.º término sea 6 y la razón 2.

5.º = 2.º + 3 × 2 = 6 + 6 = 12.

La progresión sería: $\therefore 4 . 6 . 8 . 10 . 12$, en la cual vemos que se cumplen las condiciones exigidas.

2.º Hallar el 4.º término de una progresión por diferencia creciente, cuyo 9.º sea 215 y 20 la razón.

$$4.º = 9.º - 5 \times 20 = 215 - 100 = 115.$$

Siendo el 115 el 4.º, el 5.º sería 135, el 6.º 155, el 7.º 175, el 8.º 195 y el 9.º 215.

3.º Hallar el 8.º término de una progresión por diferencia de creciente, cuyo 3.º sea 212 y la razón 4.

$$8.º = 3.º - 5 \times 4 = 212 - 20 = 192. \text{ Los terminos serían: } \left. \begin{array}{l} 3.º - 212 \\ 4.º - 208 \\ 5.º - 204 \\ 6.º - 200 \\ 7.º - 196 \\ 8.º - 192 \end{array} \right\}$$

Teorema 2.º *En toda progresión por diferencia la suma de términos extremos es igual á la suma de dos términos cualesquiera equidistantes de aquellos.* Sea la progresión $\therefore t_1 . t_2 . t_3 \dots t_{m+1} \dots t_{q-m} \dots t_q$, en la cual á t_{q-m} le faltan m lugares para llegar al último y t_{m+1} es el que se halla á los m términos del primero; si la progresión es creciente:

$$\left. \begin{array}{l} t_{m+1} = t_1 + m \cdot r \\ t_{q-m} = t_q - m \cdot r \end{array} \right\} \text{ y sumando ordenadamente: } t_{m+1} + t_{q-m} = t_1 + t_q.$$

Si la progresión fuera decreciente:

$$\left. \begin{array}{l} t_{m+1} = t_1 - m \cdot r \\ t_{q-m} = t_q + m \cdot r \end{array} \right\} \text{ y } t_{m+1} + t_{q-m} = t_1 + t_q.$$

lo que demuestra el teorema.

Teorema 3.º *La suma de todos los términos de una progresión por diferencia limitada, es igual á la semisuma de los extremos multiplicada por el número que exprese los términos de que la progresión consta.*

Representemos por S la suma de todos los términos de la progresión $\therefore t_1 . t_2 . t_3 \dots t_{q-2} . t_{q-1} . t_q$, siendo igual el valor de una suma

cualquiera que sea el orden en que se tomen los sumandos.

$$\begin{array}{l} S = t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_{q-2} + t_{q-1} + t_q \\ S = t_q + t_{q-1} + t_{q-2} + \dots + t_3 + t_2 + t_1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{luego } 2S = (t_1 + t_q) + (t_2 + t_{q-1}) + (t_3 + t_{q-2}) + \dots \end{array} \right.$$

$\frac{1}{2}(t_q + t_1)$ y cómo las sumas encerradas entre paréntesis ó lo son de extremos ó de términos equidistantes, que sabemos que son iguales, y como de estas sumas hay tantas como términos tiene la progresión que son q , $2S = (t_1 + t_q) q$ y dividiendo por 2, $S = \frac{t_1 + t_q}{2} \times q$, que prueba el enunciado.

Ejemplo: ¿Qué valor tendrá la suma de los veinte primeros números pares?

Los 20 números pares primeros forman progresión aritmética cuya razón es 2 el vigésimo será igual al $1.^\circ + 19 \times 2 = 40$, la suma será pues $\frac{2+40}{2} \times 20 = 420$.

INTERPOLACIÓN DIFERENCIAL

Interpolación un cierto número de medios diferenciales entre dos cantidades dadas, es formar una progresión por diferencia que, teniendo por extremos á dichas cantidades, conste del número de términos que se quieren interpolar más los dos conocidos. Lo esencial en las interpolaciones es determinar la razón, pues averiguado el valor de ésta, como son conocidos los dos términos primero y último, pueden descubrirse los demás en función de aquella y uno cualquiera de estos.

Y recordando que en las progresiones por diferencia el conocimiento de dos términos cualesquiera nos puede conducir al valor de la razón, vemos que no ofrece dificultad alguna la investigación de esta.

Sabemos, en efecto, por lo demostrado en el teorema 1.º que: $t_{p+m} = t_p + m.r$ ó $t_{p+m} = t_p - m.r$, según fuera creciente ó de

creciente la progresión, en ambas igualdades puede despejarse el valor de r , siendo en la primera $r = (t_{p+m} - t_p) : m$ y en la segunda, $r = (t_p - t_{p+m}) : m$. Aplicando estas fórmulas á la interpolación de n medios diferenciales entre a y b y suponiendo $a > b$, la razón $r = \frac{a-b}{n+1}$, porque si la progresión formada, que constaría

de $n+2$ términos, fuera creciente, $a = b + (n+1).r$ y $r = \frac{a-b}{n+1}$, si fuera decreciente $b = a - (n+1).r$ y $r = \frac{a-b}{n+1}$, que nos confirma que para hallar la razón de una interpolación diferencial, basta dividir la diferencia que existe entre las cantidades dadas por el número que represente los términos que se han de interpolar incrementado en una unidad.

Ejemplo: Interpolando entre 4 y 22,5 medios diferenciales.

$$R = \frac{22-4}{6} = \frac{18}{6} = 3: \text{ la progresión formada sería } 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13 \cdot 16 \cdot 19 \cdot 22.$$

Interpolando entre cada dos términos de una progresión por diferencia el mismo número de medios diferenciales se formaría una nueva progresión, porque como habría que dividir las diferencias entre cada dos términos por el número que indicara los medios á intercalar incrementado en una unidad y como aquella diferencia es constantemente igual á la razón de la progresión, las razones de las interpolaciones resultarían idénticas y además el último término de cada progresión parcial que se formara con las cantidades interpoladas sería el primero de la progresión siguiente, luego con todas las progresiones se podría formar una sola.

PROGRESIONES POR COCIENTE

Progresión geométrica ó por cociente es una série de números tales que el cociente entre cada dos consecutivos es constante. Dicho cociente se llama *razón* de la progresión y *términos* á los números que la forman.

Cuando la progresión geométrica es creciente cada término se forma multiplicando al anterior por la razón y si es decreciente dividiendo aquél por esta. Se conservan los nombres de limitada, indefinida, etc. que hemos dado á conocer en la lección anterior.

Una progresión geométrica se escribe poniendo delante el signo \therefore , que se lee *como*, y separando entre sí los términos con los dos puntos de la proporción ó división y se lee: *como a es geoméricamente á b es geoméricamente á c*, etc., ó simplemente: *como a es á b, es á c* etc.

Todos los términos de las progresiones geométricas pueden ponerse en función del primero y de la razón, pues, según antes decíamos, multiplicando ó dividiendo por esta al término conocido se hallará el siguiente y volviendo á repetir la operación se hallará otro y procediendo del mismo modo pueden formarse los que se deséen. Vemos, en efecto que las progresiones se pueden poner bajo estas formas:

$$\therefore 3:12:48:192:768:3072$$

$$\therefore 12500:2500:500:100:20$$

$$\therefore 3:(3 \times 4):(3 \times 4^2):(3 \times 4^3):(3 \times 4^4):(3 \times 4^5)$$

$$\therefore 12500:\frac{12500}{5}:\frac{12500}{5^2}:\frac{12500}{5^3}:\frac{12500}{5^4}$$

El último término de una proporción geométrica creciente ó decreciente será igual al primero multiplicado ó dividido por la potencia de la razón cuyo índice exprese el número de términos de que conste la progresión menos uno.

Teorema 1.º *En toda progresión geométrica, creciente ó decreciente, un término cualquiera es igual á otro de los que le anteceden multiplicado ó dividido por la potencia de la razón cuyo exponente indique los términos que hay entre ambos, ó á uno de los que le siguen dividido ó multiplicado por una potencia de la razón cuyo grado exprese los lugares que hay desde el que se considera hasta aquél en función del cual se vá á determinar. Sea la progresión creciente $\therefore T: T \cdot R: T \cdot R^2: T \cdot R^3: \dots: T \cdot R^{p-1}: T \cdot R^p$, cuya razón sea R, va-*

mos á buscar el valor del término T_{p+m} que se halla á los m términos de T_p , en función de este, para ello estableceremos el valor de los términos desde T_{p+1} mediante el anterior y la razón lo que dá lugar á las igualdades siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} T_{p+1} = T_p \cdot R \\ T_{p+2} = T_{p+1} \cdot R \\ T_{p+3} = T_{p+2} \cdot R \\ \dots \\ T_{p+m} = T_{p+(m-1)} \cdot R \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{que multiplicadas miembro á miembro dán:} \\ T_{p+1} \cdot T_{p+2} \cdot T_{p+3} \cdot \dots \cdot T_{p+m} = T_p \cdot T_{p+1} \cdot T_{p+2} \cdot \dots \cdot T_{p+m} \cdot R_m \\ \text{y suprimiendo términos iguales en ambos miembros, queda } T_{p+m} = T_p \cdot R^m, \text{ de donde se deduce} \\ \text{también que } T_p = \frac{T_{p+m}}{R^m}. \end{array}$$

Si la progresión hubiera sido decreciente:

$$\left. \begin{array}{l} T_{p+1} = \frac{T_p}{R} \\ T_{p+2} = \frac{T_{p+1}}{R} \\ T_{p+3} = \frac{T_{p+2}}{R} \\ \dots \\ T_{p+m} = \frac{T_{p+(m-1)}}{R} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{que multiplicadas producen la igualdad:} \\ T_{p+1} \cdot T_{p+2} \cdot T_{p+3} \cdot \dots \cdot T_{p+m} = \frac{T_p \cdot T_{p+1} \cdot T_{p+2} \cdot \dots \cdot T_{p+m}}{R^m}, \text{ y} \\ \text{suprimiendo cantidades iguales de ambos miembros: } T_{p+m} = \frac{T_p}{R^m}, \text{ de la cual se deduce} \\ \text{que } T_p = T_{p+m} \cdot R^m. \end{array}$$

La aplicación de este teorema nos permite hallar cualquiera término de una progresión conociendo uno anterior ó posterior y la razón.

Ejemplo. 1.º Hallar el 4.º término de una progresión geométrica creciente cuya razón es 2 y el segundo término 14.

4.º = 2.º × 2² = 14 × 4 = 56. La progresión sería: ∴ 7:14:28:56

2.º Hallar el tercer término de una progresión geométrica creciente cuya razón es 4 y el 9.º término 393.216.

3.º = 9.º : 4⁸ = 393216 : 4096 = 96

Siendo 96 el término 3.º, el 4.º = 96 × 4 = 384, el 5.º = 384 × 4 = 1536, el 6.º = 1536 × 4 = 6144, el 7.º = 6144 × 4 = 24576, el 8.º = 24576 × 4 = 98304, y el 9.º = 98304 × 4 = 393216.

3.º Hallar el 5.º término de una progresión decreciente cuyo 2.º fuera 3072 y la razón 4.

5.º = 2.º : 4³ = 3072 : 64 = 48, Siendo el 2.º: 3072; el 3.º: 768; el 4.º 192 y el 5.º: 48.

Teorema 2.º *En toda progresión geométrica el producto de dos términos equidistantes de los extremos, es constantemente igual al de dichos extremos.*

Sea la progresión ∴ T₁ : T₂ : T₃... T_{p+1} : T_{q-p} T_q; en la que T_{p+1} dista del primero *p* términos y T_{q-p} se halla *p* términos

antes del último, si aquella fuese creciente: $\left. \begin{matrix} T_{p+1} = T_1 R^p \\ T_{q-p} = T_q R^{-p} \end{matrix} \right\}$ y mul-

tiplicando: T_{p+1} · T_{q-p} = T₁ · T_q · R^p · R^{-p} = T₁ · T_q. Si fuera decre-

ciente: $\left. \begin{matrix} T_{p+1} = T_1 R^p \\ T_{q-p} = T_q R^{-p} \end{matrix} \right\}$ de donde T_{p+1} · T_{q-p} = T₁ · T_q · R^p · R^{-p} = T₁ · T_q, que prueban el teorema.

Teorema 3.º *El producto de los términos de una progresión geométrica es igual a la raíz cuadrada del producto de los extremos elevada a una potencia igual al número de términos de que la progresión conste.* Representando por P el producto de los *q* términos de la progresión ∴ T₁ : T₂ : T₃... T_{q-1} T_q se verificará que, como el orden de factores no altera el valor del producto:

P = T₁ · T₂ · T₃... T_{q-1} · T_q } multiplicando ordenadamente:

P = T_q · T_{q-1}... T₂ · T₁ } P² = (T₁ · T_q) (T₂ · T_{q-1})...

(T_{q-1} · T₂) (T₁ · T_q), en este segundo miembro hay *q* factores iguales que son productos de extremos ó de términos equidistantes, luego pueden ponerse bajo forma potencial y quedará P² =

(T₁ · T_q)^q y extrayendo la raíz cuadrada P = √(T₁ · T_q)^q, conforme al enunciado.

Teorema 4.º *En toda progresión geométrica creciente la suma de sus términos es igual al último multiplicado por la razón, menos el primero, dividida esta diferencia por el exceso que la razón lleve á la unidad; y si la progresión es decreciente, dicha suma se obtiene restando del primero el producto del último por la razón y dividiendo á la diferencia por la que existe entre la unidad y la razón.*

Sea la progresión $\therefore T_1 : T_2 : T_3 \dots T_m$, creciente, y su razón R ; sabemos que en toda proporción la suma de antecedentes es á la de consecuentes como un antecedente es á su consecuente, principio generalizable á las progresiones que estan formadas por una série de proporciones continuas de igual razón, en las que los términos pueden ser antecedentes menos el último y también consecuentes á excepción del primero. Si pues representamos por S la suma de todos los términos, se podrá establecer que $S - T_m : S - T_1 :: T_1 : T_2$ y como $T_1 : T_2 :: 1 : R$, se tendrá $S - T_m : S - T_1 :: 1 : R$; en la cual $(S - T_m) R = S - T_1$, es decir $S \cdot R - T_m \cdot R = S - T_1$ y pasado S al primer miembro y $T_m \cdot R$ al segundo, $S \cdot R - S = T_m \cdot R - T_1$ y sacando factor común á S , queda $S(R - 1) = T_m \cdot R - T_1$ y dividiendo por $R - 1$, $S = \frac{T_m \cdot R - T_1}{R - 1}$, conforme á la primera parte del enunciado.

Si la progresión fuera decreciente $T_1 : T_2 :: R : 1$ teniendo en cuenta esta proporción y la $S - T_m : S - T_1 :: T_1 : T_2$, se formaría la siguiente $S - T_m : S - T_1 :: R : 1$, en la que $S - T_m = (S - T_1) R = S \cdot R - T_1 \cdot R$ y $S - S \cdot R = T_m - T_1 \cdot R$ ó $S(1 - R) = T_m - T_1 \cdot R$ $S = \frac{T_m - T_1 \cdot R}{1 - R}$ que demuestra la segunda parte del enunciado.

INTERPOLACIÓN PROPORCIONAL

Interpolares proporcionalmente cierto número de medios entre dos cantidades dadas, es formar una progresión por cociente que conste del número de términos que se quieren interpolar más los dos conocidos. Habrá pues que investigar la razón de esta progresión, para lo cual nos basta el conocimiento de los dos términos que han de ser sus extremos.

Supongamos que entre los números p y q quieran interpolarse $(n-1)$ medios proporcionales, según lo demostrado en el teorema 1.º representando por x , la razón y siendo $q > p$, $q = p \cdot x^n, \dots$
 $x = \sqrt[n]{\frac{q}{p}}$ Si $q > p$ y el cociente es potencia *enésima* perfecta la razón de la interpolación tendrá forma entera, y si $q < p$, su forma será fraccionaria.

Luego la razón de una interpolación proporcional se halla extrayendo la raíz del grado inmediatamente superior al número de términos que se deseen interpolar del cociente obtenido al dividir los extremos conocidos.

Ejemplo: Interpolar entre 7 y 448 dos medios proporcionales.

$x = \sqrt[3]{\frac{448}{7}} = \sqrt[3]{64} = 4$ } los números interpolados serían 28 y 112
 y se formará la progresión :: 7 : 28 : 112 : 448.

Interpolando entre cada dos términos de una progresión por cociente un mismo número de medios proporcionales se forma una nueva progresión cuya razón sería el resultado de extraer de la razón de la primitiva progresión, la raíz de grado igual al número de términos interpolados más uno.

LOGARITMOS

Cuando dos progresiones una por diferencia y otra por cociente, que empiezan respectivamente por cero y la unidad, se colocan de modo que sus términos se correspondan, forman un *sistema de logaritmos*, llamándose números a los términos de la progresión por cociente y *logaritmos* a los de la progresión por diferencia.

Parece deducirse de esta definición que solo tendrán logaritmos los números mayores que la unidad, sin embargo observando que las progresiones podían haber decrecido en lugar de aumentar, vemos que también los números inferiores a la unidad tienen logaritmos, y en general podremos decir, que un sistema de logaritmos está formado por una progresión por cociente y otra por diferencia, cuyos términos se corresponden, sin otra limitación que la de corresponderse el cero de la por diferencia con la unidad de la otra. Así las progresiones indefinidas

$\left. \begin{array}{l} 1 : \dots : \frac{1}{C^n} : \dots : \frac{1}{C^2} : \frac{1}{C} : 1 : C : C^2 : C^3 : \dots : C^n : \dots \\ \dots : -nr : -2r : -r : 0 : r : 2r : 3r : \dots : nr : \dots \end{array} \right\}$ forman un sistema lo-

garitmico en el cual $-nr$ es el logaritmo de $\frac{1}{C^n} < 1$ y nr lo es de $C^n > 1$.

Para indicar el logaritmo de un número se le antepone á éste la abreviación log. separándolos por el signo de igualdad.

Así: $\log C^3 = 3r$.

Base de un sistema logaritmico es el número de la progresión por cociente que se corresponde con la unidad de la por diferencia. Si en el sistema antes apuntado $r=1$, la base sería C .

Cualquiera que sea el sistema de logaritmos siempre el log. $1=0$ y el log. de la base $=1$.

Interpolando un mismo número de medios en las dos progresiones que forman un sistema de logaritmos pueden aproximarse entre sí los números y hacer que una gran parte tenga logaritmos y no decimos todos porque hemos visto que para que un número pueda ser interpolado en una progresión por cociente ha de cumplir condiciones especiales. Fácilmente podríamos probar que estas condiciones son que contenga iguales factores primos que la razón, con potencias tales que guarden con los de los de ésta una relación constante. Pero tanto ésta como otras demostraciones, cuyo uso es poco frecuente en la práctica, las pasamos por alto á fin de no hacer laborioso un estudio que tampoco es objeto de grandes aplicaciones.

Siempre que en un sistema de logaritmos sea la base mayor que la unidad, el log. $0=-\infty$, el log. $\infty=\infty$, todo número mayor que la unidad tendrá un logaritmo mayor que cero y á mayor número corresponderá mayor logaritmo. Si la base fuera menor que la unidad pasaría lo contrario.

PROPIEDADES GENERALES COMUNES A TODOS LOS SISTEMAS

Teorema 1.º *El logaritmo de un producto es igual á la suma de los logaritmos de sus factores.* Sean $a.b=c$, para lo cual, si forman parte de una progresión por cociente, a ó b tendrán que hallarse con respecto á la unidad á la misma distancia que el otro factor esté de c , por ser el producto de dos términos equidistan-

NOTA. Se llaman *cantidades ó números negativos* á los que existen de modo contrario á los hasta aquí estudiados ó *positivos*. Se comprende su existencia admitiendo á cero, no como negación de cantidad, sino como limite inferior de los números positivos y superior de los negativos. En toda diferencia, cuando el sustraendo es mayor que el minuendo, el resto tiene que ser un número que sumado con el sustraendo dé el minuendo y es claro que deberá existir de modo contrario á él para que al verificarse la adición resulte un número inferior á uno de los sumandos. Si A debe 5 pesetas á B y le entrega 12, la diferencia $5-12=-7$ quiere decir que no solo habrá saldado A su débito con B sino que éste resultará ahora adeudándole al primero 7 ptas. En adelante toda cantidad que lleve antepuesto el signo—la consideraremos como negativa y representará una cantidad á disminuir de las que no lleven signos ó tengan el + que serán positivas y supondrán aumento.

(Para adquirir mayores explicaciones sobre esta materia véase el tratado de Algebra).

tes de los extremos igual al de estos; pero en la progresión aritmética que se correspondiera con aquella, el log. de a ó b distaría de cero tanto como el log. del otro factor distara del log. de c , y como la suma de términos extremos es igual á la de los términos que equidisten de ellos, $\log. c + 0 = \log. a + \log. b$, es decir $\log. (a \cdot b) = \log. a + \log. b$, porque c puede sustituirse por los dos factores á cuyo producto es igual.

Esta proposición es cierta ya sean los números mayores ó menores que la unidad y estén ó nó comprendidos en las progresiones. En este último caso tomaríamos por defecto ó exceso los números más próximos á ellos.

Corolario 1.º El logaritmo de un cociente es igual á la diferencia entre los logaritmos del dividendo y divisor. Sea $A : B = C$, en la que $A = B \cdot C$, y conforme á lo demostrado en el teorema $\log. A = \log. B + \log. C$, restando ahora $\log. B$ de ambos miembros de la igualdad, $\log. A - \log. B = \log. C$ y como $C = A : B$, queda evidenciado que $\log. (A : B) = \log. A - \log. B$.

Corolario 2.º El logaritmo de una fracción se obtiene restando del log. del numerador el del denominador. Ya sabemos que fracción y cociente son expresiones del mismo valor y por consiguiente lo demostrado en el corolario anterior es generalizable á éste.

Corolario 3.º El logaritmo de la potencia de un número es igual producto del exponente por el logaritmo de la base. Sea logaritmo A^n , sabemos que A^n representa un producto de n factores iguales á A ; que hacen $\log. A^n = \log. (A \cdot A \cdot A \dots A)$ y aplicando el teorema anterior, $\log. A^n = \log. A + \log. A + \dots + \log. A = n \log. A$, puesto que los n sumandos iguales se pueden poner bajo esta forma.

Corolario 4.º El logaritmo de la raíz de un número se obtiene dividiendo el log. del número por el índice de la raíz. Sea $\sqrt[n]{A} = R$, en donde $A = R^n$ y $\log. A = n \log. R$, dividiendo por n los dos miembros de esta igualdad, $\log. \frac{A}{n} = \log. R = \log. \sqrt[n]{A}$.

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS DECIMALES. (I)

Una progresión por cociente cuyos términos son las diversas potencias de 10, empezando por la unidad, que es la potencia cero de todos los números, y una progresión por diferencia, formada por la serie natural de los números, dan origen al sistema de

(1) Llámaseles también *vulgares* ó de *Briggs* para distinguirlos de los *neperianos* ó de *Neper*, inventor de esta parte de la ciencia.

cimal de logaritmos, único de que se hace aplicaciones en la actualidad. (1).

$$\begin{array}{l} \therefore 1 : 10 : 10^2 = 100 : 10^3 = 1.000 : 10^4 = 10.000 \dots \\ \therefore 0 . 1 . 2 \quad . \quad 3 \quad . \quad 4 \dots \dots \dots \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \therefore 1 : 10 : 10^2 = 100 : 10^3 = 1.000 : 10^4 = 10.000 \dots \\ \therefore 0 . 1 . 2 \quad . \quad 3 \quad . \quad 4 \dots \dots \dots \end{array}} \right\} \text{Estas dos} \\ \text{progresiones indefinidas, originan el sistema decimal de logaritmos. Los términos de la progresión por cociente se llaman como ya hemos dicho números y también antilogaritmos y los de la progresión por diferencia son los logaritmos.}$$

Sabiendo que por sucesivas interpolaciones pueden los términos de las progresiones aproximarse á voluntad del calculador, difiriendo cada dos en un error tan pequeño como se quiera, se deduce que para conseguir que la progresión por cociente contenga la serie natural de los números, al interpolar los medios diferenciales en la otra progresión, para obtener los logaritmos de aquellos, tendrán estos que diferenciarse en la parte decimal que se aprecie. De aquí puede deducirse que *los únicos números comensurables que tienen logaritmos exactos son las potencias de 10*. La simple inspección de las progresiones también lo demuestra, porque en ellas se ve que $\log. 1=0$, $\log. 10=1$, $\log. 10^2=2$, $\log. 10^3=3\dots$ y finalmente $\log. 10^n=n$.

Los logaritmos de los números pueden contener parte entera, llamada *característica* y parte decimal ó *mantisa*.

Teorema 1.º *La característica del log. de una potencia de 10 consta de tantas unidades como indique el grado de la potencia.* Hemos visto antes que $10^n=n \log. 10$ y como $\log. 10=1$, $\log. 10^n=n$. En general, sabemos que el log. de la potencia de un número es igual al producto del exponente por el log. de la base y como 10 es la base del sistema y tiene por log. la unidad, el teorema es cierto.

Corolario. La mantisa del log. de un número no sufre alteración aunque se multiplique ó divida á éste por una potencia de 10. En efecto el $\log. (N. 10^m) = \log. N. + m$ y $\log (N : 10^m) = \log. N - m$, es decir que la alteración por aumento ó disminución la experimenta la característica, pero no la mantisa.

Teorema 2.º *La característica del log. de un número entero consta de tantas unidades como cifras menos una tenga dicho número.* Sea N. un número de n cifras, desde luego se puede establecer que $10^{n-1} < N < 10^n$ y tomando los logaritmos, $n-1 < \log. N < n$; habiendo de estar el log. N comprendido entre n y n-1, que se diferencian en una unidad entera, constará de n-1 unidades más la parte decimal.

(1) En el Algebra nos ocuparemos de los logaritmos deducidos del cálculo exponencial.

Corolario. La característica del log. de un número decimal que carezca de parte entera, consta de tantas unidades negativas como lugares hay desde la coma á la primera cifra significativa de aquél. Sea $0^{\circ} \dots m n p q$ un número decimal en el cual entre la coma y la cifra m hay $c-1$ ceros, multiplicando á dicho número por 10^c la mantisa del log. del que resultara sería igual á la del log. de $0^{\circ} \dots m n p q$, pero la característica habría aumentado en c unidades y restándolas de la característica del logaritmo del número $m^{\circ} n p q$ que habia resultado de multiplicar por 10 , como esta característica sería cero, por no tener el número más cifra de enteros que m , quedaría como $\log -c^{\circ}$ más la mantisa correspondiente.

Complemento logarítmico es lo que le falta á la parte decimal de un log. para valer la unidad entera.

Teorema 3.º *Cuanto mayores sean dos números y menor su diferencia tanto menor es la diferencia entre sus logaritmos.*

Sean N y $N + D$ dos números, tan grandes ó pequeños como se quiera, la diferencia entre sus logaritmos sabemos que equivale al log. de un cociente, es decir, $\log. (N + D) - \log. N = \log. \left(\frac{N + D}{N}\right) = \log. \left(1 + \frac{D}{N}\right)$ y como el log. de 1 es cero, cuanto menor sea D y mayor N tanto menor será $\log. \left(1 + \frac{D}{N}\right)$.

La diferencia entre los logaritmos de dos números consecutivos $(N+1)$ y N , que es según la fórmula anterior $\log. \left(1 + \frac{1}{N}\right)$ se llama *incremento logarítmico*.

DESCRIPCIÓN Y USO DE LAS TABLAS DE LOGARITMOS

Entre las tablas de logaritmos de autores españoles de que disponíamos, hemos elegido para hacer su descripción las del ilustrado Catedrático del Instituto de Logroño Sr. Sánchez Ramos, cuya cuarta edición admirablemente estereotipada acaba de publicarse (Junio de 1901). Estas tablas, dispuestas de modo semejante á las de Schron, son claras, están perfectamente calculadas y su precio (6 pesetas) es más económico que el de todas sus similares. Aunque á la cabeza de ellas hace su autor una descripción completa, vamos á ocuparnos brevemente de su disposición y uso, solo en la parte concerniente á los log. de los números, que es la que afecta á la aritmética.

Comprende la tabla I los logaritmos vulgares ó decimales de los 30.000 primeros números enteros, calculados con seis cifras

de aproximación, (páginas 1 á 63) y consta de dos partes, la primera, dispuesta á *simple entrada* (páginas 1 á 5 inclusives), contiene las mantisas de los logaritmos desde 1 á 999 en las columnas encabezadas con la abreviación *Log.* y á su izquierda en columnas á cuya cabeza hay la inicial *N* los números á que corresponden. La segunda parte (páginas 6 á 63) á *doble entrada*, contiene las mantisas de los logaritmos de los números desde 1000 á 29999. El encasillado de esta segunda parte es en cada página, de izquierda á derecha y prescindiendo de las dos primeras casillas ahora innecesarias, *N* para los números; *L O* que contiene las dos primeras cifras comunes á todas las mantisas que hay en el grupo de su derecha, más las cuatro cifras que completan las mantisas de los números que hay en la casilla anterior y de los que resultan agregando á estos un cero; 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, en éstas casillas se contienen las cuatro últimas cifras de las mantisas de los logaritmos de los números que resultan agregando á continuación de los que figuran en la primera las cifras del encabezamiento: ejemplo, en la página 16 frente al n.º 603 se hallan en la columna *L.O* las dos cifras 78, comunes á todas las mantisas de los números hasta 617, en que dichas cifras varían y son 79. Los números 603 y 6030 tienen como mantisa (col. *L. O*) 780317, para las de los números 6031, 6032, hasta 6039, las dos primeras cifras son 78 y las cuatro últimas se buscan en la columna que encabece la cifra con que termine el número, así la de 6037 es 780821.

Cuando las cifras lleven á su izquierda una estrellita, al formar la mantisa se tomarán las dos primeras cifras correspondientes al grupo que siga al que éstas pertenecen.

La indicación — que aparece debajo de algunas cifras solo significa que están calculadas por exceso en menos de media unidad de su orden.

A la derecha de las casillas antes dichas y en esta segunda parte de las tablas, hay otra encabezada con las letras *P.P* (partes proporcionales) que contienen las diferencias entre cada dos mantisas consecutivas y se llaman *diferencias tabulares*, figurando éstas en números de tipo mayor al empleado en las tablas. Estas diferencias encabezan unas casillas á cuya izquierda hay los números desde 1 á 9 y á la derecha las partes proporcionales correspondientes, cuya parte entera pertenece al orden decimal de las últimas cifras de las mantisas (sexto).

Los problemas cuya resolución nos podemos proponer por medio de las tablas, son dos: 1.º *Dado un número hallar su logarit-*

mo y 2.º Conociendo el logaritmo de un número determinar éste, que es lo que se llama buscar el antilogaritmo.

Problema 1.º Dado el número hallar su logaritmo. Puede ocurrir que el número esté ó no comprendido en las tablas. Si está, basta buscar el número y á su derecha hallaremos el logaritmo.

Ejemplos. Logaritmo 694 = 2'841359 (pag 17).

Logaritmo 14548: se busca en la pág. 33 el log. de 1454 (línea 5.ª) cuya mantisa tiene por dos primeras cifras 16 y las cuatro restantes se buscan en dicha línea debajo de la casilla que encabeza el 8 y son 2803, y como la característica es 4, se tendrá
log. 14548 = 4'162803.

Log. 4'326: se busca el de 432 (pág. 12), las dos cifras primeras son 63 y las cuatro últimas (casilla 6) son 6087, la característica es cero, porque el número solo tiene una cifra entera, luego log. 4'326 = 0'636087.

Log. 0'00029543: la característica será -4, para la mantisa se busca la de 2954 (en la col.ª 3) y se tiene log. 0'00029543 = 4'470455 (pág. 63).

Si el número dado no está comprendido en las tablas, para lo cual es preciso que conste de cinco cifras significativas siendo la primera de la izquierda mayor que 2, se buscará el log. del número que resulte considerando las cifras de orden superior que formen un número que esté en las tablas y multiplicando luego á la parte que no estuviera comprendida por la diferencia tabular, se incrementaría en la parte entera de este producto al log. aproximado antes supuesto y el resultante sería el que se buscaba.

Sea $N + D$ un número no comprendido en las tablas pero si entre N y $N + 1$ cuyos logaritmos podemos encontrar en ellas, representemos por l el log. de N , el de $N + 1$ será $l + \Delta$ siendo Δ la diferencia tabular y como el log. de $N + D$ tendrá que hallarse comprendido entre los de N y $N + 1$, no pudiendo llegar á $l + \Delta$, representémosle por $l + x$. Aunque la diferencia no es proporcional á la de sus logaritmos, según vimos en el teorema 3.º de los logaritmos decimales, esta proporcionalidad es muy aproximada,

luego, con ligerísimo error, podrá establecerse que $\frac{(N+1)-N}{(N+D)-N} =$

$\frac{(l+\Delta)-l}{(l+x)-l}$ y simplificando los términos $\frac{1}{D} = \frac{\Delta}{x}$, en donde $x = D \cdot \frac{\Delta}{1}$

y como x era el aumento que habría de recibir l para representar el log. de $N + D$, vemos que conociendo l , D que es la diferencia entre el número y la parte de él comprendida en las tablas y

Δ que es la diferencia entre cada dos logaritmos consecutivos del grupo en que se halle L , no hay ya dificultad alguna.

Sea el logaritmo de 6548297, la característica es 6; para hallar la mantisa no podemos buscar en las tablas más que la correspondiente al 6548, que es 816109; ahora bien, prescindiendo de la cualidad del número, que solo afecta á la característica, se vé que $\log. 6548 < \log. 6548'297 < \log. 6549$ y como el $\log. 6549$ tiene por mantisa 816175 y la diferencia entre ésta y la del 6548 es 66, que era lo que antes representaba Δ , se podrá establecer que $\log. 6548297 = \log. 6548000 + 0'297 \times 0'000066 = 6'816109 + 0'297 \times 0'000066 = 6'816109 + 0'000019602$ y apreciando solo unidades del sexto orden decimal y observando que la primera cifra que se despreña es mayor que 5, por lo cual podría añadirse una unidad á la última que se conserva, pero que en este caso no se debe hacer por estar la cifra de la derecha de la característica calculada por exceso, se obtiene para $\log. 6548297 = 6'816128$.

En la práctica cuando quedan por buscar una ó dos cifras del número se prescinde de efectuar la multiplicación y se buscan en la tablilla de partes proporcionales que encabeza la diferencia tabular correspondiente, teniendo en cuenta que por cada cifra que se busque de la derecha del número, á excepción de la primera se debe considerar en la parte proporcional que le corresponde, corrida la coma un lugar á la izquierda.

$$\begin{array}{r}
 \text{Ejemplo: } \log. 63'4879 = 1'892691 \\
 \quad \quad \quad \overline{802637} \\
 \quad \quad \quad \phantom{\overline{802637}} 47'6 \\
 \quad \quad \quad \phantom{\overline{802637}} 6'12 \\
 \quad \quad \quad \phantom{\overline{802637}} 53'72 \\
 \hline
 \Delta = 68 \quad \left. \begin{array}{l} \quad \quad \quad 6348 \\ \quad \quad \quad 7 \\ \quad \quad \quad 9 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0'79 \\ \times 68 \\ \hline 6'32 \\ 47'4 \\ \hline 53'72 \end{array}
 \end{array}$$

Problema 2.º Dado un logaritmo hallar el número ó antilogaritmo á quien corresponde.

Para ver si está en las tablas empezará por buscarse en la columna L . O las dos primeras cifras de la mantisa, pues como sabemos son comunes á varios, luego en el grupo de la derecha de estas dos las cuatro últimas cifras y el número que se halle frente á donde estén éstas, terminado en la cifra que indique la columna en que se encontrasen, sería el buscado, una vez tomadas tantas cifras para su parte entera como unidades más una contuviera la característica. Así para hallar el antilog. 2'146872 buscaríamos en la columna L . O. 14 (pag. 32) y en el grupo de la derecha 6872 que está en la tercera línea debajo del 4 correspondiendo al número 14024, pero como la característica tiene dos unida-

des, el número tendrá solo tres cifras de enteros y por tanto antilog. $2^{\circ}146872=140^{\circ}24$.

Si las cuatro cifras últimas no estuvieran en las tablas, vamos á examinar el modo de que nos podríamos valer para investigar el número. Sea $l+d$ el log. dado comprendido entre l y $l+\frac{\Delta}{d}$ de las tablas, estos dos últimos correspondientes á los números N y $N+1$, llamando x al incremento que habrá de sufrir N para representar al número cuyo log. sea $l+d$ y estableciendo la proporcionalidad aproximada entre las diferencias numéricas y logarítmicas

$\frac{(N+1)-N}{(N+x)-N} = \frac{(l+\frac{\Delta}{d})-l}{(l+d)-l}$, en que $\frac{1}{x} = \frac{\Delta}{d}$ y por lo tanto $x =$

$\frac{d}{\Delta}$, luego antilog. $l+d = N + d \cdot \frac{\Delta}{d}$, lo que, traducido al lengua-

je usual, quiere decir, que hallaremos el número correspondiente al log. inmediato inferior al dado, comprendido en las tablas é incrementaremos á dicho número el cociente que resulte de dividir por la diferencia tabular la que exista entre el log. dado y el inmediato inferior conocido, haciendo la separación de la parte entera que la característica indique.

Ejemplo. Hallar el antilog. $3^{\circ}682974$, en la pág. 13 encontramos las dos cifras primeras 68 y frente al 481, debajo de la columna 9 las cuatro más aproximadas á 2974, que son 2957, pues las cuatro siguientes 3047 son superiores al número dado; la diferencia $2974 - 2957 = 17$ y la tabular $\Delta = 90$, dan como cociente $17 : 90 = 0^{\circ}188\dots$, que han de añadirse á continuación del antilog. 4819 correspondiente á la parte de mantisa encontrada en las tablas, dando lugar al número 4819188\dots, en el que separando de la izquierda cuatro cifras de enteros tenemos el número ó antilog. pèdido, que es 4819^{\circ}188\dots

APLICACIONES

La utilidad del empleo de los logaritmos solo se hace sensible por su aplicación cuando se han de extraer raíces de grado mayor que tres ó cuando hay que emplear las fórmulas de la regla de interés compuesto ó las anualidades, ya que en las abreviaciones de multiplicación, división y potencias no son de tan absoluta necesidad. Vamos sin embargo á ocuparnos de la manera de operar en los distintos casos en que se puede hacer uso de los logaritmos.

Para realizar un producto de varios factores se hallan sus co-

respondientes logaritmos, sumados estos se procede á investigar el antilogaritmo de la suma que será el producto aproximado.

Ejemplo:

$$\log. 658'324 = 2'818440$$

$$\log. 35'496 = 1'550179$$

$$\log. 0'0327 = 2'514548$$

$$\log. 462'67 = 2'665271$$

$$\text{Antilog. } \overline{5'548438} = 353539'83737\dots$$

El producto verdadero es 353539'656964..., que difiere solo en 2 décimas del obtenido por los logaritmos.

La división de dos números por sus logaritmos se hace restando del correspondiente al dividendo el del divisor y el antilogaritmo de la diferencia será el cociente aproximado.

Ejemplos:

$$\log. 754'928 = 2'877905$$

$$\log. 4'8253 = 0'683524$$

$$\text{Antilog. } \overline{2'194381} = 156'451785$$

$$\log. 0'072538 = 2'860518$$

$$\log. 463'54 = 2'666087$$

$$\text{Antilog. } \overline{4'194431} = 0'00015'47$$

Se halla la potencia de grado *enésimo* de un número, multiplicando por *n* al log. de la base y buscando el antilog. del producto que será la potencia aproximada. Ejemplo. Log (658⁴) = 4 × log. 658 = 4 × 2'818226 = 11'272904; antilog. 11'272904 = 187457916666 = 658⁴.

Para investigar raíces de grado mayor que la cúbica se divide el log. de la cantidad subradical por el índice de la raíz y el antilog. del cociente es la raíz aproximada que buscamos. Ejemplo:

$$\log. \sqrt[5]{6538'42} = \frac{\log 6538'42}{5} = \frac{3'815473}{5} = 0'763095; \text{ antilog. } 0'763095 = 5'7955; \text{ luego } \sqrt[5]{6538'42} = 5'7955\dots$$

Interés compuesto. La fórmula que obteníamos para el capital acumulado con los intereses en *a* años al *t*' por uno, era $C = c(1+t)^a$ y para $c = \frac{C}{(1+t)^a}$, aplicando en ambas los logaritmos $\log. C = \log. c + a \log. (1+t)$ y $\log. c = \log. C - a \log. (1+t)$; de cualquiera de estas dos puede deducirse que $a = \frac{\log. C - \log. c}{\log. (1+t)}$.

Ejemplos 1.º ¿En qué cantidad se convertirán 6589 pesetas

que han estado impuestas 6 años al 5 por % de interés compuesto?

Log. C=log. 6580+6 log. 1'05=3'818226+6×0'021189=3'945360; antilog. 3'945360=8817'7959; luego C=8817'80 pesetas.

2.º ¿Qué capital necesitaremos imponer al 6 por % de interés compuesto para que al cabo de 4 años se convierta en 13000 pesetas?

Log. c=log. 13000-4 log. 1'06=4'113943-4×0'025306=4'012719; antilog. 4'012719=10297'19; luego c=10297'19.

3.º ¿Cuántos años tardarán 6000 pesetas en convertirse en 8500, al 5 por % de interés compuesto?

$a = \frac{\log. 8500 - \log. 6000}{\log. (1'05)} = \frac{3'929419 - 3'778151}{0'021189} = 7'13 \text{ años} = 7 \text{ años y } 47 \text{ días.}$

El exponente a de $(1+t)^a$ que expresa los años de la imposición puede estar expresado en forma fraccionaria refiriéndose á meses ó días. Sin recurrir al álgebra, donde se explica que todo exponente fraccionario equivale á extraer la raíz de grado igual al denominador de la cantidad que resulte elevando á la potencia que el numerador indica al número ó expresión á que afectan, hay facilidad para aplicar dicha forma en el interés compuesto, empleando los logaritmos, porque si $a = \frac{m}{12}$ log. C=log. $c + \frac{m}{12} \log a$ ritmo $(1+t)^a$ y si $a = \frac{d}{360}$, log. C=log. $c + \frac{d}{360} \log. (1+t)^a$.

Anualidades. Llámense así las cantidades que un individuo entrega para amortizar una deuda ó crear un capital en un tiempo prefijado.

De donde se deduce que abrazan dos problemas, el primero de amortización y el segundo de capitalización.

Problema 1.º Amortizar en n años el capital c y sus intereses compuestos al t por uno anual. Representando por a la anualidad, la satisfecha el primer año no devengará interés, la del segundo valdrá $a(1+t)$, la del tercero $a(1+t)^2$... y la que se entregue el año enésimo habrá producido intereses por valor de $a(1+t)^{n-1}$. Estas cantidades forman una progresión geométrica creciente, cuyo primer término es a , el último $a(1+t)^{n-1}$ y

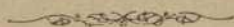
la razón $(1+t)$, luego su suma será $\frac{a(1+t)^n - a}{t}$ y como esta cantidad ha de ser igual al capital recibido acumulado con sus intereses durante los n años $\frac{a(1+t)^n - a}{t} = c(1+t)^n$, y como la incógnita es a , multiplicando por t y sacándola factor común para aislarla en el primer miembro; $a((1+t)^n - 1) = ct(1+t)^n$, y dividiendo por la cantidad comprendida en los corchetes, $a =$

$\frac{ct(1+t)^n}{(1+t)^n-1}$ fórmula fácilmente aplicable á logaritmos como las que sigan. Si lo desconocido fuera el capital, $c = \frac{a((1+t)^n-1)}{t(1+t)^n}$.

Problema 2.º Averiguar la anualidad que debemos entregar durante n años para que produciéndonos el t por uno se convierta en el capital C . Sea A . dicha anualidad, la primera que se entregue estará produciendo intereses $n-1$ años, la segunda $n-2$, la tercera $n-3$ y... la última no producirá, la suma de las cantidades é intereses debe ser igual á C , luego $C = A(1+t)^{n-1} + A(1+t)^{n-2} + \dots + A = \frac{A(1+t)^n - A}{t} = \frac{A((1+t)^n - 1)}{t}$, de donde $Ct = A((1+t)^n - 1)$ y por tanto $A = \frac{Ct}{(1+t)^n - 1}$. Esta fórmula y la que nos dá el valor de C son perfectamente aplicables á los logaritmos y bastantes sencillas.



Índice de la Aritmética



Páginas

Preliminares.	7
Numeración.. . . .	10
Adición y sustracción.	15
Multiplicación.	21
División.	27
Divisibilidad.	33
Máximo común divisor.	38
Mínimo común múltiplo.	42
Números primos.	44
Descomposición factorial.	48
Fracciones ó quebrados comunes.	51
Fracciones ó números decimales.	65
Evaluación fraccionaria.	71
Potencias.	76
Raíces en general.	81
Raíz cuadrada.	82
Raíz cúbica.	89
Sistema métrico decimal.	98
Sistema antiguo de Castilla.	102
Equivalencias más importantes.	104
Transformaciones y operaciones de los números concretos.	105
Pasar de la capacidad al volumen ó al peso.	112
Razones y proporciones.	113
Regla de tres.	119
Particiones proporcionales y regla de compañía.	122
Regla de interés.	125

Fondos públicos.	128
Reglas de descuento.	129
Id. de aligación.	131
Id. conjunta.	134

APÉNDICE

Teoría general de los sistemas de numeración.	137
Fraciones continuas.	141
Progresiones.	145
Logaritmos	153







R
461