EL MÉTODO

APLICADO Á LA CIENCIA MATEMÁTICA

POR

D. ZOEL GARCÍA DE GALDEANO Y YANGUAS,

LICENCIADO

EN CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y FILOSOFÍA Y LETRAS,
EX-CATEDRÁTICO DE CÁLCULO DIFERENCIAL É INTEGRAL EN LA UNIVERSIDAD
DE ZARAGOZA.

LOGROÑO:
Imp. de Federico Sanz, Mayor, 121.
1875.

EL MÉTODO

APLICADO Á LA CIENCIA MATEMÁTICA

POR

D. ZOEL GARCÍA DE GALDEANO Y YANGUAS,

LICENCIADO

EN CIENCIAS EXACTAS Y FILOSOFÍA Y LETRAS.

Al Sr. Dn. Simon Arbulle

en testimonio de consideracion y

aprecio

El autor

LOGROÑO:
Imp. de Federico Sanz, Mayor, 121.
1875.

AL ILMO. SR. D. RICARDO ALZUGARAY Y YANGUAS,

DIRECTOR GENERAL DE ADMINISTRACION LOCAL,

EX-DIPUTADO Á CÓRTES,

ABOGADO DEL ILUSTRE COLEGIO DE MADRID.

QUERIDO PRIMO: Al dar á luz este opúsculo, fruto de mis estudios, no he vacilado, teniendo presente tu decidida aficion á la ciencia, en dedicártelo como prueba de singular afecto y gratitud, confiado en que tu aceptacion, además de ser muy honrosa para mí, dará mayor mérito á la obra.

Tuyo afectísimo primo,

Zoel G.ª de Galdeano.

PRÓLOGO.

Es indudable que para tener sólidos y bien fundados conocimientos de una ciencia no basta poseer un conjunto mas ó menos estenso de verdades concretadas á ella; pues con esto sólo se consigue su adquisicion hasta cierto punto mecánica; es necesario que remontándonos á mas amplias esferas, estudiemos el material de la ciencia en sus relaciones con el sér productor.

Opinion errónea es la de muchas personas verdaderamente ilustradas que desdeñan todo conocimiento filosófico por creer que es suficiente el uso espontáneo de la inteligencia. Nosotros por el contrario, firmemente convencidos del auxilio que mútuamente se prestan la ciencia de la cantidad y la ciencia del alma, hemos revestido á nuestra obra de un carácter complejo, tratando de armonizar una y otra série de ideas.

Fieles á nuestro propósito, hacemos una escursion rápida examinando lo objetivo en sus relaciones con lo subjetivo despues de enumerar cuanto hallamos y distinguimos en uno y otro; estudiamos al sugeto ora como pasivo al ser modificado por influencias esteriores, ora como activo reaccionando sobre cuanto á herido su escitabilidad.

Aficionados á cuanto sea agrupar y clasificar las ideas, por comprender cuán importante es manifestar las relaciones que existen entre los séres, y cuánto facilita el estudio de la ciencia el abarcar bajo puntos de vista generales séries de verdades ú objetos, y notando además, que si bien se hallan espuestos los métodos matemáticos en obras recomendables, no manifiestan sus autores propósito de agruparlos segun sus analogías; hemos hecho una division de los mismos en *generales* y *particulares*, comprendiendo entre los primeros aquellos que son aplicables á todas las ramas de las matemáticas, é incluyendo entre los segundos los que se refieren á la geometría; los cuales creemos deber dividir en *determinativos*, *estensivos* y *limitativos*, fijándonos con especial cuidado en el que determina puntos mediante la consideracion de dos proporciones, método que ha llamado poco la atencion y que nos parece de importancia suma por ser muchísimas las verdades probadas con su auxilio. Tambien hemos juzgado conveniente añadir el método que llamamos *generalizacion* y *construccion por idénticos modos de ser* que nos parece utilísimo, sobre todo en Geometría superior donde, estudiándose sistemas de elementos, no se pueden llegar á comprender verdades referentes á gran número de estos, si el espíritu de simetría no introduce la claridad y sencillez en lo que á primera vista parece confuso. Nos ocupamos tambien del método que llamamos *por eliminacion*, aun mas que por conducir á la obtencion de ecuaciones de líneas y superficies, por ser empleado en muchísimas cuestiones, sobre todo de Geometría superior, que se resuelven con el auxilio de los teoremas relativos á proporcionalidad de rectas y mediante una eliminacion rápida y sencilla de los elementos variables.

En resúmen, hemos procurado, presentar un cuadro general de la ciencia matemática en cuanto nos ha sido compatible con nuestro objeto, tratando de fijarnos siempre en lo fundamental, convencidos de que lo importante no es llegar á la posesion de numerosas verdades particulares ó detalles científicos, sino despertar el *espíritu matemático* ó aptitud para resolver naturalmente por el recto empleo de la inteligencia las cuestiones que se propongan.

EL MÉTODO APLICADO Á LA CIENCIA MATEMÁTICA.

Si hallándonos en la oscuridad pensamos en una campiña que nos sea conocida, se nos representa como si estuviera ante nosotros con sus árboles, montañas y demás accidentes. Al tener esta representacion *imaginamos;* al aparecer dicho objeto que nos era anteriormente conocido *recordamos*; al estar presente á los ojos de la inteligencia *percibimos;* percibir es ver el alma sus fenómenos ó los del mundo esterior, que por eso se llaman intuiciones; al contemplar la inteligencia sus propios fenómenos de que es teatro la *conciencia*, al dirigirse una mirada á sí, se refleja, es decir, reflexiona.

Ideas generales.

La inteligencia humana es limitada. No puede poseer la ciencia como la divina por un puro acto. La inteligencia humana conoce por actos sucesivos, se desenvuelve en el tiempo, y la ciencia se va presentando á ella no de otro modo que los cuadros disolventes ó las formas vagas dibujadas por las espirales de humo.

La fuerza recordativa ó memoria suple la falta de intension del espíritu para contemplar con una simple mirada la ciencia por él poseida; es la fuerza por la que el espíritu se continúa en el tiempo y puede considerar como simultáneo lo que es sucesivo.

Poseer la ciencia no es lo mismo que adquirirla. La adquisicion precede á la posesion. Esto ocasiona que consideremos el método bajo dos puntos de vista, que son la *invencion* y la *esposicion* científica.

Además hemos de distinguir entre la humanidad y el indivíduo.

El indivíduo, ya adquiriendo la verdad ó ya poseyéndola, necesita que aparezca mediante la imaginacion la representacion intelectual correspondiente al objeto que se ha de conocer.

El indivíduo se desarrolla, se perfecciona en fuerza de ejercer su actividad.

Su unidad continuada, ó sea su identidad, es causa del perfeccionamiento, y la memoria establece enlace entre el presente y el pasado.

La humanidad progresa auxiliándose de las ideas que legaron como herencia los indivíduos en las diferentes fases de su desenvolvimiento.

Para terminar estas generalidades añadiremos, que si hemos de tratar debidamente la cuestion de método, lo estudiaremos ya con respecto á una sola cuestion, ya con respecto á conjuntos de cuestiones.

Método aplicado al desenvolvimiento de una cuestion.

Dos cosas hay que distinguir: 1.ª Modos de ser del objeto, ó consideraciones relativas al objeto. 2.º Modos de obrar ó ser del sujeto.

OBJETO.

El objeto del método son las cuestiones de la ciencia que en este trabajo es la matemática; y dichas cuestiones se reducen al teorema y el problema.

En otra ocasion espusimos las relaciones de ambas (1), y ahora añadiremos que, así como en el mundo físico todo se reduce á cuestiones de equilibrio y movimiento, en el mundo del espíritu se reduce todo á dos cuestiones análogas. La actividad de este tiende incesantemente á la realizacion y posesion de sus tres móviles, la belleza, la verdad y el bien; y el término de esta actividad es dicha posesion.

La persecucion ó adquisicion de la verdad es el estado de movimiento de la inteligencia, su posesion el de equilibrio; el primero es el de la probabilidad, el segundo el de la certeza que produce la evidencia, la clara contemplacion de la verdad.

Si al proponernos reducir al reposo un cuerpo en movimiento fijamos uno de sus puntos, le será imposible toda traslacion, pero podrá girar en todos sentidos. Si continuando en la operacion fijamos otro punto, ya sólo será posible el movimiento al rededor del eje que determinan. Si por último fijamos un tercer punto que no se halle en el eje, lo habremos reducido al reposo.

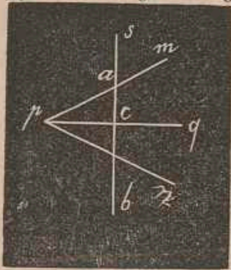
Esta imágen esplica claramente lo que sucede al resolver una cuestion. La actividad del espíritu combinando y relacionando los datos, corresponde al movimiento. Los principios de la ciencia que aumentan mas y mas la certidumbre son otros tantos puntos que fijamos y conducen al estado de certeza ó de reposo.

---

(1) Observaciones útiles en el estudio de las matemáticas.

Examinadas las cuestiones de la ciencia matemática, encontramos: 1.° Ciertas entidades caracterizadas por existir hipotéticamente. 2.° Otras unidas á las primeras por el lazo de la coexistencia. 3.° Ciertas construcciones ó trasformaciones que ponemos arbitrariamente para poder introducir nuevas entidades y relaciones que nos sirvan como medios de enlace entre los elementos espresados en la cuestion. 4.° Teoremas que justifican los enlaces de las entidades y relaciones auxiliares con las espuestas en la cuestion.

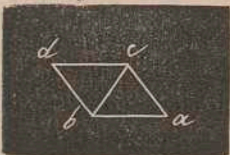
Sea el Teorema: *En todo triángulo á lados iguales se oponen ángulos iguales.* (Fig. 1.)



(Fig. 1.ª)

Lo hipotético es el triángulo y los lados iguales. Lo coexistente la igualdad de *pab* y *pba*. Las entidades introducidas son la recta *pc* que une *p* con *c*, punto medio de *ab*, los ángulos que forma en *p* y *c*, y los dos triángulos en que se divide el total *pab*. El Teorema: *Dos triángulos son iguales cuando tienen sus tres lados respectivamente iguales* relaciona dichas entidades.

En el teorema: *Si los lados opuestos de un cuadrilátero son iguales dos á dos es un paralelógramo,* (fig. 2) lo hipotético es el cuadrilátero y los lados opuestos iguales. Lo coexistente el paralelismo de dichos lados. Las construcciones auxiliares, la diagonal *bc*, juntamente con los dos triángulos *dbc* y *cba* en que divide al cuadrilátero. Las verdades que relacionan unas y otras entidades son: *Si dos triángulos tienen sus tres lados respectivamente iguales son iguales. Si los ángulos alternos internos son iguales las rectas son paralelas.*



(Fig. 2.ª)

Sea el problema: *Por un punto fuera de una circunferencia trazarle una tangente.* (Fig. 3.)

(Fig. 3.ª)

Lo hipotético es la circunferencia y el punto esterior á ella. Lo coexistente la tangente. Las construcciones auxiliares, la circunferencia cuyo diámetro es *po*, así como las cuerdas *pt*, y *ot*. El teorema que relaciona las entidades es: *Todo ángulo inscripto cuyos lados pasan por los estremos de un diámetro es recto.*

Por último en el problema: *Construir un segmento capaz de un ángulo dado*, (fig. 7) lo hipotético es: la cuerda *tn*, y el ángulo *btm*; lo coexistente, la circunferencia circunscrita al ángulo, y por lo tanto su centro. Las construcciones auxiliares, la perpendicular *cr*, las cuerdas *tc, nc*, y el radio *ot*. Los teoremas que relacionan las entidades son los siguientes: *Un ángulo esterno de un triángulo es igual á la suma de los dos no adyacentes. En todo triángulo á lados iguales se oponen ángulos iguales. Los ángulos cuyos lados son perpendiculares son iguales ó suplementarios. La perpendicular al radio es tangente.*

SUJETO.

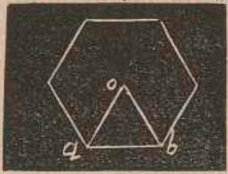
Hemos dicho que Dios conoce la ciencia por un simple acto y ve la unidad en la variedad y la variedad en la unidad. Al hombre no le es dado ese estado de equilibrio perpétuo, ó de plena y continua posesion de la verdad; y para suplir en lo posible su debilidad intelectual necesita del método que, segun su etimología *en camino*, espresa tendencia ó movimiento de la inteligencia hácia su fin.

Dos momentos distintos en que sorprendemos la actividad intelectual se hallan consignados por las palabras *análisis* y *síntesis*.

ANÁLISIS.

El análisis tiene lugar cuando, deteniéndose la inteligencia en una cuestion, trata de hacer converger la multitud de verdades científicas hácia ella y de referir lo vario á lo uno; pero al analizar se sinteliza, pues es imposible resolver una cuestion sin agrupar las demas verdades de la ciencia que se refieren á ella, y por esa solidaridad que existe entre las mismas, se ven todas referidas á la que nos proponemos encontrar, ya sean sus principios, ya sus consecuencias inmediatas ó remotas; y así como Pascal decia que el Universo es una esfera cuyo centro se halla en todas partes; nosotros podemos decir que cada verdad es el centro á donde convergen todas las de una ciencia.

Quiero por ejemplo probar que: *El lado del exágono regular inscripto es igual al radio.* (Fig. 4.)

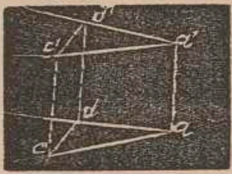


(Fig. 4.ª)

Ya tengo formado el triángulo *aob*, por un lado de dicho polígono y dos radios. Al hallar las relaciones de coexistencia de estos elementos, encontramos que son aplicables á los mismos las verdades siguientes: *Los ángulos que se pueden formar al rededor de un punto, sumados valen cuatro rectos. La suma de los tres ángulos de un triángulo vale dos rectos. A lados iguales se oponen ángulos iguales*, de las cuales la primera nos conduce á la consideracion de las proposiciones relativas á ángulos adyacentes y demás en que se basa toda la geometría, la segunda ocasiona una escursion á las proposiciones referentes á ángulos entre paralelas, que tambien nos lleva por distinto camino á las primeras verdades de la ciencia de la estension, y la tercera conduce á consideraciones relativas á triángulos y á las perpendiculares y oblicuas.

Sea el teorema: *Dos ángulos situados en distinto plano* *que tienen sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido son iguales.* (Fig. 5.)

La construccion de las rectas *aa'*, *bb'*, *cc'*, *cb y c'b'* ocasiona el considerar las proposiciones relativas á los paralelógramos, que evocan á su vez las que se refieren á paralelismo, perpendicularidad y ángulos, pues á dichas construcciones son aplicables los teoremas: *Todo cuadrilátero que tiene dos lados iguales y paralelos es un paralelógramo. Dos paralelas á una tercera son paralelas entre sí. En todo paralelógramo los lados opuestos son iguales. Si dos triángulos tienen sus tres lados respectivamente iguales son iguales*; que conducen á otras muchas verdades con que se hallan necesariamente relacionadas.



(Fig. 5.ª)

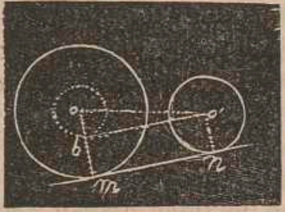
Vemos pues que al resolver una cuestion referimos á ella la ciencia toda en su inmensa variedad; porque sus verdades estan ligadas entre sí no de otra manera que las fuerzas atractivas de los astros cuya combinacion produce la armonía del Universo, ó las diversas funciones del organismo animal que producen en su conjunto la vida del individuo.

SÍNTESIS.

Consideremos al espíritu en su segunda fase. En este segundo instante se propone abarcar con rapidez vertiginosa la ciencia, que en la imposibilidad de presentarse simultáneamente en su conjunto, se presenta sucesiva como las vistas de un cosmorama rotatorio.

A esta aglomeracion de verdades el espíritu presta fé de una manera espontánea por estar seguro de que en otra ocasion, al adquirirlas, se hallaron en conformidad con las leyes eternas de la inteligencia; pero esta ojeada ó revista jamás es tan rápida que el espíritu, al recorrer dicha série no se fije en lo que esencializa á cada una, en lo que la constituye y determina en su unidad, pues es imposible la recordacion de algo sin que este algo se presente por lo menos en imágen con sus caractéres propios.

Si quiero resolver sintéticamente el problema: *Trazar una tangente esterior comun á dos círculos dados*, (fig. 6) procedo como sigue: Describo la circunferencia cuyo radio *bo* es la diferencia de los de las propuestas. Tiro desde *o'* una tangente á dicho círculo, trazo el radio *ob* perpendicular á la tangente, prolongándolo hasta *m*, y por *o'* dirijo la paralela *o'n* á la *om*. La recta *mn* resuelve la cuestion.

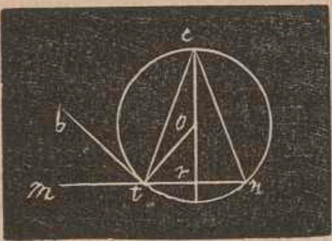


(Fig. 6.ª)

Hay en esto verdaderamente una síntesis, un amontonamiento de problemas sucesivos; pero esta síntesis supone un análisis prévio que justificó una á una todas las construcciones, y establecio la legitimidad del procedimiento para conducir á la resolucion del problema principal. El que habiendo resuelto anteriormente este problema se propone seguir la march sintética, no puede evitar que aparezca en su imaginacion la figura geométrica que es necesaria para resolverlo, y solo habrá variedad en las diferentes ocasiones, en la mayor ó menor viveza con que se presente tal ó cual detalle, variedad debida á que la inteligencia, teniendo un vasto campo de esploracion, sólo atiende á algunos puntos principales mas iluminados que otros; la atencion auxiliada por la memoria que presenta con mas ó menos exáctitud y claridad los detalles del problema, ocasiona que el entendimiento forme su plan general de ejecucion, plan que se va desarrollando, determinando y esclareciendo, á medida que la inteligencia se va fijando una por una en las diferentes operaciones que se han de realizar.

Así en el ejemplo citado; primero se dibuja en la imaginacion, mas ó menos perfectamente, la figura relativa al problema, el paralelismo de las *bo'* y *mn*, la perpendicularidad de las *om* y *o'b*, la tangencia de la *o'b* al círculo auxiliar; todo esto se halla diseñado en la mente; la inteligencia lo contempla; al contemplarlo, confusamente vislumbra una multitud de verdades, que si no hay tiempo material (por causa de la breve duracion de fenómeno psicológico) para que se manifiesten en detalle, se ofrecen en conjunto agrupadas acaso con cierta confusion. A la síntesis pues, acompaña un análisis que vago, incompleto é indeterminado en un principio, puede irse determinando, fijando, completando y esclareciendo á medida que la atencion se ejercita en el problema que resolvemos ó en la figura que la imaginacion nos representa.

Me propongo resolver el problema: *Trazar un segmento capaz de un ángulo dado.* (Fig. 7.)



(Fig. 7.ª)

En mi imaginacion se dibuja la figura que acompaña al texto. La relacion de perpendicularidad de las *cr* y *nt*, de *ot* y *bt*, la de los ángulos que entran en la misma, y hasta una multitud de teoremas aparecen sucesivamente en mi inteligencia con una rapidez que no es posible esponer ni precisar, pues al querer fijar esas imágines que se suceden en el espíritu, se desvanecen para dar campo á otras diversas representaciones.

Este análisis somero y vago fija el plan de solucion, y la inteligencia, dejando el papel de pasiva, y guiada por las ideas luminosas que encierra en sí el problema todo, antorcha que le conduce por las profundas regiones del pensamiento, se lanza á poner en ejecucion lo que ha de ser conducente al fin que me propongo.

Vemos pues que siempre se verifica un análisis al proceder sintéticamente.

El general que dirige una batalla, que da sucesiva é imperiosamente las órdenes, el arquitecto que dicta sus disposiciones para la construccion de algun edificio, el hombre de estado que adopta una série de medidas conducentes al bien público, ó que ha de conjurar algun inminente peligro; todos obran con arreglo á un plan mas ó menos completo segun ha sido mayor ó menor el tiempo de que dispusieran para concebirlo.

Al analizar pues, sintetizamos, y al sintetizar analizamos, creer lo contrario seria creer que podiamos pensar en un todo sin pensar en sus partes, ó pensar en estas sin pensar en aquel; seria creer que podemos considerar la unidad del Universo sin pensar en los elementos que lo constituyen, ó pensar en estos como partes de un todo, sin considerar la unidad del mismo.

Es imposible que al analizar una verdad geométrica no se aglomeren una infinidad de verdades relacionadas con ella, es decir, que no se presente la ciencia, no con esa regularidad y simetría con que se nos presentaría espuesta segun los preceptos del método sintético, obedeciendo á una rigurosa clasificacion de sus elementos que le diera el caracter de un todo organizado; sino contemplada bajo un punto de vista arbitrario, tomando por base la verdad que hemos considerado, á la cual la ciencia se refiere en sus principios y en sus consecuencias, no de otra manera que el cuerpo humano, conjunto organizado puede estudiarse tomando como punto de partida cualquiera de sus órganos, cualquiera de sus funciones, y es tal la solidaridad de sus partes, que desde el órgano mas insignificante se llegaria á deducir por razonamiento riguroso hasta los fenómenos mas complicados que sostienen la vida. Y así como, en virtud de esta armonía, la circulacion sin ser causa de la respiracion ni esta del movimiento muscular, tienen tal dependencia entre sí que todas se sostienen mútuamente, que todas mantienen ese equilibrio, ese enlace que dá el resultado complejo llamado vida; del mismo modo las verdades geométricas no son causa ni efecto unas de otras; la relacion probada en el teorema de Pitágoras no es causa ni efecto del postulado de Euclides, ni de ninguna proposicion relativa á perpendicularidad ni oblicuidad; pero se sostienen unas á otras, todas mantienen unido y compacto el edificio de la ciencia geométrica.

Nadie podrá probar que el teorema: *En todo triángulo á lados iguales se oponen ángulos iguales* es por esencia anterior ó posterior al que afirma que *la suma de los tres ángulos de un triángulo es igual á dos rectos*; pero ninguno se puede suprimir en la ciencia; lo único que se puede afirmar es que para el estudio se necesita saber la teoría de ángulos antes que la de triángulos; y esta antes que la de polígonos; y ello es debido á que la inteligencia humana, que no puede ver con una mirada la ciencia toda, tiene que hacer un estudio sucesivo de lo que es simultáneo.

Dichas consideraciones indican suficientemente, que cuanto mas profundo y detallado es un análisis, tanto mas grandiosa y completa es la síntesis correlativa, asi como cuanta mas variedad hay en un todo este es mas uno, hay mas armonía.

Lo que distingue esto, que no es sino dos fases de una operacion conocida con las palabras *análisis* y *síntesis*, es el punto de partida que se toma. En el primer caso es un objeto al cual se refiere la ciencia toda; se hacen converger hacia él todas las verdades conocidas; parece como el foco de un espejo parabólico donde se reunen todos los rayos de luz.

El punto de partida en el segundo es tambien un objeto ó una verdad; pero considerada como fuente, principio ó fundamento de lo que despues se va desarrollando; es una marcha en que se hace diverger una verdad en sus consecuencias como la sávia del tronco diverge hasta las ramas mas pequeñas.

Ejecucion ó fase activa.

La inteligencia ante la representacion de un objeto lo observa, lo examina en su contenido, halla lo que tiene de propio, lo que le distingue de los demás, marca su esfera en el mundo de las entidades; al examinar esto analiza, es decir, descompone mentalmente un todo en sus elementos sin dejar de sintetizar al propio tiempo.

Esta elaboracion intelectual es fecundísima en resultados; innumerables relaciones surgen apoyadas en las verdades científicas conocidas.

Tenemos pues, como resultado de la observacion un conocimiento de relaciones entre lo conocido y desconocido.

Pero no siempre basta el exámen pasivo del entendimiento, y entonces necesario es que éste, obrando sobre el objeto, lo combine con nuevas entidades que introduce voluntariamente, las cuales son mas ó menos fácilmente relacionadas entre sí mediante los teoremas de la ciencia, segun el mayor ó menor acierto con que ha procedido el espíritu en su eleccion.

En el problema: *Por un punto de una circunferencia trazarle una tangente*; mediante la observacion de los elementos dados y que se buscan se obtiene el modo de resolverlo; pues la relacion de perpendicularidad entre la tangente y el radio en el punto de contacto da la clave de la solucion.

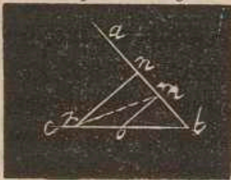
En el problema: *Trazar un segmento capaz de un ángulo dado*, del exámen hecho por el sugeto no se desprende inmediatamente la resolucion; los elementos conocidos y los desconocidos no se hallan tan íntimamente ligados que se vea su dependencia; es necesario que nuevos elementos sirvan de medios de enlace entre unos y otros.

La construccion de la recta *cr* perpendicular á la cuerda *tn*, la del radio *ot* perpendicular a la *bt* y la de *ct* y *nc*, introducen elementos tales, que los conocidos quedan completamente determinados con respecto á los desconocidos. Así la construccion de los triángulos *tco* y *tor* dá la relacion de los ángulos *tcn* y *tor*; la perpendicularidad de *to* y *bt*, *cr* y *mn* da la que existe entre *btm* y *tor*.

Hemos llegado al último punto de pasividad del espíritu, hemos examinado el objeto en su contenido, hemos mentalmente asociado nuevos elementos y hallado las relaciones de unos y otros; nos hemos ocupado hasta ahora del espíritu en su estado contemplativo y pasivo; pero es necesario que nos fijemos en la segunda fase, esto es, cuando se manifiesta activo obrando sobre lo que hasta ahora no ha hecho mas que ocasionar en él multitud de modificaciones. Nos hallamos en el caso del general que, estudiadas las fuerzas y condiciones del enemigo en virtud de esploraciones y artificios dados, concibe un plan en armonía con lo que conoce, y trata de ejecutar; y así como en su mente se representan las dificultades sucesivas que necesita vencer empezando su análisis desde el punto que domina el enemigo hasta su base de operaciones, y despues, trasformándose en agente de sus propios proyectos comienza á realizar cuando ideó, siendo su término de accion material el que fué principio ó punto de partida de su trabajo intelectual; el geómetra, despues de haber examinado los datos de la cuestion y sus mútuas relaciones, suficientes para conducir al resultado pedido, trasladándose del dominio de la especulacion al de la accion mecánica, procede á realizar cuanto su inteligencia combinó, pero siguiendo una marcha inversa.

En el problema: *Trazar una tangente esterior á dos círculos dados* comenzamos por suponerla ya obtenida, y partiendo de ella pasamos á considerar los radios *om* y *o'n* que le son perpendiculares, terminando por el exámen del triángulo rectángulo *o'bo* en que se conoce la hipotenusa *o'o* y el cateto *bo* igual á la diferencia de los radios; y tomando este término como punto de orígen, principiamos la ejecucion formando dicho triángulo, prolongamos inmediatamente el cateto *o b* hasta la circunferencia, y trazamos el radio *o'n* paralelo al mismo, obteniendo los puntos *m* y *n* que determinan la recta que resuelve la cuestion.

En el problema: *Hallar sobre el lado bc del ángulo abc cierto punto igualmente distante del* r *y el otro lado,* (fig. 8.) comenzamos por considerar la distancia *or* que suponemos resuelve la cuestion, seguimos considerando sucesivamente la perpendicular *om* á *ba*, el triángulo isósceles *mor* y la perpendicular *r n*, terminando por observar que *mr* es bisectriz de *orn;* y principiamos la ejecucion por construir la bisectriz de este ángulo, trazando inmediatamente la *mo* perpendicular á *ba* en *m*, y que encuentra al lado *bc* en el punto *o* que resuelve la cuestion definitiva.



(Fig. 8.ª)

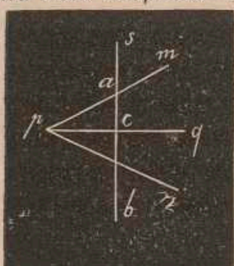
Observamos que la resolucion de estas y otras cuestiones se verifica mediante el método llamado análisis por los geómetras, que consiste en suponer hallado lo que se trata de obtener. Con ello se consigue por de pronto una ventaja; pues damos cierto grado de determinacion al problema, introduciendo relaciones que, si bien son hipotéticas, aumentan los elementos de que disponemos para resolverlo; y este aumento se completa por las construcciones auxiliares que nos dan nuevas cantidades relacionadas con los datos y lo hipotético, en virtud de los teoremas de la ciencia.

Anteriormente hicimos un análisis de todos estos elementos, y ahora solo nos ocuparemos del tránsito de lo *hipotético* á lo *real*.

Ya se sabe que la inteligencia consigue aproximar las ideas ó estremos remotos, valiéndose de ideas ó términos medios. Y no otra cosa hace el filósofo por medio del silogismo y del sorites. Los teoremas son espresion de relaciones de coexistencia entre ciertas entidades; son el lazo que las une. En un conjunto de entidades solo se necesita cierto número de unas para que existan otras. Así, en el triángulo basta que se dé un lado y dos ángulos, ó los tres lados para que existan los demas elementos; en un polígono, 2n—3 elementos consecutivos para que los restantes sean dados. Conocidos una mediana y dos lados, un lado y dos medianas, las tres medianas, dos ángulos y una mediana etc. de un triángulo, se conocen y determinan sus demas elementos. Vemos pues, que al resolver un problema geométrico, las líneas auxiliares que trazamos, combinadas con los datos y la construccion supuesta, han de producir ciertas figuras cuyos elementos, relacionados por los teoremas de la ciencia, han de quedar al fin eslabonados mútuamente y han de dar por resultado determinar cierto número de ellos en virtud de los otros conocidos.

Este eslabonamiento y determinacion es lo que se busca y necesita para que cuanto hay de hipotético pase á la esfera de lo real.

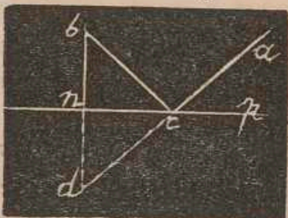
Al resolver el problema: *por un punto dado* s *trazar á dos rectas que se encuentren, una trasversal igualmente inclinada con respecto á ellas*, (fig. 1) *suponemos* trazada la recta *scb* que forme con *pm* y *pn* los ángulos *pab* y *pba* iguales entre sí, *construimos* la perpendicular *pc*, y en virtud del teorema: *la perpendicular bajada desde el vértice de un triángulo isósceles á la base, pasa por el punto medio de esta y es bisectriz del ángulo del vértice*, establecemos la relacion *hipotética* de igual inclinacion entre la recta que *se busca* y las *pm* y *pn*; la relacion *real* de perpendicularidad entre



(Fig. 1.ª)

pq y *ab*, la relacion *real* de igual inclinacion con las *pm* y *pn* de esta perpendicular. En resúmen, la recta *pq* es el medio que enlaza la *ab*, que se *busca*, con las *pm* y *pn dadas*. A la 1.ª se la encuentra unida por el lazo de perpendicularidad, á las 2.ªs por el de igual inclinacion.

En virtud del teorema citado, se ve la reciprocidad de estas relaciones; pues si los ángulos *pab* y *pba* son iguales, la perpendicular es bisectriz; y si la bisectriz es perpendicular á una recta *ab*, los ángulos *pab* y *pba* son iguales. Luego si **hipotéticamente** hemos *comenzado* por la relacion de IGUALDAD de estos ángulos, hemos *continuado* con la de PERPENDICULARIDAD de *pc* y *ab*, y hemos *concluido* con la de IGUALDAD DE INCLINACION entre *pc* y las *pm* y *pn;* procederemos **realmente** *comenzando* por CONSTRUIR LA BISECTRIZ, *continuando* con el TRAZADO DE LA PERPENDICULAR *sab* desde *s*, y *concluyendo* que dicha perpendicular está IGUALMENTE INCLINADA con respecto á las propuestas. Seguimos pues, en la ejecucion una marcha inversa á la seguida en el razonamiento.



(Fig 9.ª)

Sea el problema: *Por dos puntos* a *y* b *trazar á cierto punto de una recta dos rectas igualmente inclinadas con respecto á ella.* (Fig. 9.)

Hipotéticamente *comenzamos* por considerar la IGUALDAD de *bcn* y *dcn* (la igualdad de *bcn* y *acp* se reduce á ella por ser *pca* y *dcn* opuestos por el vértice), *continuamos* considerando (en virtud de las construcciones auxiliares: *prolongacion* de *ac* y *perpendicular bd* á *cn*, que sirven de medio de enlace entre las entidades) la relacion de PERPENDICULARIDAD entre *cn* y *bd*, y *concluimos* observando la de IGUALDAD entre *bn* y *nd* (podemos indiferentemente invertir las relaciones de igualdad entre *bn* y *dn*, y de perpendicularidad entre *bd* y *cn*, pues en los triángulos *cbn* y *cnd*, siendo los ángulos *bcn* y *dcn* iguales, si *bn* es igual á *nd*, los ángulos en *n* serán rectos; y recíprocamente, si los ángulos en *n* son rectos, *bn* y *dn* serán iguales).

Enseguida procederemos **realmente**, *comenzando* por considerar la relacion de PERPENDICULARIDAD entre *bd* y *cn*, *continuamos* considerando la de IGUALDAD entre *bn* y *dn*, y *concluimos* por hacer lo mismo con la de IGUALDAD de los ángulos *bcn* y *dcn*, ó *bcn* y *acp* (pues *acp*=*dcn* por opuestos por el vértice).

En la ciencia matemática reducimos cada problema ó cuestion á una série sucesiva de cuestiones mas sencillas ó conocidas que conducen á la determinacion de la propuesta.

La suma de números de varias cifras se reduce á sumar números de una cifra.

La multiplicacion de números de varias cifras conduce sucesivamente á multiplicar un número de varias cifras por otro de una y dos números de una cifra.

La division se resuelve en las tres operaciones que le preceden, y la estraccion de raices conduce á la ejecucion de todas estas.

La resolucion de un sistema de seis ecuaciones con seis incógnitas conduce sucesivamente á la resolucion de sistemas de cinco ecuaciones con cinco incógnitas, cuatro con cuatro, hasta llegar á una sola ecuacion con una incógnita.

Podemos dividir los problemas en elementales y complejos.

Los primeros casos de todas las operaciones que se resuelven de memoria, son en Aritmética los problemas elementales.

En Geometría será mas conveniente dividirlos en *mecánicos ó prácticos*, *determinativos y complejos*.

Los prácticos son tres. 1.° Trazar una recta. 2.° Tomar en una recta una distancia igual á otra dada. 3.° Describir una circunferencia cuyo radio se conoce.

El 1.° se resuelve con la regla. El 2.° y 3.° con el compás.

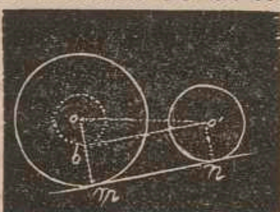
Los determinativos son tres. 1.° Trazar una perpendicular á una recta dada. 2.° Trazarle una paralela. 3.° Trazarle una oblícua igualmente inclinada que otra (esto es, trazar un ángulo igual á otro).

Dichos problemas se ejecutan con auxilio de los mecánicos, y corresponden á la segunda cuestion que debe tratarse con respecto á toda figura geométrica (1) que llamamos *determinacion*.

Por último, los problemas complejos son los que para resolverse necesitan que ejecutemos cierto número de los determinativos y por consiguiente de los mecánicos.

La resolucion de estos problemas depende de los mas ó menos profundos estudios que se haya hecho de la 3.ª cuestion geométrica (2) ó sea *relaciones del contenido de las figuras*.

El problema: *trazar una tangente esterior á dos círculos dados*, se reduce á resolver sucesivamente los siguientes: 1.° Construir un triángulo rectángulo cuya hipotenusa sea la distancia *o o'* de los centros (fig. 6), y uno de los catetos la diferencia de los radios. 2.° por el punto *o'* trazar una paralela á *om* (que conduce al trazado de un ángulo igual á otro ó una perpendicular á otra recta, que á su vez vienen á resolverse en los mecánicos.) La recta *mn* trazada con la regla resuelve la cuestion.



(Fig. 6.ª)

El problema: *Trazar un segmento capaz de un ángulo dado* se reduce á resolver sucesivamentelos que siguen: 1.° trazar sobre *mt* un ángulo *btm* igual al propuesto. 2.° trazar por *t* una perpendicular *ot* á *bt*, y por el punto

(1) Observaciones útiles en el estudio de las matemáticas.
(2) Id.

medio de *nt* una perpendicular á esta recta. 3.º desde *o* como centro y con el radio *ot* describir una circunferencia.

El problema: *Hallar sobre el lado bc del ángulo abc cierto punto igualmente distante del* r *y del otro lado* (fig. 8) se reduce: 1.º á trazar desde *r* la perpendicular *rn* á *ba*. 2.º dirigir la biscetriz *rm* de *brn*. 3.º trazar por *m* la paralela *mo* á la *rn*.

El método aplicado á sistemas de cuestiones.

Tratar un conjunto de cuestiones supone haberlas estudiado individualmente. El análisis ha sido el medio empleado en la invencion y el que ha enriquecido la ciencia con la multitud de verdades adquiridas.

Despues de haber descubierto cierto número de estas, lo natural y propio es ordenarlas, clasificarlas y agruparlas segun sus analogías mas ó menos remotas.

La ciencia primitivamente era una série de verdades sin conexion, enlace, ni dependencia; razon de ello es que el espíritu no habia profundizado lo bastante en sus investigaciones para llegar á estender la esfera propia de cada una hasta que hubiera compenetracion de las unas en las otras. Las verdades de cada ciencia son al principio como círculos esteriores entre sí que agrandándose sucesivamente, llegan á tocarse y aun á cortarse, y aumentando su diámetro, cada vez son mas los puntos de los unos contenidos en los otros, cada vez tienden mas y mas á confundirse en toda su estension y formar un solo círculo, es decir, cada vez se vé mas próximo el reducirse todas á una donde se hallen contenidas; límite que únicamente existe en Dios que conoce por una sola verdad.

Y este progreso hacia la armonía de las ciencias se nota en las diferentes fases del desenvolvimiento de la humanidad, pues incesantemente el dominio de las unas se dilata y estiende al de las otras. La filosofía invade el terreno de la literatura y de la historia, y no contenta con esta evolucion, abarca el dominio de las ciencias exactas y naturales.

Aunque en un principio las teorías matemáticas no tienen el enlace y trabazon con que hoy las vemos, no deja la ciencia de existir con cierta unidad; pues siendo relaciones de coexistencia las que se estudian, basta saber únicamente las condiciones de unas entidades necesarias para que existan otras. Esto tambien se puede asentar de las demas ciencias sobre todo de las que se fundan en hipótesis para probar ciertos hechos, en las que nuevos descubrimientos las rectifican ó modifican convenientemente, llenando lagunas ó huecos que existian, y aun al presente todas se hallan con espacios ó vacíos sin que deje por eso de existir su unidad.

En la antigüedad acaso las verdades matemáticas que se conocieran, se redujeran á las que manifiestan la existencia y determinacion de las entidades ú objetos á que se refieren. Pero mas tarde á estos materiales, que tal vez en Aritmética se ciñeran á cuanto es necesario para ejecutar las operaciones fundamentales, y en Geometría á los teoremas relativos á la existencia de la oblicuidad, perpendicularidad y polígonos, y su determinacion, se han ido combinando otros, que han aumentado el caudal y complicacion de la ciencia. Cuantas verdades se van agregando, por mas que tengan novedad con relacion al espíritu, no son ni antes ni despues que otras, pues todas coexisten en esencia, todas tienen igual importancia, sólo difieren en la época de ser descubiertas, y de esto resulta que muy bien puede sernos conocida una pequeñísima parte de la ciencia sin que deje de presentarse con cierta unidad; y así se ve que habia unidad en la ciencia matemática de los tiempos de Arquímedes y Euclídes, como la había en los de Newton y Descartes, como la hay actualmente; pero esa unidad que jamás ha dejado de existir, ha variado en los grados de perfeccion como varía un edificio en que, terminada la obra de mampostería, se tiende á decorarlo.

Esa agregacion tiene por resultado el aumento de la variedad y armonía de la ciencia.

Unidad, variedad y armonía de la ciencia matemática.

La unidad de la ciencia está en su objeto. A él se refiere cuanto se estudia, y en él se halla. La variedad es las diferentes maneras de ser el objeto. La armonía es la compenetracion de la variedad en la unidad; está dada en matemáticas por la demostracion, mediante la que referimos la primera á la segunda, hacemos converger la multiplicidad de elementos en un foco.

La demostracion es casi el único lazo de la ciencia en la antigüedad; solo por medio de ella la vemos una. Ella reune cuestiones tan heterogéneas como las que vemos mezcladas en la obra de Euclides; pues el único móvil de este ilustre geómetra es el riguroso encadenamiento de verdades, al cual sacrifica las analogías de los objetos y proposiciones; á esto hay que atribuir los defectos que hallamos en el plan general de sus Elementos geométricos.

A medida que se sucede el tiempo nuevas verdades enriquecen el caudal de la ciencia, se van llenando vacíos; y este aumento hace comprender la necesidad de clasificar y reunir ordenadamente los materiales. Es indudable que cuanta mas variedad de ideas haya y mas depuradas se encuentren, tanto mas fácil ha de ser una buena clasificacion. Por esto los tratados antíguos adolecen de dicha falta que mas fácilmente, si bien aun no por completo, han evitado los autores modernos.

El órden que vemos predominante es el lineal ó serial, es decir, aquel que solo atiende á la rigurosa sucesion de ideas ó cuestiones comenzando por las mas sencillas ó que son fundamento de las demas. Esto se observa examinando las obras publicadas hasta el siglo pasado.

Otro carácter, consecuencia del estado rudimentario de la ciencia es el predominio casi completo del análisis, la prolijidad de ejemplos prácticos, mas bien que de conceptos, cierta pesadez y lentitud en la manera de resolver las cuestiones que deja muy por desear la concision, energía y rapidez con que los autores modernos prueban las verdades, meciéndose en el mundo de las abstracciones, sin necesidad de recurrir á las pruebas casi materiales de que rebosan los tratados antiguos.

Pero habiéndose estendido la ciencia de la cantidad por nuevos y mas espaciosos horizontes bajo el influjo de Descartes, Newton, Leibnitz, Euler, Cauchy, Chasles y otros muchos matemáticos, y ofreciendo una inmensa variedad de objetos, exije mas tarde que el órden lineal, solo aceptable en los primeros pasos, sea sustituido por otro mas perfecto. Ya en autores como Tosca, Vallejo, Bourdon y Legendre vemos un principio de reforma, una transicion en cuanto al plan de las obras, ya se nota algo de simetría, y cierta tendencia á agrupar cuestiones análogas. Pero aun se manifiestan mas estos carácteres en la Geometría de Vincent, observándose un principio de distincion entre modos de ser el objeto y modos de concebir el sugeto, entre los teoremas ó cuestiones especulativas y problemas ó cuestiones prácticas; además, tratando por separado y en general los métodos de demostracion, toma la iniciativa en considerar que se ha de tener presente para el buen método la unidad de demostracion, la reduccion á corto número de los medios de probar verdades.

Posteriormente aparecen tratados donde cada vez mas y mas se van acentuando estas distinciones y analogías que hacen comprender, cómo á la unidad ó enlace dado por la demostracion á la ciencia debe acompañar la unidad de plan, ó sea la distribucion simétrica y ordenada de las verdades y cuestiones. En resúmen, cómo á la *linea*, imagen de la ciencia primitiva, debe sustituirse el *árbol*, símbolo exacto de la ciencia moderna.

Fases de la ciencia matemática.

Tres fases podemos considerar en la ciencia relativamente á la humanidad y al individuo.

La 1.ª que podemos llamar de las *síntesis facticias*, se distingue por el predominio de la imaginacion y los sentidos. La antigüedad es la época de las intuiciones rápidas, de las gigantescas concepciones en cuanto á lo subjetivo, así como del empirismo en los conocimientos relativos á lo que no es el *yo*. La imaginacion suple lo que falta de análisis y estudio de los hechos y séres. Esto consiste en que el hombre cuando conoce, trata de reducir sus conocimientos á la unidad, y cuando esta no existe la forja ó finge. El matemático, siguiendo distinto rumbo que los filósofos y poetas, atiende principalmente á mantener la integridad y legitimidad de cada conocimiento. La poca abundancia de materias impide la sistematizacion de ideas.

La 2.ª está caracterizada por una exuberancia de actividad. Despues de sucederse muchas generaciones que han legado en sus escritos huellas de sus trabajos intelectuales, las posteriores los examinan y tratan de asimilárselos. Apropiándose la ciencia de la antigüedad, los matemáticos árabes preparan su extraordinario acrecentamiento y desarrollo realizado por los génios de Newton, Descartes, Leibnitz y otros. Este es el período de la elaboracion intelectual, como en la esfera de los hechos materiales es el que prepara la constitucion de las Naciones.

Por último, en la 3.ª la razon predomina, es la época de la armonizacion de los conocimientos, de la espansion de las ciencias, de la compenetracion de unas en otras.

Despues de haberse forjado sistemas ilusorios al principio, y mas tarde haberse enriquecido la ciencia con numerosos descubrimientos, debe seguir un estudio complementario, esto es, el estudio comparativo de los hechos con los productos de la fantasía, á fin de establecer los verdaderos conceptos que han de dar unidad á la ciencia, y rechazar cuanto sea falso ó ilusorio, pasando esta de la categoría de producto espontáneo á la de producto depurado por la crítica filosófica, producto de un ser inteligente que conoce lo que produce, que se distingue de sus conocimientos, que sabe los medios de que dispone para conocer y producir en el mundo de las ideas, y que trata de establecer la ciencia desde sus fundamentos. Y así sucede: el matemático tenía absorvida toda su atencion en el objeto; pero Descartes, al encerrarse en el mundo del pensamiento parece que comienza la reaccion del espíritu sobre el mundo esterior; y mas tarde un genio ilustre, al preguntarse en que consisten las matemáticas, si hay medio de abrazar por un solo problema todos los problemas de la ciencia y resolver generalmente este problema; al tratar de la ley universal que rige la generacion de las cantidades, al fijarse en las leyes subjetivas frente á las objetivas, al señalar la divisoria entre la especulacion y la accion, al concebir los elementos necesarios de las operaciones y su reunion sistemática, presenta el cuadro grandioso de lo que la ciencia debe ser y ofrece á la humanidad su ideal, pasando en aquel instante del estado de la espontaneidad al de la crítica filosófica.

Despues de iniciada esta última fase por las grandiosas concepciones de Wronski, los resultados no tardan en manifestarse. Nótanse en los matemáticos aspiraciones á elevar la ciencia auxiliándose de los recursos de la filosofía. Y aparecen tratados relativos al método, esponiendo las maneras generales de funcionar el espíritu con ocasion de las verdades matemáticas, y se trata de sistematizar las ideas de las cantidades fraccionarias, negativas é incomensurables tan dispersas, individualizadas y concretadas en las obras antiguas. Y esto se realiza asociando á la idea de cantidad las de estension, posicion y movimiento rectilíneo y rotatorio, que conducen con facilidad á las de funciones periódicas tan fecundas en trigonometría como en la teoría de los números.

Parte objetiva de la ciencia matemática.

El espíritu está en posesion de varias ideas universales y absolutas que constituyen su esencia y son los tipos segun los que pensamos ó modelamos nuestros pensamientos. Las matemáticas son el desenvolvimiento de las de cantidad y número. El objeto de esta ciencia se puede obtener en su inmensa variedad por el desarrollo de dichas ideas con arreglo á las leyes del órden y mediante la afirmacion ó negacion del entendimiento.

Tenemos pues, que en su parte objetiva comprenden: 1.° el número absoluto que aparece al contemplar el sugeto la sucesion de los fenómenos de su conciencia. 2.° cuanto resulta de considerar este tipo abstracto aplicado á la cantidad estensa (números fraccionarios, concretos, incomensurables y cantidades infinitesimales.) 3.° cuanto resulta de aplicarlo á magnitudes estensas referidas á un punto fijo ú origen, (cantidades positivas y negativas) 4.° cuando resulta de aplicarlo á magnitudes ó distancias consideradas al rededor de un punto, (cantidades imaginarias.)

El sugeto, poseyendo las ideas de órden, posicion y magnitud produce, en su gran variedad, el material de la ciencia matemática.

La actividad intelectual afirma ó niega las maneras de ser de estos conceptos.

La afirmacion y negacion son los dos polos sobre que giran las cuestiones matemáticas.

La sucesion de los actos de nuestra conciencia nos sugiere las ideas de número y cantidad.

Estos conceptos, como los de espacio y tiempo, son esenciales en la cognicion de los objetos.

Ya nos hallamos en posesion del número absoluto. Ya tenemos la base de nuestra escursion por el campo de la ciencia. Ya poseemos el órden natural de la pluralidad, órden fundamento de todos los demas.

Apliquemos sucesivamente los conceptos de igualdad y desigual (que entrañan los de afirmacion y negacion) á la série natural del contar, descubierta en el sucederse de nuestra conciencia, y aparece el rico y abundante material de la Algoritmia.

Tenemos la numeracion natural que produce uno á uno todos los números, que dan el órden de sucesion ó pluralidad. De esto pasamos á la consideracion de la *suma*, ó aumentos cualesquiera de grupos de unidades, la cual comprende la multiplicacion, como el caso en que estas agrupaciones son iguales. La repeticion sucesiva de multiplicaciones da el *producto de varios factores*, que encierra como caso particular la *potencia*, pues resulta de la aplicacion del concepto de *identidad* á la idea de *producto* en general.

Un retroceso ó marcha inversa conduce á la *sustraccion, division* y *estraccion de raíces*. Es la marcha en que de los resultados nos proponemos pasar á los datos de las operaciones directas ó *constructivas* (pues por ellas se engendran ó construyen números.)

Productos derivados de estos son las *proporciones, progresiones y logaritmos*, siendo orígen de *las ecuaciones* las maneras distintas y arbitrarias de producir una misma cantidad.

La afirmacion ó negacion segun el órden, referidas ó aplicadas á la estension, nos revelan en su variedad el mundo geométrico.

La afirmacion constante de una direccion ó posicion de elementos constituye la *recta*. La constante negacion de igual direccion la *curva*. La afirmacion total de igualdad de lados en un triángulo nos da el *equilátero*, la afirmacion parcial, el *isósceles*, y la negacion el *escaleno*.

La afirmacion total posible de paralelismo en un cuadrilátero nos da la idea de *paralelógramo*, la parcial la de *trapecio*, la negacion origina el *trapezoide*.

La afirmacion total de igualdad de lados y ángulos en un paralelógramo nos da el *cuadrado*, la afirmacion total posible de su desigualdad nos da el *romboide*.

La afirmacion parcial de igualdad de lados y ángulos nos da, en las dos combinaciones que pueden hacerse, el *rectángulo* y *rombo*.

La afirmacion de igualdad de una suma, diferencia ó relacion de distancias á dos puntos fijos, da los lugares geométricos *elipse, hipérbola y circunferencia*.

La combinacion de igualdad de forma y magnitud nos da la *identidad*. La de igual forma y distinta magnitud la *semejanza*. La de distinta forma é igual magnitud la *equivalencia*. Y la de igual forma y magnitud con inversa posicion de elementos la *simetría*.

Producido este primer material de la ciencia geométrica, la inteligencia se remonta á mas amplias esferas, y tomando por base de sus fecundas escursiones el movimiento de los tres elementos de la estension, el punto, la línea y la superficie, en virtud de las leyes que la arbitrariedad impone en conformidad con las leyes absolutas y superiores de la inteligencia, (arbitrariamente no podemos dejar de pensar en conformidad con las leyes que constituyen la esencia de la inteligencia humana) produce esa infinidad de cuerpos, líneas y superficies, que constituyendo el material de las matemáticas en sus ramas superiores, llegan algunas de ellas á traducirse en el mundo de la materia por las órbitas que describen los planetas y por las ondas que trasmiten el sonido, la luz y el calor, armonizando cuanto el entendimiento produce á priori con lo que del exámen de la naturaleza se deduce á posteriori.

Parte subjetiva.

Espuesto lo concerniente á la parte objetiva de la ciencia matemática, corresponde esponer, si bien ligeramente, algunas ideas generales que refiriéndose á la parte subjetiva, completen el cuadro que nos hemos propuesto diseñar.

Dos cosas deben considerarse en el sugeto: *receptividad* y *actividad*. Cuanto se puede realizar en el mundo de las ideas es un resultado complejo, una combinacion con vária intensidad de estos dos estados ó modos de ser del espíritu.

El sugeto es escitado por las múltiples modificaciones que en él producen los fenómenos físicos y anímicos; y tenemos en las *sensaciones* é *ideas*, la doble huella que, en el recipiente de todo, la *conciencia*, imprimen el mundo físico y el mundo psicológico.

Los *sentidos* y la *razon* son los *órganos* que nos suministran el abundante material de nuestros *conocimientos*.

Los primeros nos dan lo *material, contingente, finito* y *relativo* la segunda, lo *espiritual, necesario, infinito* y *absoluto*.

Entre estos dos *sentidos* (permítase la espresion) que nos comunican respectivamente con la naturaleza y Dios, hay un tercer sentido (llamado por algunos filósofos *sentido del espíritu*) que es el lazo de lo espiritual y material, que es el núcleo en que se unen y asimilan la materia y el espíritu. La *imaginacion* es el *sentido* que ofrece al sugeto la representacion de lo que ha de conocer. Es un medio por el cual sintetizamos, agrupamos en un tipo sensible las múltiples modificaciones que sobre cada sentido producen los objetos. Es lo que nos hace conocer como conocer debe un ser dotado de la doble naturaleza material y espiritual, es decir, en imágen, *per conversionem ad fantásmata*, y de esto no escapan hasta las ideas mas elevadas de la razon. Y esto hace que en geometría tengamos buen cuidado de distinguir entre la imágen y la idea, entre la representacion dotada de cierta magnitud, de cierta forma, de cierta combinacion particular de elementos estensos y la idea que nos representa lo universal, lo que no se refiere ni á magnitud ni á forma determinada; sino que comprende en sí todas ellas, y hace que cuanto hemos demostrado con ocasion de una figura, lo estendamos enseguida á cuantas figuras de aquel género se nos puedan presentar.

Es imposible separar por completo cuanto se refiere á la actividad y pasividad del espíritu, pues estas dos maneras se hallan incesantemente combinadas.

Hemos considerado la receptividad en sus dos modos que nos suministran cuanto existe en el mundo material y espiritual. Falta que consideremos al sugeto como activo, *reaccionando* sobre lo que ha herido su *escitabilidad*. Algunos filósofos denominan entendimiento á la inteligencia en esta segunda fase, y nosotros, para claridad, adoptaremos esta significacion.

El entendimiento obra sobre cuanto le presentan la razon y los sentidos *atiende (tendere ad)* es decir, se dirige al objeto, *percibe (percípere,)* esto es, se apodera del objeto por medio de su representacion (imagen ó idea) y por último *determina* ó aplica los conceptos de la razon al objeto para conocerlo, y en virtud de la *determinacion* conoce que es un ser ó sustancia, que se refiere á una causa, que existe en el espacio y tiempo etc. Las ideas absolutas de la razon son llamadas *categorías* por algunos filósofos, son las leyes de nuestra actividad intelectual sin las cuales no podemos conocer.

El sugeto conoce los *individuos* por los sentidos, los *géneros* mediante la generalizacion, y conoce por la razon lo que se halla fuera del dominio de lo sensible, lo universal, necesario y absoluto, es decir, las ideas racionales que no pueden sernos dadas por los sentidos.

Métodos matemáticos.

No hay mas que un método que llamaremos general, el cual bajo las dos fases ó modos de ser empleado recibe los nombres de análisis ó síntesis.

El método general concretado ó referido á varias cuestiones de una ciencia recibe diversos nombres, y origina los métodos particulares.

El método general, ó simplemente método consiste: 1.° en reducir una cuestion á otra ú otras mas elementales 2.° en definir, dividir, clasificar y ordenar las cuestiones ú objetos.

MÉTODO DE SUSTITUCIONES SUCESIVAS.

En matemáticas toda cuestion se resuelve en otra ú otras mas sencillas. No hay mas escepcion á esto que las elementales ó fundamentales, que sirven de base á las demas.

Así, la resta y multiplicacion se resuelven en sumas. La multiplicacion de números de varias cifras se reduce á multiplicaciones de números de una cifra. En la teoría del m. c. d., reducimos la cuestion á hallar el m. c. d. del divisor y residuo, números mas sencillos que el divisor y dividendo.

Dichas sustituciones se pueden verificar de dos maneras. 1.ª por *intuicion* 2.ª por *discursion*.

Por intuicion se aplica á lo compuesto cuanto se admitió para lo simple fundándose en que: *Lo que se hace con el conjunto de las partes queda hecho con el todo.*

De esto tenemos ejemplos en todas las operaciones aritméticas llamadas fundamentales por los autores.

Se procede discursivamente cuando se demuestra que cierto cambio de condiciones de la cuestion no hace variar las entidades, ó relaciones que tratamos de establecer.

Esto tiene lugar al hallar el m. c. d. y m. c. m. de varios números, al demostrar que el número de decenas de la raíz cuadrada de un número no es mayor ni menor que la raíz cuadrada entera de las centenas, y que el número de decenas de la raíz cúbica de un entero no es mayor ni menor que la raíz cúbica entera de los millares, etc.

Asentado que toda cuestion se resuelve por otras mas sencillas ó conocidas (no siempre lo anteriormente conocido es lo mas sencillo pues esto depende de la marcha adoptada en la ciencia) es preciso consignar que se deben distinguir tres métodos generales por sustitucion: 1.° *Induccion*, que estiende lo *individual* á lo *general*. 2.° *Ad absurdum*, que estiende lo *afirmativo* á lo *negativo*, ó lo *directo* á lo *recíproco*. 3.° El método *de los límites* que estiende lo *comensurable* y *finito* á lo *incomensurable* é *infinito*.

1.° *Induccion*, método general que da estension en cantidad.

Despues de probar una verdad para un objeto que ocupa cierto lugar en un conjunto, se trata de hacerla estensiva á cualquier objeto de ese conjunto.

La induccion es empírica ó racional.

La 2.ª es la única usada en matemáticas; se verifica cuando la razon, en virtud de la demostracion, concibe como universal una ley probada con respecto á un objeto.

Así: demostrando que, el m. c. d. del dividendo y divisor es igual al del divisor y resíduo, queda justificado que podemos sustituir á los dos primeros los dos últimos, y así sucesivamente, cualquiera que sea el número de divisiones por efectuar.

Probando que los valores de las incógnitas de una ecuacion no alteran aunque se multipliquen ó dividan los dos miembros por un número; aunque se les aumente ó disminuya un valor conocido, se justifica el tránsito de un sistema de ecuaciones á otro mas sencillo segun cualquiera de los métodos de eliminacion, y cualquiera que sea el número de ecuaciones.

En virtud de que: *todo divisor de dos números es divisor de su* m. c. d. y de que: *todo múltiplo de dos números es múltiplo de su* m. c. m., se justifica la obtencion del m. c. d. y m. c. m. de varios números, que queda reducida á efectuar, una série sucesiva de estas operaciones para dos de ellos.

En Algebra realizamos muchas inducciones racionales haciendo estensivas las reglas probadas para las cantidades enteras positivas á las fraccionarias, incomensurables, y negativas.

El método inductivo es muy útil para muchas cuestiones en que no es fácil probar desde luego, con toda generalidad una relacion, y es necesario remontarnos á lo complejo desde lo elemental.

El teorema: *En todo poliedro convexo, el número de aristas sumado con 2, es igual al de caras sumado con el de vértices*, se demuestra tomando como punto de partida una cara para la cual se verifica dicha relacion, despues de legitimar por induccion para el poliedro de $m—1$ caras lo demostrado para el que solo tiene m, lo cual autoriza el tránsito de una cara á una reunion de dos caras y así sucesivamente.

2.° *Método ad absurdum*. Este sirve para estender la verdad de una proposicion y su recíproca á la de sus contrarias (llamamos contrarias las que tienen opuesta hipótesis y opuesta tésis) ó la de una proposicion y su contraria á sus recíprocas.

Así, probado que; En un triángulo á *lados iguales* se oponen *ángulos iguales* y á *mayor lado mayor ángulo*, se obtiene que á *ángulos iguales* se oponen *lados iguales* y á *mayor ángulo mayor lado*.

Y despues de probar que á *iguales lados* se oponen *ángulos iguales* y á *ángulos iguales lados iguales*, se demuestra que á *mayor lado* se opone *mayor ángulo*, y que á *mayor ángulo, mayor lado*.

Es decir, que basta probar las dos directas contrarias ó una directa y su recíproca para quedar demostradas *ad absurdum* las dos restantes.

La demostracion de una proposicion equivale á la de la recíproca de su contraria. Pues probando que si cuatro números *forman proporcion*, el *producto de los estremos es igual al de los medios* queda probado que: si el producto de dos números estremos es *desigual* al de los dos medios, *no forman proporcion*.

Este método sirve para establecer lugares geométricos, pues si demostramos que todo punto situado en cierta línea ó superficie goza de cierta propiedad, al probar recíprocamente que todo punto que goza de la indicada propiedad se halla en determinada línea ó superficie, queda establecido un lugar geométrico compuesto de puntos que tienen dicha propiedad.

Así, despues de probar que: *Todo punto situado en la perpendicular levantada á una recta en su punto medio equidista de sus estremos*; *que todo punto situado en la bisectriz de un ángulo equidista de sus lados; que la recta perpendicular á dos que pasan por su pie en un plano es perpendicular á este*, y otras muchas proposiciones que se pudieran citar, se demuestran por reduccion al absurdo que *todo* *punto equidistante de los estremos de una recta se halla en la perpendicular levantada en su punto medio; que todo punto equidistante de los lados de un ángulo se halla en su bisectriz, que todas las perpendiculares trazadas por un punto á una recta se hallan en su plano*; lo cual equivale á decir que la *perpendicular* levantada á una recta en su punto medio, la *biscetriz* de un ángulo y el *plano* perpendicular á una recta en uno de sus puntos, son los *lugares geométricos* de los puntos que tienen cierta propiedad.

3.° El *método de los límites* sirve para pasar de lo comensurable á lo incomensurable, de lo finito á lo infinito.

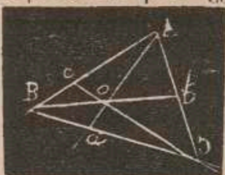
Se aplica á demostraciones relativas á los números incomensurables y á las de propiedades de curvas, las cuales se refieren á las de líneas poligonales inscritas ó circunscritas.

Los métodos de los *infinitamente pequeños*, de *exaucion*, de los *indeterminados*, de los *indivisibles* etc. no son mas que varias maneras de conseguir este objeto, y se pueden dividir en dos secciones: Los que conducen de lo finito á lo infinito (exaucion y límites), los que conducen de lo infinito á lo finito (infinitamente pequeños, é indivisibles).

A estos métodos creemos deber añadir el que llamamos *generalizacion y construccion, por idénticos modos de ser*. Dicho método en realidad comprende á todos los demás, pues de él usamos en toda demostracion matemática; consiste en elevarnos á admitir una verdad (probada con ocasion de números ó figuras particulares) para todos los números ó figuras de un mismo género. Mediante él aplicamos á cualquier número, los razonamientos hechos para probar que *un producto de los factores no altera cualquiera que sea el órden de estos*, con ocasion de dos números supuestos.

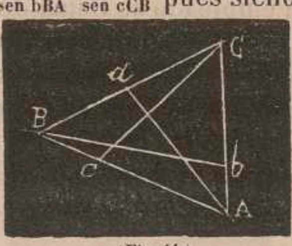
Aplicado á cuestiones elementales se reduce á una simple induccion, en virtud de la que generalizamos para todas las entidades de un mismo género lo probado para algunas de ellas. Pero en las ramas superiores de la ciencia, donde se trata de *sistemas* de elementos, es además de gran utilidad por conducir á la rápida eliminacion de algunas entidades que por simetría deben destruirse, con *intuicion clara*. Se reduce en este caso á formar por simetría varias espresiones que combinadas entre sí de cierto modo dan con gran sencillez la relacion que se trata de obtener.

Si queremos demostrar la relacion (fig. 10) que existe entre las áreas de los seis triángulos componentes del *ABC* espresada por $\frac{Aoc}{Coa} \cdot \frac{Boa}{Aob} \cdot \frac{Cob}{Boc} = 1$, diremos: Cada triángulo es á su opuesto por el vértice como el producto de los lados del 1.° al de los del 2.° Como cada recta *oA, oc,* etc. entra en dos triángulos consecutivos, es evidente que dividiendo el producto de los triángulos de lugar impar por el de los de lugar par, los productos de sus lados correspondientes han de estar compuestos de los mismos factores; luego su relacion ha de ser 1, de aquí se concluye la fórmula propuesta.



(Fig. 10.)

Tambien es fácil probar (Fig. 11) que $\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} = \frac{sen.aAB}{sen.aAC} \cdot \frac{sen.bBC}{sen\,bBA} \cdot \frac{sen.cCA}{sen\,cCB}$, pues siendo $aB = \frac{AB.sen.aAB}{sen.a}$, $aC = \frac{AC.sen.aAC}{sen.a}$, y por consiguiente $\frac{aB}{aC} = \frac{sen.aAB}{sen.aAC} \cdot \frac{AB}{AC}$, aplicando esta fórmula á *bC* y *bA*, á *Ac* y *cB*, que tienen *idénticos modos de ser*, resulta que cada lado del triángulo entrará sucesivamente como numerador y denominador en las demas relaciones; luego desaparecerán al reducir, y solo quedará la relacion entre el producto de los senos de los ángulos de la izquierda y el producto de los senos de los ángulos de la derecha (suponemos un móvil situado dentro



(Fig. 11.)

del triángulo girando al rededor de un punto); queda pues, probada la relacion que podremos enunciar: *El producto de los segmentos de la izquierda, es al producto de los segmentos de la derecha, como el producto de los senos de los ángulos correspondientes de la izquierda, es al producto de los senos de los ángulos de la derecha.*

De esto podemos deducir que el producto de las relaciones de los senos de los ángulos citados, en el caso que las rectas sean las medianas, y el producto de las relaciones de los segmentos citados, en el caso de ser bisectrices es 1; pues en el caso de las medianas se tiene que $\frac{aB}{aC}=\frac{bC}{bA}=\frac{cA}{cB}=1$ (en valor absoluto) luego $\frac{sen.aAB}{sen.aAC} \cdot \frac{sen.bBC}{sen.bBA} \cdot \frac{sen.cCA}{sen.cCB}=1$ En el caso de las bisectrices, se verifica que $\frac{sen.aAB}{sen.aAC}=1$ $\frac{sen.bBC}{sen.bBA}=1$ $\frac{sen.cAC}{sen.cCB}=1$; luego $\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB}=1$ (en valor absoluto).

Métodos particulares.

Los métodos particulares pueden ser divididos en *determinativos, estensivos* y *limitativos.*

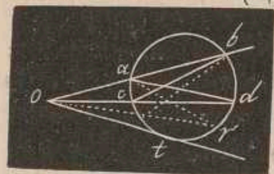
Los determinativos tienen por fin determinar entidades, lo cual se verifica cuando se trata de hacer coincidir figuras geométricas, y entonces el método empleado se llama de *superposicion.* Las proposiciones que sirven de fundamento son las siguientes: *Por un punto no se puede trazar mas que una perpendicular y paralela á una recta. Dos ángulos iguales superpuestos coinciden.*

Mediante ellas se prueban los casos de identidad de los triángulos, y de esto resultan las numerosas verdades demostradas por coincidencia.

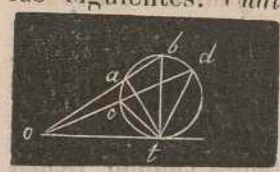
Hay autores que evitan la superposicion en muchas demostraciones deduciendo por razonamiento la igualdad de los elementos de que se trata. Por ejemplo, en vez de probar por superposicion que *si desde un punto se trazan á una recta dos oblicuas equidistantes del pie de la perpendicular, serán iguales*, puede deducirse que serán iguales por ser lados homólogos de dos triángulos rectángulos que tienen iguales sus catetos.

Tambien es digno de citarse entre los determinativos el método en virtud del que se determina la posicion de un punto por la consideracion de dos proporciones, una dada en la hipótesis, otra obtenida mediante cierta construccion, en las cuales, habiendo tres términos idénticos, los cuartos tienen tambien que serlo.

De esta manera se demuestra que: *Si una recta divide en partes proporcionales á dos lados de un triángulo, será paralela al tercero. Si dos rectas* ad *y* cb *que cortan los lados de un ángulo* bod *son tales, que* oa: oc:: od: ob, (fig. 12) *serán antiparalelas. Si desde t* (fig. 13) *se trazan dos rectas* ta, tb *tales, que* ot^2=oa.ob; ta *y* tb *serán antiparalelas. Si dos triángulos tienen sus lados paralelos, las rectas que unen dos á dos los vértices homólogos concurren en un punto. Si desde un punto* o (fig. 12) *se trazan dos rectas tales, que* oa: oc : : od : ob, *los puntos* a, b, c *y* d *se hallarán en una circunferencia*, y de esta última se desprenden multitud de proposiciones relativas á la teoría de las figuras homotéticas, tales como las siguientes: *Cuatro puntos antihomólogos estan en una circunferencia. Los centros de semejanza de tres figuras homotéticas se hallan en línea recta.*



(Fig. 12.)



(Fig. 13.)

Esto se consigue tambien por la consideracion del principio: *Dados dos puntos* A *y* B *en una recta indefinida, existen en ella dos puntos solamente tales, que las relaciones de sus distancias á los* A *y* B *tengan un valor dado*, que conduce *á la relacion* *armónica*, importantísima tanto en la cuestion de que se trata como en las relativas á segmentos, segun puede verse recordando la teoría de trasversales.

Los métodos estensivos sirven para estender una clase de verdades á otras que tienen con ellas cierta relacion: Esta relacion caracteriza la índole de las nuevas proposiciones.

1.° Método de los *triedros simétricos*. Por su medio determinamos relaciones de ángulos diedros en virtud de relaciones de ángulos planos, é inversamente.

Es el que establece la dependencia entre proposiciones referentes á inclinaciones de rectas y proposiciones referentes á inclinaciones de planos.

El tránsito de unos teoremas á sus correlativos se funda en la consideracion de las relaciones:

$$a'=2r-A \qquad A'=2r-a$$
$$b'=2r-B \qquad B'=2r-b$$
$$c'=2r-C \qquad C'=2r-c$$

en que a, b, c, A, B y C representan los ángulos planos y diedros de un triedro, y a' b' c', A', B' y C' representan los de su suplementario; mediante ellas habiendo demostrado, que *en un triedro una cara es menor que la suma de las otras dos*, que *la suma de los ángulos planos de un triedro es menor que cuatro rectos*, que *dos triedros son iguales cuando tienen una cara igual adyacente á dos diedros iguales*, que *dos triedros son iguales cuando tienen sus tres ángulos planos respectivamente iguales é igualmente dispuestos*, se demuestra fácilmente que:

En un triedro el menor de sus diedros aumentado en dos rectos es mayor que la suma de los otros dos. En todo triedro, la suma de los ángulos diedros está comprendida entre dos y seis rectos. Dos triedros son iguales cuando tienen igual un diedro y las caras que los forman iguales é igualmente dispuestas, dos triedros son iguales cuando tienen sus diedros iguales é igualmente dispuestos.

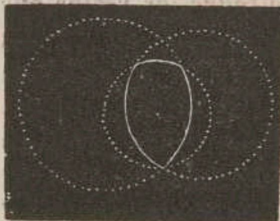
2.° El método de las *polares recíprocas* fundándose en que *las polares de todos los puntos de una recta pasan por el polo de la misma*, y en que *los polos de todas las rectas que pasan por un punto se hallan en la polar de este*, sirve para pasar de las proposiciones en que se trata de puntos en línea recta á las en que se trate de rectas convergiendo en un punto ó inversamente; pues fácil es comprender que si dada una figura, se trazan las polares de sus diferentes vértices y los polos de sus diferentes rectas; si en ella hay algunos que esten en linea recta, las rectas correspondientes de la segunda figura se reunirán en un punto, y á las rectas concurrentes en un punto de aquella, corresponden puntos en linea recta de esta.

Mediante este método, probado que: en todo exágono *inscrito* en una circunferencia, los *puntos* de concurso de los tres pares de *lados* opuestos están *en línea recta*, se pasa á admitir que: En todo exágono circunscrito á un círculo las tres *diagonales* que unen los vértices opuestos se cortan en *un mismo punto*.

2.° Método de *trasformacion por radios vectores recíprocos*. Consiste en trazar la figura inversa de la propuesta, es decir, la figura construida trazando rectas desde un punto arbitrario llamado orígen, á los vértices de la propuesta, y tomando en ellas puntos tales, que los productos de sus distancias al orígen por las de dichos vértices al mismo sean una cantidad constante.

Por su medio, habiendo probado que *la suma de los tres ángulos de un triángulo vale dos rectos*, se pasa á admitir (fig. 14) que: *La suma de los ángulos de un triángulo curvilíneo cuyos lados son arcos de círculo pasando por un punto, es igual á dos rectos.*

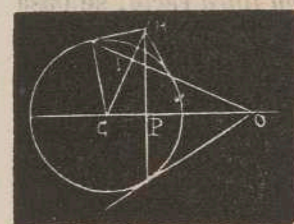
Otro método importante que llamaremos *por eliminacion* es el que se aplica frecuentemente para establecer lugares geométricos, y consiste en deducir de las figuras espresiones literales mediante cuya combinacion se consigne eliminar algunas cantidades variables, (sus variaciones corresponden á las



(Fig. 14.)

variaciones de los elementos de las figuras) obteniendo la cantidad que se busca por una espresion de cantidades constantes, con lo cual se consigue hacer ver que el valor de cierta entidad es independiente de las variaciones de otras determinadas entidades, y se establece un lugar geométrico.

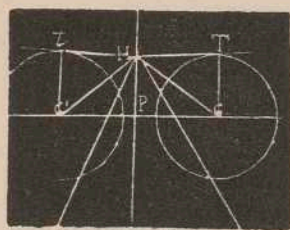
Así sucede en la demostracion del teorema: *Si desde un punto* o (fig. 15) *se trazan secantes á una circunferencia, y por los puntos de interseccion tangentes, el lugar geométrico de las intersecciones de cada dos tangentes es la polar del punto* o. Se desprenden de la figura



(Fig. 15.)

las relaciones $cH : co :: cP : cI$ y $R^2 = cH.\ cI$, que conducen á $R^2 = cP.\ co$, ó $cP = \frac{R^2}{co}$, donde se ven eliminadas las variables cH y cI (su variacion depende de las posiciones de la secante). Vemos por esto que todos los puntos del lugar buscado tienen la misma proyeccion y por consiguiente se hallan en la perpendicular *MP*.

Al hallar que: *El eje radical de dos círculos es el lugar geométrico de los puntos que tienen la misma potencia con relacion á los mismos* (fig. 16) escribiremos sucesivamente, $R^2 - R'^2 = Hc^2 - Hc'^2 = cP^2 - c'P^2$ (Considerando que H tiene igual potencia con relacion á los dos círculos, y suprimiendo al minuendo y sustraendo Hc^2 y Hc'^2 el valor HP^2, cateto comun), y $CP = \frac{cc'^2 + R^2 - R'^2}{2cc'}$, espresion donde no hay mas que valores constantes, lo cual nos hace ver que la proyeccion de dichos puntos es la misma, y por consecuencia que están en



(Fig. 16.)

una perpendicular á la línea de los centros.

Esto puede aplicarse á los teoremas: *La suma de los cuadrados de dos lados de un triángulo es igual á dos veces el cuadrado de la mediana relativa al tercero mas dos veces el cuadrado de la mitad de este tercer lado. La diferencia de los cuadrados de dos lados de un triángulo es igual al doble producto del 3.º por la proyeccion sobre este lado de la mediana correspondiente.* Suponiendo constantes esta suma y diferencia se obtienen los lugares geométricos *circunferencia* y *perpendicular* á una recta.

Si queremos hallar: *El lugar geométrico de los puntos tales que las tangentes dirigidas desde ellos á dos círculos sean iguales* (fig. 16) (diferente manera de enunciar y resolver el problema relativo al eje radical) deducimos de la figura

$$Hc^2=cT^2+TH^2,\ Hc'^2=c't^2+tH^2$$
$$Hc^2=R^2+TH^2,\ Hc'^2=r^2+tH^2$$

(llamando R y r á los radios.)

Sustituyendo y teniendo presente que $TH=tH$ por hipótesis resulta

$$R^2=r^2+cc'^2-2\ cc'.\ cP.$$

Vemos que han desaparecido las cantidades variables Ht, HT, Hc y Hc', y solo han quedado valores constantes para la determinacion de cP.

De la misma manera se obtiene que: *El lugar geométrico de los puntos para los cuales sus distancias á un punto fijo y las tangentes trazadas desde los mismos á una circunferencia dada sean iguales, es una perpendicular á la recta que une el centro con dicho punto,* (proposicion á la que se puede reducir la anterior suponiendo que la circunferencia cuyo centro es C' se reduzca á este punto) y otros muchísimos teoremas estudiados en Geometría superior.

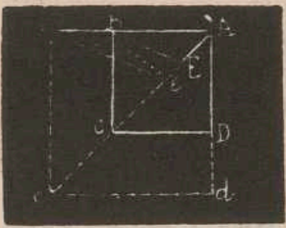
Este método es muy empleado en las ramas superiores de la ciencia matemática para establecer lugares geométricos, y así se obtienen las ecuaciones del plano, y en general de las superficies de cualquier género, mediante las de la directriz y generatriz. Tambien se obtiene la ecuacion de la evoluta de una curva y otras no menos importantes.

Los métodos citados son *estensivos* porque estienden realmente el dominio de la ciencia, cada uno la duplica ó al menos duplica el número de cuestiones de índole determinada.

Otros métodos vamos á estudiar caracterizados por simplificarlas ó facilitarlas, prescindiendo eventualmente de alguna de las circunstancias que las complican. Y son:

1.° *Método por semejanza*. Este método consiste en prescindir de la magnitud y obtener una figura semejante á la que se trata de hallar. Al final se restablece la verdadera magnitud.

Si se trata de *construir un cuadrado conociendo la diferencia entre la diagonal y el lado* (fig. 17) se trazará el cuadrado auxiliar *Abcd*, su diagonal *Ac*, el arco *be*, y la cuerda *be*. Tomaremos desde A la parte *AE* igual á la diferencia dada. Considerando A como centro de semejanza, *E* y *e* serán puntos homólogos en los cuadrados, y trazando *EB* paralela á *eb* tendremos *B* que será uno de los vértices del cuadrado ABCD que se pedia.



(Fig. 17.)

Por el mismo método se puede resolver el problema: *construir un triángulo conociendo sus tres alturas*.

2.° *Método por simetría*. Consiste en prescindir de la posicion. La construccion de las figuras simétricas introduce nuevos elementos que facilitan la resolucion de los problemas.

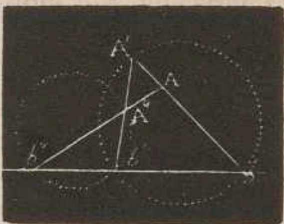
Con su auxilio se resuelven los problemas:

Dados dos puntos y una recta hallar sobre esta un punto tal que la suma de sus distancias á él sea un mínimo.

Dados dos puntos y una recta hallar sobre esta un punto tal, que la diferencia de sus distancias al mismo sea un máximo.

Inscribir en un ángulo un triángulo cuyo perímetro sea un mínimo.

3.° *Método por inversion.* Consiste en suponer conocidas todas ó parte de las incógnitas y comenzar la resolucion partiendo de ellas. Como caso particular citaremos el problema: *Dadas tres rectas formando triángulo trazar una secante que determine en ellas dos segmentos iguales á dos líneas dadas* m *y* n (fig. 18.) Se principia por trazar la recta *bb'b"* cuyos dos segmentos son respectivamente iguales á *m* y *n*, sobre *bb'* y *b'b"* se construyen dos segmentos circulares capaces de los ángulos A' y A", y desde *b'* una recta tal, que el segmento comprendido entre las dos circunferencias sea igual á A'A", y se habrá construido el triángulo AA'A" igual al propuesto.



(Fig. 18.)

4.° *Método por interseccion de lugares geométricos y algorítmicos.* Este método consiste en prescindir momentánea y sucesivamente de alguna condicion, lo cual aumenta la facilidad del problema.

Sea: *Trazar una circunferencia que pase por un punto y sea tangente á una recta en otro punto. Prescindiendo del primer punto* sabemos que el *centro* debe hallarse en la perpendicular que pase por el segundo; *prescindiendo de la recta,* vemos que habiendo de pasar por los dos puntos, su centro se hallará en la perpendicular levantada en el punto medio de la recta que determinan. La interseccion de dichas perpendiculares da el centro que se busca.

En los sistemas de ecuaciones sucede lo mismo.

Sea $x-7=y-8+z$
$x-z-y=3x-4$
$2x-z+y=160$

La cuestion se reduce momentáneamente á resolver
$x-7=y-8+z$
$x-z-y=3x-4$

Es decir, á obtener todos los números que satisfagan simultáneamente á estas dos condiciones, cuestion indeterminada que contiene tres sistemas de valores, esto es, los de z é y cuando x es independiente, los de x é y cuando lo es z y los de z y x cuando lo es y.

Al combinar la ecuacion obtenida eliminando una incógnita entre estas dos con la $2x-z+y=160$, sometemos el sistema indeterminado de valores de las dos incógnitas que quedan en la ecuacion resultante á una nueva condicion, y por consiguiente, ese infinito sistema de valores que la satisfacen queda mas limitado.

De este modo al resolver sistemas de ecuaciones se van limitando mas y mas los sistemas de valores de las incógnitas hasta quedar estas completamente determinadas.

Ideas generales acerca de la definicion, division y clasificacion.

El objeto es conocido en sí mediante el análisis. Hay en esto cierta convergencia. Despues de conocido cada objeto es necesario que los conozcamos en su conjunto, en sus relaciones y dependencia. Sería imposible al espíritu humano retener el conocimiento de todos los objetos si no tratara de hallar *lo comun*, los lazos en virtud de los que unos escitan la idea de otros, despues de haber estudiado por el análisis *lo propio*.

Los múltiples datos suministrados por la razon y los sentidos (ideas y sensaciones) aparecerían desordenados y confusos como las olas del Océano si no fuera por las *formas* generales que revisten nuestros conocimientos.

Nos es imposible conocer todos los indivíduos, por eso tenemos que sustituir á ellos *tipos intelectuales*, tipos abstractos que produce la inteligencia, medio que tenemos de conocer. *La definicion* nos da lo *comun* de varios séres (género) y lo propio del ser, que definimos (última diferencia). De esta manera, el sugeto crea otro conjunto *sistematizado* de séres abstractos, correspondiendo al conjunto de séres reales, y conoce estos por aquellos, es decir, el objeto por la definicion.

En matemáticas la definicion tiene otro carácter que en las ciencias naturales. En matemáticas nos evitamos el sustituir los tipos intelectuales á los séres del mundo esterior, porque su objeto inmediato son ideas que tienen ya la abstracion necesaria para la ciencia, y por eso la *definicion* matemática es la designacion de un nombre á un objeto (idea), que la inteligencia contempla con plena claridad, lo cual impide toda controvérsia. Mediante la definicion conseguimos que ese sistema de séres abstractos que sustituimos á los séres reales, adopte la forma de un árbol que comienza por el atributo comun á todos los séres (ser), y se ramifica y subdivide hasta llegar á los que corresponden á las mas ínfimas especies.

Es claro que al definir señalo lo propio y lo comun de los séres, y que si en vez de fijarme en cada uno, contemplo el conjunto de los de un mismo género, servirá de fundamento á la *division* de los mismos lo *propio* de cada uno que marca lo que le diferencia de los demas.

La division es pues el medio de obtener un sér en sus variedades, ó especies.

La definicion y division son necesarias en la ciencia, mas no suficientes. Por sí solas darían una coleccion de entidades; pero sin enlace ni dependencia, darían productos de la arbitrariedad; pero sin razon de ser en sí, ni relacion que estableciera solidaridad y dependencia entre ellos.

Para completar el cuadro es necesaria la demostracion que por el análisis, mediante la observacion y esperimentacion (ciencias esperimentales) ó mediante la intuicion (ciencias racionales), establece cuantas afirmaciones exige la ciencia para un ser, y por la síntesis da á conocer lo séres en sus fundamentos ó principios, y reduce á sistema las verdades relativas á un objeto.

Limitándonos á las matemáticas tenemos pues, que todo se reduce: 1.° á *conocer* el objeto en su *unidad* y *variedad* mediante la definicion y division. 2.° *á formarlo* ó *construirlo*; porque la ciencia matemática difiere de las demas en que ella ha de construir las variedades de su objeto (cantidad y estension) mediante la aplicacion de las ideas racionales presididas por las leyes del órden. 3.° á *espresar*. Y no tratamos del lenguage ordinario mediante el que todo ser racional se comunica con sus semejantes; sino del lenguaje propio de las matemáticas, pues siendo los elementos de los números idénticos entre sí, se necesita un medio de espresion sujeto á leyes fijas y regulares que establezcan cierta distincion entre séres que en sí no la tienen.

El sugeto, poseedor de varias ideas, reacciona sobre ellas tomando la iniciativa. De aquí surge el *problema*. Nos hallamos en la esfera de la actividad y eleccion libre de condiciones, y por consiguiente de lo arbitrario. Las relaciones entre lo arbitrario del entendimiento y lo que *es*, originan los curiosos resultados obtenidos por la discusion de problemas y ecuaciones, que tiene por objeto *traducir las relaciones abstractas del mundo algébrico en relaciones concretas del mundo físico ó relaciones arbitrarias del mundo ideal*, y recíprocamente.

De esta arbitrariedad depende que el planteo de un problema, es decir, dicha traduccion, escapa del dominio de preceptos y reglas fijas.

Es la parte que ofrece mas dificultades en matemáticas, pues para ello, ademas de estar posesionado de los teoremas de la ciencia, se necesita cierta oportunidad en la eleccion de la marcha que se haya de emprender.

Lo que acabamos de indicar encierra cuanto de invariable é imprescindible comprende la ciencia matemática, y en todas las obras de enseñanza se halla consignado, no existiendo otra diferencia que la diversa coordinacion de ideas y la mayor ó menor importancia atribuida á unas ú otras.

De manera que todos los puntos de vista necesarios en la organizacion de la ciencia se reducen á considerar *modos de ser el objeto* (número entero, fraccionario, negativo, incomensurable, imaginario, línea, ángulo, triángulo, polígono, ángulos diedros, etc.), *modos de concebir el sugeto*, (igual forma é igual magnitud ó *identidad*, igual forma y desigual magnitud ó *semejanza*, igual magnitud y distinta forma ó *equivalencia*, etc.), *cuanto se refiere al sugeto como espectador* (definiciones, divisiones, demostraciones, ya intuitivas, ya discursivas) y *cuanto se refiere al sugeto como actor* (resolucion de problemas.)

En otro lugar se ha indicado que deben distinguirse tres fases, tanto en el desenvolvimiento de la humanidad como en el del indivíduo bajo el punto de vista científico. Despues de espuesto lo que antecede, será conveniente esplanar esta cuestion para completar el asunto de que nos ocupamos.

El indivíduo al adquirir la ciencia matemática trata: 1.º de adquirir una á una las verdades (análisis), y combina imperfectamente sus ideas auxiliándose de la fé que tiene en el maestro (síntesis facticia), 2.º Posesionado de las verdades una á una, tiende á dominar su conjunto con ojeadas generales, y se esfuerza en hacer escursiones ascendentes ó descendentes para conseguir ese dominio (ejercicio predominante de la actividad para clasificar y ordenar ideas), 3.° Posesionado de la ciencia en sus elementos y conjunto, trata de fundarla sólidamente basándola en el conocimiento del sugeto y objeto y en las relaciones de uno y otro (conocimiento de la ciencia por sus principios).

Ya solo falta indicar que en la Algoritmia, siendo el material resultado de la idea de número, que no encierra nada de contradictorio y que surge al considerar los fenómenos de conciencia, no es necesario probar la existencia del mismo en sí y en sus variedades. Pero no sucede lo mismo en geometría, siendo su objeto la estension, que se halla fuera del sugeto y de la cual no tiene evidencia tan inmediata como del número; como el entendimiento produce relaciones *á priori* (perpendicularidad, paralelismo etc.), es necesario probar su existencia, es decir, ver la conformidad de lo obtenido en cierto modo arbitrariamente con la realidad. Por esta razon es muy aceptable en Geometría hacer las siguientes divisiones: 1.ª *Definiciones* y *divisiones* que dan á conocer las entidades á priori (síntesis facticia). 2.ª Demostracion, haciendo preceder la que prueba la existencia de las figuras, siendo esta parte la que hace las veces del analísis, pues enseguida de probar que los séres están en conformidad con nuestros conceptos á priori (mediante la demostracion de la existencia) estudiamos sus propiedades, es decir, su contenido. 3.ª Despues de haber contemplado el sugeto al objeto en su unidad, en sus variedades y contenido, corresponde que, desempeñando el papel de activo, tienda á realizar ó hacer existente cuanto ha producido en el mundo especulativo (resolucion de problemas).

FIN.

PUNTOS DE VENTA

En Madrid; en las librerías de Duran y Bally-Bailliere.

En Zaragoza; en las de la Viuda de Heredia y Publicidad.

En Logroño; en casa del autor y en la imprenta de Federico Sanz.

Precio, 8 rs.

Se halla de venta en los mismos puntos el opúsculo del mismo autor titulado OBSERVACIONES ÚTILES EN EL ESTUDIO DE LAS MATEMÁTICAS al precio de 5 rs.