

N
2

8654

8342





Al Exmo Sr D Amós Salvador
 en testimonio de la más distinguida consideración
 D. J. de Saldeano

LAS MODERNAS GENERALIZACIONES

Regalada a esta Biblioteca por
 D. Amós Salvador,
 16 Mayo 1865





LAS MODERNAS GENERALIZACIONES

EXPRESADAS POR

EL ÁLGEBRA SIMBÓLICA,
LAS GEOMETRIAS NO-EUCLÍDEAS
Y EL CONCEPTO DE
HIPER-ESPACIO

POR

D. ZOEL GARCIA DE GALDEANO

CATEDRÁTICO DE LA UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

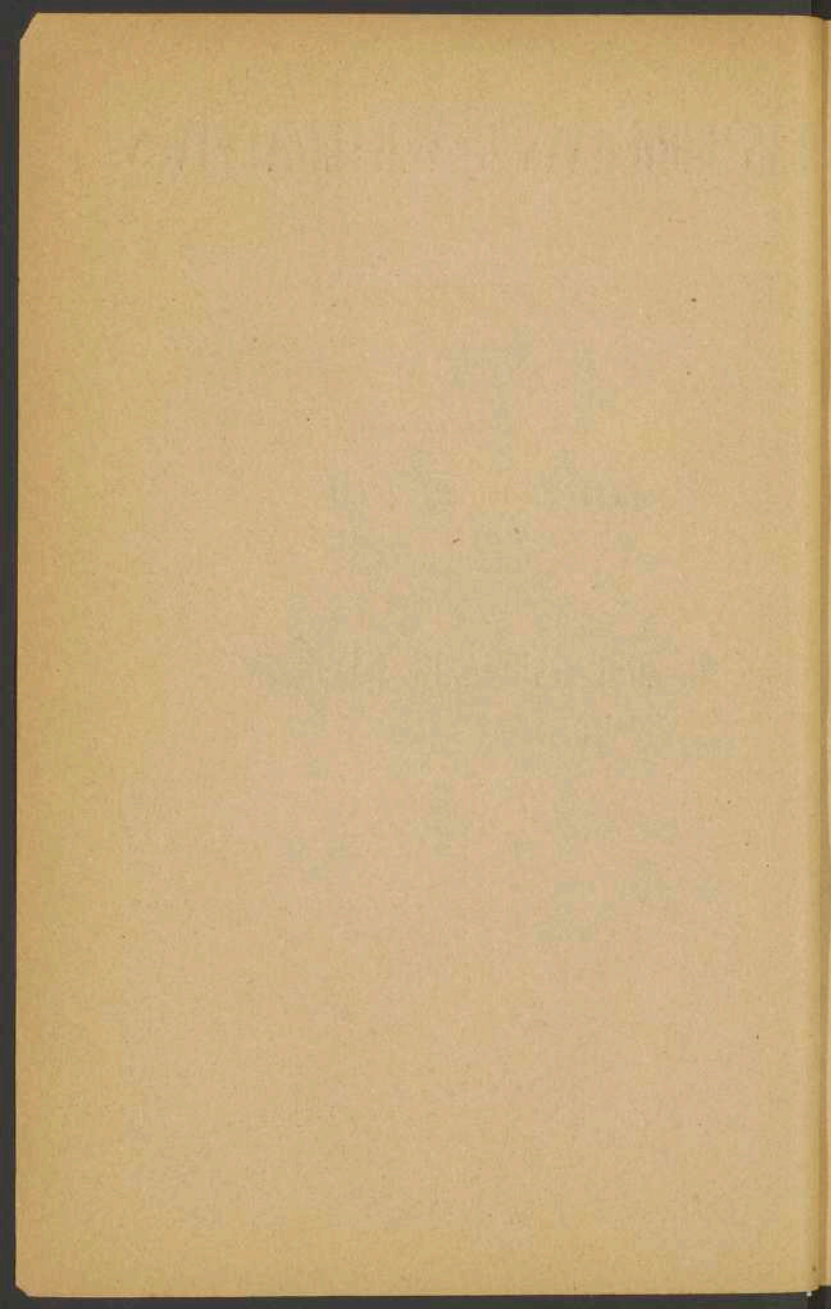


MADRID

Imp. del Suc. de J. Cruzado á cargo de Felipe Marqués,
Blasco de Garay, 9.—Teléfono 3.445.

1896

12/8020



I

Sucinta reseña del moderno desenvolvimiento de las teorías matemáticas

Haciendo caso omiso del desarrollo ordinario de la Geometría y del Análisis ó Algoritmia, que pudiéramos llamar clásico y que llega hasta la extensión dada á estas dos ramas de la Matemática por los geómetras y analistas del siglo XVII y sus continuadores á comienzo del siglo XIX, vamos á tratar exclusivamente de las vastas generalizaciones que, partiendo de los trabajos de Cauchy y de Poncelet en cada una de dichas ramas, llegan á constituir el inmenso contenido de la Matemática bajo la forma de un organismo en que ya se nota marcadamente la unidad hacia la cual se han encaminado los investigadores, y hasta el carácter filosófico, debido á ciertos espíritus metafísicos que han contribuido á reunir sus dispersas ramas bajo leyes comunes y generales, y darle el carácter de una sola ciencia, á pesar de sus múltiples manifestaciones.

Se ha considerado á la Matemática, especialmente desde los tiempos del Renacimiento, como ciencia abstracta, hasta el punto de llegar á ser considerada por el filósofo é historiador Vico como criterio de la verdad, siendo como es un desenvolvimiento subjetivo, una creación de nuestro entendimiento; desenvolvimiento y creación que aparece en su plenitud dentro de la doc-

trina Kantiana, por la cual el espacio y el tiempo son formas de nuestra intuición empírica.

Pero si la Matemática se desarrolló en el dominio abstracto, tomando tan sólo como objetos el número y los elementos geométricos, punto, línea y superficie; en esta etapa de su proceso, aún no había agotado todas las formas de la abstracción, y hasta la época de Cauchy y de Poncelet puede afirmarse que generalmente no había salido del dominio de lo real, del concepto siempre correspondiente á algún objeto, al menos intelectual ó existente en la región de las ideas, pero realizable de una manera más grosera, cuando de esta región se descendía á la de las aplicaciones.

Abstracción fecunda era la importada por Leibnitz con el infinito y los órdenes de infinitos, mediante la cual la razón salva la barrera de lo finito, aun bajo la forma siempre variable de lo indefinido. Pero lo finito, como lo infinito, son objetos existentes y reales, y éste, aun considerado por exclusión de aquél, es objeto de nuestras investigaciones.

Otro elemento quedaba rezagado en la marcha progresiva de los estudios matemáticos, que á lo más se empleara como instrumento útil en el cálculo, por los analistas de fines del siglo XVIII y comienzos del actual, lo *imaginario*, que obtuvo alguna correspondencia con la realidad cuando Argand dió su interpretación geométrica y cuando Gauss, y sobre todo Cauchy y más tarde Riemann, hicieron basarse en él la vastísima teoría de las cantidades complejas ó funciones de variables complejas, consiguiendo encadenar con la realidad geométrica aquel objeto puramente simbólico.

Por otra parte, Carnot había pretendido realizar esta entidad algorítmica en la Geometría mediante las corre-

laciones directa, inversa y compleja, correspondientes á los estados positivo, negativo é imaginario de la cantidad, y Poncelet dilató los dominios de la Geometría, aspirando á enlazar lo infinito y lo imaginario á lo finito y real mediante el principio de continuidad y sus procedimientos proyectivos de las figuras.

Y tanto en los trabajos de Cauchy como en los de Poncelet hallamos el camino bifurcado que conduce á las amplias generalizaciones de la Matemática contemporánea, lo que va á ser objeto del actual trabajo.

Pero si Cauchy con sus originales descubrimientos en todas las ramas de Análisis y Poncelet con el de la dualidad y la introducción de los elementos ideales y en el infinito señalan el nuevo rumbo de la Matemática, aún deben considerarse otros importantes avances obtenidos por Gauss, Abel, Galois y Lobatschewsky, cuyos efectos se notan hoy en el conjunto de ramas que se unen en el núcleo común y que hacen de dicha ciencia un organismo admirable por la rigidez de su construcción y por la armónica disposición de los conceptos dentro de la unidad que le da la teoría del orden y de la combinación que forma los cimientos de todo el edificio.

Diremos, pues, que sin atribuir á Gauss la primacía de sus investigaciones sobre la Geometría no-Euclídea, que cedió á su discípulo Bolyai y á Lobatschewsky, sus *Disquisitiones Arithmeticae* y sus resultados acerca de las ecuaciones que conducen á la división de la circunferencia en partes iguales, son trabajos fundamentales de otros que hemos de considerar más adelante; que lo mismo diremos de las conclusiones obtenidas por Abel y Galois en la teoría algebraica de las ecuaciones, sobre todo respecto á la noción de *grupo* del último, que en nuestros días ha alcanzado tan extraordinario vuelo con

los trabajos del eminente profesor noruego Sofhus Lie, y que así como de la solución negativa de Abel al problema de las ecuaciones brotó la moderna teoría de las ecuaciones y el nuevo método expositivo del Algebra, cuyo modelo más acabado es la escrita recientemente por el profesor de la Universidad de Leipzig, Herr Weber; de las infructuosas tentativas de Legendre para demostrar el axioma de las paralelas surgió la idea original debida á Lobatschewsky de atacar el problema en otra dirección que condujo á las nuevas hipótesis que pueden servir de base á la Geometría.

Nos hallamos, pues, durante la mitad del siglo XIX con una teoría de los números que los agrupa en clases mediante las ecuaciones de congruencia, debida á Gauss y que se eleva á la noción de número complejo desenvuelta por el mismo; con las elegantes disquisiciones de Poincot, que hacen depender la Aritmética y el Algebra del orden y la combinación; con un Algebra que, abandonando las lentas, trabajosas y poco fecundas lucubraciones que en la práctica debían aplicarse para resolver las ecuaciones, se cierra con los teoremas de Sturm y de Cauchy, para seguir un nuevo derrotero, sometida al fundamental concepto de grupo de sustituciones; con un Análisis que, abandonando el dominio puramente abstracto, permite representar el modo de ser de las funciones, ya en un plano, conforme lo hicieron Cauchy, Puiseux y sus continuadores, ya en la superficie ideada por Riemann, y que, fijándose en los diversos aspectos de la discontinuidad, llega al superior concepto de la función analítica, así como también á aumentar el número de las funciones con la nueva transcendente que ha dado origen á la vastísima rama de las funciones elípticas; con una Geometría que, salvando los estre-

chos límites de los elementos euclídeos, llega al fecundo concepto de la relación proyectiva, que conduce á innumerables procedimientos generadores de figuras y que borra la excepción ocasionada por el paralelismo mediante el empleo de los elementos *impropios*, y últimamente, que adquiere un carácter crítico al formularse por Lobatschewsky y por Riemann las nuevas hipótesis acerca de sus fundamentos.

Esto es cuanto en síntesis nos ofrece la ciencia matemática durante la primera mitad del siglo XIX. Un vastísimo material para constituirse sobre más amplios basamentos, una variedad de direcciones que parece dificulta la reunión bajo una unidad orgánica; una suma cuyos esquemas son unos cuantos nombres: Gauss, Cauchy, Abel, Galois, Riemann, Poncelet, Staudt y Lobatschewsky.

Pero como si la actual centuria quisiera repartirse por igual la gloria de legar á los siglos venideros la grandiosa edificación de la ciencia matemática; allí mismo donde cesa la acción efficacísima de tantos genios fecundos, comienza una nueva evolución.

La geometría cartesiana había sometido la Geometría al yugo avasallador del Análisis que ocultaba al sér geométrico bajo el amplio ropaje de sus símbolos y de sus algoritmos; y sometida la ciencia de la extensión á un procedimiento uniforme, si bien infecundo, quedaba estacionada, mientras que el Análisis se dilataba sobre la base de la representación geométrica. Pero desde el momento en que el ilustre Cayley desarrolla el nuevo algoritmo del *Algebra de las formas* sobre la idea de invariación, que ya había sido objeto de las investigaciones de Lagrange (*Berlin. Mem.* 1770), de Gauss (*Disquis. Arithm.* sectio 5) y de Boole (*Cambr. Math. J.*,

1841), si bien estudiada por éstos en la discriminante, la Geometría analítica deja de ser un mero tratado de sistemas de coordenadas aplicados al estudio de las propiedades de las figuras, adquiriendo los elementos de la extensión su autonomía frente á su representación algorítmica, no sólo porque las transformaciones lineales corresponden á cambios de sistemas de coordenadas y permiten expresar las relaciones proyectivas, sino porque además, á las antiguas coordenadas se agregan las tangenciales y homogéneas, que permiten llevar la dualidad á esta aplicación del Análisis y también hacer una traducción geométrica del Algebra de las formas. Y en la Algoritmia como en la Geometría se notan incesantes progresos que hacen adquirir á la Ciencia un aspecto sistemático. El grupo, la clase, la familia, etc., ya en las funciones, ya en las formas geométricas; las generaciones y los múltiples modos de transformarse unas en otras, y sobre tan inmenso material, sobre un objeto de variedad inagotable, el espíritu crítico se cierne como aspirando á dar el último perfeccionamiento y la unidad más acabada al organismo.

Esta nueva aspiración radica en los trabajos lógico-matemáticos de Boole y Jevons y especialmente del profesor Schroeder, cuya notabilísima *Algebra de la Lógica* acaba de publicarse, y en la generalización del cálculo, debida á Grasmann, é incluida en esta nueva rama, que á símbolos generales de operaciones comprensivos de los de operaciones ordinarias, hace corresponder en sus enlaces, no cantidades, sino objetos considerados de un modo abstracto, hasta el punto de que en uno y otro desenvolvimiento predomina la relación formal sobre el resultado práctico; y de este modo se llega á la etapa superior del proceso científico, buscándose la su-

bordinación de las leyes del espacio y del tiempo á otras leyes más generales y abstractas, á las leyes de la dialéctica, al modo de proceder de nuestra razón expresado en la teoría combinatoria, la superior á las demás por su simplicidad y porque, hallándose en la cumbre, irradia hacia las ramificaciones inferiores y más concretas, que estriban en las diversas formas de la realidad: espacio, tiempo, fuerza y materia.

Este carácter eminentemente abstracto que hemos señalado en el Análisis y que también se nota en las últimas generalizaciones de la Geometría, al elevarse sobre la ordinaria, ó de tres dimensiones, y de las cuales nos ocuparemos más adelante, son de suma importancia para la constitución orgánica de la ciencia matemática, hoy dirigida por un espíritu de crítica que facilita su unificación y permite á la inteligencia abarcar el inmenso número de sus verdades, agrupadas por lazos lógicos que limitan las dificultades y aminoran los puntos de vista fundamentales.

En suma: la introducción de los conceptos puramente abstractos, es decir, existentes tan sólo como realidades lógicas ó relaciones intelectuales, amplifica el contenido de la Ciencia, enlazando lo que antes existiera disperso y sin conexiones mutuas, y unifica las leyes dentro de puntos de vista generales, descartando las excepciones que las restringen y da facilidades al lenguaje para expresarlas con gran sencillez.

Así es como se nota que los elementos imaginarios del Análisis y de la Geometría y los elementos *impropios* de ésta permiten establecer los teoremas con una generalidad absoluta; y aun cuando dichos elementos no tengan representación sensible, ni intuición correspondiente, siguen en todas las transformaciones tenien-

do igual existencia lógica que los elementos reales. Así es como, en el Algebra de la Lógica, las operaciones, prescindiendo del objeto, tienen las propiedades que les señala nuestra razón ó las leyes combinatorias de nuestra inteligencia, siempre que éstas tiendan á formar un organismo abstracto conforme con la realidad é incluir el organismo correspondiente á la realidad en este sistema más ámplio; y así el Algebra de un número cualquiera de unidades complejas se extiende sobre las geometrías de los segmentos y vectores de Grassmann y de Hamilton; y por último, sobre la geometría de tres dimensiones se ha constituido la de cuatro, y en general de un número cualquiera de dimensiones, de modo que, lejos de ser un desenvolvimiento antagónico de la geometría ordinaria, especialmente en lo que concierne á las posibilidades que motiva el prescindir del axioma XI, sea su natural generalización, dentro de la que ésta se halla incluida en aquélla, como la especie en su género.



II

Los diferentes métodos de análisis vectorial.

Como todas las ramas de la Matemática, el Algebra, por efecto de su perfeccionamiento sucesivo, ha experimentado una tan radical transformación durante los tiempos modernos, que ya se hace en extremo difícil asimilarla á aquel modo de ser, propio de su modesto origen, que la reducía á un cálculo más general que el aritmético, á un nuevo método para resolver los problemas numéricos, á un arte superior ó lenguaje abreviado útil para traducir, según reglas fijas, las relaciones entre las magnitudes correspondientes á cada cuestión propuesta.

Su marcha, aunque segura, porque siempre se basaba en la consideración de objetos reales, generalmente representados por entidades geométricas, líneas, superficies ó volúmenes, era por demás lenta, permitiendo á lo sumo avanzar con alguna timidez y dentro de ciertas restricciones por un encadenamiento de relaciones intermedias desde una á otra de las relaciones extremas, siendo un remedo del análisis geométrico practicado desde la época de la geometría griega.

Cuando el resultado del análisis no era un número positivo, el único admitido hasta la época de Descartes, la cuestión se desechaba desde luego, sin proceder á ulteriores investigaciones. Las denominaciones *res* y

census del Algebra de los árabes, las de: lado, cuadrado, cubo, cuadrado-cuadrado, cuadrado-cubo, etc., empleadas en el *Arte analítica* y en la *Logística especiosa* de Vieta, que indican las constantes referencias á las figuras geométricas, manifiestan el carácter concreto de este arte, destinado á elevarse más tarde á las superiores regiones de lo abstracto.

La generalización efectuada por Descartes al concebir potencias superiores á las que expresan las dimensiones de los cuerpos, y dar origen á las cantidades negativas, fijando su representación, obtuvo nueva amplitud, según ya se manifestó en el artículo anterior, á contar desde la interpretación geométrica dada por Argand á las cantidades imaginarias; y sólo agregaremos á las interpretaciones citadas, la de M. Maximilien Marie, expuesta en su obra *Théorie des fonctions des variables imaginaires*, en la que el sér geométrico recibe una generalización análoga, si bien con mayor amplitud, á la de las cónicas suplementarias de Poncelet, mediante la que una curva ó superficie se concibe como un lugar principal, acompañado de infinidad de lugares secundarios, con propiedades análogas y sustituibles en ciertos casos á aquél; y mencionaremos el nuevo concepto de los lugares analíticos importado por Cauchy (*Compt. rend.* 1847) al establecer una correspondencia entre los valores de las funciones y los de sus variables, cuando el número de éstas excede á tres; debiendo advertirse que, no sólo siguieron los analistas un movimiento descendente desde la entidad imaginaria hasta su representación en las varias formas citadas, sino que al propio tiempo efectuaron una evolución ascendente desde las representaciones geométricas, tales como son, por ejemplo, las unidades vectoriales perpendiculares

del sistema de Hamiton y los vectores de Grassmann, hasta los sistemas de álgebras definidos por cierto número de unidades complejas, sometidas á relaciones fundamentales, lo que va á ser ahora nuestro preferente asunto.

Para abarcar en su totalidad la evolución que conduce á estas nuevas teorías que expresan la transición del Algebra ordinaria cuyas unidades son 1 y $\sqrt{-1}$ á la de las cuatro unidades 1, i , j , k de los cuaternios y á las e_1, e_2, \dots del método Grassmann, habremos de citar el precedente que tuvieron estos últimos desarrollos en el *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires* de Argand, cuya doctrina acabó de afianzarse con la Memoria sobre las cantidades geométricas de Cauchy, que dota á las funciones analíticas de una representación gráfica en el plano mediante la afija, representación que llegó hasta la doble periodicidad de las funciones elípticas; y también consignaremos cómo el cálculo de las equipolencias realizó el ideal presentado por Leibnitz de un algoritmo que comprendiera á la vez la magnitud y la posición, casi al mismo tiempo que Moebius establecía el cálculo de puntos, considerados como cantidades mediante la adjunción de un coeficiente ó peso.

Grassmann, en su primera edición del *Ausdehnungslehre*, comenzó por desarrollar un cálculo puramente abstracto engendrado por la inteligencia al aplicarse á un objeto general, ya que, como manifiesta, la Matemática pura es una ciencia formal (Formenlehre), es decir, una serie de verdades aplicables de igual modo á todas las ramas de la Matemática, empleando con este propósito símbolos generales de relación, ó enlaces entre varios términos, sometidos, según los casos, á las leyes

asociativa, distributiva, etc., por las que se definen de un modo general las operaciones, lo cual fué ampliamente desarrollado por la escuela lógico-matemática de Boole y Jevons.

Descendiendo Grassmann desde el dominio abstracto al de la Geometría, que se propuso desarrollar sobre nuevos fundamentos, estableció desde luego el concepto de las cantidades extensas, partiendo del elemento sin contenido, común á la ciencia de la extensión y á la Combinatoria; si bien en ésta los enlaces son discretos, mientras en aquélla la generación es continua, de modo que la figura de primer grado es un conjunto de elementos obtenidos por una variación continua del elemento generador, desde el elemento origen hasta el elemento final. La figura más simple de primer grado es el segmento, obtenido persistiendo en la variación originaria; y el sistema de primer grado forma el conjunto de todos los segmentos posibles así obtenidos ó por la generación opuesta. La doble generación en dos direcciones, como la de tres direcciones distintas, es decir, mediante dos ó tres segmentos heterogéneos (no situados en la misma recta ni paralelos) conducen á los sistemas de segundo y tercer grado. El punto geométrico es el elemento geométrico sin extensión; pero la superposición de 2, 3, ... n puntos le permite ser considerado como una cantidad-punto, cuyo coeficiente es su peso, constituyendo todos los puntos derivados del mismo punto su dominio; de manera que para dos puntos A y B del dominio del punto E, se tiene

$$A = aE, B = bE, A \pm B = aE \pm bE = (a \pm b) E;$$

y en el caso de ser puntos diferentes, siendo $A - A + B$

$= B$, ó $A + (B - A) = B$; el hecho de trasladarse el punto A al B según el segmento $AB = z$, expresado por la igualdad $A + z = B$, se enuncia diciendo que: *la suma de un punto y un segmento es equivalente al extremo de éste, cuando su origen coincide con dicho punto*, ó más generalmente se concluye que: *la suma de una magnitud elemental que tiene cierto peso y de un segmento, es una cantidad elemental de peso igual al de la primera, separada del primer elemento por el segmento agregado*.

Y este concepto de la separación (Abweichung) conduce á los conceptos de centro de gravedad y de momentos de fuerzas empleados en el Ausdehnungslehre, de que hacemos caso omiso, para tratar de lo más característico en el sistema de Grassmann, á saber: de los productos exterior é interior, correspondientes respectivamente á las dos relaciones $e_r e_r = o$, $e_r e_s = o$, es decir, á que los factores hayan de ser exteriores (heterogéneos ó de distinta dirección) ó interiores (situados en la misma recta) para que el producto tenga un valor efectivo.

La multiplicación ó enlace de segundo grado, cuya propiedad esencial corresponde á la ley distributiva, se expresa por la fórmula

$$(a \frown b) \frown c = (a \frown c) \frown (b \frown c)$$

ó, más especialmente, por las fórmulas

$$a \frown (b + c) = (a \frown b) + (a \frown c)$$

$$(b + c) \frown a = b \frown a + c \frown a$$

cuyas traducciones geométicas se dan en las proposiciones siguientes: *El área que, en el plano, describe una lí-*

nea quebrada, es igual á la descrita por la recta que une sus dos extremos; el área total descrita en un plano por los lados de una figura cerrada es siempre nula.

Si cada punto de un segmento describe un nuevo segmento heterogéneo (ungleichartig) se engendra el paralelogramo, como mediante una tercera generación, según otro segmento heterogéneo con los dos primeros, obtenida por cada punto del paralelogramo, se llega al paralelepípedo, paralelogramo y paralelepípedo, cuya área ó volumen es lo que llama Grassmann producto exterior de dos ó tres segmentos, cuya propiedad característica es, conforme se dijo, la de anularse cuando dos de sus factores son homogéneos ó dependientes entre sí, de manera que entonces, en general, el producto de n factores pertenece á un grado inferior al grado n ; y si b y b_1 son homogéneos, resulta que

$$(a + b_1) b = ab$$

Y esta propiedad puede deducirse de la expresada por la fórmula

$$ab = -ba$$

á que se llega directamente observando que el paralelogramo ab engendrado por los elementos del segmento a mediante una traslación, según la dirección del b , se forma en distinto sentido que el ba mediante los elementos del segmento b trasladados según la dirección del a ; y dicha deducción se obtiene observando que, de

$$(a \frown b) = -(b \frown a),$$

resulta

$$(a \frown b) + (b \frown a) = o,$$

y para el caso de ser

$$b = ma, 2(a \frown ma) = o, a \frown ma = o \text{ ó } a \frown a = o.$$

Como una aplicación geométrica, observaremos que siendo

$$a = a_1 + mb$$

se tiene que

$$a \frown b = (a_1 + mb) \frown b = a_1 \frown b + mb \frown b$$

$$\text{y } a \frown b = a_1 \frown b$$

cuya traducción verbal es: *Dos paralelogramos comprendidos entre dos paralelas cuyos lados sobre éstas son iguales, tienen sus áreas iguales.*

$$\text{Si } \alpha = a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2, \quad \beta = b_1 \varepsilon_1 + b_2 \varepsilon_2$$

son dos segmentos expresados en función lineal de dos segmentos fundamentales, el producto exterior será:

$$\alpha\beta = (a_1 b_2 - a_2 b_1) \varepsilon_1 \varepsilon_2$$

y en caso de tres segmentos referidos á otros tres fundamentales, no situado dos á dos en un plano,

$$\alpha\beta\gamma = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3) = \Delta(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)$$

Si se trata de dos puntos A y B, se tiene que

$$AB - AA = A(B - A), \quad AB = A(B - A)$$

de modo que: *el producto exterior de dos puntos es igual al producto exterior de su primer factor por el segmento que lo une al segundo. Y para tres puntos independientes*

$$\begin{aligned} ABC &= (AB)C = [A(B - A)]C = A[(B - A)C] = \\ &A(BC - AC) = A[B(C - B) - A(C - A)] \\ &= AB(C - B) = A(B - A)(C - B). \end{aligned}$$

Para cuatro puntos independientes se obtiene análogamente

$$ABCD = A(B - A)(C - A)(D - A) = A(B - A)(C - B)(D - C)$$

de modo que: *el producto exterior de tres puntos es igual al producto del primer factor por el área del paralelogramo que determinan los otros puntos con el primero, y el producto exterior de cuatro puntos es igual al del primer punto por el volumen del paralelepipedo, formado sobre los tres segmentos que aquél determina con los otros tres, siendo en uno y otro caso, cuando se expresan los segmentos linealmente mediante tres ó cuatro puntos fundamentales, el producto del triángulo ó tetraedro fundamental por las determinantes de los co-*

eficientes de las expresiones lineales

$$ABC = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} (E_1 E_2 E_3) = \Delta (E_1 E_2 E_3)$$

$$\text{y } ABCD = \Delta (E_1 E_2 E_3 E_4).$$

Además de la aplicación geométrica de la multiplicación exterior á los casos de dos, tres y cuatro puntos, de dos y tres segmentos, comprendidos en la multiplicación progresiva, llega Grassmann á considerar el caso del producto regresivo (eingewandte) al observar que cuando dos sistemas dependen entre sí, existen cantidades comunes á ambos, originándose de aquí variedad en los grados de dependencia, de modo que dos sistemas se hallarán en el m ^{simo} grado de dependencia, cuando tengan un sistema común de grado m , debiéndose tener en cuenta, además de este sistema común, el sistema mínimo que los comprende (zunachstumfassende), cuyo grado designaremos con la letra n , de manera que si a y b son los grados de los sistemas dados, se tendrá que

$$a + b = m + n.$$

Si, pues, recordamos que el punto, la recta, el plano y el espacio son respectivamente los sistemas elementales de 1º, 2º, 3º y 4º grado, observaremos que siendo, por ejemplo, el plano el sistema inmediato superior á los de dos rectas, el sistema común será del grado $2 + 2 - 3$, lo que se traduce diciendo que: dos rectas situadas en un plano, sin coincidir, se cortan en un pun-

to. Y sólo añadiremos á estas ligeras indicaciones que las fórmulas

$$\begin{aligned} AB. AC &= (ABC). A & 2 + 2 &= 3 + 1 \\ ABC. ABD &= (ABCD). AB & 3 + 3 &= 4 + 2 \\ AB. ACD &= (ABCD). A & 2 + 3 &= 4 + 1 \end{aligned}$$

expresan bien claramente la reducción de los sistemas de dos rectas, dos planos, una recta y un plano al sistema mínimo que los contiene juntamente con el máximo contenido, siendo en la primera fórmula A la intersección de las dos rectas, en la tercera la de la recta AB y el plano ACD y en la segunda AB la intersección de los dos planos considerados.

Hemos manifestado ya que las relaciones $e_r e_r = 0$ y $e_r e_s = 0$ corresponden respectivamente á las multiplicaciones exterior é interior. Para dar una idea sucinta de ésta, observaremos que la unidad de un sistema de grado n cuyos elementos son $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, se define por la ecuación

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n = 1,$$

y que $(\varepsilon_{r+1} \dots \varepsilon_n)$ será el complemento del producto exterior $(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_r)$, lo que se expresa mediante una raya vertical, así

$$| (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_r) = (\varepsilon_{r+1} \dots \varepsilon_n)$$

empleándose además el trazo vertical como signo de la multiplicación interior que se define, para dos cantidades, diciendo, que es el producto exterior de la una por

el complemento de la otra. Las relaciones que definen este producto son

$$e_r | e_r = \pm 1, \quad e_r | e_s = 0.$$

En las aplicaciones geométricas, si se trata del plano ó sistema de segundo grado, se tomará como unidad el cuadrado del que sean dos lados adyacentes las dos unidades $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ de modo que $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = 1$ y $\varepsilon_2 \varepsilon_1 = -\varepsilon_1 \varepsilon_2 = -1$

Como se ve, el complemento de ε_1 es ε_2 , y el de ε_2 es $-\varepsilon_1$, lo cual se escribe así: $| \varepsilon_1 = \varepsilon_2, | \varepsilon_2 = -\varepsilon_1$ y sucesivamente

$$\begin{aligned} | (| \varepsilon_1) &= | \varepsilon_2, & | (| \varepsilon_2) &= - | (\varepsilon_1) \text{ ó } || \varepsilon_1 = -\varepsilon_1, & || \varepsilon_2 &= -\varepsilon_2 \\ | (|| \varepsilon_1 = - | \varepsilon_1, & | (|| \varepsilon_2) &= - | \varepsilon_2 \text{ ó } ||| \varepsilon_1 = -\varepsilon_2, & ||| \varepsilon_2 &= \varepsilon_1 \end{aligned}$$

pudiéndose notar que el signo del complemento equivale en el plano al $i = \sqrt{-1}$, de modo que

$$\begin{aligned} | \varepsilon_1 &= i \varepsilon_1, & || \varepsilon_1 &= i^2 \varepsilon_1, & ||| \varepsilon_1 &= i^3 \varepsilon_1, \dots \\ \text{ó, en general, } |^n \varepsilon_1 &= i^n \varepsilon_1, & |^n \varepsilon_2 &= i^n \varepsilon_2. \end{aligned}$$

En el sistema de tercer grado se tiene $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = 1$; dicho sistema consta de las tres unidades relativas $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, de las tres de segundo grado $\varepsilon_1 \varepsilon_2, \varepsilon_2 \varepsilon_3, \varepsilon_3 \varepsilon_1$ y de la superior $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$, existiendo entre ellas las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} | \varepsilon_1 &= \varepsilon_2 \varepsilon_3, & | \varepsilon_2 &= \varepsilon_3 \varepsilon_1, & | \varepsilon_3 &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \\ | (\varepsilon_2 \varepsilon_3) &= \varepsilon_1, & | (\varepsilon_3 \varepsilon_1) &= \varepsilon_2, & | (\varepsilon_1 \varepsilon_2) &= \varepsilon_3 \\ \varepsilon_1 (\varepsilon_2 \varepsilon_3) &= 1, & \varepsilon_2 (\varepsilon_3 \varepsilon_1) &= 1, & \varepsilon_3 (\varepsilon_1 \varepsilon_2) &= 1 \\ \varepsilon_1 | \varepsilon_1 &= 1, & \varepsilon_2 | \varepsilon_2 &= 1, & \varepsilon_3 | \varepsilon_3 &= 1 \\ (\varepsilon_1 \varepsilon_2)^2 &= (\varepsilon_2 \varepsilon_3)^2 = (\varepsilon_3 \varepsilon_1)^2 = 1 \end{aligned}$$

Si aplicamos las reglas expuestas al producto interior de dos segmentos $\alpha = a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2$ y $\beta = b_1 \varepsilon_1 + b_2 \varepsilon_2$, obtendremos

$$\alpha | \beta = (a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2) (b_1 \varepsilon_1 - b_2 \varepsilon_2) = a_1 b_1 + a_2 b_2;$$

y el mismo resultado se obtendrá para $\beta | \alpha$; y si $\beta = m\alpha$,

$$\alpha | \beta = m\alpha | \alpha = m (a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2) (a_1 \varepsilon_2 - a_2 \varepsilon_1) = m (a_1^2 + a_2^2);$$

es decir, que el producto tiene un valor efectivo, cuando los factores son homogéneos, mientras que si $\beta = m | \alpha$, se obtendrá

$$\alpha | \beta = \alpha | (m | \alpha) = \alpha (m |^2 \alpha) = \alpha (-m\alpha) = m\alpha\alpha = 0.$$

Sólo añadiremos, para terminar, que los productos exterior é interior de dos segmentos se expresan respectivamente por

$$\alpha \beta = ab \text{ sen } C, \quad \alpha | \beta = ab \text{ cos } C,$$

representando C el ángulo de los segmentos.

Otro de los cálculos vectoriales de mayor importancia es el que constituye la teoría de los cuaternios de Hamilton y que da origen á una nueva multiplicación, no conmutativa, considerada por Grassmann como una multiplicación media ó resultante de la suma de un producto exterior con otro interior, que puede expresarse bajo la forma

$$ab = \lambda [a | b] + ab$$

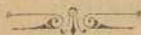
es decir, una parte algebraica y otra geométrica, correspondientes á la parte escalar y vectorial del cuaternio,

Sólo diremos del sistema de Hamilton que constituye una cuádruple álgebra cuyas unidades son 1, i , j , k , ligadas por las relaciones fundamentales

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = k = -ji, jk = i = -kj, ki = j = -ik, ijk = -1.$$

Es, pues, un Algebra cíclica, y el cuaternio tiene la expresión lineal $q = w + xi + yj + zk$ de dichas cuatro unidades.



III

El Algebra simbólica

Los trabajos realizados por Grassman y Hamilton, aunque de carácter geométrico, no sólo constituyen una extensión del Algebra, sino que además sirven de base para nuevas generalizaciones en el dominio abstracto.

Desde luego, dentro del terreno de la Geometría, aún hay que mencionar la extensión del concepto de cuaternio, al caso de los coeficientes complejos, ó sea los bicuaternios que Clifford define por la expresión de ocho términos

$$\alpha\beta\gamma\delta = a + \sum b_{rs} i_r i_s + c i_0 i_1 i_2 i_3 \quad (r,s \text{ diferentes})$$

al observar que el producto de cuatro puntos $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, consta de tres especies de términos: de 4.^o orden, en los que $i_0 i_1 i_2 i_3$ se halla multiplicado por la determinante de las coordenadas de los cuatro puntos; de 2.^o grado, resultantes de productos de la forma $i_0^2 i_1 i_2$ y de orden cero, resultantes de productos de la forma $i_0^4 i_0^2 i_1^2$.

Otra forma de cálculo que aparece en esta época es la denominada claves algebraicas por Cauchy, que ya en su *Cours d'Analyse* había considerado á las cantidades imaginarias como fórmulas simbólicas de las cuales podían deducirse resultados exactos, modificando según reglas fijas los símbolos en ellas contenidos.

Las claves algebraicas son variables que forman productos simbólicos, especies de moldes en los cuales las cantidades arbitrarias llegan á ocupar los lugares al principio ocupados por aquellos productos de dichas claves, conduciendo rápidamente al resultado que se busca, cálculo parecido al de las determinantes.

Aparte del simbolismo algebraico expresado por los diversos métodos cuyo origen se halla en las Memorias *Exposition of a general theory of linear transformations* (Camb. Math. Jour. 1843) y *On a General Method in Analysis*, de Boole (Phil. Trans. 1844), y cuyos ulteriores desarrollos se deben á Cayley, Sylvester, Aronhold, Brioschi y otros, bajo la denominación general de *Algebra de las formas*, citaremos las Memorias de Mr. W. H. L. Rusell y de W. Spottiswoode, publicadas en *Philosophical Transactions* por los años 1860 y 62 con el epigrafe *On the Calculus of Symbols*, que trata de la multiplicación y división de símbolos no conmutativos, y la del Rvo. M. O'Brien *On Symbolic Forms derived from the conception of a Directed Magnitude* (Phil. Trans. 1851), en la que trata principalmente de la forma simbólica distributiva, aplicándola á numerosas cuestiones de la Geometría y la Mecánica, introduciendo de paso símbolos análogos á los i, j, k , de Hamilton, perfeccionando el sistema de signos y dando más desarrollo á la doctrina naciente.

Otras investigaciones que deben ocupar un lugar en esta reseña histórica del Algebra simbólica son los trabajos de Morgan sobre el Algebra de varias unidades (Cambr. Trans. vol. 8) y los de Mr. Benjamin Peirce, que limitó el sistema de la multiplicación á funciones lineales, escribiendo su *Linear Associative Algebra* (1882), en la que, después de explicar el lenguaje del

Algebra en su alfabeto, su vocabulario y su gramática, adopta la terminología de Cayley, *facient*, *faciend* y *factum* en la multiplicación. Así, un *nilfactor* es un factor que anula á un producto, es *nilfacient* ó *nilfaciend*, según que actúe como multiplicador ó como multiplicando; análogamente un *idemfactor* será *idemfacient* ó *idemfaciend*, según que actúe como multiplicador ó como multiplicando; la potencia de una expresión que se anula es *nilpotent*, como en $A^n = 0$, *idempotent*, cuando no altera, como en $A^n = A$.

Esta nomenclatura sirve á Mr. Peirce de base para la clasificación de las Algebras que se estudian en la *Linear Associative Algebra*, desde el Algebra simple hasta la séxtupla, comenzando por establecer en la primera los dos sistemas posibles $i^2 = i$ y $i^2 = 0$, que denomina *idempotent* y *nilpotent*, distinguiendo tres sistemas en la doble, cinco en la triple, dieciocho en la cuádrupla, dieciséis en la quintupla y estudiando sólo parcialmente la séxtupla.

Con objeto de pasar ya á la última generalización que expresa el Algebra de n unidades complejas, [debida á los célebres matemáticos Weierstrass y Dedekind, concluiremos esta reseña de trabajos que nos lleva progresivamente desde el cálculo geométrico hasta el cálculo abstracto, citando al ilustre Cayley, que varias veces se ocupa de estos estudios y emplea en el tomo I de sus *Mathematical Papers* un sistema basado en siete imaginarias i_1, i_2, \dots, i_7 , cuyas condiciones de combinación se contienen en los esquemas 123, 246, 374, 145, 275, 365, 167, de modo que, por ejemplo, para el primero se tiene

$$i_2 i_3 = i_1, i_3 i_1 = i_2, i_1 i_2 = i_3, i_3 i_2 = -i_1, i_1 i_3 = -i_2, i_2 i_1 = -i_3;$$

y sólo diremos acerca de la clasificación que Clifford hace, en su obra *Mathematical Papers*, de las álgebras geométricas, que distribuye á éstas en tres clases, á saber:

- 1.^a $n \equiv 0 \pmod{4}$, $\omega^2 = 1$, $\omega i = -i\omega$
- 2.^a $n \equiv 1 \pmod{4}$, $\omega^2 = -1$, $\omega i = -i\omega$
- 3.^a $n \equiv 2 \pmod{4}$, $\omega^2 = -1$, $\omega i = i\omega$

siendo $\omega = i_1 i_2 \dots i_n$, y teniéndose presente que

$\omega i_n = (-1)^n i_1 i_2 \dots i_n$, esto es, $i_1 \omega = \pm \omega i_1$, según que n es impar ó par.

La mayor generalización á que han llegado estas investigaciones de que tratamos se hallan en dos Memorias de los Sres. Weierstrass y Dedekind, tituladas *Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grossen* (1884 y 1885), de las que haremos algunas indicaciones.

La cuestión se reduce, como indica M. Berloty en su Memoria titulada *Théorie des quantités à n unités principales*, á ver si puede establecerse un Algebra fundada en la consideración de n unidades principales ó símbolos abstractos que hagan las veces de claves, como en el Algebra ordinaria lo son las unidades 1 y $\sqrt{-1}$.

La Memoria del profesor Weierstrass se reduce á definir los elementos a, b, c, \dots de un conjunto C por las propiedades de que su suma, diferencia, producto y cociente pertenezcan también al conjunto y que les sean aplicables las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva.

Dichos elementos son de la forma

$\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n$, representando los números

ξ_1, ξ_2, \dots las coordenadas, y los símbolos abstractos e_1, e_2, \dots las *unidades principales*, que son arbitrarias y sólo sujetas á ciertas condiciones y las de no ser contradictorias en sus definiciones.

Las condiciones á que están sometidos estos símbolos se reducen á ser linealmente distintos, es decir, á que no exista entre ellos ninguna relación lineal, pues de lo contrario el conjunto dependería de menos unidades que n ; y como consecuencias inmediatas tenemos que: cuando un elemento del conjunto C es nulo, deben serlo sus n coordenadas; la igualdad de dos cantidades ó elementos implica la de sus coordenadas, y si

$$\begin{aligned} a_1 &= \xi_{11} e_1 + \xi_{12} e_2 + \dots + \xi_{1n} e_n \\ a_2 &= \xi_{21} e_1 + \xi_{22} e_2 + \dots + \xi_{2n} e_n \\ &\dots\dots\dots \\ a_n &= \xi_{n1} e_1 + \xi_{n2} e_2 + \dots + \xi_{nn} e_n \end{aligned}$$

són los elementos, y la determinante de sus coeficientes no es nula, *la expresión* $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots$ (en la que $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ son números reales indeterminados *que no son todos nulos*), *no puede ser nula*; pues siendo $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots$ elemento del sistema, sólo podrá anularse cuando sean nulas las n coordenadas, lo que origina el sistema de ecuaciones lineales homogéneas

$$\lambda_1 \xi_{11} + \lambda_2 \xi_{21} + \dots = 0, \quad \lambda_1 \xi_{12} + \lambda_2 \xi_{22} + \dots = 0, \dots$$

que sólo admite las soluciones $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = 0$, lo que es contra la hipótesis.

En cuanto á la suma y diferencia de unidades, e_p y e_q que forman parte del conjunto, nada hay que obser-

var; pero sí que al producto $e_p e_q$ debe exigirse que sea expresable linealmente por las unidades. Así

$$e_p e_q = \varepsilon_{1pq} e_1 + \varepsilon_{2pq} e_2 + \dots + \varepsilon_{npq} e_n \quad (1)$$

siendo $\varepsilon_{1pq}, \varepsilon_{2pq}, \dots$ números reales que definen el sistema de unidades principales, arbitrario sólo entre ciertos límites que se determinan en el trabajo de que nos ocupamos.

Las propiedades conmutativa y asociativa en la suma y la diferencia de los números ε_{rpq} se hacen manifiestas desde luego. En cuanto á la multiplicación, de que $e_p e_q = e_q e_p$, resulta $\varepsilon_{rpq} = \varepsilon_{rqp}$, en virtud de la fórmula (1) que aplicada á la relación asociativa

$$(e_p e_q) e_r = (e_p e_r) e_q \quad (p, q, r = 1, 2, \dots, n)$$

conduce á

$$(\varepsilon_{1pq} e_1 + \varepsilon_{2pq} e_2 + \dots) e_r = (\varepsilon_{1pr} e_1 + \varepsilon_{2pr} e_2 + \dots) e_q$$

ó bien á

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{1pq} (\varepsilon_{11r} e_1 + \dots) + \varepsilon_{2pq} (\varepsilon_{12r} e_1 + \dots) + \dots + \varepsilon_{npq} (\varepsilon_{1nr} e_1 + \dots) \\ &= \varepsilon_{1pr} (\varepsilon_{11q} e_1 + \dots) + \varepsilon_{2pr} (\varepsilon_{12q} e_1 + \dots) + \dots + \varepsilon_{npr} (\varepsilon_{1nq} e_1 + \dots) \end{aligned}$$

cuyo tipo general es

$$\varepsilon_{1pq} \varepsilon_{k1r} + \varepsilon_{2pq} \varepsilon_{k2r} + \dots = \varepsilon_{1pr} \varepsilon_{k1q} + \varepsilon_{2pr} \varepsilon_{k2q} + \dots$$

fórmulas que pueden verificarse de infinidad de maneras.

Las expresiones

$$a + b = (\alpha_1 + \beta_1) e_1 + (\alpha_2 + \beta_2) e_2 + \dots$$

$$a - b = (\alpha_1 - \beta_1) e_1 + (\alpha_2 - \beta_2) e_2 + \dots$$

manifiestan que la suma ó diferencia de dos elementos

$$a = \alpha_1 e_1 + \dots, b = \beta_1 e_1 + \dots$$

pertenecen al mismo conjunto, y que las propiedades conmutativa y asociativa se verifican.

Respecto al producto

$$ab = \alpha_1 \beta_1 e_1^2 + \alpha_2 \beta_1 e_2 e_1 + \dots$$

se observa que sustituyendo por los productos $e_1^2, e_2 e_1, \dots$, sus valores en funciones lineales de las unidades principales e_1, e_2, \dots según la fórmula (1), y haciendo lo mismo para ba , se establece, por comparación, la propiedad conmutativa y análogamente las expresadas por

$$(ab) c = (ac) b, a(b + c) = ab + ac$$

La división, en fin, merece un especial examen, por conducir á un nuevo concepto importado por el señor Weierstrass, á saber: *los divisores de cero*, de capital importancia en esta teoría.

Definida la división por la fórmula $\frac{a}{b} b = a$, y exi-

giéndose que el cociente $c = \frac{a}{b}$, tal que $cb = \frac{a}{b} b = a$

sea una cantidad de la misma forma que a y b , es decir, que pertenezca al conjunto C , la división se reduce á determinar las coordenadas $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ del elemento c por la condición $cb = a$ ó

$$(\gamma_1 e_1 + \dots)(\beta_1 e_1 + \dots) = \alpha_1 e_1 + \dots$$

que, efectuando las multiplicaciones y sustituyendo los productos $e_p e_q$ por sus expresiones en función de ε_{1pq} , originan un sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 (\varepsilon_{111} \beta_1 + \dots) + \gamma_2 (\varepsilon_{121} \beta_1 + \dots) &= \alpha_1 \\ \gamma_1 (\varepsilon_{211} \beta_1 + \dots) + \gamma_2 (\varepsilon_{221} \beta_1 + \dots) &= \alpha_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

y si designamos por ε la determinante de este sistema, se observará que no es idénticamente nula, si las coordenadas de b no lo anulan; y se obtendrá para cualquier dividendo a un sistema único y determinado de coordenadas $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ ó existirá una infinidad de ellas, lo que dependerá de las $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ del dividendo.

Si ahora suponemos $a = 0$, es decir, $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = 0$, las ecuaciones en cuestión serán compatibles, y además del sistema de soluciones $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = 0$ admitiría una infinidad, ya sea ó no b igual á cero. En el caso de no ser b igual á cero, se tendrá $bc = 0$, *sin ser nulo ninguno de los factores*, lo que no tiene lugar en el cálculo ordinario, basado en las unidades principales 1 y $V'(-1)$, el divisor b de cero, se define como *un elemento del conjunto C para el que la determinante ε es nula*.

Considerando esta determinante, no ya respecto á $\gamma_1, \gamma_2, \dots$, sino respecto á β_1, β_2, \dots , se concluye que si b

es un divisor de cero, también c lo será, y de $kbc = 0$ ó $(kb)c = 0$, siendo k una cantidad compleja, resulta que: *el producto de un divisor de cero por una cantidad compleja es un divisor de cero.*

Expuestos los principios fundamentales del Algebra basada en n unidades principales, basta ya para completar estas nociones manifestar en qué difiere de la ordinaria.

Desde luego, aplicando las fórmulas obtenidas al establecer las propiedades conmutativa y asociativa del producto ab al caso de ser $n = 2$, $e_1 = 1$, $e_2 = \sqrt{-1}$, que *cero es el único factor de cero en el Algebra de dos unidades principales 1 y $\sqrt{-1}$.*

Si $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots$ es un elemento del conjunto C que no es divisor de cero, y en el sistema de ecuaciones (2) se sustituyen respectivamente β_1, β_2, \dots por $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, se obtendrá un sistema único de valores de las coordenadas $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ de cierta cantidad compleja e_0 , definida

por la expresión $e_0 = \frac{a}{a}$ tal, que un elemento cual-

quiera del conjunto C no varía cuando se le multiplica por e_0 ; además, si en vez de a se considera la cantidad

compleja a' (que no sea divisor de cero), y $e' = \frac{a'}{a'}$, se

tendrá que $e_0 = e'_0$, de manera que e_0 desempeña en el cálculo de las cantidades complejas las veces de la unidad en el ordinario.

También si $g = \xi_{11} e_1 + \xi_{12} e_2 + \dots$ es un elemento

del conjunto C y se obtienen sus potencias sucesivas hasta la $n^{\text{ésima}}$, reduciendo las expresiones á la forma lineal, se tendrá un sistema de n ecuaciones de las que se podrán obtener las e_1, e_2, \dots en función de las potencias de g , y expresarse cualquier elemento del conjunto en función lineal de $e_0, g, g^2, \dots, g^{n-1}$ que formarán un sistema de unidades principales sustituibles á las e_1, e_2, \dots, e_n , de modo que, recíprocamente, toda expresión lineal y homogénea de e_0, g, g^2, \dots pertenecerá al conjunto C, pudiéndose en definitiva expresar un elemento cualquiera bajo la forma

$$a = \alpha_0 g_0 + \alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_{n-1} g_{n-1}$$

ó sea á la *forma canónica*, habiéndose hecho $g^m = g_m$; y el verificarse que $g_p g_q = g_{p+q}$ permite, por ejemplo, expresar el producto de los elementos

$$a = \alpha_0 g_0 + \alpha_1 g_1 + \dots \text{ y } b = \beta_0 g_0 + \beta_1 g_1 + \dots$$

bajo la forma $c = \gamma_0 g_0 + \gamma_1 g_1 + \dots$

Sólo diremos para concluir, que el empleo de la función adjunta $A(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \dots$ de una cantidad cualquiera

$$a = \alpha_0 g_0 + \alpha_1 g_1 + \dots$$

unida á ésta de tal modo, que la función $A(\xi)$ pertenece á la cantidad a y la cantidad a pertenece á la función $A(\xi)$, ó bien el empleo de la cantidad $g_n + \varepsilon_1 g_{n-1} + \dots$ y de $f(\xi) = \xi^n + \varepsilon_1 \xi^{n-1} + \dots$ ó también de $\xi^m f(\xi)$ y de $g_{m+n} + \varepsilon_1 g_{m+n-1} + \dots$ facilitan el desarrollo de esta nueva teoría, de modo que resulte, no contradictoria con

el Algebra ordinaria, sino como una generalización de la misma, á cuyo fin dedica M. Berloty la segunda parte de su Memoria *Théorie des quantités complexes à n unités principales*, tratando de los polinomios enteros, de las ecuaciones algebraicas, de las fracciones racionales, de las series y de la teoría de las funciones desde el elevado punto de vista que adoptaron los señores Weierstrass y Dedekind; y sólo diremos de la doctrina de este último, conforme en las conclusiones con la del primero, que su procedimiento, esencialmente distinto, se funda en el empleo de ciertas cantidades, distintas de las reales é imaginarias del cálculo ordinario, *multivalentes* (Mehrerwerthig), que hace depender de ciertas sustituciones.

No trataremos en este trabajo del Algebra de la Lógica, que constituye un cálculo eminentemente simbólico, por depender la validez de los resultados de las leyes de combinación de sus símbolos; pues estos desarrollos, dependientes y en conexión con las leyes que rigen nuestro desenvolvimiento intelectual, tienen una extensión que rebasa á veces el limite de la ciencia matemática, y lleva á la región de la pura filosofía; y terminaremos este artículo, consignando que el sistema de símbolos del Algebra de la lógica son hoy asiduamente empleados, siguiendo la iniciativa del profesor de Turin Sr. Peano, no sólo en el *Formulario de matemáticas* que se publica unido á la *Revista de matemáticas*, sino en otros trabajos que separadamente publican algunos otros matemáticos italianos, adaptando las teorías al nuevo simbolismo, con el que se trata de reemplazar al lenguaje ordinario.



IV

Las generalizaciones de la Geometría

Vamos á tratar actualmente de las generalizaciones más importantes á que ha llegado la Geometría, merced á las cuales su organismo se ha extendido considerablemente y su caracter ha cambiado por la amplitud de los conceptos sobre los que hoy se sustenta y por el rígido enlace de sus verdades, referidas á un fondo riquísimo en variedad de objetos y de relaciones.

Dichas generalizaciones se refieren bien á la forma, bien al fondo ó materia. Las primeras se hallan constituidas por el imaginarismo y el concepto de hiper-espacio, las segundas tienen por origen los axiomas sobre que descansa la Geometría.

El imaginarismo y el hiper-espacio amplifican nuestros conceptos, dilatando á la vez la forma del organismo geométrico que durante algunos siglos ha estado reducido al solo campo de los objetos reales, ó mejor, de las relaciones susceptibles de una representación sensible, ó acompañadas constantemente por intuiciones correlativas.

El imaginarismo, que apareció con prioridad en las relaciones algorítmicas, ulteriormente invadió la región de la Geometría, y esto desde luego por efecto del carácter mixto del método cartesiano que sujetó la extensión al número.

Ya he manifestado en varias ocasiones que el imaginarismo tiene su origen en ciertas discrepancias del sujeto con el objeto, en ciertas disconformidades debidas á la naturaleza intrínseca de cada uno de estos términos, que es necesario analizar para reducir los antagonismos aparentes, desde un principio, á una armonía definitiva.

Uno de estos antagonismos que conducían á proposiciones, por el momento inadmisibles, y selladas en la época de constitución de la ciencia con el estigma de lo imaginario, que equivalía á lo absurdo, tuvo por origen la unión de un sujeto con un predicado demasiado restringido, que cuando lo era en cierto grado, conducía á lo negativo, á lo irracional, etc.; y estas disconformidades fueron sucesivamente allanadas en el proceso científico por la extensión del dominio de las cantidades enteras, á los de las cantidades racionales, y, por último, al de las cantidades complejas.

La imposibilidad de la sustracción se salvó con la adjunción de los números negativos, la de la división con la de las unidades fraccionarias, la de la inconmensurabilidad con la noción de límite, y la última generalización en el dominio algorítmico se obtuvo con la introducción del concepto de las cantidades llamadas en su origen imaginarias, y hoy con más precisión llamadas cantidades complejas, cuya existencia está sometida al principio de permanencia de las leyes formales, es decir, las leyes de la combinatoria, que son superiores á las leyes numéricas, como éstas lo son á las leyes geométricas, lo que condujo al Álgebra simbólica.

En Geometría lo imaginario surgió también de imprevisiones en los enunciados de cuestiones que resultaban absurdas ó irresolubles desde el punto de vista

erróneo ó inadecuado, según el que se consideraran. Ya algunas de estas imprevisiones comenzaron á corregirse con la amplificación de los lugares geométricos que daban cabida á lo negativo con igual título que á lo positivo; y la cuestión se reducía simplemente á modificar los enunciados extendiéndolos en la medida del nuevo contenido que debieran abarcar.

Ya, como expresa Poncelet en sus *Applications d'Analyse et de Géométrie*, no sólo era procedente emplear símbolos de la existencia, sino que también precisaba admitir los de la no-existencia, que tiene su origen en diferentes causas; y era indispensable estudiar el objeto en las diversas fases de su existencia, examinar en las figuras los objetos que persisten durante ciertas transformaciones, y distinguirlos de los que en otras desaparecen eventualmente, como hace Monge en el empleo del método fundado, ya en el caso de ser reales ciertas partes (puntos, planos, líneas ó superficies) de las cuales no depende necesariamente la construcción general de la figura, pero que son sus consecuencias contingentes ó accidentales, ya en el caso de haber padecido á ser imaginarias, subsistiendo las condiciones generales de construcción.

La conservación de la igual potencia del eje radical respecto á dos círculos se observó que era independiente de la circunstancia accidental de cortarse ó no las circunferencias, la cual aún hizo persistir Poncelet con la adjunción de las cónicas suplementarias cuyas cuerdas eran las ideales de las propuestas; y mediante este artificio ó amplificación lo imaginario permanecía en el campo de la realidad, siendo aquél meramente relativo y sustituible á lo real, por efecto de un simple cambio de figura, como en Análisis lo es por un cambio de signo en

el cuadrado de la cantidad correspondiente. Y lo mismo puede afirmarse respecto á la relación recíproca del polo y la polar, independiente de que ésta sea cuerda real y determinable por las tangentes trazadas desde aquél á la cónica ó no, permitiendo la aplicación del principio de la dualidad.

Se vió que lo imaginario no era algo arbitrario ó supuesto por un vano capricho, sino efecto de relaciones que no convenían á la esfera dentro de la cual se hallaban aplicadas, de modo que aun en la imposibilidad envuelta por el mismo, quedaba la huella de la causa que la produjera; y por consiguiente, su persistencia como lazo de relación de disconveniencia debiera conservarse en el sistema científico para que éste no perdiera su unidad ni su amplitud.

Y aún podemos añadir que lo imaginario, constituyendo una región más vasta que la de lo real, parcialmente se compenetraba con ésta, dejando entrever algunos casos de conveniencia, tales como los que expresan los puntos imaginarios conjugados por los cuales siempre pasa una recta real, la propiedad de pasar por un punto imaginario una sola recta real, ó por un punto real dos rectas imaginarias conjugadas ó de contener una recta imaginaria un solo punto real, la correspondencia entre dos puntos imaginarios y sus *elementos* reales, á saber, el punto medio de aquéllos y el producto de sus distancias á un origen común, cuya consideración, unida á la de las series homográficas que carecen de puntos dobles, permitió á Chasles extender los enunciados á lo imaginario, determinando los puntos de intersección imaginarios con las cónicas, puntos ligados á dos puntos reales, desde los que se ven los segmentos de cada par de puntos conjugados, según un ángulo

constante, y que llevan á establecer la singular propiedad de los puntos cíclicos ó puntos imaginarios en el infinito, comunes á todas las circunferencias de un plano, las cuales, consideradas dos á dos, tienen además dos puntos comunes reales ó imaginarios á distancia finita correspondientes á la secante real ó ideal, según tan elegantemente estableció Poncelet en su teoría ya citada de las cónicas suplementarias, donde vemos también que un sistema de hipérbolas homotéticas tiene dos puntos comunes en el infinito situados sobre sus asíntotas paralelas, es decir, una secante común, y que, correspondiendo á un sistema de elipses homotéticas otro sistema de hipérbolas suplementarias, también homotéticas con su secante común en el infinito, aquéllas tendrán á ésta misma como secante ideal, convirtiéndose la relación en un doble contacto, cuando además sean concéntricos dichos sistemas; y en el caso de ser círculos, tendrán las dos secantes ideales confundidas con la recta en el infinito.

Para terminar esta enumeración de propiedades divulgadas hasta en obras elementales, creemos que bastará añadir la extensión que el concepto de los puntos cíclicos del plano recibe en el espacio mediante el del círculo imaginario en el infinito, y manifestar cómo el lenguaje se ha simplificado con el auxilio de las cantidades imaginarias, cuya consideración impide que las proposiciones pierdan su generalidad.

La introducción de las rectas isotropas comunica una sencillez considerable á la teoría de los focos y á sus vastas aplicaciones. Definidos éstos como intersecciones de las tangentes á las cónicas paralelas á las direcciones isotropas, pueden enunciarse los siguientes teoremas: *si dos cónicas tienen un mismo foco, tienen*

*dos tangentes imaginarias que pasan por el mismo; todas las cónicas confocales tienen cuatro tangentes imaginarias comunes y pueden considerarse inscritas en un cuadrilátero; las tangentes trazadas á una cónica por cada uno de los puntos cíclicos forman un cuadrilátero cuyos dos vértices reales son los focos de aquélla, pudiendo considerarse los otros dos como focos imaginarios, extendiéndose esta propiedad de pasar por los focos las tangentes trazadas por los puntos cíclicos á una curva cualquiera; y como ejemplo de las facilidades que comunica al lenguaje esta amplificación de los conceptos, observaremos que la propiedad de hallarse en una razón constante la tangente trazada por un punto de una cónica á un círculo que tiene un doble contacto con ésta y la perpendicular trazada por aquél á la cuerda de contacto, se reduce en el caso de sustituirse el círculo por un punto al enunciado siguiente: *El foco de una cónica puede considerarse como un círculo infinitamente pequeño tangente á la cónica en dos puntos imaginarios situados sobre la directriz*, que asimila aquella propiedad á la fundamental del foco y la directriz.*

No continuaremos esta enumeración que podría extenderse indefinidamente, pues basta decir, en resumen, que sólo con el auxilio de este concepto del imaginarismo puede hacerse una exposición sistemática de las curvas y superficies de órdenes superiores y presentarse bajo una rígida y armónica unidad toda la ciencia geométrica.

Lo real y lo imaginario se contienen en el dominio que abarca todas las relaciones, discrepando entre sí por tener ó no tener objeto correspondiente en la representación sensible, pero asimilándose con igual vali-

dez como puras relaciones en el organismo ideal de la ciencia.

Las propiedades de las figuras, análogamente á como se relacionan los seres de la Naturaleza por ese cambio mutuo llamado *circulación de la materia y de las energías*, se enlazan ó se disgregan, aparecen, ó desapareciendo, ó se funden en nuevas relaciones; y si aquéllos á través de los ciclos de sus transformaciones conservan su primera materia, éstas mantienen su esencia racional, ya conserven su objeto contingente, ya lo pierdan por una especie de disgregación transitoria cuyo esquema es la palabra *imaginario*, como las que designan lo infinito, infinitamente pequeño, lo incommensurable, el límite, etc., unen con lazos racionales lo que se escapa á nuestra intuición sensible, para proceder en el razonamiento discursivo, propio de nuestra inteligencia finita, á la que no es dado abarcar la ciencia por intuiciones inmediatas, ni conocer las sustancias más que bajo las apariencias de los accidentes, ni las causas más que por sus efectos.

Y estas palabras que enriquecen el lenguaje matemático sirven, como se ha dicho, para unificar el organismo científico, generalizando las leyes y suprimiendo las excepciones.

La introducción de los elementos en el infinito que realizó Poncelet mediante cambios de posición de los planos de proyección de las figuras, que Staudt empleó también bajo la denominación de *elementos impropios*, son modos de hablar que permiten enunciar las cuestiones sin excepción alguna, pues si es cierto que no hay rectas ni planos en el infinito, el caso del paralelismo produce el mismo efecto que si existieran, y facilita una sustitución de enunciados análoga á la que ordinaria-

mente se hace al emplear indistintamente y según convenga, ya un teorema, ya el recíproco de su contrario, que son equivalentes.

El admitir, por ejemplo, los dos puntos imaginarios de la recta del infinito comunes á todas las cónicas de un plano, ó lo que llama Cayley, *lo absoluto*, permite referir las figuras transformadas á una base fija. El empleo de los puntos dobles imaginarios de dos series homográficas, establece enlaces proyectivos y facilita el sustituir demostraciones sencillas á otras que pudieran ser más directas, pero también más complicadas.

Hermosas concepciones son éstas que dilatan los horizontes ideales, buscando á través de enlaces continuos, puntos de referencia cada vez más apartados, pero no por esto menos fijos.

Vemos en el orden material que unos sistemas se mueven dentro de otros más amplios, y que, tomados unos como bases, sirven para determinar los inferiores de un modo relativo; y continuando así en camino ascendente, se llega hasta los últimos confines del Universo para nosotros señalados por los sistemas estelarios que aún los últimos descubrimientos astronómicos nos demuestran hallarse en movimiento, y por consiguiente, ser todavía algo relativo.

Pero el sistema material, con toda su indefinida amplitud, más allá de lo que la experimentación nada nos dice, es un caso tan sólo de los sistemas que concibe nuestra inteligencia, verdadero foco que, á su vez, por un descenso gradual, desarrolla sistemas varios que constituyen las diversas ramas de la ciencia humana, desde la Metafísica que envuelve á todas con su aspiración hacia las causas y los principios, hasta las aplicaciones, ya á las varias finalidades de la Humanidad, ya

al conocimiento del Universo; y como la Psicología es la base de las primeras, la Matemática es la piedra de toque de las segundas, y la Dialéctica es el núcleo común desde el que nuestra razón desciende por ambos derroteros para constituir las dos ramas de las ciencias antropológicas y cósmicas; y en este segundo orden, al que únicamente debemos referirnos actualmente, hallamos la combinatoria como la representante del orden lógico ó dialéctico, que desciende en sus aplicaciones al estudio del número, primera concepción abstracta que produce nuestro entendimiento, y luego al espacio y al tiempo, produciendo la Geometría y á continuación la Mecánica; y descendiendo ulteriormente á la Física matemática, aún aspira en los últimos tiempos á contrastar el purísimo concepto del número con el átomo, el elemento de la Química y á unir el primer elemento de la concepción matemática con el último elemento de la realidad material.

Estas digresiones nos permiten considerar el sistema de la Ciencia frente á las bases fijas sobre que se sustenta, á saber: las leyes de nuestra razón y las leyes del Universo. Podrán variar los sistemas de aquélla; sucederá la teoría de las ondulaciones á la de la emisión; el sistema atómico relevará al de los equivalentes, y los sistemas metafísicos alterarán nuestro modo de apreciar el orden ontológico; pero siempre los hechos permanecerán invariables ante las mismas causas, y las consecuencias de nuestros razonamientos se regirán por algo permanente que fija nuestra esencia espiritual; siempre la experiencia realizada sobre lo externo ó nuestros actos internos rectificará en definitiva los sistemas más ó menos artificiales que han constituido las diversas transformaciones de la Ciencia y nos permite

observar en la Matemática un hecho que constituye un privilegio de la misma, á saber: que subsiste independientemente de los sistemas filosóficos, y que siendo un desenvolvimiento intelectual, tiene su comprobante en los fenómenos del mundo físico y prevalece á través de su indefinido desarrollo como lazo de relación.

Esto es lo que nos ofrecen la doctrina del hiper-espacio y las geometrías no-Euclídeas.

El hiper-espacio, como veremos más adelante, es una amplificación racional del espacio ordinario que, manteniendo las leyes de éste, se desarrolla de modo que comunica nueva unidad á todo el edificio matemático.

Las geometrías no-euclídeas expresan esta fijeza de la Matemática ante la variedad de sistemas filosóficos, pues si por un lado la Geometría euclídea es un desarrollo puramente ideal que en los tiempos modernos tiene como más afine el sistema Kantiano; en oposición, otra Geometría basada en la experiencia, en la consideración del espacio, no como forma de nuestras intuiciones sensibles, sino como objeto externo, independiente de nosotros, da origen á otro desarrollo eminentemente lógico y compatible con el primer sistema, de lo que nos vamos á ocupar en los siguientes artículos.

V

Los grupos de sustituciones en la Geometría.

La combinatoria, además de un primer desarrollo hoy constitutivo del Álgebra de la Lógica y que rige también al cálculo llamado en su mayor abstracción *simbólico*, tiene otro desarrollo inmediato en la teoría de las sustituciones cuyo concepto fundamental es el de *grupo*, que se aplica desde luego á las funciones mediante su representación analítica, pasando el *grupo de una función* á tener capital importancia en la teoría general de las ecuaciones y no menor en las aplicaciones á la Geometría, como vamos á ver en este artículo.

Un conjunto de sustituciones forma un grupo cuando sus inversas, sus potencias y sus productos pertenecen á dicho conjunto; ó también podemos decir que varios objetos en número limitado ó ilimitado constituyen un grupo, cuando de dos cualesquiera de ellos puede deducirse de una manera bien determinada un tercer objeto del mismo conjunto, siendo su composición asociativa y de modo que un mismo objeto asociado á objetos diferentes conduzca mediante esta composición á objetos diferentes. Así vemos que todos los números enteros positivos, juntamente con el cero, constituyen un grupo ilimitado ó infinito, cuando se considera su composición por adición; y si se suprime el cero, los números 1, 2, 3, ... formarán un grupo infinito cuyo modo de combinar los

objetos sea la multiplicación. El conjunto de los símbolos $bx^m + c$, en el cual b y c son números enteros cualesquiera y m un número entero positivo, constituye un *grupo infinito* de elementos desde el doble punto de vista de la composición aditiva ó por multiplicación.

Obtenida la representación analítica de las sustituciones, se llegó al concepto de *grupo de una función* que posee la propiedad de dejarla invariable por cualquiera de las sustituciones de aquél aplicadas á las variables de ésta. Y Lagrange estableció la propiedad característica del *grupo de una ecuación*, á saber: que *si una función es numéricamente invariable por las sustituciones de un grupo, cualquiera otra función numéricamente invariable por las sustituciones del mismo grupo ó de otro que lo contiene se expresa racionalmente por medio de la primera*, propiedad por la cual obtuvo dicho matemático el valor de una función de las raíces de una ecuación dada, en el caso de conocerse otra función cualquiera de éstas que condujo al fundamental teorema de Galois: *Si $f(x) = 0$ es una ecuación cualquiera de grado n que no tiene raíces iguales, y si*

$$V = \varphi(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$$

es una función racional de las raíces x_0, x_1, \dots, x_{n-1} de aquélla, elegida de tal modo que los 1. 2. 3. n valores que adquiere por las sustituciones de sus raíces sean todos diferentes, podrán expresarse estas n raíces x_0, x_1, \dots, x_{n-1} en función racional de V ; y con el fin de no prolongar estas indicaciones harto conocidas respecto á la teoría edificada por Lagrange, Abel y Galois sobre las ecuaciones, sólo recordaremos que, establecidas por Abel las condiciones de resolubilidad, Galois

llegó á emplear su método de la adjunción sucesiva de raíces de ciertas ecuaciones que, reduciendo el grupo de la ecuación propuesta, conduce á su resolución por medio de radicales.

Nuestro propósito al enumerar estos trabajos reunidos en la obra magistral de M. Camille Jordan, *Traité des substitutions et des équations algébriques*, y de los que han hecho recientemente elegantes resúmenes los Sres. Borel y Drach en su *Introduction à l'étude de la théorie des nombres et de l'Algèbre supérieure*, y el señor Vogt en su obra *Leçons sur la résolution algébrique des équations*, no es otro que el señalarlos como precedentes de las importantes investigaciones del sabio matemático noruego Herr Sophus Lie, Profesor de la Universidad de Leipzig, á las que deben unirse las del eminente geómetra F. Klein; pues han contribuido de una manera notoria á afianzar las recientes teorías geométricas, de las que vamos á ocuparnos, dedicando el comienzo de nuestro trabajo, para seguir el orden cronológico, á las curiosas investigaciones del ilustre Cayley, publicadas en su *A sixth Memoir upon Quantics*, cuyo principal objeto fué el establecer la noción de distancia.

Dedicadas las cinco primeras memorias (*Upon Quantics*) á desarrollar la nueva teoría hoy conocida con la denominación de *Algebra de las formas*, la sexta concierne á las aplicaciones geométricas, y principalmente á las geometrías de una y de dos dimensiones, que corresponden á las teorías analíticas de las formas binarias y ternarias.

En la geometría de una dimensión, la recta es el lugar (*locus in quo*) de las coordenadas (x, y) . Una ecua-

ción (*), $(x, y)^4 = 0$ representa un punto (1) y una ecuación (*) $(x, y)^m = 0$, un sistema de m puntos, única figura ó lugar que ocurre en la geometría de una dimensión.

Una covariante igualada á cero expresa un sistema de puntos relacionado con el sistema original, implicando la anulación de la invariante cierta relación entre los puntos del sistema. Así, la relación $ac' - 2bb' + ca' = 0$ expresa una relación armónica entre los dos pares de puntos representados por las dos ecuaciones homogéneas de segundo grado

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0, \quad a'x^2 + 2b'xy + c'y^2 = 0$$

como demuestra Cayley en *A Fifth Memoir upon Quantics*, de manera que la proposición obtenida, cuyo enunciado es: *Puede obtenerse un par de puntos (puntos dobles) en razón armónica con dos pares de puntos dados*, sirve de fundamento á la teoría de la involución, obteniéndose desde luego una involución de cuatro puntos, y con tres ó más pares, de modo que el tercero y los sucesivos estén en relación armónica con los dos puntos dobles, un sistema en involución.

Un sistema en involución nos ofrece un ejemplo de dos sistemas homográficos en la misma recta. Si se toma en esta recta un punto O , y se considera el sistema de puntos formado por los conjugados armónicos de O respecto á los diversos pares de la involución, y análogamente se procede respecto á otro punto O' , se obtendrán dos sistemas homográficos.

La teoría de la relación armónica expuesta, hace ver

(1) Con el signo (*) Cayley representa que los coeficientes son cantidades generales.

que: dado un par de puntos $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$, la ecuación de otro par de puntos puede expresarse de dos maneras por la fórmula

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + (lx + my)^2 = 0$$

siendo los puntos $lx + my = 0$ correspondientes á los dos valores admisibles de la función lineal, los armónicos del par de puntos, respecto al par de puntos dado $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$, ó los puntos dobles de la involución.

El par de puntos representados por dicha ecuación no debe hallarse, por lo general, en una relación dada con el par dado; pero cuando se halla en la arriba indicada, se dice que está inscripto en el par de puntos dado, y el punto $lx + my = 0$ se designa con el nombre de *eje de inscripción*, siendo el armónico de éste respecto al par dado el *centro de inscripción*.

En la geometría de dos dimensiones el plano es el lugar (*locus in quo*) de puntos y de rectas, representados respectivamente por las coordenadas $x : y : z = a : b : c$, $\xi : \eta : \xi = \alpha : \beta : \gamma$, es decir, el *locus in quo* de las coordenadas-puntos (x, y, z) y de las coordenadas-líneas (ξ, η, ξ), de modo que la ecuación

$$\xi x + \eta y + \zeta z = 0$$

representa la recta ó el punto. Este doble aspecto conduce, pues, como se sabe, á la consideración de las curvas, según su orden ó su clase.

Un sistema de puntos en línea recta es una serie y un sistema de rectas en un punto un haz; y la homografía de la geometría de dos dimensiones depende de la

teoría, correspondiente en la geometría de una dimensión, ó sea de la homografía de series y de haces, comprendiendo la teoría de la homografía á la de la reciprocidad ó correlación. Y para dos figuras homográficas de un plano existe un triángulo que es su correspondiente, llamado autopolar (*sibiconjugate*, según Cayley); y cada punto del plano, considerado como perteneciente á la primera figura, corresponde á otro considerado como perteneciente á la segunda; pudiéndose construir ésta completamente por medio del triángulo autopolar y dos pares de puntos correspondientes; y si además se establece la correspondencia reciproca del punto con la recta, se llega á la teoría del polo y de la polar respecto á una cónica que se refiere á la de la relación armónica.

Si, pues, consideramos una cónica y un punto, una recta trazada por éste encuentra á aquélla en dos puntos, y el lugar de los conjugados armónicos del punto dado respecto á éstos es la polar de dicho punto, que pasa por los puntos de contacto de las tangentes trazadas por éste á la cónica, y recíprocamente, el polo de una recta es la intersección de las tangentes en las intersecciones de la polar con la cónica. Lo que conduce á las ecuaciones

$$U + \lambda PQ = 0, \quad U + \lambda P^2 = 0$$

de las cónicas trazadas por las intersecciones de la cónica U con las rectas P y Q y de las cónicas que tienen un doble contacto con la $U = 0$, en sus intersecciones con la recta $P = 0$, que es el eje de inscripción, cuyo polo, común á todas las cónicas, es el centro de inscripción.

Con estos precedentes, al exponer Cayley su original doctrina de la distancia, define *lo absoluto* en la recta, *locus in quo* de una serie de puntos, que consiste en un par de puntos de ésta; y un par de puntos cualquiera puede considerarse como inscripto en lo absoluto, siendo el centro y eje de inscripeión los puntos dobles de la involución formada por los puntos del par dado y los puntos de lo absoluto. Dicho par de puntos, además, puede considerarse como un círculo (*point-par-circle*), y por consiguiente, dado el centro de inscripeión y un punto del círculo, el otro queda determinado de una manera unívoca, pues el eje es el armónico del centro respecto á lo absoluto, siendo el otro punto el conjugado armónico del punto dado respecto al centro y al eje.

En la geometría de dos dimensiones, lo absoluto es una cónica; y una recta cualquiera lo corta en dos puntos que son lo absoluto respecto á ésta, considerada como espacio de una dimensión ó *locus in quo* de una serie de puntos. Asimismo un punto cualquiera determina con lo absoluto (tiene por tangentes de lo absoluto trazadas desde dicho punto) dos rectas que son lo absoluto respecto á dicho punto considerado como espacio de una dimensión, ó *locus in quo* de un haz de rectas, existiendo ciertas rectas, esto es, las tangentes á lo absoluto, respecto á las que éste se reduce á dos puntos coincidentes, de igual modo que ciertos puntos (los de la cónica) respecto á los cuales lo absoluto, considerado como espacio de una dimensión, es un par de rectas coincidentes.

Si en vez de una cónica propiamente tal lo absoluto consiste en un par de puntos, la recta que los une se llama la recta absoluta, considerada como un par de

rectas coincidentes; y un punto cualquiera determina con lo absoluto dos rectas, las de unión con los dos puntos de lo absoluto. Este par de rectas es lo absoluto para el punto como espacio de una dimensión, ó *locus in quo* de un haz de rectas. Pero una recta cualquiera encuentra á lo absoluto en un par de puntos coincidentes que constituyen lo absoluto de dicha recta como espacio de una dimensión.

Concluye Cayley que siendo la ecuación tangencial de lo absoluto

$$2(p\xi + q\eta + r\xi)(p_0\xi + q_0\eta + r_0\xi) = 0,$$

la de la recta absoluta es

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ p_0 & q_0 & r_0 \end{vmatrix} = 0$$

y que haciendo $p : q : r = 1 : i : 0$, $p_0 : q_0 : r_0 = 1 : -i : 0$, la ecuación tangencial de lo absoluto es $\xi^2 + \eta^2 = 0$, que consiste en los dos puntos de intersección de la recta $z = 0$ con el par de rectas $x^2 + y^2 = 0$ ó círculo de radio cero.

Para el caso de ser $z = 1$, lo absoluto se reduce á los puntos de intersección de la recta en el infinito con la circunferencia $x^2 + y^2$, ó á los dos puntos circulares en el infinito llamados cíclicos. En el espacio lo absoluto es una cónica esférica obtenida por la intersección de la esfera con el cono ó esfera esvaneciente

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

En suma: Cayley observa que la Geometría métrica

es una parte de la Geometría descriptiva; que las propiedades de una figura no son propiedades de esta considerada *per se*, sino sus propiedades en conexión con otra figura llamada lo absoluto; y este tipo de referencia puede ser una cónica.

~~~~~

Para exponer la Geometría desde el punto de vista general de sus sistemas, procede dar noticia antes de los vastos desarrollos que las conclusiones de Cayley acerca de la Geometría métrica alcanzan, ya en las varias obras del profesor Sophus Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, *Vorlesungen über Continuirliche Gruppen*, *Vorlesungen über Differentialgleichungen* y el interesantísimo discurso-programa *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* del Dr. F. Klein, publicado en 1872. Y con este propósito conviene recordar previamente las nociones más fundamentales expuestas por el Dr. Sophus Lie en la primera de sus obras citadas.

Si las variables  $x'_1, \dots, x'_n$  se hallan determinadas en función de las  $x_1, \dots, x_n$  mediante las ecuaciones resolubles

$$x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, \dots, n),$$

estas ecuaciones representan una transformación entre las variables  $x$  y  $x'$ .

Una serie finita ó infinita de transformaciones entre las  $x$  y las  $x'$  se llama grupo de transformaciones, cuando cada dos sucesivas de la serie producen otra que también pertenece á ésta.

Entre las transformaciones, las continuas tienen capital importancia, así en la teoría de las funciones como en el estudio de las relaciones geométricas, que, aparte de su alcance propio, tiene analogías con el estudio de las sustituciones ó teoría de los grupos discontinuos, correspondiendo, por ejemplo, los grupos de transformaciones de un solo parámetro á los ciclos de sustituciones, extendiéndose los conceptos de transitividad, primitividad, etc., que tan importante papel desempeñan en la teoría de las sustituciones á las transformaciones continuas y finitas de grupos.

Un grupo de transformaciones es finito y continuo cuando está representado por un sistema de  $n$  ecuaciones

$$x_i = f_i(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_r) \quad (i = 1, \dots, n),$$

en las que  $f_i$  expresan funciones analíticas de las variables  $x_1, \dots, x_n$  y  $a_1, \dots, a_r$  parámetros arbitrarios. Y si la serie de transformaciones  $x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$  está representada por un sistema de ecuaciones diferenciales

$$W_k(x'_1, \dots, x'_n, \frac{dx'_1}{dx_1}, \dots, \frac{dx'_n}{dx_n}, \dots) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

cuyo sistema de soluciones dependa, no de constantes arbitrarias, sino de otros elementos superiores, por ejemplo, de funciones analíticas, entonces el conjunto de todas las transformaciones pertenecientes á dichas ecuaciones diferenciales forman un grupo continuo infinito que representan un grupo de  $r$  términos.

Si las ecuaciones  $x'_i = f_i(x)$  se resuelven respecto á las  $x$ , se obtienen las ecuaciones

$$x_k = F_k(x'_1, \dots, x'_n) \quad (k = 1 \dots n),$$

que representan las transformaciones inversas; si, pues, se efectúa la transformación

$$x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1 \dots n)$$

y luego la transformación inversa

$$x''_i = F_i(x'_1, \dots, x'_n) \quad (i = 1 \dots n)$$

se obtendrá la transformación idéntica

$$x''_i = x_i \quad (i = 1 \dots n),$$

que tiene una capital importancia en la teoría.

Hechas estas indicaciones preliminares, procederemos á exponer sucintamente algo de lo contenido en el tomo primero de la *Theorie der Transformationsgruppe*, ya que, como se ha manifestado, la teoría de los grupos tiene íntima conexión con la doctrina que abarca los varios sistemas de Geometría, según brillantemente expone el Sr. Sophus Lie en esta obra, y procuraremos referirnos principalmente á las aplicaciones geométricas. Así, respecto al grupo de un término

$$x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n, a) \quad (i = 1 \dots n),$$

haremos notar que cuando contiene la transformación idéntica, sus transformaciones son permutables, y dicho grupo es semejante á un grupo de traslaciones

$$y'_1 = y_1, \dots, y'_{n-1} = y_{n-1}, y'_n = y_n + t.$$

Entre las  $\infty^1$  transformaciones del grupo de un término, considera preferentemente el Sr. Sophus Lie las infinitesimales.

Cada grupo de un término que contiene la transformación idéntica puede engendrarse por una transformación infinitesimal que corresponde á la transformación de las coordenadas de un punto en las de otro infinitamente próximo, ó á un movimiento infinitamente pequeño, y la trayectoria es el lugar de todos los puntos por que pasa un punto  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$  cuando se verifican las  $\infty^1$  transformaciones

$$x'_i = x_i + \xi_i(x_1, \dots, x_n)\delta t \quad (i = 1 \dots n)$$

del grupo de un término.

Respecto á los grupos de  $n$  términos ó parámetros, diremos que se engendran mediante el de uno, lo que es objeto del capítulo IV.

Expuesta la teoría de la integración de las ecuaciones diferenciales lineales en las que se hallan relacionados los grupos de un término con las transformaciones infinitesimales, hace el Sr. Sophus Lie intuitivas estas relaciones al considerar que  $x_1, \dots, x_n$  son las coordenadas de  $n$  dimensiones, pues el sistema simultáneo

$$\frac{dx_1}{\xi_1} = \dots = \frac{dx_n}{\xi_n}$$

corresponde á cada dirección del punto en el espacio  $R_n$ . Y determinando las ecuaciones integrales ó primitivas  $n-1$  de las variables en función de la  $n^{\text{stima}}$ , representan, para un valor origen, una variedad una vez extensa, llamada curva integral del sistema simultá-

neo, que es tangente en cada uno de sus puntos á la dirección correspondiente á éstos. Tales curvas integrales son las *características de las ecuaciones diferenciales parciales y lineales* que Monge consideró para  $n = 3$ .

Ya que no interesa á nuestro objeto el continuar la exposición de la doctrina expuesta en el resto del tomo primero, consagrado especialmente á la teoría, y por consiguiente, á seguir tratando de todos los sistemas de ecuaciones que satisfacen á una transformación infinitesimal de las relaciones características entre las transformaciones de un grupo, de la tramitividad, invariación y primitividad, de las series invariantes de transformaciones infinitesimales, de los grupos adjuntos, de la estructura é isomorfismo de los grupos y de otras importantes materias, pasaremos á hacer unos ligeros apuntes acerca de las *transformaciones de contacto*, objeto del tomo segundo de la *Theorie der Transformationsgruppen*.

El Sr. Lie comienza por definir *el elemento lineal de un plano*, conjunto de un punto y una recta que pasa por éste, cuyas coordenadas son las  $x, y$  del punto y el coeficiente angular  $y'$  de la recta, de modo que toda transformación en  $x, y, y'$  puede considerarse como una transformación de elementos lineales de un plano; y si pues

$$x_1 = X(x, y), \quad y = Y(x, y) \quad (1)$$

representa una transformación puntual  $x, y$  y  $x_1, y_1$  serán las coordenadas de dos puntos del mismo plano, de modo que ésta es la operación por la cual se pasa del uno al otro.

Si, pues, á cada punto  $(x, y)$  de la curva  $y - \varphi(x) = 0$ , corresponde cierto valor del coeficiente diferencial  $\frac{dy}{dx} = y'$ , para el punto correspondiente  $x_1 = X, y_1 = Y$  de la curva transformada  $y_1 - \varphi_1(x_1) = 0$ , el coeficiente diferencial tendrá cierto valor  $\frac{dy_1}{dx_1} = y_1'$ . Sea ahora  $(x + dx, y + dy)$  un punto de la curva  $y - \varphi(x) = 0$  infinitamente próximo del  $(x, y)$  para el punto  $(x_1 + dx_1, y_1 + dy_1)$  de la transformada se tendrá  $dy_1 - y_1' dx_1 = 0$ ; y expresando  $x_1, y_1$  por medio de las relaciones (1),

$$dY - y_1' dX = \left( \frac{dy}{dx} + y_1' \frac{dX}{dx} \right) dx +$$

$$\left( \frac{dY}{dy} - y_1' \frac{dX}{dy} \right) dy = 0$$

é identificando con  $\rho(dy - y' dx)$ , ya que  $dx$  y  $dy$  han de permanecer ligadas por la ecuación  $dy - y' dx = 0$ , se obtienen dos ecuaciones, de las que resulta, eliminando  $\rho$ , la fórmula

$$y_1' = \frac{\frac{dY}{dx} + y' \frac{dY}{dy}}{\frac{dX}{dx} + y' \frac{dX}{dy}} P(x, y, y')$$

que juntamente con las (1), ó sea

$$x_1 = X(x, y), \quad y_1 = Y(x, y)$$

representan una transformación de las tres variables

$x, y, y'$  llamada por el Sr. Lie la *transformación prolongada* (erweiterte) de la (1). Esta transformación posee la propiedad de cambiar toda familia de elementos  $(x, y, y')$  que satisfacen á la relación  $dy - y'dx = 0$  en otra familia de elementos  $(x_1, y_1, y_1')$  que satisfacen á la relación  $dy_1 - y_1'dx = 0$ , ó que dejan invariante á la ecuación de Pfaff  $dy - y'dx = 0$ ; pero no siendo las transformaciones prolongadas las únicas que gozan de esta propiedad, el Sr. Lie llama *transformación de contacto del plano* á toda transformación de elementos lineales de éste que deja invariante á la ecuación de Pfaff.

Análogamente, para el espacio, la transformación de contacto dejará invariante la ecuación de Pfaff  $dz - pdx - qdy = 0$ , siendo en este caso  $x, y, z, p, q$  las coordenadas del *elemento superficial*; el caso general en el que se consideran las  $2n + 1$  variables  $z, x_1, \dots, x_n; p_1, \dots, p_n$  conduce á la resolución del problema: *hallar todos los sistemas de ecuaciones que satisfacen á la ecuación de Pfaff*

$$dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n = 0.$$

Sin descender á más detalles acerca del tomo II, para acabar esta reseña pasaremos al tomo III, que constituye un hermoso trabajo de clasificación de los grupos aplicado á la Geometría.

Comienza por los tres tipos de grupos de una variable cuyos representantes son: *el grupo de las traslaciones*  $x' = x + a$ , *el grupo lineal general*  $x' = a_1 + a_2 x$ , *y el grupo proyectivo general*

$$x' = \frac{a_1 + a_2 x}{1 + a_3 x}$$

estudiándose para el plano y para el espacio sucesivamente los grupos primitivos y no primitivos, el lineal especial, el lineal general y el proyectivo general, este último objeto de grandes desarrollos, pues para el espacio ocupa una sección de la obra; y después de examinar las clases generales de grupos de transformaciones de  $n$  variables, dedica una sección á los fundamentos de la Geometría ó, según su expresión, al *problema de Riemann-Helmholtz*, que formula así:

*Hallar un sistema de propiedades comunes á la familia de los movimientos euclídeos y á las dos familias de movimientos no-euclídeos, que los distinguen de las demás familias de movimientos posibles en una multiplicidad numérica de  $n$  dimensiones, lo cual será objeto de nuestro inmediato artículo.*

De la obra *Vorlesungen über differentialgleichungen*, sólo diremos que tiene por principal objeto la realización del concepto de las transformaciones infinitesimales por medio de las ecuaciones diferenciales. Abundan también en esta obra las aplicaciones geométricas, tratándose del grupo simple y doble de traslaciones, de las traslaciones idénticas, inversas é infinitesimales, de las rotaciones, de la forma canónica del grupo de un término (*eingliedrige*) de rotaciones, del grupo de un término de las transformaciones afines, de las transformaciones idénticas, inversas é infinitesimales, de los grupos de todos los movimientos del espacio, del grupo de un término en el plano, del grupo de  $r$  términos (*r-gliedriger* ó de  $r$  parámetros) de transformaciones del espacio, de las curvas invariantes del plano por todas las transformaciones de un término, de las clases de transformaciones infinitesimales, proyectivas conformes, de las series de curvas invariantes por transformaciones

infinitesimales, de las isoterma en el plano y en las superficies curvas, de las superficies integrales, del criterio para la invariación de una curva ó superficie por un grupo de un término del espacio, en fin, del grupo de un término de  $n$  variables y de las superficies cuyas  $\infty^2$  curvas geodésicas admiten una transformación infinitesimal.

La última obra del Sr. Sophus Lie *Vorlesungen über kontinuierliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen*, no menos interesante que las anteriores, tiene gran originalidad, á pesar de versar sobre el mismo asunto que las anteriores, conduciendo al lector desde la relación anarmónica á otras teorías superiores, tales como la estructura de los grupos, los números complejos, las invariantes diferenciales, etc., resaltando especialmente la notable clasificación de los grupos.

Hecho este resumen de la vasta doctrina encerrada en las magistrales obras del Sr. Lie, nos creemos en la precisión de bosquejar algunas ideas que contiene el interesante discurso *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, escrito por el eminente profesor F. Klein con motivo de su ingreso en la Universidad de Erlangen, pues se hallan relacionadas con ulteriores desarrollos acerca de las geometrias no euclídeas, cuya exposición dejamos para los artículos siguientes.

El trabajo del Sr. Klein es un estudio de los sistemas geométricos en relación con los grupos de transformaciones.

Comienza por considerar el grupo de transformaciones constituido por el conjunto de movimientos, y observa que entre las transformaciones del espacio existen

algunas que dejan inalterables ciertas propiedades de las figuras, independientes de su posición, de su magnitud, de su sentido y de la disposición de sus partes. El conjunto de estas transformaciones constituyen el grupo principal de las variaciones del espacio.

Si consideramos, por un momento, el espacio inmóvil como una variedad rígida, entonces cada figura tiene su interés particular, y entre las propiedades que posee individualmente, las geométricas se distinguen por no variar el grupo superior.

Así, para generalizar el estudio de la Geometría, se ofrece el siguiente problema: Dada una variedad y en ella un grupo de transformaciones, *hallar la figura perteneciente á la misma respecto á las propiedades que no varían por las transformaciones del grupo.*

Limitándonos á las transformaciones lineales, el enunciado se reducirá á: *desarrollar la teoría invariante que concierne á un grupo de transformaciones dado en una variedad ó multiplicidad.* Y este es el problema general, no sólo de la Geometría ordinaria, sino de los métodos modernos, que se reduce á la elección del grupo adjunto. Así, cuando en la trigonometría esférica se estudian las figuras con relación á un punto, la cuestión se reduce á obtener la propiedad invariante en el sistema formado por la figura y el punto.

Respecto á la Geometría proyectiva, un procedimiento de amplificación del grupo fundamental es la adopción de las transformaciones recíprocas, otro consistente en la amplificación del grupo de transformaciones recíprocas y colineales mediante la consideración de las imaginarias, lo que exige el extender el dominio de los elementos del espacio con los imaginarios de igual modo que la introducción de las transformaciones

recíprocas en el grupo elegido como fundamental, lleva consigo la simultánea introducción del punto y del plano á título de elementos del espacio.

Las propiedades métricas son á su vez proyectivas respecto de una figura fundamental, el círculo imaginario en el infinito, forma que tiene la propiedad de cambiarse en sí misma, mediante las transformaciones que pertenecen al grupo proyectivo, que son también transformaciones del grupo superior; y para estar de acuerdo con este punto de vista, procede unir al círculo imaginario en el infinito el sistema de elementos reales del espacio; las propiedades en la acepción de la Geometría elemental son proyectivamente ó relaciones de los objetos con los elementos reales ó con el círculo imaginario en el infinito.

Si  $A$  es una variedad que sometida al grupo  $B$  se transforma en la variedad  $A'$ ; para que  $A$  se transforme en  $A$ , habrá de aplicarse cierto grupo  $B'$  á  $A'$ , y cada propiedad de la figura  $A$  respecto al grupo  $B$  dará una propiedad de la figura correspondiente  $A'$  respecto al grupo  $B'$ .

De modo que si  $B$  representa el grupo de transformaciones lineales tres veces infinito que transforma la recta en sí, este procedimiento aplicado á  $A$  es el mismo que el del Algebra de las formas binarias; y si ahora referimos la recta á una cónica  $A'$  del plano, las transformaciones lineales  $B$  de la recta en sí originan las transformaciones lineales  $B'$  de la cónica en sí.

Pero es indiferente estudiar la Geometría sobre una cónica, considerándola como fija, aplicándola solamente aquellas transformaciones lineales del plano que no la alteran, ó estudiar la Geometría sobre aquella cónica, considerando en general las transformaciones lineales,

dejando variar á la cónica, de manera que las propiedades del sistema de puntos en ésta son proyectivas; y se resumen estas conclusiones en la proposición siguiente: *La teoría de las formas binarias y la Geometría proyectiva del sistema de puntos de una cónica son equivalentes, es decir, á cada teorema sobre las formas binarias corresponde otro sobre el sistema de puntos.*

También resulta que: *La Geometría elemental del plano y las investigaciones de una superficie de segundo grado con un punto fundamental son las mismas, relacionando, como lo hace el Sr. Klein, esta superficie con un plano por proyección estereográfica desde un punto de la misma; pues la superficie tiene un punto fundamental, el centro de proyección, y el plano los dos correspondientes á las trazas de las proyectantes del centro de proyección, de modo que las investigaciones proyectivas de un plano en el cual hay fijos dos puntos y las de una superficie de segundo grado son las mismas ó se corresponden, consistiendo el grupo principal de las transformaciones del plano en las transformaciones lineales que dejan invariable un par de puntos, á saber, los dos puntos del círculo en el infinito.*

Puede tomarse como elemento, no precisamente el punto, sino cualquiera otra variedad, lo que influirá en el número de parámetros arbitrarios, siendo secundario el número de dimensiones de una variedad, mientras que será lo esencial el grupo de las transformaciones, ó mejor dicho: *en tanto que las investigaciones geométricas tengan por fundamento un mismo grupo, permanecerá invariable el contenido de la Geometría.* Así, por ejemplo, en vez del punto podemos elegir el par de puntos como elemento, y referir el conjunto de pares de puntos de la cónica al de rectas del plano, haciendo co-

responder á cada recta el par de puntos en el que corta ésta á la cónica. Mediante tal representación, las transformaciones lineales de la cónica en sí misma dan lugar á transformaciones lineales del plano, considerado como reglado, que dejan invariable á la cónica, y llegaremos á la proposición: *La teoría de las formas binarias y la geometría proyectiva del plano son idénticas, cuando se toma una cónica como figura fundamental.* Y puesto que la Geometría del plano, con la cónica como figura fundamental, coincide con la Geometría métrica: *La teoría de las formas binarias y la Geometría proyectiva métrica son las mismas.*

En vez de la cónica se puede introducir en el plano una curva de tercer orden en el espacio y establecerse una conexión entre la Geometría del plano y del espacio ó de una variedad cualquiera, como propuso Hesse (Borchardt's Jour. t. 66).

Un ejemplo muy adecuado nos ofrece la Geometría del espacio ó la teoría de las formas cuaternarias, tomando la recta como elemento del espacio y atribuyéndole seis coordenadas homogéneas enlazadas por una ecuación de segundo grado, y *la teoría de las formas cuaternarias coincide con la determinación métrico-proyectiva de una variedad engendrada por seis variables homogéneas.* Esto conduce á reflexiones sobre la Geometría no-euclídea y de  $n$  dimensiones de que, nos ocuparemos más adelante.

Como parte de las consideraciones de la Geometría proyectiva hay una clase de investigaciones en las que se emplea la transformación por radios vectores recíprocos que pertenecen á las teorías de las cíclicas y superficies analagmáticas, de los sistemas ortogonales, etc.

Para establecer un paralelo entre las geometrias de

los radios recíprocos y la proyectiva, observa el señor Klein que: en ésta los conceptos elementales son el punto, la recta y el plano; el círculo y la esfera son tan solamente casos de la cónica y la superficie de segundo grado, el infinito de la Geometría elemental aparece como un plano y la figura fundamental á la que se refiere la Geometría elemental es la cónica imaginaria en el infinito.

En la Geometría de los radios recíprocos, el punto, el círculo y la esfera son los conceptos elementales; la recta y el plano son casos especiales de los últimos, caracterizados por no contener el punto en el infinito, y la Geometría elemental surge al suponerse éste fijo.

Se resumen los desarrollos hechos por el Sr. Klein acerca de la transformación por radios recíprocos, en las siguientes proposiciones: *La Geometría de los radios recíprocos en el plano y la Geometría proyectiva en la superficie de segundo grado son idénticas, así como la Geometría de los radios recíprocos en el espacio lo es con la consideración proyectiva de una variedad que se representa por una ecuación de segundo grado entre cinco variables homogéneas, y también las Geometrías de los radios recíprocos en el plano ó en la esfera real tienen sus representaciones respectivas en las teorías de las formas binarias.*

No insistiremos en algunas generalizaciones de esta teoría de los Sres. Lie y Klein, ni en otros desarrollos que este ilustre geómetra hace respecto á las transformaciones de Cremona, el *Analysis situs* que abraza las transformaciones infinitamente pequeñas, el grupo de las transformaciones de puntos que corresponden á figuras, más bien analíticos que geométricos, el grupo de las transformaciones de contacto, del cual nos hemos ya

ocupado, el Algebra moderna ó teoría invariante, pues nuestro propósito solo ha sido el reseñar la importante Memoria del Sr. Klein en conexión con los trabajos del Sr. Lie y también con las teorías de las variedades extensas de cualquier número de dimensiones y la de curvatura constante con las que concluye tan interesante escrito, y las que habremos de recordar, unidas á otras nuevas en los próximos artículos sobre las geometrías no-euclideas y el espacio de  $n$  dimensiones.

---

---

---

## V

### Las Geometrías no-euclídeas

El postulado de Euclides ha sido, como se sabe, objeto de continuadas investigaciones, principalmente desde la época del Renacimiento; y entre las numerosas tentativas realizadas para demostrarlo, citaremos tan sólo las de Legendre, que cierran definitivamente la historia de esta cuestión capital de la Geometría, en el sentido según el cual se trató de resolver.

Admitir el postulado, esto es, el hecho de cortarse dos rectas que con una tercera forman ángulos interiores cuya suma es inferior á dos rectos, equivale á admitir que por un punto solo puede trazarse una paralela á una recta, ó en lenguaje moderno á admitir que cada recta tiene un punto, y sólo uno, en el infinito; locución que asimila el caso de dos rectas paralelas al de dos rectas coincidentes, pues en ambos, dos puntos (sea uno de ellos *propio ó impropio*, siendo el otro propio) determinan la recta, y además, sean las rectas paralelas ó coincidentes, forman iguales ángulos (igualmente orientados) con otra cualquiera recta, de modo que la suposición del punto común en el infinito de las rectas que forman iguales ángulos con una recta dada fija, extiende á todo el plano la relación en que se hallan dos rectas coincidentes, mediante la relación de paralelismo, y la correspondencia entre los rayos de un haz pertene-

ciente á un punto con los puntos de una recta del plano (que no pase por el centro del haz) se hace unívoca. Desde este momento la Geometría se reduce á una serie de sustituciones de elementos equivalentes, cuya diversidad produce otra diversidad correspondiente en los enunciados, siendo posible caminar de distintas maneras á través de los rígidos enlaces del razonamiento; de modo que las relaciones cada vez más complejas por efecto de aplicarse á combinaciones de objetos en número creciente, envuelven dentro de su complejidad la eficacia de los principios fundamentales que rigen las transformaciones de unos teoremas en otros equivalentes.

Abandonando el camino seguido para una exposición rigurosamente deductiva que tan sólo hubiera dependido de haberse demostrado el axioma XI de Euclides, en vista de las infructuosas tentativas efectuadas por los geómetras hasta Legendre, la nueva dirección señalada por Lobatschewsky dió origen á una serie de investigaciones de tanta ó mayor importancia en Geometría que las de Abel en la teoría de las ecuaciones y la constitución del Algebra basada en la teoría de los grupos, hoy de tan superior alcance en todas las ramas de la Matemática.

Esta nueva dirección para establecer los fundamentos de la Geometría se halla consignada en la Memoria *Estudios geométricos sobre la teoría de las paralelas*, resumen de lo expuesto en los *Nuevos principios de Geometría con una teoría completa de las paralelas*, que inaugura la nueva era abierta á las investigaciones geométricas por el innovador ruso, el Copérnico de la Geometría, según expresión del ilustre matemático Sylvester, ya que Lobatschewsky dilató los dominios de la

Geometría sobre los Elementos de Euclides, como Copérnico extendió las regiones de los astros sobre el reducido sistema de Ptolomeo.

El primer resultado alcanzado por Lobatschewsky en las obras citadas y por Bolyai en *La Ciencia absoluta del espacio*, donde hizo su desarrollo de la Geometría independiente del postulado de Euclides, fué el establecer la imposibilidad de ser demostrado éste mientras que todos los demás axiomas tengan su verificación en la Geometría de estos dos innovadores, como hace ver Flye Sainte Marie en sus *Etudes analytiques sur la théorie des parallèles*.

Otro resultado consistió en dar amplitud considerable á la base de la Geometría, hasta entonces reducida á un simple desenvolvimiento puramente subjetivo afine con el idealismo de Kant; pues aparte de su rigor lógico, tiene la nueva doctrina por fundamento la experiencia, ya que la paralela se concibe como la posición límite de la recta que gira alrededor de un punto hasta que deja de encontrar á la recta base, ó, respecto la cual es paralela á uno ú otro lado de la perpendicular bajada á ésta desde dicho punto, ya también que, abarcando la Pangeometría todos los sistemas geométricos incluidos por el Sr. Klein dentro de los géneros de las Geometrías parabólica, hiperbólica y elíptica, según las hipótesis de uno, dos ó ningún punto en el infinito, cada una de estas ramas de la ciencia del espacio depende de la determinación de un parámetro.

Otro resultado, en fin, debido á la evolución realizada por Lobatschewsky y Bolyai, consistió en el hecho de que, lejos de menoscabar su importancia la Geometría con la adjunción de nuevas direcciones subordinadas á varios puntos de vista, prevalece sobre las con-

tingentes bases de los sistemas; y enriquecida con los elementos importados por Riemann, Helmholtz, Beltrami, Flye Sainte Marie, Tilly, Klein y otros, además de extender sus dominios, ostenta más que nunca el carácter propio de la Matemática, á saber: la independencia de sus relaciones ó núcleo de verdades, tanto de los primeros principios donde predomina la Metafísica en la selección de los mismos, como de los hechos de la realidad donde predomina la experiencia.

Estas investigaciones han hecho descender á la inteligencia desde su fondo sobre el que se desarrollaba la Geometría como consecuencia de las definiciones, de sus principios y postulados impuestos *à priori*, hasta el espacio, como algo externo susceptible de influir con sus propiedades y modos de ser sobre las conclusiones puramente lógicas de aquélla, que como dice Clifford, nos conduce desde la consideración del *aquí* y el *ahora* de la Geometría de Euclides á la del *allá* y *entonces*.

Esta teoría del espacio, no como entidad homogénea creada por nuestra inteligencia, según resulta de la Geometría euclídea, que cuenta entre sus principios fundamentales el de poderse trasladar cualquier figura, sin alteración de su forma, á cualquier región del espacio, sino como entidad susceptible de variación; no solo por el lugar, sino por el tiempo, amplifica el campo de la Geometría y hace entrar en su estudio las teorías de las superficies deformables, aplicables, etc., y hace depender el espacio de la propiedad denominada su curvatura, que en el caso de ser nula se reduce al espacio euclídeo.

---

/

Aunque las obras de Lobastchewsky y de Bolyai anteriormente citadas son muy conocidas por los que se dedican á estudios geométricos, creemos indispensable hacer siquiera un resumen de la doctrina en ellas contenida, ya que constituyen el fondo sustancial de cuanto hayamos de exponer acerca de las tres varias direcciones seguidas en la organización de la Geometría, dependientes de los fundamentos que pueden tomarse como puntos de partida.

Desde luego se observará que la Geometría euclídea con auxilio del postulado forma un organismo rígido, en el cual las demostraciones son eminentemente deductivas; y con suma frecuencia basta el método *ad absurdum* para descubrir una verdad incluida en otra ó que es una de sus transformadas, por referirse ambas á objetos equivalentes ó también de diversa complejidad, lo que ocasiona una agrupación correlativa de las proposiciones concurrentes á la demostración de las que son más complejas.

La Geometría euclídea que, como se sabe, corresponde á un radio de curvatura infinito, es la imagen de lo infinito que se nos presenta dotado de fijeza absoluta frente á la mutabilidad de lo finito, cuyas alteraciones son inapreciables ante la magnitud de aquél; el espacio euclídeo es homogéneo y dentro de toda su extensión puede trasladarse cualquier objeto de una de sus regiones á otra sin deformación; y existiendo en cada recta un solo punto en el infinito, en cada plano una recta, y en el espacio mismo un solo plano en el infinito, la correspondencia unívoca de las varias figuras se verifica sin restricción.

Por el contrario, la Geometría de Lobatschewsky y de Bolyai, que en adelante llamaremos hiperbólica, se-

gún la expresión de Klein, ofrece la movilidad de lo indefinido en sus procesos; la curvatura del espacio le impide el ser homogéneo, la mutación de un objeto, sin deformarse, de una región á otra se halla sujeta á restricciones; en cada uno de los planos, el paralelismo se verifica en dos regiones distintas de cada recta, análogamente al modo de referirse las asíntotas á las ramas de la hipérbola, lo que justifica la denominación de Geometría hipérbólica; sustituyendo esta Geometría á las relaciones *à priori* del método euclídeo, la sucesión de los hechos correspondiente á variación continua ó indefinida del objeto, tiene como nota característica la de basarse en el movimiento. Si en la Geometría euclídea ó parabólica, el procedimiento *ad absurdum* llega á hacer ver incluida una verdad en otra por efecto de la imposibilidad absoluta de que esto no pueda verificarse, en la Geometría hipérbólica el movimiento conduce, por variación indefinida y hasta continua, de la realización de un hecho á la de otro existente dentro de la serie de estas mutaciones.

Definida la paralela como la posición límite de una recta móvil alrededor de un punto, resulta que la más ligera desviación angular hacia el lado donde está la recta á la cual es paralela la convertirá en secante.

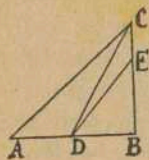
Admitidas, pues, además de esta definición unas cuantas proposiciones de la Geometría plana euclídea, independientes del postulado, y otras acerca de las figuras esféricas, y sobre todo por efecto de la variación continua que sigue en sus procesos, además de la superposición de la recta consigo misma en todas sus posiciones y de la proposición fundamental: *dos rectas no pueden cortarse en dos puntos*, el que una recta suficientemente prolongada en sus dos sentidos puede pasar de

todo límite y dividir en dos partes toda porción del plano limitada, y que una recta cortará á otra cuando tenga dos puntos situados en distinta región de ésta, Lobatschewsky procede á su nuevo desarrollo de la Geometría como vamos á ver.

Con estos preliminares se establece en la Geometría hiperbólica que toda recta conserva el carácter de paralelismo en cada uno de sus puntos, que dos rectas son recíprocamente paralelas; y mediante una construcción indefinida de triángulos (de modo que cada dos sucesivos son los construidos sobre la base común de otra serie correspondiente de paralelogramos formados) de suma angular constante en los que dos de los ángulos disminuyen lo que el tercero aumenta hasta llegar á ser menores que  $\frac{1}{2} \alpha$ , en cuyo caso sería imposible la cons-

trucción de un triángulo de suma angular  $\pi + \alpha$ , se llega á que: *En todo triángulo rectilíneo la suma de los tres ángulos no puede exceder á dos ángulos rectos.*

Pero basta que en un solo triángulo rectilíneo la suma angular sea igual á dos ángulos rectos para que lo sea en todos, según demuestra Lobatschewsky descomponiendo primero un triángulo cualquiera en dos triángulos rectángulos de igual suma angular por medio de la perpendicular bajada desde el vértice, y luego for-

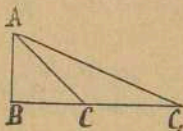


mando sobre cualquiera de los triángulos componentes series de cuadriláteros que conducen á un triángulo  $ABC$  siempre de igual suma angular que el primero, es decir, dos rectos, capaz de contener cualquiera otro triángulo rectángulo DBE, de modo que sus ángulos rectos coincidan;

entonces la suma angular de ADC y DBC será dos rec

tos, sin lo que la del ABC no podría ser dos rectos, y lo mismo resultará para los dos triángulos DCE y DEB componentes del DBC.

Además: *si dos perpendiculares á una recta son paralelas* (y esto ocurre en la Geometría euclídea), *la suma de los ángulos de un triángulo será igual á  $\pi$* . Esto lo demuestra Lobatschewsky habiendo demostrado primero que, *por un punto dado se puede trazar siempre una recta que forme con una recta dada un ángulo tan pequeño como se quiera*, mediante una serie indefinida de triángulos isósceles  $ACC_1, AC_1C_2, \dots$  que conduce á un ángulo  $AC_nB$  menor que cualquier ángulo dado.

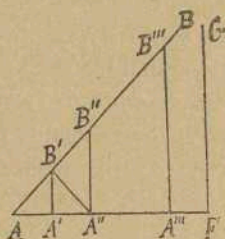


Así, pues, ó en todos los triángulos rectilíneos la suma angular es igual á dos rectos, y entonces el ángulo de paralelismo es  $\frac{1}{2} \pi$ , lo que ocurre en la Geometría euclídea, ó dicha suma es menor que  $\pi$  y el ángulo de paralelismo es  $< \frac{1}{2} \pi$ .

En esta disyuntiva, Lobatschewsky sigue la segunda hipótesis admisible, ya que el no estar demostrado el postulado lo consiente, y establece una proposición fundamental en el nuevo sistema geométrico, á saber, la dependencia entre la distancia de un punto del plano á una recta y el ángulo de paralelismo, que se enuncia del modo siguiente: *Dado un ángulo cualquiera  $\alpha$ , puede obtenerse una distancia p para la cual el ángulo de paralelismo sea  $\alpha$* .

El procedimiento demostrativo consiste en construir una serie indefinida de triángulos  $AB'A'', AB''A''', \dots$

en los que la suma angular es, respectivamente,  $\pi - 2a$ ,  $\pi - 4a$ ,...



si el primer triángulo rectángulo  $AB'A'$  (en el que el ángulo  $BAA'$  es igual á  $a$ ) tiene por suma angular  $\pi - a$ , hasta que no sea posible la construcción del triángulo, por hacerse dicha suma negativa, lo que conduce á la existencia de una recta limite, por ejemplo la  $GF$ , de las que encuentran á la

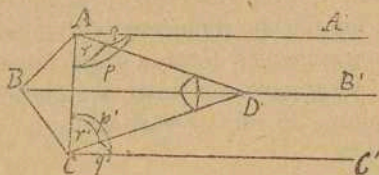
$AB$  y las que no la encuentran. Se ve, además, que el ángulo de paralelismo disminuye cuando  $p$  aumenta,

desde  $\frac{\pi}{2}$  para  $p$  nula, hasta cero cuando  $p$  es infinita.

No nos detendremos ni en cómo demuestra Lobatschewsky que las paralelas tienden á aproximarse en el sentido del paralelismo, de modo que son entre sí, líneas asintóticas, ni en la propiedad de ser paralelas dos rectas que lo son á una tercera, ni en que las intersecciones de tres planos, dos á dos son tres rectas paralelas entre sí, cuando son paralelas dos de ellas, proposición que equivale á la anterior, ni en la manera de obtener *la medida de un ángulo triedro que se reduce á la suma de sus ángulos diedros menos un ángulo recto*. Solo diremos de la proposición: *Si tres planos se cortan dos á dos según rectas paralelas  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ , la suma de los tres diedros es igual á dos ángulos rectos*, que se demuestra haciendo girar al rededor de  $AC$  un plano que corta á  $BB'$  en un punto  $D$ , y por consiguiente á los planos  $AA'$ ,  $BB'$ , y  $CC'$ ,  $BB'$ , según las rectas  $AD$  y  $CD$ ; y obtenida la expresión de los diedros  $AD$  y  $CD$  como

pertencientes á triángulos esféricos de áreas  $d$  y  $s$  y centros  $A$  y  $C$ , es decir:

$AD = \pi - 2\alpha - w - X$ ,  $CD = \pi + 2\beta - w - Z$ , expresiones en las



que  $w$  representa el diedro de los planos  $DAC$  y  $AA'CC'$  y  $X, Y, Z$ , los diedros  $AA', BB', CC'$ , se llega á la expresión

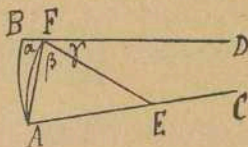
$$\delta = \frac{1}{2}(X + Y + Z - \pi) - \alpha - \beta - w$$

del área del triángulo esférico en la esfera de centro  $D$  que se reduce á  $0 = \frac{1}{2}(X + Y + Z - \pi)$  por la anulación de  $\alpha, \beta$  y  $\delta$  dependientes de la del diedro  $w$ .

Sentados estos preliminares, llegamos al estudio del horiciclo y la horisfera, debiendo observar que, así como en la Geometría euclídea las tres perpendiculares en los puntos medios de los lados de un triángulo son concurrentes, por hallarnos en el caso de que dos rectas perpendiculares á otra son paralelas; en la Geometría de Lobatschewsky será admisible la hipótesis de que dichas perpendiculares no se encuentren, para lo que basta suponer que dos de ellas no se encuentren. Además Lobatschewsky demuestra que las tres son dos á dos paralelas, apoyándose en las relaciones que ligan la distancia de un punto á una recta con el ángulo de paralelismo en dicho punto. Esta relación permite enseñada construir lo que llama dicho geómetra *curva-limite* ú *horiciclo*; para ello basta construir en el extre-

mo B de una recta AB á la que llama *eje de la curva-límite* cuantos ángulos se quieran, y para cada ángulo  $\Pi (\alpha)$  (así se expresa el ángulo de paralelismo) en el segundo lado, á partir del vértice B, un segmento  $AC = 2\alpha$ , que dará el punto C de dicha curva. Las perpendiculares en los puntos medios de cada segmento AC serán paralelas al eje AB y paralelas entre sí; pudiéndose considerar cualquiera de estas rectas como eje de la curva-límite.

Una propiedad importantísima de la *curva-límite* y que va envuelta en su denominación, consiste en *ser límite de una circunferencia cuyo radio se hace infinitamente grande*. Así, considerando dos ejes AC y BD de la curva-límite y el arco AF de circunferencia comprendido entre ambos, se obtiene para el ángulo BAF de dos cuerdas la expresión



$$\text{BAF} = \alpha - \beta < \beta + \gamma - \alpha \text{ ó } \alpha - \beta < \frac{1}{2} \gamma;$$

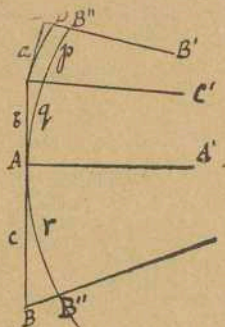
y en virtud de poderse hacer el ángulo  $\gamma$  tan pequeño como se quiera, bien alejando el centro de la circunferencia en AC, ya conservando el centro E y aproximándose F á B, se llega á la consecuencia de que la inclinación de las cuerdas ó la distancia del punto B de la circunferencia á la curva-límite tiende hacia cero.

Otro importantísimo resultado que sigue en la exposición de Lobatschewsky es la expresión analítica de un arco de curva-límite por medio de otro situado á una distancia  $x$ , ó sea

$$s' = se^{-x}$$



además considera la superficie-límite que pasa por A cortando á los otros dos ejes y á los planos correspondientes según el triángulo AB'' C'', cuyos lados  $p, q, r$ , se oponen á los ángulos AA', BB', CC', y desarrollando la figura sobre un plano, obtiene las ecuaciones fundamentales de la trigonometría, observando que CC' depende de  $b$ , de modo que  $CC' = f(b)$ , y lo mismo  $BB'' = f(c)$ . Tomando en seguida CC' por eje, se describe una nueva curva-límite á partir de C hasta su intersección D con el eje BB', y designando el arco CD por  $t$ , se tiene



$$BD = f(a) \quad BB'' = BD + DB'' = BD + CC',$$

y por consiguiente  $f(c) = f(a) + f(b)$

$$y t = p e^{f(b)} = r \operatorname{sen} \Pi(\alpha) \cdot e^{f(b)}$$

esto último por ser en el triángulo  $pqr$ ,  $p = r \operatorname{sen} \Pi(\alpha)$ ,

Los desarrollos que completan la Memoria y que se hallan expuestos con mayor amplitud en la *Pangeometría* del mismo geómetra, conducen al resultado de que la geometría imaginaria, según la denominó al principio su autor, se cambia en la geometría ordinaria cuando se suponen los lados de un triángulo rectilíneo muy pequeños; además, las fórmulas obtenidas en geometría plana se cambian en las de la esférica, al reemplazarse  $a, b, c$ , por  $a\sqrt{-1}, b\sqrt{-1}, c\sqrt{-1}$ .

La necesidad de limitar este trabajo á una breve re-

seña de la geometría no-euclídea, nos impide dar una idea de cómo Bolyai expone la parte relativa á las curvas y superficie-límites. Concluye la Memoria de este geómetra haciendo ver que el sistema euclídeo es el límite del no euclídeo, cuando cierto parámetro  $i$  se hace infinito.

La Memoria de Bolyai dió origen á otra Memoria del profesor alemán Dr. J. Frischauf *Absolute Geometrie nach Johann Bolyai*, donde encuentra el lector aclaraciones y ampliaciones importantes acerca del primero de estos trabajos.

---

Con la publicación de la Memoria *Saggio di interpretazione della Geometria no euclidea*, debida al profesor italiano Sr. Beltrami, la geometría de Lobatschewsky adquirió un nuevo grado de importancia, puesto que la nueva doctrina tuvo un substrato en las superficies de curvatura constante negativa ó en la pseudo-esfera. La superposición de las figuras, criterio general para las demostraciones en los elementos de Geometría, se extiende desde el plano rígido é invariable hasta las superficies deformables, no sólo tales como la cónica y cilíndrica, donde tienen aplicación las propiedades demostradas en el plano, sino hasta las superficies de curvatura constante, en las que pueden cambiar de posición las figuras, sin alterar de forma ni de magnitud y superponerse como en el plano.

Hemos de notar, sin embargo, ciertas restricciones ó cambios en los enunciados de algunas propiedades, según la superficie considerada, pues la determinación de una recta por dos puntos sufre una excepción en la esfera, caso particular de las superficies de curvatura

constante positiva, cuando aquéllos son los extremos de un diámetro, y también el principio de la única perpendicular á una recta por un punto. En cambio para las superficies de curvatura constante negativa rige el principio de la determinación por dos puntos de una línea geodésica, que hace las veces de recta en cualquiera de las superficies de curvatura constante positiva ó negativa.

El objeto principal del Sr. Beltrami en su Memoria, es desarrollar la geometría de Lobatschewsky en la pseudo-esfera. Para ello considera dos sistemas coordinados de líneas geodésicas  $u = \text{const}$ ,  $v = \text{const}$ , de modo que las geodésicas pertenecientes cada uno de ellos son perpendiculares respectivamente á la geodésica  $v = 0$  ó  $u = 0$ , y hace una representación de la superficie en el plano. En esta representación que deduce de su fórmula fundamental para las superficies de curvatura constante negativa, toda la región plana se halla comprendida dentro de un círculo de radio  $a$ , por haber deducido de dicha fórmula que los valores admisibles para las variables  $u$  y  $v$  se hallan sujetos á la relación  $u^2 + v^2 \leq a^2$ .

Una geodésica que parte del punto  $u = 0$ ,  $v = 0$  puede representarse por las ecuaciones

$$u = r \cos \mu, \quad v = r \sin \mu$$

siendo  $r$  y  $\mu$  las coordenadas polares del punto  $(u, v)$  de la recta que en el plano auxiliar representa á dicha geodésica, y de la fórmula de Beltrami se obtiene para tales valores, siendo  $\mu$  constante,

$$d\rho = R \frac{adr}{a^2 - r^2}, \quad \rho = \frac{R}{2} \log \frac{a+r}{a-r}$$

$$\delta \rho = \frac{R}{2} \log \frac{a + \sqrt{u^2 + v^2}}{a - \sqrt{u^2 + v^2}}$$

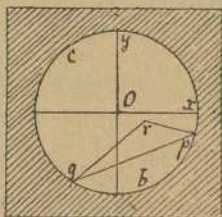
donde  $\rho$  es el arco de la geodésica y  $R$  el radio de curvatura de la superficie; el valor de  $\rho$  es nulo, infinito ó imaginario para  $r$  igual á cero, á  $a$  ó mayor que  $a$ , respectivamente; luego el contorno representado por la ecuación  $u^2 + v^2 = a^2$  en el plano auxiliar corresponde al lugar de los puntos del infinito en la superficie, que puede considerarse como un círculo geodésico descrito desde el punto ( $u = v = 0$ ) con un radio infinitamente grande, de modo que dentro del círculo-límite queda representada toda la región real de la pseudo-esfera. En resumen:

I. A dos cuerdas distintas que se cortan dentro del círculo-límite corresponden dos geodésicas que se cortan en un punto á distancia finita segun un ángulo comprendido entre  $0^\circ$  y  $180^\circ$ .

II. A dos cuerdas distintas que se cortan en la circunferencia del círculo-límite corresponden dos geodésicas concurrentes hacia un punto situado á distancia infinita y que forman en él un ángulo nulo.

III. A dos cuerdas distintas que se cortan fuera del círculo-límite ó que son paralelas, corresponden dos geodésicas que no tienen punto alguno común en toda la extensión real de la superficie.

Si  $pq$  es una cuerda cualquiera del círculo-límite y  $r$  un punto también interior, pero no situado en la cuer-



da, á ésta corresponde en la superficie una geodésica  $p'q'$  dirigida hacia los puntos en el infinito  $p'$  y  $q'$  correspondientes á los  $p$  y  $q$ . Desde el punto  $r'$  correspondiente al  $r$  pueden trazarse en la superficie infinitas geodésicas, de las cuales las que encuentran á la  $p'q'$  se hallan en el arco  $pbq < 180^\circ$ , y las otras en el arco  $pcq > 180^\circ$ ; de manera que las dos geodésicas correspondientes á las rectas  $rp$  y  $rq$  son paralelas á la  $p'q'$ , como ocurre en la planimetría de Lobatschewsky.

No nos detendremos á examinar las analogías, ó mejor, la identificación que hace el Sr. Beltrami de la geometría de la pseudo-esfera con la de Lobatschewsky; sólo diremos, para terminar el resumen que hacemos de su hermosa Memoria, que de la fórmula fundamental ya citada que representa el cuadrado del elemento lineal en una superficie de curvatura constante negativa

$$ds^2 = R^2 \frac{(a^2 - v^2) du^2 + 2uvdudv + (a^2 - u^2) dv^2}{(a^2 + u^2 - v^2)^2}$$

y de las  $u = r \cos p$ ,  $v = r \sin p$  y

$$\rho = \frac{R}{2} \log \frac{a + \sqrt{u^2 + v^2}}{a - \sqrt{u^2 + v^2}}$$

deduce para el semi-perímetro de la circunferencia geodésica de radio  $\rho$  la expresión

$$\pi R \operatorname{sen} h \frac{\rho}{R} \quad \text{ó} \quad \frac{1}{2} \pi R \left( \frac{\rho}{e} - \frac{\rho}{R} \right)$$

conforme con la de Gauss

$$\frac{1}{2} \pi k \left( \frac{\rho}{k} - \frac{\rho}{k} \right)$$

en la que representa  $k$  el radio de la superficie pseudo-esférica.

Pocas palabras dedicaremos á las célebres Memorias de Riemann y de Helmholtz, que son tan conocidas por los aficionados á estudios geométricos.

Ya se sabe que la del primero, *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, tiene por principal objeto el vasto concepto de la variedad (*Mannigfaltigkeit*), en que se basa la notable amplificación llamada Geometría de  $n$  dimensiones, es decir, el establecer el concepto de una magnitud de dimensiones múltiples, partiendo del concepto general de magnitud y resolver el problema de hallar las relaciones métricas del espacio.

Después de haber construído el concepto de una variedad de  $n$  dimensiones, cuyo carácter esencial es que la determinación de lugar puede reducirse á  $n$  determinaciones de magnitud, examina Riemann las relaciones métricas de que es susceptible tal variedad y las condiciones suficientes para determinar estas relaciones métricas, que exigen independencia entre las magnitudes y el lugar, y en particular que la longitud de las líneas sea independiente de su posición ó que cada línea pueda medirse por otra cualquiera.

Observa Riemann que por hallarse reducida la determinación de lugar á determinaciones de magnitud y por depender la posición de un punto en una variedad

de  $n$  dimensiones de las  $n$  variables  $x_1, \dots, x_n$ , la determinación de una línea estriba en que las cantidades  $x$  se den como funciones de una variable; y el problema se reduce á obtener la expresión matemática de la longitud de una línea, ó mejor, del elemento lineal  $ds$  en función de las cantidades  $x$  y  $dx$ , homogénea de primer grado de estas diferencias, que crezca en todas direcciones y que, por consiguiente, tenga un *mínimum* en su origen, siendo nula su diferencial de primer orden y positiva la de segundo. Para el espacio se tiene  $ds = \sqrt{\sum (dx)^2}$ . A las variedades que pueden reducirse á esta forma las llama Riemann *variedades planas*, y se ocupa enseguida de las diversidades esenciales que ofrecen las variedades susceptibles de representarse bajo la forma considerada. La propiedad más importante de las variedades que examina se reduce á poderse representar las relaciones de variedades de dos dimensiones geoméricamente por superficies y las de variedades de mayor número de dimensiones por las de las superficies que contienen.

Las relaciones métricas en una magnitud de dos dimensiones, cuando el elemento lineal puede expresarse por la raíz cuadrada de una expresión diferencial de segundo grado, como ocurre en las superficies, están caracterizadas en cada punto por la medida de la curvatura; dicha magnitud es el producto de las dos curvaturas de la superficie en el punto considerado, ó bien su producto por un triángulo infinitesimal formado con líneas de mínima distancia es igual á la mitad del exceso de la suma de los ángulos de dicho triángulo, valuadas en partes del radio, sobre dos rectos. La primera definición supone que el producto de los dos radios de curvatura permanece invariable cuando la superficie

sufre una simple flexión; la segunda supondría que para un mismo lugar, el exceso de la suma de los ángulos de un triángulo infinitamente pequeño sobre dos ángulos rectos, es proporcional al área del triángulo. Para dar una representación á la medida de una variedad de  $n$  dimensiones en un punto dado, y según una dirección superficial dada que pasa por éste, observa Riemann, debe tenerse presente que una línea de mínima distancia está determinada á partir de un punto, cuando se da su dirección inicial. Según esto, se obtiene una superficie determinada, prolongando, según líneas de mínima distancia, todas las direcciones, á partir del punto dado y situadas sobre el elemento superficial dado.

Antes de pasar á las aplicaciones al espacio, se ocupa Riemann de las variedades planas en general, es decir, de aquéllas en las que el cuadrado del elemento lineal puede representarse por una suma de cuadrados de diferenciales completas.

Las variedades, cuya curvatura es siempre nula, son un caso particular de las de curvatura constante, caracterizadas por la posibilidad de moverse sin variar de extensión; siendo alrededor de cualquiera otro punto y en todas direcciones exactamente las mismas las relaciones métricas, en las variedades de curvatura constante, puede darse á las figuras una posición arbitraria cualquiera. Las relaciones métricas de estas variedades dependen únicamente del valor de la curvatura. Las superficies de curvatura constante positiva pueden siempre recibir una forma tal, que los segmentos superficiales puedan moverse en ellas sin flexión; la de curvatura nula posee la propiedad de que la dirección es independiente del lugar.

En cuanto á la determinación de las relaciones mé-

tricas del espacio, cuando se admite como hipótesis que las líneas son independientes de su posición y que el elemento lineal se expresa por la raíz cuadrada de una expresión diferencial de segundo grado, pueden expresarse sus condiciones necesarias y suficientes haciendo desde luego que la medida de la curvatura en cada punto sea nula según tres direcciones superficiales, quedando determinadas las relaciones métricas del espacio, si la suma de los ángulos de un triángulo es siempre igual á dos rectos.

Si se supone, además, como Euclides, una existencia independiente de la posición, no sólo para las líneas, sino también para los cuerpos, resulta que la medida de la curvatura es en todas partes constante; y entonces la suma de los ángulos queda determinada en todos los triángulos cuando lo es en uno sólo.

Concluye la Memoria de Riemann examinando el modo de corresponder los sistemas de determinaciones métricas con la experiencia, observando que la hipótesis del espacio como una variedad ilimitada de tres dimensiones se aplica á todas nuestras concepciones del mundo exterior, y nos sirve para completar en cada instante el dominio de nuestras percepciones efectivas y para construir los lugares posibles de un objeto buscado, poseyendo dicha propiedad de ser ilimitado el espacio mayor grado de certidumbre empírica que otro dato cualquiera de la experiencia. Pero la cualidad de infinito del espacio no es consecuencia de ser ilimitado, pues si se suponen los cuerpos independientes del lugar, atribuyendo al espacio una curvatura constante positiva por pequeña que fuera, el espacio sería necesariamente finito. Prolongando según líneas geodésicas ó de mínima distancia las direcciones iniciales situadas en un elemen-

to superficial, se obtendría una superficie ilimitada de medida de curvatura constante, es decir, una superficie que en una variedad plana de tres dimensiones, tomaría la forma de una superficie esférica, que sería, por consiguiente, finita.

*Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome* se titula la también célebre y conocida Memoria de Helmholtz, de la que es indispensable hacer alguna indicación, por lo menos cuando se trata de los sistemas geométricos no-euclídeos. Se propone este ilustre físico-matemático examinar desde el punto de vista filosófico los axiomas geométricos y la posibilidad de construir por el análisis sistemas geométricos fundados sobre axiomas distintos de los de Euclides.

Con el fin de evitar las dificultades que ofrece el examen de las hipótesis fundamentales de la Geometría, emplea Helmholtz el método de la Geometría analítica, ya que, siendo todo proceso algebraico una operación puramente lógica, no puede introducir entre las cantidades á él sometidas ninguna relación que no se halle contenida en las ecuaciones propuestas.

Hace interesantes desarrollos acerca de las geometrías en el plano euclídeo, en las superficies de curvatura constante positiva y en la pseudo-esfera, haciendo ver qué postulados son válidos en una ó en otra, y por consiguiente en qué se asemejan ó difieren, exponiendo enseguida sus investigaciones propias, afines de las de Riemann en algunos puntos, si bien éste toma como base la expresión analítica de la distancia de dos puntos infinitamente próximos y llega á establecer los teoremas de la movilidad de los cuerpos sólidos, y Helmholtz parte del hecho observado de que en nuestro espacio el movimiento de los cuerpos sólidos es posible en el grado

que los conocemos, concluyendo la necesidad de la expresión algebraica considerada por Riemann como axioma.

Principia Helmholtz suponiendo que la posición de un punto cualquiera A debe poderse determinar respecto á elementos fijos con auxilio de medidas efectuadas sobre líneas, ángulos, áreas, etc., y necesarias para determinar la posición de dicho punto, llamadas sus *coordenadas*, que determinan las dimensiones del espacio considerado y que varían de una manera continua.

Luego define un cuerpo sólido con relación á un sistema de puntos fijos de la manera siguiente:

Entre las coordenadas de los puntos que pertenecen á un cuerpo sólido, tomados dos á dos, debe existir una ecuación correspondiente á la relación invariable que subsiste entre los dos puntos durante el movimiento y que es la misma para todos los pares de puntos congruentes, siendo éstos los que pueden coincidir con el mismo par de puntos fijos del espacio.

A pesar de su apariencia tan general, esta definición es muy fecunda, porque el número de ecuaciones aumenta más rápidamente que el número de coordenadas de los puntos que determinan. Cinco pares de puntos originan diez pares diferentes

AB, AC, AD, AE

BC, BD, BE

CD, CE

DE

que corresponden á diez ecuaciones con quince coordenadas variables, de las que seis deben quedar arbitrarias, si el sistema de los cinco puntos debe moverse libre-

mente alrededor de un eje, de modo que sólo es posible determinar nueve coordenadas para las seis variables. En el caso de seis puntos se hallarían quince ecuaciones para doce variables, etc. Pero con  $n$  ecuaciones sólo pueden determinarse  $n$  magnitudes; luego si tenemos más de  $n$  ecuaciones, los valores sobrantes deben ser funciones de los  $n$  primeros. De esto se sigue que las coordenadas de los puntos de un cuerpo sólido, tomados dos á dos, deben ser tales, que si en el espacio de tres dimensiones quedan satisfechas para nueve de estos pares formados por los cinco puntos, la ecuación para el décimo par quedará también satisfecha. A esta circunstancia se debe que la hipótesis admitida en la definición de la solidez baste para determinar la naturaleza de las relaciones existentes entre las coordenadas de dos puntos situados entre sí á una distancia invariable.

Para buscar el origen de las determinaciones que definen nuestro espacio como un espacio plano, observa Helmholtz la diferencia entre la geometría del espacio euclídeo y las de la esfera y pseudo-esfera que estriba en la medida de cierta constante que llamó Riemann el coeficiente de curvatura, que debe ser cero para que los axiomas de Euclides sean aplicables; en el caso contrario, la suma de los ángulos de un triángulo no es la misma en los grandes triángulos y en los pequeños, y la semejanza de las figuras sólo sería posible en la Geometría euclídea; y si todos los sistemas de medidas efectuados en la práctica que dan una paralaje nula para las estrellas muy lejanas, confirman empíricamente el axioma de las paralelas y manifiestan que en nuestro espacio y con nuestros medios de medida el coeficiente de curvatura no difiere de cero de una manera apreciable, puede preguntarse, como hace Rie-

mann, si esto ocurriría de otro modo cuando en lugar de tomarse como una de nuestras bases de medida el eje mayor de la órbita terrestre, se tomasen otras mayores.

Pero todas las mediciones se fundan en el principio de la coincidencia y en la hipótesis de que nuestros instrumentos de medida son cuerpos de forma invariable, sin sufrir otras alteraciones que las debidas á la temperatura, pesantez, etc.

Toda comparación hecha por vía de medición tiene, pues, por base una hipótesis sobre las propiedades físicas de ciertos cuerpos de la Naturaleza, que sale de la pura noción del espacio. Y hasta se pueden indicar las leyes mecánicas á las que se subordinan los cuerpos según se hallen medidos en el espacio esférico ó pseudo-esférico, acerca de lo que hace Helmholtz una curiosa descripción, es decir, cómo aparecerían á un observador los fenómenos del espacio esférico ó pseudo-esférico, si éstos existiesen, en lo que no llegamos á una imposibilidad real ó lógica, de igual modo que en el cálculo de las relaciones de dimensiones, siendo posible el representar el aspecto de un mundo pseudo-esférico tan exactamente como desarrollar su idea; no debemos, pues, concluir que los axiomas de nuestra geometría tengan su origen en la forma dada de nuestras facultades intuitivas.

Los axiomas geométricos no pertenecen exclusivamente á la teoría del espacio, tratán de magnitudes, y sólo puede hablarse de magnitudes cuando hay medios de compararlas; toda medida supone posibilidad de movimientos cuya forma y dimensiones deben ser invariables, que la Geometría llama áreas, ángulos, líneas, etcétera, y prescindiendo de las propiedades físicas y

químicas de los cuerpos, se les conserva al menos su solidez para lo que hay que invocar la experiencia.

Concluye Helmholtz que si se considera la idea de sólido geométrico como una idea transcendental extraña á las experiencias reales con las que éstas no tuvieran una correspondencia necesaria, como los cuerpos existentes en la naturaleza no corresponden jamás á las ideas que de ellos hemos abstraído, los axiomas de la Geometría podrían considerarse dados *à priori* por aquella noción transcendental, sin poder ser confirmados ni rechazados por la misma, y los axiomas no serían proposiciones sintéticas en la acepción que da Kant á esta palabra, sino consecuencias analíticas de la idea de los sistemas geométricos; son formas á las que puede adaptarse un contenido empírico, lo que es cierto no sólo respecto á los axiomas de Euclides sino respecto á las geometrías esférica y pseudo-esférica; pero si se asocian á los axiomas geométricos ciertos principios mecánicos, tendremos un sistema de proposiciones de una importancia real que puede ser confirmado ó invalidado, y por consiguiente creado por la experiencia y la observación. Si tal sistema debiera tomarse como una forma transcendental de la intuición y del pensamiento, sería necesario admitir una armonía preestablecida entre la forma y la realidad.

---

Casi al mismo tiempo que Helmholtz publicó la importante Memoria de que nos hemos ocupado, el matemático belga Sr. Tilly presentó otra Memoria á la Real Academia de Ciencias de Bélgica, cuyas ideas desarrolló más tarde en su obra *Essai sur les principes fondamen-*

*taux de la Géométrie et de la Mécanique*, trabajo muy interesante en el cual se hace depender la Geometría de la noción de distancia. Esta implica la variación de una manera continua y además el hecho de que, dado un sistema de puntos en número finito ó infinito ABCD..... y un punto B' tal que sea AB' igual á AB, existen puntos para los cuales el sistema AB' C D'..... sea absolutamente idéntico al primero, es decir, que en los dos sistemas las distancias entre pares de puntos correspondientes ú homólogos sean iguales dos á dos. En estas dos propiedades de la distancia hace consistir el Sr. Tilly su axioma principal, y valiéndose de la representación cartesiana, define la distancia de dos puntos en función de sus seis coordenadas  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ ,  $F(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$  ó  $F_{12}$ .

Dados los puntos 1 y 2 y el 2' ( $x'_2, y'_2, z'_2$ ) tal que  $F_{12} = F_{12'}$ , existe un sistema de puntos en el cual se hallan comprendidos el 1 y 2', idéntico respecto á las distancias de todos los puntos de iguales números con un sistema dado 1234....

Para hacer la verificación se toma además de los puntos 1 y 2 el 3, de modo que  $F_{12} = F_{13} F_{23}$ , luego se determina el ( $x'_3, y'_3, z'_3$ ) de modo que satisfaga á las ecuaciones  $F_{12} = F_{13} = F_{23}$ . Tómense los puntos 4 y 5 y determinense las coordenadas  $x_{44}, y_{44}, z_{44}$  por las ecuaciones

$$F_{14} = F_{14}, F_{24} = F_{24}, F_{34} = F_{34}$$

y luego las  $x'_5, y'_5, z'_5$  por las ecuaciones

$$E_{15} = F_{15}, F_{25} = F_{25}, F_{35} = F_{35}$$

Estas seis coordenadas deberán verificar idénticamente á la ecuación  $F_{45} = F_{45}$

El Sr. Tilly demuestra que para satisfacer las condiciones indicadas la función  $F$  sólo puede afectar las formas analíticas

$$F_{12} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

$$F_{12} = \frac{A}{\pi} \text{arc cos hip}$$

$$1 - th \frac{\pi x_1}{A} - \frac{\pi x_2}{A} - th \frac{\pi y_1}{A} - \frac{\pi y_2}{A} - th \frac{\pi z_1}{A} - \frac{\pi z_2}{A}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\left( 1 - th^2 \frac{\pi x_1}{A} - th^2 \frac{\pi y_1}{A} - th^2 \frac{\pi z_1}{A} \right)} \\ \left( 1 - th^2 \frac{\pi x_2}{A} - th^2 \frac{\pi y_2}{A} - th^2 \frac{\pi z_2}{A} \right) \end{array} \right\}$$

$$F_{12} = \frac{D}{\pi} \text{arc cos } \frac{1 + tg \frac{x}{D} + tg \frac{x\pi^2}{D} + \dots}{\dots}$$

$$\sqrt{\left( 1 + tg^2 \frac{\pi x_1}{D} + \dots \right) \left( 1 + tg^2 \frac{\pi x_2}{D} + \dots \right)}$$

definiendo el seno y coseno de  $a$  por las expresiones  $a - \frac{a^3}{2 \cdot 3} + \dots$ ,  $1 - \frac{a^2}{2} + \dots$  y los hiperbólicos por estas series cambiando los signos  $-$  en  $+$ .

De estas fórmulas la tercera se reduce á la primera haciendo  $D = x$  ó á la segunda reemplazando  $D$  por

$\pm A\sqrt{-1}$ ; corresponden respectivamente á las geometrías usual, abstracta y doblemente abstracta, según las denominaciones del Sr. Tilly; la denominación de la tercera obedece á que en ella se prescinde de los dos axiomas de la geometría ordinaria, es decir, el de las paralelas y el del *aumento indefinido de la distancia*, es la geometría de Riemann; en ella la distancia  $D$  tiene un *máximum*. En la simplemente abstracta sólo se prescinde del axioma de las paralelas, es la geometría de Lobatschewsky.

Las fórmulas que determinan los ángulos de un triángulo en función de los lados, hacen ver la correspondencia entre el aumento de la longitud de los lados y la diferencia de la suma angular respecto á dos ángulos rectos.

Pero en los mayores triángulos medidos no se ha obtenido diferencia sensible entre estos dos valores; luego, concluye el Sr. Tilly: si la verdadera Geometría fuese la de Gauss (es decir de Lobatschewsky) ó la de Riemann, los parámetros  $A$  ó  $D$  podrían ser suficientemente grandes para que coincidiese con la de Euclides, y como ésta puede también ser la única verdadera, basta para todas las necesidades, y siendo más sencilla que las otras, es lógico adoptarla.

La obra del Sr. Flye S.<sup>te</sup> Marie, *Etudes analytiques sur la théorie des parallèles* se basa en la idea de que la Geometría de Lobatschewsky se cambia en la ordinaria cuando los lados de los triángulos son muy pequeños. Por esto comienza con la proposición: *La suma de los tres ángulos de un triángulo infinitesimal es, en el límite, igual á dos ángulos rectos.*

Pasando de lo infinitamente pequeño á lo finito, según las reglas del cálculo integral, obtiene las formulas fun-

damentales de una geometría analítica, independiente de la teoría de las paralelas, y examina si dichas fórmulas verifican todos los axiomas, exceptuando el de las paralelas, pues si se encontrase uno solo incompatible con ellas, en la hipótesis de ser el postulado inexacto, este postulado quedaría con esto demostrado; y por el contrario será imposible admitir que sea susceptible de demostración, si los demás axiomas se hallan verificados en la geometría imaginaria.

Después de demostrar los teoremas concernientes á triángulos infinitesimales, trata del arco de radio infinito, y halla *la relación de dos arcos paralelos de radio infinito, comprendidos entre dos normales.*

Siendo  $z$  la distancia de los arcos y la relación  $\frac{BD}{AC}$  de éstos  $f(z)$ , obtiene

$$f(z) = e^{\frac{z}{k}}$$

Obtiene con relación á un sistema de coordenadas las ecuaciones que llama *parametrales* (por contener el parámetro  $k$  implícita ó explícitamente) de la recta, de la circunferencia, del arco de radio infinito, del plano y de la esfera; demuestra que los axiomas referentes al cambio de una figura invariable de un lugar á otro, de la determinación por dos puntos de una recta y que el lugar de los puntos cuyas distancias á dos fijos son constantes, es una curva cerrada única, fuera de la que no existe ningún punto del lugar, se verifican por las fórmulas parametrales, para cualquier valor del parámetro, concluyendo que *el postulado de Euclides no es una consecuencia de los demás axiomas de la Geometría.*

Después de establecer la trigonometría imaginaria, análoga á la de Lobatschewsky, demuestra que todos los axiomas de la Geometría se refieren á los tres indicados, tales como el de la existencia del plano, de la medición de las curvas, áreas, volúmenes, etc., independientemente del lugar, que el área plana es menor que la de toda superficie terminada por el mismo contorno.

Entre las obras publicadas en estos últimos años, merece lugar preferente la del Dr. Wilhelm Killing *Die Nicht-Euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung* (1885), cuya segunda parte de mucha mayor extensión que la primera, está dedicada al espacio de  $n$  dimensiones. En las dos partes se consideran las geometrías de Lobatschewsky y de Riemann.

Comienza la primera parte por un estudio del triángulo infinitesimal, obteniéndose las fórmulas de la trigonometría:

$$\operatorname{sen} \frac{b}{k} \cdot \operatorname{sen} \gamma = \operatorname{sen} \frac{c}{k} \cdot \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{sen} \frac{c}{k} \cos \alpha + \operatorname{sen} \frac{a}{k} \cos \frac{b}{k} \cos \gamma = \operatorname{sen} \frac{b}{k} \cos \frac{a}{k}$$

$$\cos \frac{a}{k} = \cos \frac{b}{k} \cos \frac{c}{k} + \operatorname{sen} \frac{b}{k} \operatorname{sen} \frac{c}{k} \cos \alpha$$

La expresión  $\frac{1}{k^2}$  representa la curvatura del espacio de Riemann, y tiene por valor

$$\frac{1}{k^2} = \frac{dx^2 - d\gamma^2}{da^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \gamma}$$

Para la  $k = \infty$  resulta:

- 1.º *La recta es infinita.*
- 2.º *La suma de los ángulos de un triángulo es igual á dos rectos.*
- 3.º *En las fórmulas trigonométricas, arriba escritas, se substituirá  $k \sin \frac{a}{x}$  por  $a$  y  $\cos \frac{a}{k}$  por 1.*

Para  $k^2 < 0$ ;

- 1.º *La recta es infinita.*
- 2.º *La suma angular de un triángulo es menor que dos rectos.*
- 3.º *En las ecuaciones citadas tiene  $k$  un valor imaginario.*

Para  $k^2 > 0$ ;

- 1.º *La recta es cerrada.*
- 2.º *La suma angular de un triángulo es mayor que dos rectos.*
- 3.º *En las ecuaciones citadas,  $k$  tiene un valor real.*
- 4.º *Dos rectas que tienen un punto común, se cortan en otro punto.*

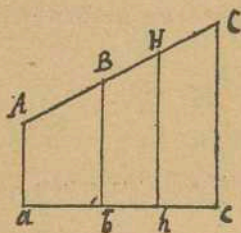
Termina la primera parte de la obra con una aplicación de las coordenadas de Weierstrass á la geometría de Riemann.

Si OX y OY son dos ejes rectangulares,  $\varphi$  el ángulo que el segmento OP forma con el eje de las  $x$ , y  $OP=r$ , las coordenadas de Weierstrass son:

$$p = \cos \frac{r}{k}, x = k \sin \frac{r}{k} \sin \varphi, y = k \sin \frac{r}{k} \cos \varphi.$$

De las dos Memorias publicadas *Sur la Géométrie non-Euclidienne*, por el Sr. Gerard, profesor del Liceo

de Brest (*Thèses présentées à la Faculté des Sciences de Paris, 1892; Nouv. Ann. d. Math. 1883*), sólo diremos que, tomando el autor como norma de sus desarrollos el razonar solamente sobre figuras que se



puedan construir, y partiendo de la hipótesis de ser en todo triángulo la suma angular inferior á dos rectos, demuestra las siguientes proposiciones:

*Si en un cuadrilátero ACac, cuyos ángulos a y c son rectos, el ángulo A es recto ú obtuso, el lado Aa es menor que el lado opuesto Cc.*

*En un cuadrilátero ACca que tiene dos ángulos rectos a y c y un ángulo A recto ú obtuso, si desde un punto B del lado AC se baja la perpendicular Bb á ac; se tendrá que*

$$Aa < Bb < Cc$$

$$\frac{ac}{ab} < \frac{AC}{AB}$$

$$\frac{Cc - Aa}{Bb - Aa} > \frac{AC}{AB}$$

Cuando A coincide con a, el cuadrilátero se convierte en triángulo, y el enunciado anterior se reduce al siguiente:

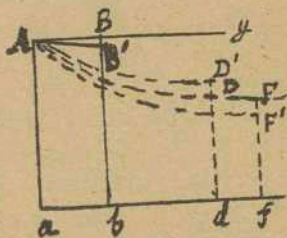
*En un triángulo ACc rectángulo c, si desde un pun-*

to B de la hipotenusa se baja Bb perpendicular á Ac, se tiene

$$\frac{Ac}{Ab} < \frac{AC}{AB} < \frac{Cc}{Bb}$$

Si, pues, Ax y Ay son dos semirectas perpendiculares á una recta Aa, y desde un punto B de Ay se baja Bb perpendicular á ax, la relación

$\frac{AB}{ab}$  va decreciendo á medida que el punto B se aproxima al A. Luego si se hace tender AB hacia cero, dicha relación tiende á un límite  $f(aA)$ . Si enseguida se baja la perpendicular AB' sobre Bb, se obtiene que  $\frac{AB'}{ab}$  aumenta cuando ab disminuye; luego si ab tiende hacia cero, esta razón tiende también hacia un límite necesariamente inferior, ó á lo más, igual al límite  $f(aA)$ ; luego



$\frac{AB'}{ab}$  aumenta cuando ab disminuye; luego si ab tiende hacia cero, esta razón tiende también hacia un límite necesariamente inferior, ó á lo más, igual al límite  $f(aA)$ ; luego

$$\frac{AB'}{ab} < f(aA).$$

Continuando el razonamiento consigue el Sr. Gerard establecer las fórmulas fundamentales de la Geometría no-Euclídea, basadas en que:

Si se designa L una longitud arbitraria, existe un número correspondiente  $\lambda$  tal, que en todo cuadrilátero ABCD cuyos ángulos A, B, C son rectos, se tiene

$$\frac{1}{2} \left( e^{\lambda \frac{BC}{L}} - \lambda \frac{BC}{L} \right) < \frac{CD}{AB} < \frac{1}{2} \left( e^{\lambda \frac{AD}{L}} - \lambda \frac{AD}{L} \right)$$

Debemos citar ahora, como noticia interesante, el opúsculo publicado por el Sr. Mansion, profesor de la Universidad de Gante, *Principes fondamentaux de la Géométrie non-Euclidienne de Riemann* (1895).

Vamos á terminar esta reseña de la Geometría no-Euclídea con una breve exposición de la importantísima obra *Nicht-Euklidische Geometrie*, debida al eminente geómetra Dr. F. Klein (1893).

Como precedente, examina los resultados obtenidos por la Escuela francesa, á partir de los trabajos de Poncelet, siendo objeto preferente las propiedades proyectivas que en el plano se refieren á una curva de segunda clase degenerada en un par de puntos imaginarios, ó en coordenadas-puntos, la recta en el infinito, y que en el espacio es el cono absoluto que corta en el círculo imaginario al plano del infinito.

También es objeto de estudio la teoría de las determinaciones métricas (*Maasbestimmungen*) expuesta en *A sixt Memoir upon Quantics*, de Cayley.

La figura fundamental de primer grado correspondiente á la ecuación de segundo grado  $\sum a_{ik} x_i x_k = 0$  ó  $\Sigma_{xx} = 0$  conforme escribe el Sr. Klein, da origen á los casos de que las raíces sean imaginarias conjugadas, reales y distintas ó reales y coincidentes ó de las determinaciones métricas elíptica, hiperbólica ó parabólica, según expresión de dicho geómetra.

Establece que la diferencia ó diversidad métrica (*Maassunterschied*) de dos elementos  $x$  y  $x'$  respecto á la figura absoluta consistente en dos puntos  $\xi$  y  $\xi'$  se representa mediante el producto de una constante por el logaritmo de la relación anarmónica de dichos cuatro

puntos; así  $M(xx') = K \log. D. V$  (iniciales de *Doppelverhältniss*).

En el caso de la determinación métrica elíptica angular en un haz de rayos, la constante  $k$  se reemplaza por  $\frac{i}{2}$  y los dos rayos que pasan por los puntos circulares representan la figura absoluta de segundo grado.

La longitud de la recta es finita en esta determinación métrica é igual á  $2k'\pi$ .

En la determinación métrica hiperbólica, los puntos  $\xi$  y  $\xi'$  de la figura absoluta representada por la ecuación  $\Sigma_{xx} = 0$  son reales, y  $K$  es una constante, de modo que los puntos  $x$  y  $x'$  tienen una diferencia métrica real ó compleja, según no se hallen ó se hallen separados por los puntos  $\xi$  y  $\xi'$ . Además, cuando  $x$  ó  $x'$  coincide con  $\xi$ , la relación anarmónica adquiere los valores  $\infty$  ó  $0$  respectivamente y sus logaritmos son  $+\infty$  ó  $-\infty$ , de modo que la recta, en la determinación métrica hiperbólica, tiene dos puntos á distancia infinita de cualquiera de sus puntos que se considere; y en un haz correspondiente al sistema de puntos de la recta, un rayo puede moverse en uno ú otro sentido hacia cada uno de los rayos límites, más allá de los cuales todos los rayos son imaginarios.

En la determinación métrica parabólica hay coincidencia de los dos puntos fundamentales, por ser iguales las raíces de la ecuación  $\Sigma_{xx} = 0$ , lo que da lugar á un solo elemento en el infinito.

El sistema métrico ordinario de la línea recta estudiado en la geometría euclídea elemental es un caso de la determinación métrica parabólica.

Para el caso en que la figura fundamental sea una sección cónica  $\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$  obtiene el Sr. Klein siete

modos de determinación métrica, ocupándose exclusivamente de las determinaciones métricas elíptica y parabólica.

En el primer caso, cada recta del plano tiene una longitud finita  $2\pi K'$  y cada haz una suma finita, no existiendo elementos á distancia infinita, el área del plano en la determinación métrica elíptica está representada por  $8\pi K'^2$ ; el arco elemental lo mismo en este caso que en el de la determinación métrica hiperbólica tiene una expresión que se reduce á  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$  cuando el parámetro  $K'$  es infinito, ó sea en la determinación métrica del plano que se presenta como caso límite de aquellas otras dos determinaciones métricas, y de la elíptica se pasa á la hiperbólica, sustituyendo en las fórmulas  $K'$  por  $\frac{K}{i}$ ; la geometría hiperbólica es, pues, la geometría ordinaria en una esfera de radio  $\frac{2K}{i}$  ó de radio imaginario.

Determina el Sr. Klein la distancia de dos puntos  $x$  y  $x'$  (siendo  $\xi$  y  $\xi'$  las intersecciones de la recta  $xx'$  con la cónica), ya en el caso de ser interiores á ésta, ya en el de ser uno exterior y otro interior, en el de ser los dos exteriores ó en el de ser uno interior y hallarse el otro  $x'$  coincidiendo con  $\xi'$  en la cónica; para este caso la distancia es infinita en cualquier dirección; de manera que todos los puntos de la cónica son inaccesibles y las dos rectas que unen un punto interior con los  $\xi$  y  $\xi'$  son las paralelas.

Quando en las fórmulas de la trigonometría esférica se cambia  $R$  por  $\frac{2K}{i}$ , las funciones circulares se cam-

bian en las hiperbólicas; y al comparar la determinación métrica hiperbólica con la elíptica, que no da rectas paralelas ó las da imaginarias conjugadas, y con la geometría ordinaria, que sólo tiene una paralela por cada punto, ésta resulta ser un tránsito entre la elíptica y la hiperbólica.

Termina el Sr. Klein su exposición respecto á la determinación métrico-hiperbólica, dedicando algunas páginas á la cinemática en la geometría hiperbólica.

Comienza presentando las relaciones proyectivas de dos planos ó transformaciones lineales en las que se corresponden los puntos  $(x_1' x_2' x_3')$  y  $(x_1 x_2 x_3)$ . Obtiene como primer resultado que por la transformación tres puntos del plano vuelven á coincidir con su primitiva posición, ó en general que, *cuando un dominio de  $n$  variables homogéneas se transforma en sí mismo mediante una sustitución lineal, permanecen fijos  $n$  puntos del mismo*; considera las determinaciones métricas por las que mediante las colineaciones del plano, la cónica absoluta se transforma en sí misma. Estas colineaciones representan movimientos del plano, cuyo estudio denomina el Sr. Klein la cinemática de la geometría hiperbólica.

Una cónica se transforma en sí misma por un número triplemente infinito de colineaciones del plano; lo que produce en la geometría hiperbólica movimientos en número triplemente infinito.

Sea la colineación especial por la que la cónica absoluta se transforma en sí misma, y que posee la propiedad de satisfacer á la relación entre los parámetros  $\lambda$  y  $\lambda'$

$$\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta} \quad \text{ó bien} \quad \begin{cases} b\lambda'_1 = \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 \\ b\lambda'_2 = \gamma\lambda_2 + \delta\lambda_1 \end{cases}$$

podremos decir que: *Cuando las  $x$  del plano se someten á una sustitución ternaria por la cual la cónica se transforma en sí misma, las  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  sufren en la cónica una sustitución lineal binaria.*

Concluye estas investigaciones el Sr. Klein con el resultado de tener el área del triángulo un máximo representado por el número  $4K^2\pi$ .

Respecto á sus investigaciones sobre la determinación métrica parabólica, sólo diremos que, en vez de presentar la geometría parabólica como un caso límite de las elíptica é hiperbólica, según lo hizo anteriormente, juzga más propio decir que: *La Geometría parabólica es un caso transitorio entre la elíptica é hiperbólica, por cuanto el par de puntos imaginarios es un caso transitorio entre las cónicas cortadas ó no cortadas (las denominaciones *einteiligen* y *nullteiligen*, cuya traducción adecuada no encontramos, corresponde á los casos de no cortar en ningún punto ó cortar á la recta del infinito).*

Los tres casos de la Geometría corresponden respectivamente á que la expresión  $\frac{1}{4k^2}$  sea negativa, positiva ó nula, ó á que la curvatura sea negativa, positiva ó nula.

A esta exposición general sigue, en la primera parte de la obra *Nicht-Euclidische Geometrie*, una notable exposición histórico-crítica de la Geometría no-Euclídea, dedicada en el primer período á Gauss, Lobatschewsky, Bolyai, Beltrami y Cayley; al segundo período corresponden los trabajos de Riemann y Helmholtz; el tercer período comprende las investigaciones ulteriores hasta la actualidad. Trata el Sr. Klein de la obra del Sr. Killing *Die Nicht-Euklidischen Raumformen in*

*analytischer Behandlung*, del alcance del sistema de Staudt, de las investigaciones de Pasch relacionadas con las de éste y de los resultados obtenidos por el distinguido profesor de la Universidad de Pisa Sr. Bianchi y expuestos en sus *Lezioni de Geometria differenziale*.

La segunda parte de la obra del Sr. Klein concierne exclusivamente á la geometría de tres dimensiones.

Comienza por tratar la geometría proyectiva del espacio. Da gran desarrollo á la teoría de Plücker sobre el complejo de rectas, en la que tomó como elemento la recta. Se ocupa sucesivamente de los elementos imaginarios del espacio, de las superficies de segundo grado, de las colineaciones del espacio, que son la contraposición geométrica de las sustituciones lineales.

Tomando como figura fundamental la esfera, si elegimos un punto exterior, su plano polar la corta en una circunferencia real (*einteiligen Kreise*), y nos hallamos en el caso de la determinación métrica hiperbólica. Si el punto es interior, su plano polar es real; pero la intersección, y por consiguiente, el cono fundamental imaginario, hallándonos en el caso de la geometría elíptica. El caso que sirve de transición entre estos dos es el de la determinación métrica parabólica cuando el punto se halla en la superficie de la esfera.

Sin detenernos en las relaciones que establece el señor Klein entre los grupos de geometrías en la esfera con las funciones automorfas, periódicas y las que llama de los cuerpos regulares, ni de las sustituciones elípticas, hiperbólicas y loxodrónicas, concluiremos esta exposición de la obra *Nicht-Euclidische Geometrie* con el siguiente resumen:

En el espacio, las relaciones métricas se refieren á

una cónica determinada que llamamos círculo en el infinito (*Kugelkreis*).

Todas las esferas del espacio tienen en el plano del infinito la misma cónica indivisa (*nullteiligen*), y las distancias de los puntos del círculo en el infinito á cualquier punto del espacio son indeterminadas.

En el espacio ordinario existe una determinación métrica parabólica fundada en los puntos cíclicos de este plano.

En el plano del infinito existe una determinación métrico-elíptica respecto al círculo del infinito.

Termina la obra del Sr. Klein con un estudio de los movimientos ó cinemática, de la Mecánica de los sistemas libres y de los cuerpos rígidos en cada uno de los sistemas geométricos ó un examen comparativo de los mismos desde estos puntos de vista.

En cuanto á la interesantísima obra del Sr. Bianchi, profesor de la Universidad de Pisa, *Lezioni di Geometria differenziale*, tan sólo indicaremos lo referente á las geometrías no-euclídeas, objeto de los capítulos VII y XVI.

El asunto del capítulo VII es la *aplicabilidad de las superficies de curvatura constante*; se ocupa el señor Bianchi de las tres formas típicas del elemento lineal:

$$ds^2 = du^2 + e \frac{2u}{R} dv^2$$

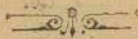
$$ds^2 = du^2 + R^2 \operatorname{sen}^2 h^2 \left( \frac{u}{R} \right) dv^2$$

$$ds^2 = du^2 + \cos^2 h^2 \left( \frac{u}{R} \right) dv^2$$

correspondientes á los tipos parabólico, elíptico é hiperbólico.

El capítulo XVI trata de la geometría pseudo-esférica, terminando con un desarrollo acerca de la representación de la superficie pseudo-esférica en el plano, debida al Sr. Beltrami.

Concluiremos citando la notable colección de modelos en yeso construída en el establecimiento del señor Brill en Darmstad y á los cuales acompañan Memorias explicativas de cada modelo, de gran utilidad para adquirir un conocimiento acabado de estas modernas doctrinas geométricas.



---

## VIII

### La Geometría de $n$ dimensiones

Se ha visto anteriormente cómo las teorías matemáticas han alcanzado extenso desarrollo por la adunción de nuevos elementos.

El dominio de la intuición se fué reduciendo á medida que sobre su limitado campo se elevaba el creciente dominio de las relaciones, unas veces puramente abstractas, tan sólo referidas por cierta coexistencia á transformaciones de la realidad, otras acompañadas de representaciones sensibles, con carácter excepcional ó transitorio, dentro de la generalidad de las leyes.

En la Algoritmia las operaciones se elevaron á la categoría de las leyes combinatorias de que emanan, confundándose en este dominio lo real con lo llamado en sus orígenes imaginario, que hoy constituye el dominio de las cantidades complejas, dentro del que se incluye, como especie subordinada, el dominio de lo real.

En Geometría también lo imaginario se sobrepuso á lo real, alcanzando esta ciencia en su contenido maravillosa amplitud y también grandes facilidades para abarcar, dentro de la nueva síntesis, numerosas relaciones, sin esto más difíciles de adquirir y de retener por nuestra inteligencia.

Pero si en la forma se dilataba el dominio geométrico y lo intuitivo quedaba envuelto en las indefinidas mallas de lo abstracto, existente como pura relación lógica ó

como realidad intelectual, en la materia ú objeto se notaban deficiencias de tal cuantía que justifican la frase de D'Alembert, *l'écueil et le scandale des éléments de la Géométrie*, aplicada al hecho de haber prevalecido durante tantos siglos el cé'ebre postulado de Euclides como proposición no demostrada y aún indemostrable.

Estas deficiencias concernientes al objeto de la Geometría, que no se limitan al axioma de las paralelas, sino que se hacen extensivas á otros postulados tales como el de la homogeneidad del espacio y la posibilidad de transportarse una figura desde una región cualquiera á otra del mismo, se salvan en los tiempos modernos, al darse un nuevo giro á la cuestión y seguirse los nuevos derroteros señalados principalmente por Lobatschewsky y Riemann.

Los postulados de Euclides implican el hecho de ser la suma de los ángulos de un triángulo igual á dos ángulos rectos y de ser el espacio plano ó de curvatura nula. Y á su vez, la necesidad del postulado desaparece al justificarse que basta para un desenvolvimiento lógico de la Geometría el demostrar que dicha suma angular no puede exceder á dos ángulos rectos é implícitamente el establecer la propiedad del espacio llamada su curvatura, lo que reduce la geometría euclídea á un caso particular de la nueva geometría, más amplia, y cuya ampliación acrece cuando el Sr. Beltrami aplica este moderno desenvolvimiento geométrico á las superficies de curvatura constante negativa, propiedad que corresponde á una suma angular de los triángulos superior á dos ángulos rectos.

Un nuevo punto de vista trae el cé'ebre Riemann con la noción de distancia como base de la Geometría, expuesta con mayor desarrollo por Helmholtz, y que lleva

al mayor grado de generalización á esta ciencia, basado en el concepto combinatorio de la multiplicidad (*man-nigfaltigkeit*); y los sistemas de Geometría parabólica, hiperbólica y elíptica resultan incluidos en las geometrías de  $n$  dimensiones.

El verdadero carácter del espacio de  $n$  dimensiones consiste, según Riemann, en la propiedad de reducirse á  $n$  determinaciones de magnitud la determinación de posición en dicho espacio, esto es, en la determinación de un punto por  $n$  variables  $x_1, \dots, x_n$ .

El elemento lineal  $ds$  contiene entonces dichas  $n$  cantidades y los incrementos  $dx_1, \dots, dx_n$ , en el caso examinado por Riemann, de ser  $ds$  la raíz cuadrada de una forma de segundo grado en  $dx$ , siempre positiva y en la que los coeficientes son funciones continuas de los  $x$ , en cuyo caso las líneas geodésicas del espacio se hallan determinadas inmediatamente por sus ecuaciones diferenciales; y conteniendo esta expresión  $\frac{n(n+1)}{2}$  coeficientes, funciones arbitrarias de las  $x$ , pueden darse á  $n$  de éstos los valores que se quiera, mediante los cuales quedarán determinados los otros  $\frac{n(n-1)}{2}$  coeficientes, de modo que existen en cada punto del espacio considerado  $\frac{n(n-1)}{2}$  funciones invariantes características de este espacio.

Si suponiendo tres puntos A, B, C. muy próximos, se unen los B y C por una geodésica L, el conjunto de las geodésicas determinadas por el punto A y cada uno de los puntos de L formará una superficie de dos dimensiones que tendrá cierta curvatura en la dirección del elemento de superficie así constituido; y si se conoce la

curvatura del espacio correspondiente á  $\frac{n(n-1)}{2}$  direcciones arbitrarias de elementos de superficie, se conocerá para cualquiera otra dirección.

El caso en que la curvatura es la misma en un punto, para cualquiera dirección, sin variar de un punto á otro, es el de la curvatura constante; y en los espacios que la poseen, pueden moverse las figuras, sin alterar sus magnitudes y someterse al procedimiento de la superposición. Estas mutaciones de las figuras dependen de seis parámetros en el espacio de tres dimensiones.

Ya hemos indicado cómo Helmholtz completó las investigaciones de Riemann, partiendo de la noción de distancia al suponer: 1.º, que la posición de un punto puede determinarse por ciertas magnitudes que se llaman sus coordenadas; 2.º, que entre las coordenadas de los puntos de un cuerpo sólido, tomados dos á dos, debe existir una ecuación correspondiente á la relación invariable que subsiste entre ambos durante el movimiento de cuerpo y es la misma para todos los pares de puntos congruentes, ó sea los que pueden coincidir con un mismo par de puntos fijos del espacio; 3.º, que en nuestro espacio, cuando fijamos dos puntos de un cuerpo sólido, éste sólo puede girar alrededor de la recta que los une, debiendo hallarse en su primitiva posición después de una vuelta completa.

Con estas investigaciones se hallan en íntima conexión las que sirven de base á la obra del Sr. Tilly *Essai sur les principes fondamentaux de la Géométrie et de la Mécanique*, y sobre todo el *Essai de Géométrie analytique générale*, premiada en 1892 por la Real Academia de Ciencias de Bélgica, cuyo principal objeto es la determinación de las relaciones entre los pares de pun-

tos situados en el espacio, á las que pueden reducirse todos los teoremas y fórmulas de la Geometría, de modo que comienza proponiendo el problema: *Elegir los números correspondientes á los intervalos de los pares de puntos del espacio, no de un modo arbitrario, sino de manera que puedan existir entre estos números relaciones generales cualesquiera.*

También creemos oportuno, como ilustración de lo que va á seguir, el extractar algunas consideraciones expuestas por M. Picard en su trabajo *A propos de quelques récents travaux mathématiques* (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, tomo IX, 1895, página 151).

«Un movimiento de una parte del espacio está definido por tres ecuaciones

$$x' = f(x, y, z), \quad y' = \varphi(x, y, z), \quad z' = \psi(x, y, z).$$

Por esta transformación un conjunto E de puntos  $(x, y, z)$  se convierte en otro E' de puntos  $(x', y', z')$ . Esta transformación es para nosotros un movimiento que lleva de E á E'.

Si ahora hacemos sobre el espacio que vamos á estudiar las hipótesis siguientes:

1.º Los movimientos de este espacio son tales, que dejan invariable una función  $\Omega(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$  de las coordenadas de dos puntos cualesquiera  $(x_1, y_1, z_1)$  y  $(x_2, y_2, z_2)$ . En otros términos: si se designan por  $(x'_1, y'_1, z'_1)$ ,  $(x'_2, y'_2, z'_2)$  las coordenadas de estos puntos después de uno cualquiera de los movimientos posibles, se tendrá

$$\Omega(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) = \Omega(x'_1, y'_1, z'_1, x'_2, y'_2, z'_2)$$

«El origen de esta hipótesis se nota inmediatamente: en lenguaje ordinario puede decirse que al hacerla se quiere que exista relativamente á estos dos puntos *algo* que permanece invariable después del movimiento, y este *algo* podrá llamarse la distancia de los dos puntos.»

2.º Se quiere que, según decía Helmholtz, el movimiento *libre* sea posible en cierta región del espacio. Ved lo que debe entenderse por esta hipótesis compleja, estudiada profundamente por el Sr. Lie. Desde luego, cuando un punto de la región se ha fijado, cualquier otro punto de ésta, *sin excepción*, describe una superficie (multiplicidad de dos dimensiones). Enseguida, cuando se han fijado dos puntos, un punto arbitrario (siendo posibles excepciones) describe una curva (multiplicidad de una dimensión); en fin, si se fijan tres puntos arbitrarios en la región, todos los puntos de ésta permanecen en reposo (siendo posibles excepciones).»

Tales son las condiciones que imponemos al espacio. De esto resulta necesariamente que el conjunto de los movimientos posibles debe formar un grupo de *seis* parámetros. Se conocen dos tipos de espacio que satisfacen á estas condiciones. Desde luego el espacio ordinario ó euclídeo y además los dos espacios no-euclídeos, es decir, los espacios en los cuales el grupo de los movimientos posibles es el grupo proyectivo que transforma en sí misma una ú otra de las superficies de segundo grado  $x^2 + y^2 + z^2 \pm 1 = 0$  »

«El Sr. Lie ha establecido que los grupos precedentes son los solos que poseen las propiedades (1) y (2); resultado muy notable que muestra cómo los espacios euclídeo y no-euclídeos son los solos sobre los cuales puedan hacerse hipótesis que, despojadas de su forma científica, son juzgadas por quien no haya reflexio-

nado sobre estas cuestiones, como de carácter necesario.»

Este brillante período inaugurado por Lobatschewsky é iluminado por los destellos de los fecundos conceptos de Riemann y Helmholtz, puede muy bien apellidarse el *período áureo* de la Geometría, en que ésta desde el modo de sér á que la llevaron los métodos de Descartes, Leibnitz y Monge, pasa al período del transcendentalismo, pues si bien Descartes da la representación analítica de la forma geométrica, si Leibnitz sorprende las varias circunstancias del desarrollo de ésta y Monge presenta la serie de transformaciones de las figuras por proyección, con todo esto no se había pasado de la sistematización objetiva, que se extiende no poco cuando Cayley aplica el fecundo método de las transformaciones lineales á las relaciones de invariación. Pero desde Lobatschewsky, Riemann y Helmholtz, la Geometría se eleva al transcendentalismo de las causas y de la razón metafísica de la existencia y generación de las entidades geométricas.

Hasta entonces la Geometría era una construcción del espacio conforme á un dogmatismo invariable, dependiente del postulado de las paralelas; desde Lobatschewsky la Geometría se emancipa de este dogmatismo, pregunta á la realidad externa independiente del desarrollo *à priori*, ó puramente ideal de la ciencia, y en vez de encontrar un antagonismo entre la realidad externa y nuestros procesos internos ó subjetivos, halla una armonía que dilata los horizontes de la Ciencia, pues aquel desarrollo subjetivo se reduce á la Geometría parabólica, límite ó transición entre las de Lobatschewsky y de Riemann; y aparte de esta amplificación del objeto, acorde con la elevación de miras subjetivas, resulta

un nuevo desarrollo con la asimilación del Análisis á la generación de las formas del espacio que expresa Riemann con la denominación *Mannigfaltigkeit* ó multiplicidad que hoy constituye el fundamento de la Geometría de  $n$  dimensiones.

Descartes habia tomado como elemento de la extensión el punto y con él creó la geometría que llamamos cartesiana; ampliando su plan, Newton y Leibnitz llegaron á la geometría infinitesimal. Casi al mismo tiempo que Poncelet, Gergonne y Chasles con el principio de la reciprocidad ó dualidad, duplican la Geometría, Plücker señala un nuevo camino al considerar la recta como elemento del espacio y al exponer su nueva doctrina sobre el complejo de rectas, observando que á nuestro espacio puede atribuirse un número cualquiera de dimensiones, mediante una oportuna elección del sér geométrico que se considere como generador de aquél, siendo de tres dimensiones si este elemento es el punto ó el plano, de cuatro si se toma la recta ó la esfera, de nueve si es la cuádrica, y así sucesivamente, debiéndose notar el avance que da á la nueva teoría el eminente Cayley en algunos de sus trabajos, especialmente en la Memoria *On Abstract Geometry*, donde estudia las relaciones múltiples ó la Geometría  $m$ -dimensional, desde el punto de vista analítico.

Y no vamos á ocuparnos de esta evolución geométrica desde el punto de vista metafísico sobre la existencia ó no existencia de los espacios superiores al nuestro, lo que está fuera del dominio de la Matemática, si bien ha sido objeto de controversia entre algunos filósofos matemáticos, pues lo único que nos concierne en este momento es la utilidad importada á dicha ciencia por la nueva generalización de sus conceptos, con igual título

que lo imaginario ha llegado á ser un instrumento precioso de generalización y de síntesis, que ha perfeccionado considerablemente el organismo matemático, pues la generalización que entraña el concepto de un espacio polidimensional ó la geometría de  $n$  dimensiones, lejos de contradecir lo asentado en la geometría ordinaria, hace presentarse á ésta como un caso particular de aquélla; y esta generalización, enlazada con las formas analíticas, les da una representación, si no sensible, al menos esquemática, que auxilia el trabajo intelectual y llena vacíos en el sistema de relaciones cuyo engranaje forma, para que la inteligencia recorra con mayor facilidad el inagotable dominio de dichas relaciones.

Ya que no podamos encerrar en corto espacio la rica literatura que forma hoy el conjunto de trabajos acerca de este desarrollo geométrico, ni que sea cosa fácil el realizarlo, señalaremos siquiera algunos rasgos culminantes de unos cuantos escritos, para que de su conjunto resulte una idea del estado á que ha llegado la nueva teoría y de la importancia que tiene en el actual desenvolvimiento de la Matemática.

---

La Memoria del profesor italiano Sr. Ovidio, titulada *Le Funzioni metriche fondamentali negli spazi di quante si vogliano dimensioni e di curvatura costante*, que se refiere á trabajos anteriores de Clebsch y Jordán, comienza definiendo el *elemento* en una variedad de  $\infty^n$  elementos, por cada grupo de los valores de  $n$  variables susceptibles de recibir los infinitos valores reales positivos y negativos; y si  $n - 1$  representa el número de dimensiones del espacio, para introducir la homogeneidad y simetría de las fórmulas, se determina

cada punto por las relaciones de  $n - 1$  de las variables á la restante, siendo dichas  $n$  variables las coordenadas homogéneas de cada punto. Así,  $x, x', \dots$  serán los puntos de coordenadas  $(x_1, \dots, x_n), (x'_1, \dots, x'_n), \dots$

Dados  $r$  puntos  $x, x', \dots, x^{(r-1)}$ , todos los puntos

$$\lambda x + \lambda' x' + \dots + \lambda^{(r-1)} x^{(r-1)}$$

es decir, los puntos de coordenadas

$$(\lambda x_1 + \lambda' x'_1 + \dots, \lambda x_n + \lambda' x'_n + \dots)$$

en las que  $\lambda : \lambda' : \dots : \lambda^{(r-1)}$  representan  $r - 1$  parámetros arbitrarios, son en número  $\infty^{r-1}$ , y constituyen un espacio de  $r - 1$  dimensiones, parcial respecto al supuesto de  $n - 1$  (siendo  $r < n$ ).

Así, un  $r$ -punto está determinado por  $r$  puntos, mientras que éstos no se hallan en un  $(r - 1)$  punto; y en vez de los  $r$  puntos  $x, x', \dots$  pueden elegirse para determinar el  $r$ -punto otros  $r$  cualesquiera de sus puntos, con tal de que no estén en un mismo  $(r-k)$  punto ( $k = (1, 2, \dots)$ )

Las coordenadas de cada punto  $X$  de un  $r$ -punto dado satisfacen á  $n-r$  ecuaciones lineales, homogéneas distintas que se obtienen eliminando  $\lambda, \lambda' \dots$  entre las  $n$  ecuaciones

$$X_1 + \lambda x_1 + \dots + \lambda^{(r-1)} x_1^{(r-1)} = 0,$$

$$X_2 + \lambda x_2 + \dots + \lambda^{(r-1)} x_2^{(r-1)} = 0,$$

.....

que expresan las condiciones para que dicho punto  $X$  pertenezca al  $r$ -punto  $xx' \dots x^{(r-1)}$ .

Un  $r$ -punto contiene infinitos,  $(r-1)$  puntos  $(r-2)$  puntos, ... 2 puntos.

Entre los multi-puntos se distinguen el 1 punto ó punto simple, el 2 punto, bi-punto ó recta y el  $(n-1)$  punto ó plano, siendo el  $n$  punto el espacio.

*Los puntos cuyas coordenadas satisfacen á  $r$  ecuaciones lineales homogéneas distintas constituyen un  $(r-n)$  punto.* Un plano ó  $(n-1)$  punto tiene una sola ecuación; un  $r$  punto se compone de los puntos comunes á los  $n-r$  planos correspondientes á sus ecuaciones.

Para hallar la intersección de un  $r$  punto  $R$  con un  $r'$  punto  $R'$  determinados respectivamente por los puntos  $x, x', \dots, x^{(r-1)}$  é  $y, y', \dots, y^{(r'-1)}$ , se consideran las expresiones

$$\begin{aligned} & \lambda x + \lambda' x' + \dots + \lambda^{(r-1)} x^{(r-1)} \\ & y + \mu y' + \dots + \mu^{(r-1)} y^{(r-1)} \end{aligned}$$

de puntos cualesquiera de  $R$  y  $R'$ , para cuya coincidencia deberán verificarse las  $n$  ecuaciones

$$\begin{aligned} \lambda x_1 + \lambda' x'_1 + \dots + \mu y_1 + \mu' y'_1 + \dots &= 0 \\ \lambda x_2 + \lambda' x'_2 + \dots + \mu y_2 + \mu' y'_2 + \dots &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \end{aligned}$$

*$R$  y  $R'$  no tendrán, en general, ningún punto común, cuando  $r+r' \leq n$ , tendrán uno, cuando  $r+r' = n+1$ , y un  $k$  punto cuando  $r+r' = n+k$ .*

Estas indicaciones bastan para conocer el carácter del trabajo escrito por el Sr. Ovidio acerca del hiperespacio.

Obtiene sucesivamente las condiciones para que un  $r'$  punto  $R'$  esté contenido en otro  $r$  punto  $R$ , siendo  $r \geq r'$ , que se reducen á las de coincidencia, cuando  $r = r'$ .

Enseguida halla las condiciones para que una recta corte á un multi-punto, trata de los multi-puntos asociados, es decir, que se corresponden unívocamente, de las relaciones entre las coordenadas de dos multi-puntos que se cortan, de los multi-puntos y multi-planos, de lo absoluto de puntos y otras cuestiones, tales como: multi-puntos ortogonales, perpendiculares comunes á dos multi-puntos cualesquiera, proyecciones, momentos y co-momentos de dos multi-puntos, lo absoluto de los planos, ángulos de multi-planos, amplitudes de multi-puntos y multi-puntos paralelos, constituyendo esta interesante Memoria, según puede juzgarse por los epígrafes, una geometría generalizada á cuyos detalles no descenderemos, porque será más conducente á nuestro propósito el examinar á continuación la importante obra del profesor Killing, titulada *Die Nicht-Euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung*.

Según ya se vió, esta obra trata en su primera parte exclusivamente de las geometrías de Lobatschewsky y de Riemann, limitadas al espacio de tres dimensiones; pero la segunda tiene por objeto exclusivo el espacio de  $n$  dimensiones.

Las generalizaciones de esta nueva Geometría exigen para su desarrollo la admisión de cierto número de proposiciones fundamentales sobre las que se edifica todo el sistema, así:

Por cada punto pasan figuras de  $(n-1)$  dimensiones

(planos ó figuras superiores) que poseen las siguientes propiedades:

1.º Por cada punto de los planos de  $n-1$  dimensiones, pasan figuras de  $(n-2)$  dimensiones ó planos  $(n-2)$  veces extensos, mediante cuyo reposo aún es posible el movimiento del espacio.

2.º Por este movimiento se alcanza una posición en la cual llegan los planos de  $(n-1)$  dimensiones á coincidir con su posición inicial, mientras que sus puntos invierten su posición.

3.º En cada plano de  $(n-2)$  dimensiones existen figuras de  $(n-3)$  dimensiones, por cuyo reposo los planos de  $(n-1)$  pueden moverse en sí, describiendo cada punto una línea cerrada.

4.º Las mismas suposiciones pueden hacerse para cada número inferior de dimensiones. En cada plano de  $v$  dimensiones, existen planos  $(v-1)$  y  $(v-2)$  veces extensos, siendo posible el movimiento en sí del primero, y cada plano de  $(v-1)$  dimensiones trazado por la figura inmóvil, vuelve á superponerse con su primitiva posición, de modo que los puntos resultan invertidos.

Las siguientes proposiciones expresan las dependencias mutuas de las figuras:

a) Si una recta tiene dos puntos comunes con un plano, se halla toda en éste.

b) Si un plano de  $n$  dimensiones tiene con otro de  $m$  dimensiones ( $m \geq n$ ) un plano de  $(n-1)$  dimensiones y además un punto común, se halla totalmente en éste.

c) Por un plano de  $n$  dimensiones y un punto exterior, puede pasar un plano de  $(n+1)$  dimensiones.

d) Dadas  $k$  rectas que se encuentran en un punto y un plano de dos dimensiones trazado por dos de ellas,

de modo que ninguna de las demás se halle en éste; se puede trazar por tres un plano de tres dimensiones; y cuando las  $k$  rectas no se hallan en un plano de  $(k-1)$  dimensiones, sólo puede trazarse por ellas un plano de  $k$  dimensiones.

e) Si un plano de  $n$  dimensiones y otro de dos se hallan en otro de  $(n+1)$  dimensiones y tienen un punto común, se cortan en una recta.

f) Si dos planos  $E_l$  y  $E_m$  se hallan en otro  $E_n$  y tienen un punto común, siendo  $l+m > n$ , se cortan en un  $E_{l+m-n}$ .

g) Si una recta es perpendicular en un mismo punto á  $k$  rectas por las que no pasa ningún plano de  $(k-1)$  dimensiones, es perpendicular á todas las rectas trazadas por su pie en el plano  $E_k$  determinado por las  $k$  rectas.

h) Si  $k$  rectas  $g_1, g_2, \dots, g_k$  son perpendiculares en el mismo punto  $P$  á las  $l$  rectas  $h_1, h_2, \dots, h_l$ , determinando las primeras un plano de  $k$  dimensiones y las segundas otro de  $l$ , entonces cada recta  $g$  del primer plano trazada por  $P$  es perpendicular á cada una de las trazadas por este punto en el segundo plano.

i) En cada plano de  $k$  dimensiones  $E_k$  existe una sola recta perpendicular á un plano  $E_{k-1}$  situado en aquél, en uno de sus puntos.

k) En cada plano  $E_k$  y por un punto dado de un plano  $E_l$  contenido en  $E_k$ , sólo puede trazarse un plano  $E_{k-1}$  perpendicular á  $E_l$ .

De otra índole son las proposiciones que siguen á las expuestas en el tratado del Sr. Killing, pues tienen por objeto establecer la Geometría analítica de las formas en el espacio de  $n$  dimensiones, demostrando desde luego que: si dos planos  $E_k$  y  $E'_k$  se cortan perpendicular-

mente en un  $E_{k-1}$ , y se trazan, en un punto de  $E_{k-1}$  á éste dos perpendiculares, la una en  $E_k$ , la otra en  $E'_k$ , el ángulo formado por ambas es independiente de la elección del punto.

Demostrando enseguida que: si un  $E_k$  tiene cón un  $E_2$  una recta  $g$  común y en  $E_2$  se trazan á  $g$  dos perpendiculares de igual longitud, las perpendiculares bajadas por sus extremos á  $E_k$  son iguales, y considerando  $n$  planos de  $n-1$  dimensiones  $E^1, E^2, \dots, E^n$  trazados mutuamente perpendiculares en un punto á los cuales se trazan por dos puntos  $P$  y  $P'$ , y respectivamente, las perpendiculares  $a_1, a_2, \dots, a_n; a'_1, a'_2, \dots, a'_n$ , llega á la relación fundamental

$$\cos \varphi = \cos (lg) \cos (l'g) + \operatorname{sen} (lg) \operatorname{sen} (l'g) \cos \varphi_1$$

en la que  $g$  designa la recta común á dos de los planos,  $l$  y  $l'$  las longitudes  $OP$  y  $OP'$ ,  $\varphi$  el ángulo formado por éstas y  $\varphi_1$  el de los planos  $(gl)$  y  $(gl')$

Ya que no es nuestro propósito el seguir la exposición que hace el Sr. Killing de la geometría analítica, sino el dar una somera idea de esta geometría generalizada que se funda en la multiplicidad de dimensiones del espacio, citaremos á continuación de la obra *Die Nicht-Euklidischen Raumformen*, el interesantísimo opúsculo del Dr. Max Brückner titulado *Die Elemente der vierdimensionalen Geometrie mit besonderer Berücksichtigung der Polytope* (1894), muy propio para servir de guía á quien desee iniciarse en esta nueva doctrina.

Tan sólo se exigen cuatro axiomas para este desarrollo puramente racional de la Geometría, tanto, que en él son innecesarias las representaciones intuitivas, por de-

pende los razonamientos de las leyes combinatorias y de subordinación é supraordinación de los conceptos. Y si las conclusiones algunas veces tienen representación sensible, esto sólo tiene lugar á modo de excepción, ó de hecho incidental que realiza una compenetración del dominio abstracto y el dominio concreto.

Dichos cuatro axiomas, limitados al espacio de cuatro dimensiones, son:

1.º Un espacio (de tres dimensiones) corta á una variedad de cuatro dimensiones en dos partes separadas.

2.º Por cuatro puntos que no se hallan en un mismo plano, pertenecientes á un  $E_3$ , sólo puede pasar un espacio, es decir, que aquéllos determinan éste.

3.º Un plano que tiene tres puntos, no situados en línea recta, comunes con un espacio, se halla totalmente contenido en éste.

4.º Una recta que sólo tiene un punto común con un espacio queda separada por éste en dos partes.

Del último axioma resulta como corolario que si un plano  $\pi$  tiene con un  $E_3$  solamente una recta  $R$  común, quedará dividido por ésta en dos partes separadas, pues otra recta  $R'$  de  $\pi$  encuentra á  $R$  en un punto  $P$ , y por éste quedará  $R'$  dividida en dos partes separadas (axioma 4.º); de modo que dos puntos de ambas se hallarán á distinto lado de  $R$ , y por pertenecer estos puntos á  $\pi$ , quedará  $\pi$  separado por  $E_3$  en dos partes.

Con estos fundamentos se demuestran los teóremas siguientes: *Dos espacios tienen siempre un plano común. Un espacio y un plano tienen una recta común, así como un espacio y una recta no contenida totalmente en éste, tienen un punto común.*

Así, deduciéndose del primer axioma que dos espacios  $E_3$  y  $E'_3$  tienen por lo menos un punto  $P$  común; si

por éste se trazan en  $E_3$  dos rectas  $R$  y  $R'$ , éstas quedarán divididas en dos partes (axioma 4.º),  $R_1$  y  $R_2$ ,  $R'_1$  y  $R'_2$  respectivamente; y si unimos un punto de  $R_1$  con otro de  $R_2$  por una recta, ésta se hallará totalmente en  $E_3$  y debe pasar por  $E'_3$ , ya que une dos puntos situados á distinto lado de este espacio, es decir, tener otro punto  $P'$  que será común á  $E_3$  y  $E'_3$ .

Demostrado que  $E_3$  y  $E'_3$  tienen una recta  $PP'$  común, se demostrará que tienen también un plano, trazándose por  $PP'$  dos planos en  $E_3$  que se hallarán separados en dos partes por  $E'_3$ , según la consecuencia del axioma 4.º; y uniendo un punto de uno de los planos con un punto del otro situado á distinto lado de  $E'_3$  por una recta, que se hallará en  $E_3$ , pasará por  $E'_3$ , es decir, tendrá un nuevo punto común con éste, ó los dos espacios un plano común.

Se demostrará que un plano  $\pi$  situado en un espacio  $E_3$  tiene con otro espacio  $E'_3$  una recta común, observando que el plano  $\pi'$  común á los dos espacios corta al  $\pi$  según una recta  $R$ , por hallarse los dos en  $E_3$ , y ésta se halla simultáneamente en  $E_3$  y  $E'_3$ .

En fin, si una recta  $R$  se halla en el espacio  $E_3$ , cortará al plano  $\pi$  común á este espacio y al  $E'_3$  en un punto  $P$ , por hallarse ambos en el espacio  $E_3$ ; dicho punto es el único perteneciente á la vez á  $R$  y  $E'_3$ , pues si  $R$  tuviese un segundo punto común con  $\pi$ , estaría totalmente en  $\pi$ , y por consiguiente en  $E'_3$ , contra la hipótesis.

Demuestra á continuación el Sr. Brückner que: *Dos planos de dos espacios distintos tienen siempre un punto común.* Para conseguirlo, considera las intersecciones del plano  $\pi''$  común á los dos espacios  $E_3$  y  $E'_3$  con los planos  $\pi$  y  $\pi'$  situados respectivamente en éstos, inter-

secciones que, por hallarse en  $\pi''$ , se cortan en un punto del mismo, único punto común á  $\pi'$  y  $\pi''$ .

El anterior teorema y los inmediatos que siguen fijan el concepto de rectas y de planos que se cruzan. Desde luego dos planos por los cuales no puede pasar un espacio ó que se cortan solamente en un punto, son *dos planos que se cruzan*.

Además, un plano y una recta que no se hallan en un mismo espacio y, en general, dos rectas de un mismo  $R_2$  no tienen nada común, ó se cruzan.

Lo primero se concluye observando que si el plano  $\pi$  se halla en  $E_3$  y la recta  $R$  en  $E'_3$ , ésta cortará al plano común  $\pi'$  de los dos espacios en un punto, así como  $\pi$  en una recta  $R$ ; y puesto que  $R$  se halla separada por  $\pi'$  en dos partes, no encuentra á  $R'$ , pues sólo tiene, en general, con  $\pi'$  un punto común exterior á  $R'$ . También se ve que, teniendo dos planos situados en dos espacios distintos un solo punto común  $P$ ; si se traza en cada uno una recta que no pase por  $P$ , ambas se cruzarán, y se demuestra enseguida que *por dos rectas que se cruzan en dos espacios distintos, puede pasar un solo espacio*, empleando, como se ha hecho en estos razonamientos, el plano  $\pi$  común á los dos espacios, y haciendo ver que los espacios determinados por cada uno de los planos determinados por una de las rectas con el punto común de y la otra recta y esta recta son uno mismo.

Un espacio queda en suma determinado por cuatro puntos no situados en un plano, por un plano y un punto exterior, por un plano y una recta secante, por dos planos que se cortan, por dos rectas que se cruzan ó por una recta y dos puntos exteriores.

Un extensión del concepto de haz de rectas y de planos hallamos al considerar que dos rectas de distintos

espacios sólo pueden tener un punto común en el plano común á dichos espacios, y que por el plano de aquéllas pasa un haz de espacios.

Terminaremos estas generalidades enunciando que: *Tres espacios se cortan dos á dos en un plano y que estos planos pasan por una recta, que cuatro espacios tienen siempre un punto común, ó más bien, cuatro espacios tienen seis planos  $EE'$ ,  $EE''$ ,  $E'E'''$ , ... con un punto común, de los cuales cada tres pasan por un mismo rayo, cuatro rectas  $EE'E''$ ,  $EE'E'''$ , ... y un punto  $EE'E'E'''$ , y hay que distinguir en cada espacio dos lados, como en la recta dos bordes y en el plano dos caras, que se designan con los signos  $+$  y  $-$ ; de modo, que un punto en  $R_2$  ofrece con respecto á los cuatro espacios que se cortan en un punto 16 posibilidades de posición, quedando el dominio-punto tetradimensional dividido por los cuatro espacios en 16 dominios, de los cuales cada uno se llama un ángulo cuadri-dimensional.*

La teoría del paralelismo tiene también su generalización correspondiente, pues siendo paralelos dos planos cuando tienen dos de sus direcciones paralelas ó sea sus orientaciones, dos espacios lo serán cuando coincidan en dos orientaciones; ó sea en tres direcciones que no pertenecen á las mismas orientaciones.

En cuanto á la perpendicularidad, *una recta que es perpendicular á tres rectas de un espacio que se cortan en un punto (y no pertenecen á la misma orientación) es perpendicular á todas las retas trazadas por este punto del espacio. Dos espacios que son perpendiculares á una recta son paralelos, etc.*

Si, en fin, consideramos cinco espacios (tridimensionales) que no pasan por el mismo punto, y de los que

ninguno es paralelo á otro; cada 4 de ellos se cortan en un punto, á saber:

$$a \equiv E_{II} E_{III} E_{IV} E_V, b \equiv E_I E_{III} E_{IV} E_V,$$

$$c \equiv E_I E_{II} E_{IV} E_V, d \equiv E_I E_{II} E_{III} E_V,$$

$$e \equiv E_I E_{II} E_{III} E_{IV},$$

cada 3 espacios pasan por el mismo rayo, de modo que las intersecciones de los 5 espacios son las 10 rectas

$$ab \equiv E_{III} E_{IV} E_V, ac \equiv E_{II} E_{IV} E_V, \text{ etc.}$$

Cada espacio corta á cada uno de los demás en un plano, lo que origina 10 planos:

$$abc \equiv E_{IV} E_V, abd \equiv E_{III} E_V, \text{ etc.}$$

Cada 4 puntos  $a, b, c, d, e$  se hallan en uno de los cinco espacios  $E_V \equiv abcd, E_{IV} \equiv abce, \text{ etc.}$

Por los 4 puntos  $a, b, c, d$  pasa el espacio  $E_V$ ; en éste pasan por los 4 puntos cuatro planos (cada tres por un punto) y 6 rectas (cada tres en un plano), lo que determina un tetraedro, quedando el espacio  $E_V$  cortado por los otros en un tetraedro. Los 5 tetraedros que así resultan tienen dos á dos una cara común, y podemos pasar de un tetraedro á otro, atravesando una superficie-límite, y dichos tetraedros forman un continuo tri-dimensional en la variedad cuadri-dimensional  $E_4$ . La figura que se halla en  $E_4$  limitada por 5 tetraedros se llama polítopo.

El Sr. Brückner llama polítopo á cada parte sepa-

rada en  $E_4$  por cada poliedro tri-dimensional del  $E_4$  restante.

Después de extender la Geometría analítica al espacio de cuatro dimensiones, hace el Sr. Brückner un estudio de los polítopos por medio de sus proyecciones sobre el plano de una de sus caras ó sobre un poliedro-límite que dan un contorno, ó una red de poliedros llamados simplemente diagrama ó diagrama de los polítopos.

Con auxilio de estos diagramas describe los polítopos, especialmente los regulares, ó sea aquéllos en cuyos vértices ó aristas se unen cuerpos en igual número, terminando con el examen de los polítopos de Schlegel, ó sea de 5, 16, 600, 24, 8 y 120 células, ó pentaedroide, exadecaedroide, exacosiedroide, icosatetraedroide, octaedroide y ecatonicosaedroide, según las denominaciones de Mr. Stringham.

Estos polítopos regulares fueron estudiados por el profesor Sr. Schlegel en su *Theorie der homogenen zusammengesetzten Raumgebilde* (1883) cuyo objeto principal es representar proyectados en el espacio de tres dimensiones los seis poliedros regulares limitados por tetraedros, exaedros, octaedros ó dodecaedros, que en el espacio de cuatro dimensiones se corresponden con los cinco poliedros del espacio ordinario. Esta proyección implica el problema de Estercometría: Descomponer un tetraedro, exaedro, octaedro ó dodecaedro en cuerpos de igual clase, de manera que en cada vértice concurren igual número de aristas, caras y cuerpos, y en cada arista igual número de caras y cuerpos.

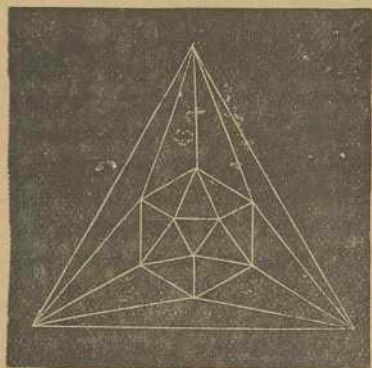
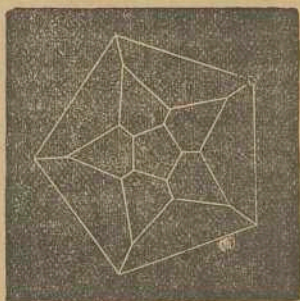
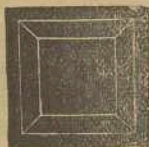
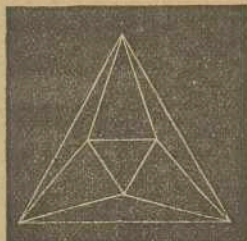
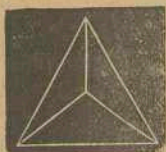
Para proceder á la resolución de este problema observa el Sr. Schlegel que, siendo el límite de una figura homogénea de  $n$  dimensiones otra figura de  $n-1$  di-

mensiones, puede aquélla tener su representación por ésta. Con tal fin, considera que una de las figuras límites de  $n-1$  dimensiones se aleja y el conjunto de las restantes se desarrolla en una figura plana de  $n-1$  dimensiones. Así el perímetro de un polígono, por el alejamiento de uno de sus lados puede desarrollarse en una recta, representación que se llama la red lineal del polígono, que tiene un lado menos que el polígono, pudiéndose completar considerándose á la recta del infinito como representación del lado que se alejó.

Análogamente se procederá cuando se trata de un poliedro, cuya red se obtendrá en un plano, ó de un poliedro de cuatro dimensiones en el que se supone se alejó uno de los poliedros límites al infinito. El polígono ó el poliedro que faltan están representados por el anillo que rodea la red plana ó el tejido celular (Zellgewebe) que rodea á esta representación tri-dimensional del poliedro de cuatro dimensiones.

El problema arriba enunciado que en el plano se reduce á: descomponer un polígono regular en figuras análogas (es decir, de igual número de aristas que el polígono dado) de manera que en cada vértice se encuentre el mismo número de aristas y de figuras, conduce á cinco soluciones, pues un triángulo puede descomponerse en 3, 7, 19 triángulos, un cuadrilátero en 5 cuadriláteros y un pentágono en 11 pentágonos, de modo que los números de aristas concurrentes en cada vértice son tres en los casos 1º, 4º y 5º, cuatro en el 2º y cinco en el 3º.

Estas figuras son las proyecciones planas de los cinco poliedros regulares; pero si extendemos el problema al espacio de tres dimensiones, se obtienen las seis representaciones de los poliedros cuadri-dimensionales.



cuyo estudio hace el Sr. Schlegel en la memoria de que nos ocupamos y cuyos modelos se han construido por la casa editorial del Sr. Brill, de Darmstadt, con sedas de diversos colores y alambres de latón. Estos modelos son los arriba citados y se reducen á un tetraedro descompuesto en 4, 15 y 599 tetraedros respectivamente que corresponden á los poliedros tetra-dimensionales de 5, 16 y 600 tetraedros; en fin, un exaedro, octaedro y dodecaedro, descompuestos respectivamente en siete exaedros, 23 octaedros y 119 dodecaedros.

Para proceder á este estudio el Sr. Schlegel establece primero las fórmulas que determinan los números de vértices, aristas y caras de los poliedros tri-dimensionales, y los de vértices, aristas, caras y sólidos de los cuadri-dimensionales.

Sólo añadiremos á esta reseña de la obra del señor Schlegel, que el poliedro formado por 599 tetraedros y cuyo modelo posee la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza, consta de cinco zonas ó estratos cuyos contornos son de latón y cuyos tetraedros son de seda morada, azul, roja, verde y color de rosa, respectivamente y cuya descripción detallada hace el sabio profesor de la Escuela técnica de Halle, siendo los números de tetraedros 56, 164, 218,  $16 + 128$  y 17. El poliedro formado por 119 dodecaedros consta de cuatro zonas en las que se cuentan respectivamente 12, 32, 42 y 33.

Es digna de citarse en esta exposición de la geometría de  $n$  dimensiones la importante obra *Fondamenti di Geometria a più dimensioni e a più specie di unitá rettilinee* del profesor de la Universidad de Padua, Sr. Veronese.

Hace primero una exposición de las geometrias ordi-

narias, de Lobatschewsky y de Riemann. La segunda parte trata del espacio de cuatro y de  $n$  dimensiones en el espacio general, partiendo de la generación del espacio de cuatro dimensiones por medio de un espacio director de tres dimensiones y un punto supuesto exteriormente á dicho espacio.

No entraremos en detalles, ya que hemos tratado anteriormente de las proposiciones fundamentales como son, que: *Una recta y un plano del espacio  $S_4$  no se encuentran, ó, si se encuentran, se hallan en un espacio de tres dimensiones; Una recta y un espacio de tres dimensiones del espacio  $S_4$  se encuentran en un punto, si la recta no se halla en el espacio etc;* y únicamente diremos que, respecto al espacio euclídeo de  $n$  dimensiones, comienza por la construcción de la irradiación de  $(n-2)^{\text{ma}}$  especie, y sucesivamente se ocupan de las intersecciones de espacios de  $n$  dimensiones, de la pirámide fundamental en  $S_n$ , del número de las dimensiones de sistemas de espacios con dimensiones dadas en el espacio  $S_n$ , de los espacios paralelos y perpendiculares, de la superficie esférica de  $n-1$  dimensiones, de los sistemas continuos, de la superficie cónica, de las operaciones de proyectar y cortar, juntamente con otras cuestiones que no especificamos por no prolongar esta reseña.

Creemos oportuno terminar este trabajo haciendo breves indicaciones de una obra recientemente publicada por el notable matemático M. Poincaré, titulada *Analysis situs* (1895.)

«La Geometría de  $n$  dimensiones, dice, tiene un objeto real, lo que nadie duda actualmente, los seres del hiper-espacio ordinario; y si no podemos representárnoslos, podemos concebirlos y estudiarlos. Si pues la Mecá-

nica de más de tres dimensiones debe rechazarse como desprovista de objeto, no sucede lo mismo con la Hipergeometría.»

La Geometría, en efecto, no tiene por única razón de ser la descripción inmediata de los cuerpos que impresionan nuestros sentidos: es ante todo el estudio analítico de un grupo; nada impide por lo tanto tratar otros grupos análogos y más generales.»

Pero ¿por qué se dirá, no conservar el lenguaje analítico y reemplazarlo por un lenguaje geométrico que pierde todas sus ventajas desde que los sentidos no pueden intervenir? Esto se justifica por la concisión del nuevo lenguaje y porque la analogía con la Geometría ordinaria puede crear asociaciones de ideas fecundas y sugerir generalizaciones útiles.»

Después de ocuparse del empleo de las figuras con el fin de conocer las relaciones entre los objetos de la rama geométrica llamada *Analysis situs* que describe la situación relativa de los puntos, líneas y superficies, sin considerar su magnitud, y que se extiende al hiperespacio, define el Sr. Poincaré las variedades.

Un sistema de  $n$  variables se llama un punto. Si existen entre éstas,  $p$  ecuaciones y  $q$  inecuaciones

$$\left. \begin{aligned} F_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, F_p(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \varphi_1(x_1, \dots, x_n) > 0, \dots, \varphi_q(x_1, \dots, x_n) > 0 \end{aligned} \right\} (1)$$

de modo que las funciones  $F$  y  $\varphi$  sean uniformes, continuas, y tengan derivadas continuas; el conjunto de puntos que las satisfacen forman una variedad de  $n-p$  dimensiones. Cuando  $p=0$ , es decir, cuando no existen más que desigualdades, la variedad de  $n$  dimensiones



Sea una sustitución que cambia  $x_1, x_2, \dots, x_n$  en  $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$  sujeta á las condiciones

$$x'_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Si se resuelven estas ecuaciones con relación á  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , resulta

$$X_k = \varphi'_k(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

suponiéndose que las funciones  $\varphi$  y  $\varphi'$  son uniformes, finitas y continuas. El conjunto de sustituciones que satisfacen á estas condiciones forma uno de los grupos más generales que se pueden imaginar, y que es el objeto del *Analysis situs*.

Considerando ahora dos variedades  $V$  y  $V'$  sujetas á las condiciones

$$F_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, p), \varphi_\beta > 0, (\beta = 1, 2, \dots, q),$$

$$F'_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, p), \varphi'_\beta > 0, (\beta = 1, 2, \dots, q),$$

si se puede hacer que corresponda á un punto  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de  $V$  otro punto  $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$  de  $V'$ , de modo que

$$X'_k = \psi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (k = 1, 2, \dots, n);$$

el dominio  $D$  definido por las inecuaciones

$$F_\alpha > -\varepsilon, F_\alpha < \varepsilon, \varphi_\beta > 0$$

contendrá evidentemente á la variedad  $V$ .

Resolviendo ahora el anterior sistema de ecuaciones, hallamos

$$x_k = \psi'_k(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \quad (k = 1, 2, \dots, n);$$

si consideramos el dominio  $D'$  definido por las desigualdades

$$F'_\alpha > -\varepsilon, \quad F'_\alpha < \varepsilon, \quad \varphi'_\beta > 0$$

en el cual las funciones  $\psi'_k$  son finitas continuas y uniformes, con determinante funcional distinto de cero, á todo punto de  $V$  corresponde un punto y sólo un punto de  $V'$ ; de modo que á toda variedad  $W$  contenida en  $V$  corresponderá una variedad  $W'$  de igual número de dimensiones contenida en  $V'$ ; y si  $W$  es continua, finita ó ilimitada, también lo será  $W'$ . Las dos variedades  $V$  y  $V'$  equivalentes se llaman homeomorfas.

También define el Sr. Poincaré las variedades, considerando las  $n$  ecuaciones

$$x_1 = \theta_1(y_1, y_2, \dots, y_m), \dots, x_n = \theta_n(y_1, y_2, \dots, y_m)$$

que representan una variedad de  $m$  dimensiones.

Si dos variedades  $V$  y  $V'$  se hallan definidas respectivamente por los sistemas de ecuaciones

$$x_i = \theta_i(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad x_i = \theta'_i(y'_1, y'_2, \dots, y'_m)$$

siendo las funciones  $\theta$  analíticas; puede ocurrir que tengan una parte común  $V''$  también de  $m$  dimensiones: en este caso las  $y$  serán funciones analíticas de las  $y'$  é inversamente; y se dirá que la variedad  $V$  y  $V'$  son la

*continuación analítica* una de otra, pudiéndose formar una cadena de variedades  $V_1, V_2, \dots, V_n$ , tales, que entre cada dos haya una común, lo que se llama *cadena continua*; y si ésta es cerrada,  $V_n$  no difiere de  $V_1$ .

Se puede también tener una red de variedades, es decir, un conjunto de variedades tales, que cada una sea la continuación de algunas otras, lo que se llama una *red continua*.

Pasando á la representación geométrica, considera el Sr. Poincaré cierto número de poliedros  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , y supone que existen en el espacio de 4 dimensiones cierto número de variedades de 3 dimensiones  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  respectivamente homeomorfas con  $P_1, P_2, \dots, P_n$ .

Si  $F_1$  es una cara del poliedro  $P_1$  y  $\psi_1$  el conjunto de los puntos de la frontera de  $Q_1$  que corresponden á los diversos puntos de  $F_1$ , y  $F_2$  es una cara de  $P_2$ ; siendo  $\psi_2$  la imagen de ésta sobre la frontera de  $Q_2$ , puede hacerse coincidir  $\psi_1$  con  $\psi_2$ ; entonces las dos variedades  $Q_1$  y  $Q_2$  son contiguas y se pasa del interior de la una al de la otra, atravesando  $\psi_1$ . Las caras  $F_1$  y  $F_2$  se llaman *conjugadas*.

Si  $F_1$  y  $F_2$  pertenecen á un mismo poliedro  $P_1$ , la variedad de dos dimensiones  $\psi_1$ , que no difiere de las de dos dimensiones  $\psi_2$ , separará las dos partes de la variedad  $Q_1$ .

Supongamos ahora que entre las caras de los  $n$  poliedros  $P_i$  haya cierto número conjugadas dos á dos y otras que queden libres.

Si la variedad total  $V$  está formada por el conjunto de las  $Q_i$ , como algunas de éstas son contiguas, podrá hacerse que la variedad total sea continua; y si entre las caras de  $P_i$  no hay ninguna libre, la variedad  $V$  será cerrada; en el caso contrario, los puntos que correspon-

den á las caras libres, forman la frontera completa de  $V$ .

Así se ve como el conocimiento de los poliedros  $P_i$  y el del modo de conjugación de sus caras da, en el espacio ordinario una imagen de la variedad  $V$  y que esta imagen basta para el estudio de sus propiedades, bajo el punto de vista del *Analysis situs*.

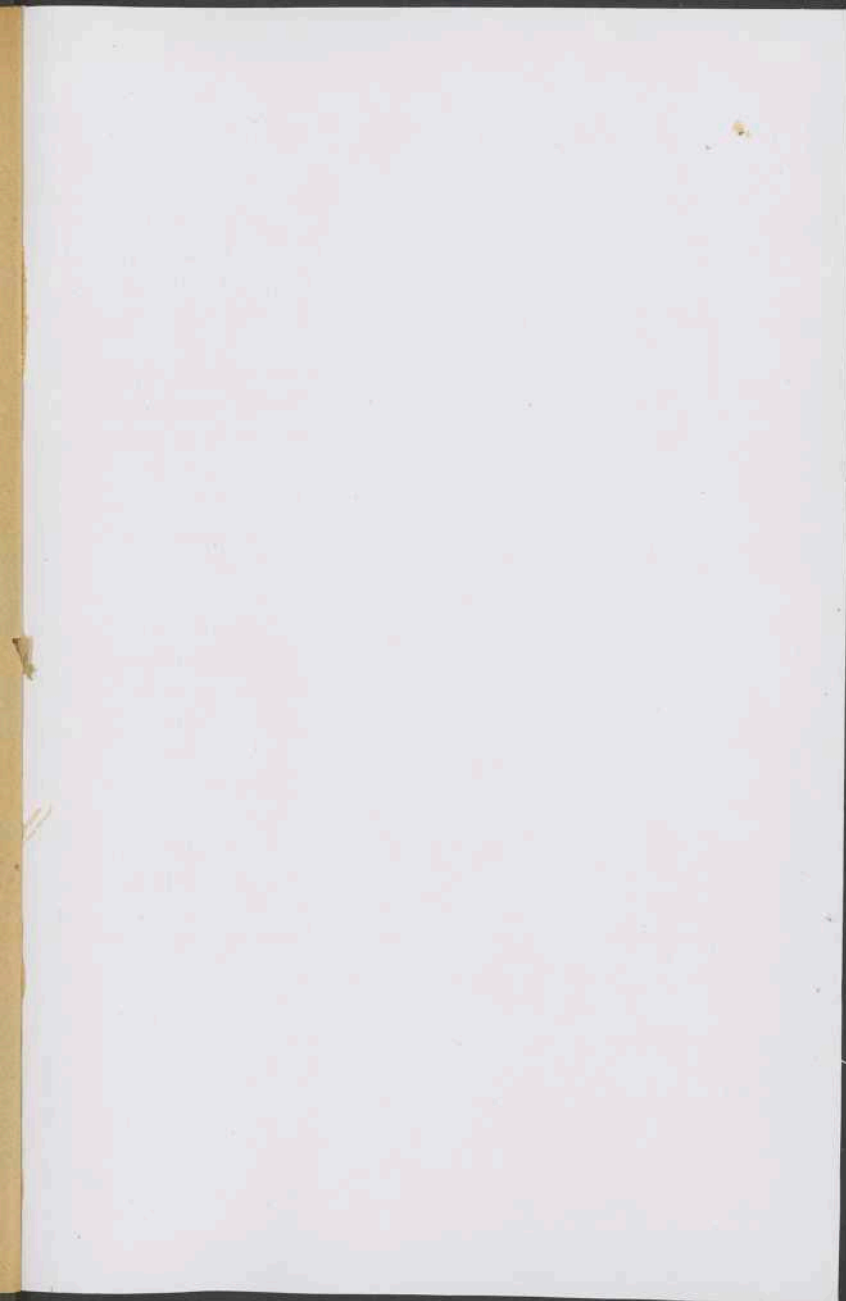
Cuando á varias aristas ó vértices de los poliedros  $P$  corresponden una misma línea ó un punto interiores á  $V$ , estas aristas ó estos vértices pertenecen á un mismo ciclo.

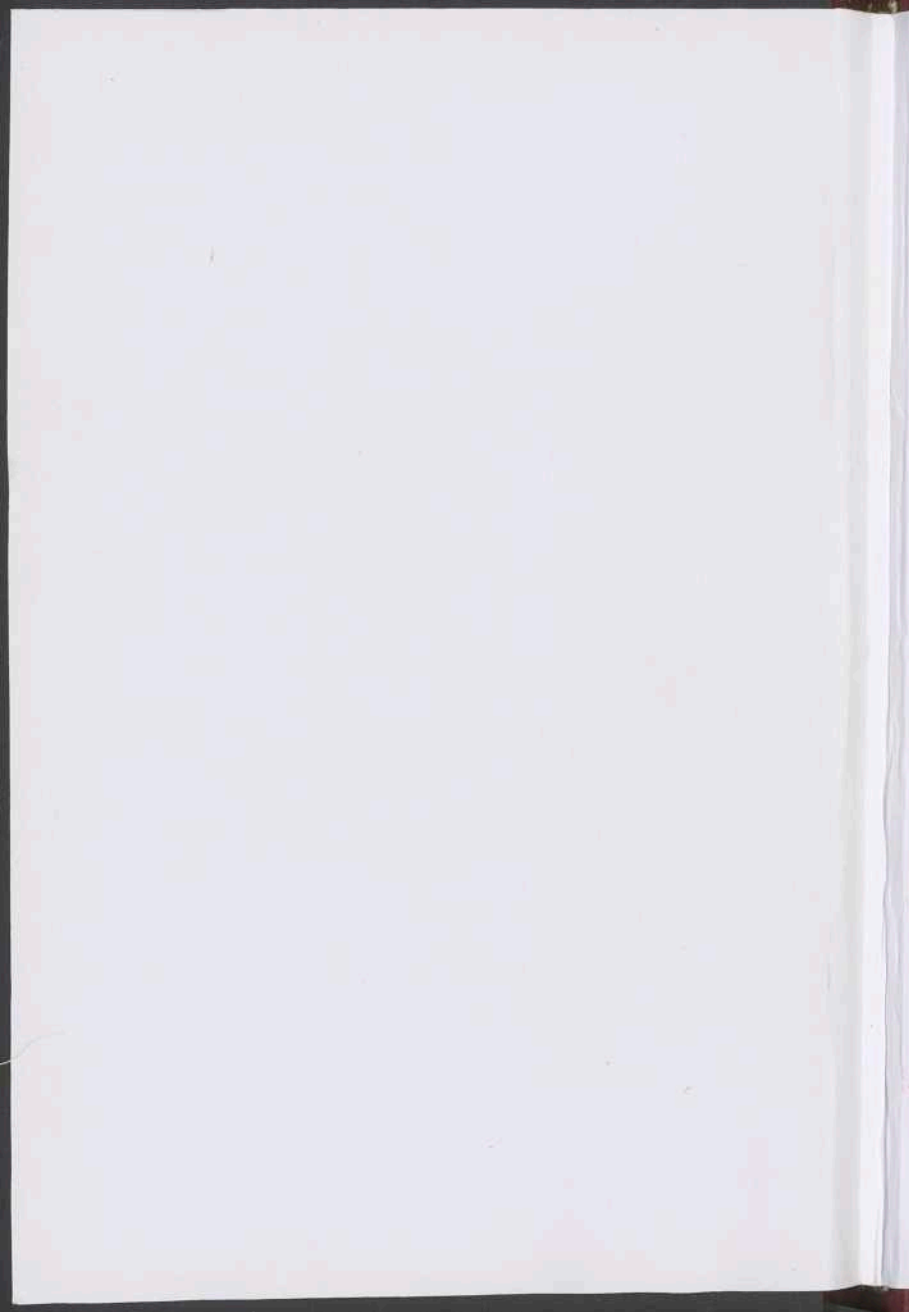
Después de exponer el modo de formación de estos ciclos, trata el Sr. Poincaré de la representación del grupo discontinuo, haciendo corresponder á cada sustitución un dominio del espacio, lo que conduce á la noción del grupo fundamental de una variedad. A cada una de las sustituciones principales de que se deriva este grupo corresponde un contorno cerrado, y entre éstas existen ciertas relaciones que se llaman *equivalencias fundamentales*.

Termina esta obra con una generalización del teorema de Euler hecha para un espacio cualquiera.

El conjunto de obras cuyo contenido se ha expuesto con la brevedad que exige el presente trabajo, creemos puede dar una idea de la importancia que ha alcanzado la doctrina del hiperespacio en los tiempos presentes.











FAN  
8342

Zoel Garcia de Caldearano

LAS MOJERES DE LAS ASOCIACIONES