OBSERVACIONES ÚTILES

EN EL

ESTUDIO DE LAS MATEMÁTICAS,

POR

D. Zoel G.ª de Galdeano y Yanguas,

LICENCIADO EN CIENCIAS EXACTAS Y EN FILOSOFÍA Y LETRAS.

ZARAGOZA.

Imprenta de Manuel Sola, calle de San Blas núm. 6.
1874.

OBSERVACIONES ÚTILES

EN EL

ESTUDIO DE LAS MATEMÁTICAS,

POR

D. Zoel G.ª de Galdeano y Yanguas,

LICENCIADO EN CIENCIAS EXACTAS Y EN FILOSOFÍA Y LETRAS.

ZARAGOZA.

Imprenta de Manuel Sola, calle de San Blas núm. 6.
1874.

Á SUS MUY ESTIMADOS

profesores de la Universidad é Instituto

DE ZARAGOZA

Como muestra de consideracion y respeto dedica este humilde trabajo,

El autor.

OBSERVACIONES ÚTILES

EN EL

ESTUDIO DE LAS MATEMÁTICAS.

Nos proponemos condensar en pocas páginas algunas ideas que sirvan para completar las adquiridas en los tratados elementales de matemáticas.

Creemos que presentando como de relieve, bajo un punto de vista general lo que tienen de comun las cuestiones matemáticas, habremos hecho este estudio, al parecer tan árido y complicado de facilísima comprension, y dado la clave para desentrañar no pocas dificultades.

Conseguir que el espíritu adquiera cierta aptitud para resolver por sí solo multitud de cuestiones de esta ciencia que es la que mas se presta á ser un resultado del ejercicio regular del entendimiento; tal es nuestro objeto.

Por este motivo vamos á desarrollar la série de cuestiones que á continuacion se expresan:

Algunas nociones de Psicología.

En la adquisicion y posesion de la verdad distinguimos dos cosas:

1.° Ciertos datos que no suministran los sentidos llamados sensaciones y otros suministrados por la razon que llamamos ideas.

2.° La actividad intelectual que combina y relaciona los datos de la razon y los sentidos. Dicha actividad intelectual es llamada entendimiento por algunos filósofos y con este significado emplearemos su espresion en este breve trabajo.

El conocimiento de un objeto se llama nocion, el de una relacion de dos objetos juicio, y el de una relacion entre juicios raciocinio.

Las nociones, ó en general ideas á que se refieren las matemáticas son las de: cantidad, número, combinacion, órden, situacion y estension.

Por esto dice Poinsot que las matemáticas son la ciencia que tiene por objeto el número, el órden y la medida.

Principios de la ciencia.

Los principios pueden ser fundamentales y formales. Los primeros se refieren al fondo y materia de la ciencia; en matemáticas elementales son la cantidad y la estension. La nocion de estension nos es dada directamente por los sentidos; para la adquisicion de la idea de cantidad no hay necesidad de la accion inmediata de los sentidos, pues estos solo son ocasion para que el entendimiento, fijándose, ya en los objetos del mundo esterior, ya en los fenómenos de conciencia, adquiera idea de número y cantidad.

La ciencia no es mas que el desenvolvimiento de los principios fundamentales. Las matemáticas son el desenvolvimiento de las ideas de cantidad y estension.

Los principios formales se refieren á la forma de la ciencia, son los nudos que unen las ramas del árbol científico.

En matemáticas los mas necesarios son:

Lo que se hace con el conjunto de las partes queda hecho con el todo.

Si cantidades iguales sufren alteraciones iguales los resultados quedarán iguales.

Si cantidades desiguales sufren alteraciones iguales los resultados quedarán desiguales en el mismo sentido.

El primero comprende en sí el siguiente: El resultado de una operacion compleja no varía si á ella se sustituye una série sucesiva de operaciones realizadas sobre los elementos como se pide se verifique sobre el número ó números propuestos. Pues por medio de él resolvemos las operaciones complejas valiéndonos de séries sucesivas de operaciones elementales.

Otro principio podemos considerar y es: El resultado de una combinacion de operaciones realizada con una ó varias entidades, no altera cualquiera que sea el órden en que se verifiquen.

Este principio complejo que no es evidente por sí en la estension que comprende, no ofrece dificultad para su admision, pues fácilmente se nota su verdad haciendo estensivo el siguiente, cuya evidencia es notoria: *El órden de sumandos no altera la suma* á sustracciones, multiplicaciones, divisiones, elevacion á potencias y estraccion de raices sucesivas con auxilio de los sencillos razonamientos empleados en los tratados elementales.

En el caso de combinaciones, no ya de una misma operacion, sino de operaciones distintas, se tendrá presente que para su aplicacion es necesario considerar las adiciones y sustracciones indicadas como los números que resultarian de efectuar dichas operaciones, es decir, como todos cuyos elementos sou inseparables.

Cuestiones de la ciencia matemática.

A dos se reducen todas las cuestiones: Problemas y Teoremas.

Hay motivos para creer que el teorema no es mas que una derivacion y perfeccionamiento del problema.

Este en su orígen es debido al ejercicio arbitrario de la actividad intelectual; así no es estraño que algun matemático antiguo se hubiera propuesto: Construir un triángulo en que dos lados fueran iguales y desiguales sus ángulos opuestos, ó formar uno cuyos ángulos valieran respectivamente, 70°, 50° y 80°, cuestiones imposibles pues, se hallan en oposicion con las propiedades del triángulo.

Pero habiéndose llegado á descubrir mas tarde que: En un triángulo á lados iguales se oponen ángulos iguales, y que la suma de sus ángulos vale dos rectos, se habian de rectificar los problemas citados en que se pedian imposibilidades por ignorarse las relaciones que existen entre las entidades que entran en ellos.

La demostracion de los teoremas de una ciencia influye en la perfecta enunciacion de los problemas, pues aquellos expresan relaciones de coexistencia entre varios elementos, y es claro que en vista de esto no se puede pedir ni establecer en los problemas relaciones de coexistencia en contradiccion con las de los teoremas.

Estas indicaciones conducen á un resultado, y es que para el descubrimiento de verdades, ó sea demostracion de teoremas se han debido y se deben dejar algunas condiciones indeterminadas cuya determinacion se busca, lo cual constituye un problema, y en cuanto esto se ha conseguido obtenemos un teorema, es decir, *una proposicion que expresa relacion de coexistencia entre modos de ser de varias cosas.*

Para dar á conocer estas indicaciones las desarrollaremos con un ejemplo.

El entendimiento puede suponer un ángulo *m p n.* (fig. 1) trazar la bisectriz, y por un punto la perpendicular *a c b* que corta los dos lados del ángulo.

Hechas las expresadas construcciones arbitrarias, podemos enunciar esta cuestion: *Si se traza un ángulo y su bisectriz, si por un punto de esta se levanta la perpendicular a c b ¿Qué relacion tendrán los ángulos cuyos vértices son los puntos* a *y* b?

Este es un problema; su resolucion nos da la relacion de igualdad entre los ángulos *p a b* y *p b a.*

Conocida esta relacion de coexistencia, podemos enunciarla bajo la forma de teorema diciendo: *Si se traza un ángulo y su bisectriz,* *y si por un punto de esta se levanta una perpendicular á ella, cortará los lados del ángulo segun ángulos iguales, ó estará igualmente inclinada con respecto á ellos.*

Indicaremos antes de continuar, que en una cuestion hay dos clases de entidades y relaciones, unas que ponemos voluntariamente por medio de ciertas construcciones ó trasformaciones, y otras que aparecen ligadas necesariamente á las que hemos puesto sin haber intervenido en su aparicion.

Esto se puede ver en el ejemplo citado, pues las entidades y relaciones que introducimos voluntariamente son el ángulo, la bisectriz y la perpendicular, á las cuales se hallan necesariamente ligados los ángulos *pab y pba* (pues la perpendicular debe cortar necesariamente á los lados del ángulo) sometidos á la condicion de ser iguales.

Volviendo á la cuestion, vemos que el teorema citado origina un nuevo problema ya completo en la enunciacion, pues las condiciones están en conformidad con relaciones cuya existencia se ha probado por la demostracion del teorema. Este problema puede enunciarse: *Por un punto trazar una recta igualmente inclinada con los lados de un ángulo*; y su construccion estará determinada por las condiciones que coexisten con estas segun el teorema ya mencionado.

Tenemos, pues, tres fases en la cuestion.

1.ª Dadas ciertas construcciones arbitrarias ¿qué relaciones hay entre los elementos que hemos puesto intencionadamente y los que aparecen íntimamente unidos á estos sin que hayamos intervenido en su introduccion? (*Problema primitivo.*)

2.ª Expresion de la relacion de coexistencia entre unos y otros elementos. (*Teorema.*)

3.ª Conocida la enunciacion que se buscaba en el problema primitivo (esto es, que los ángulos *pab* y *pba* son iguales) hallar los medios de llegar á ella (*Problema perfeccionado en su expresion.*)

A esta clase pertenecen los contenidos en los tratados de matemáticas, pues se refieren á teoremas demostrados en los mismos.

Ya hemos definido el teorema.

Problema es una proposicion en que se trata de hallar algo unido por relacion de coexistencia con otras cosas dadas

Comparando estas dos cuestiones, vemos que: En el teorema nos proponemos *afirmar* ó *negar* una relacion de coexistencia entre cosas enunciadas. Supongamos el teorema: *En todo triángulo á lados iguales se oponen ángulos iguales.* Se trata de afirmar esta relacion expresada. En el problema, se conoce parte de la enunciacion y se afirma implícitamente la existencia de cierta relacion con algo no expresado y cuya expresion se busca. Por ejemplo: *Dado el lado del cuadrado regular inscripto ¿qué relacion tiene con el radio?* Implicitamente se afirma la relacion que ha de existir entre ambas líneas; pero no se sabe cuál sea esta, no se conoce su enunciado; solo cuando se ha resuelto el problema se sabe que es $\sqrt{2}$

Halladas las diferencias y relaciones entre el teorema y problema, creemos conveniente hacer un ligero análisis de estas cuestiones.

En todo teorema encontramos: 1.° ciertas entidades y relaciones caracterizadas por existir hipotéticamente. 2.° Otras entidades y relaciones ligadas á las primeras con el lazo de la coexistencia. 3.° Ciertas construcciones ó trasformaciones que ponemos arbitrariamente para poder introducir nuevas entidades y relaciones, que nos sirvan como medios de enlace entre los elementos espresados en el teorema. 4.° Teoremas que justifican los enlaces de las entidades y relaciones auxiliares con las puestas en el teorema.

Así en la demostracion de: En todo triángulo á lados iguales se oponen ángulos iguales; lo hipotético es el triángulo y los lados iguales; lo coexistente, la igualdad de pab y pba (fig. 1.ª) Las entidades introducidas son la recta pc que une p con c punto medio de ab, los ángulos que forma en p y c, y los dos triángulos en que se divide el total pab. El teorema: *Dos triángulos son iguales cuando tienen sus tres lados respectivamente iguales* relaciona dichas entidades dándoles cierta solidaridad.

Con pocas variaciones se podria aplicar esto á las demostraciones en Aritmética y Algebra, pues en ambas las construcciones auxiliares se hallan reemplazadas por trasformaciones consistentes en sumas, restas, multiplicaciones, etc. y las que constituyen la hipótesis se reducen á espresar por medio del lenguage matemático las relaciones expresadas en la cuestion.

En cuanto á los problemas solo diremos que esceptuando algunas diferencias que se notan en la enunciacion como ya hemos indicado, tendríamos que hacer consideraciones análogas á las expuestas acerca de los teoremas. Solo añadiremos que hay variedad en los modos de enunciar los problemas pero todos se pueden reducir al del que hemos tomado como ejemplo en las relaciones con el teorema. Esto es: *Dado un exágono regular inscripto ¿qué relacion hay entre este lado y el radio?*

Otro modo de enunciacion del mismo seria: *Se trata de inscribir un exágono regular en un circulo dado,* que equivale á decir: ¿Qué construcciones debemos hacer (se ignora el enunciado de dichas construcciones) para que el problema sea resuelto? Y la construccion cuyo enunciado se ignoraba, está espresado por $L = R$ cuando el problema se ha resuelto.

Ideas á que se refieren las cuestiones matemáticas.

Las cuestiones de matemáticas elementales se refieren á las ideas de órden, posicion y magnitud.

La actividad intelectual afirma ó niega las maneras de ser de estos conceptos, constituyendo un abundantisimo material en entidades y cuestiones.

Se puede decir que la afirmacion y negacion son los dos polos sobre que giran las cuestiones matemáticas.

La afirmacion constante de una direccion ó posicion de elementos constituye la línea recta. La constante negacion de igual direccion constituye la curva.

La afirmacion total de igualdad de lados en un triángulo nos da el equilátero, la afirmacion parcial el isósceles y la negacion el escaleno.

La afirmacion total posible de paralelismo nos da la idea de paralelógramo, la parcial la de trapecio, la negacion origina el trapezoide.

La afirmacion total de igualdad de lados y ángulos en un paralelógramo nos da el cuadrado, la afirmacion total de su desigualdad (esta solo es admisible en los lados contiguos mas no en los opuestos) nos da el romboide.

La afirmacion parcial de igualdad de lados y ángulos nos da en las dos combinaciones que pueden hacerse el rectángulo y el rombo.

La afirmacion de igualdad de una suma, diferencia ó relacion de distancias á dos puntos fijos, da los lugares geometricos elipse, hipérbola ycircunferencia.

La combinacion de igualdad de forma y magnitud nos da la identidad. La de igual forma y distinta y magnitud nos da la semejanza. La de distinta forma é igual magnitud la equivalencia. Y la de igual forma y magnitud con inversa posicion de elementos la simetría.

La aplicacion de estos conceptos á la formacion de los números nos da las diferentes maneras de hallarse compuestos ó formas.

Otra de las ideas es la de órden y combinacion que tiene grandísima importancia sobre todo en matemáticas superiores que se podrian llamar mejor sistemáticas, pues su estudio se refiere á los sistemas. mas bien que á los elementos, objeto de las elementales.

Hemos dicho que la actividad intelectual afirma ó niega algo de los conceptos de órden, posicion y magnitud.

Ejemplos de teoremas en que se afirma ó niega algo de la magnitud.

Un quebrado no altera aunque se multipliquen sus dos términos por un mismo número.

Dos rectángulos de igual base son proporcionales á sus alturas.

La oblícua que mas se aparta de la perpendicular es la mayor.
De dos quebrados que tienen igual denominador es mayor etc.
Ejemplos de teoremas en que se afirma ó niega algo de la posicion.
Dos rectas que forman con una tercera ángulos correspondientes desiguales no serán paralelas.
Dos perpendiculares á una tercera son paralelas.
Si una recta encuentra á una de dos paralelas encontrará á la otra.
Ejemplos de teoremas en que se afirma algo del concepto de órden.
Si se prolongan las aristas de un ángulo triedro á distinto lado del vértice, el triedro que resulte tendrá iguales sus elementos á los del propuesto pero inversamente dispuestos.
Para multiplicar un número por un producto de varios factores basta multiplicarlo sucesivamente por cada uno de estos. El órden de factores no altera el producto. El producto de varios productos indicados es igual al producto compuesto de todos sus factores. (Aquí se trata de hacer ver equivalencia de resultados por variedad en el órden de las operaciones.)

Divisiones de los Teoremas

Podemos hacer tres agrupaciones generales, segun con ideremos su modo de demostracion, su objeto y el fin que nos proponemos.
Principiaremos por las referentes á Aritmética y Algebra.
Bajo el primer concepto distinguiremos: Demostraciones que estriban *en la descomposicion de un todo en sus elementos, en el retroceso de una cuestion derivada á su primitiva y en la induccion.*
En las dos primeras se parte de los datos á los resultados ó inversamente y en la tercera de lo individual ó particular á lo universal.
En el primer grupo se hallan incluidas las correspondientes á operaciones de números enteros y de ellas diremos que las referentes á operaciones directas se verifican con el auxilio del principio. *Lo que se hace con el conjunto de las partes queda hecho con el todo,* originando las de la division y estraccion de raices un análisis mas complejo, pues en ellas tiene gran importancia el modo de distribucion de las partes en el todo.
Las relativas á operaciones indicadas se verifican siguiendo una marcha ascendente que lleva la evidencia de dicho principio desde las cuestiones mas sencillas hasta las mas complejas.
En cuanto á las demostraciones relativas á operaciones inversas se debe observar que se reducen á las de operaciones directas y así, demostramos facilmente que: *Si se divide uno de los factores de un producto indicado por un número, dicho producto queda dividido por este número*; considerando que: *Si se multiplica uno de los fac-*

tores de un producto indicado, el producto queda multiplicado. Lo mismo sucede en la demostracion de que: *La raiz de cierto grado de un producto es igual al producto de las raices del mismo grado de los factores*, que se refiere á: *La potencia de un producto es el producto de las potencias de igual grado de los factores.*

Por consiguiente estas demostraciones se verifican por un retroceso de los resultados de las operaciones directas á los datos.

Numerosas demostraciones se realizan por el método llamado de induccion cuyo fin es probar que lo afirmado de un objeto que ocupa cierto lugar en un conjunto, se puede afirmar del que se halle en el lugar inmediato, ó mejor del que se halle en cualquier otro lugar de dicho conjunto.

Su desenvolvimiento en los autores es siempre una cuestion de forma, como se ve en la demostracion de las leyes de cocientes y resíduos, en la del binomio de Newton y en la de la obtencion de las reducidas de las fracciones continuas.

Y mas que una verdadera demostracion es esto una verificacion de la ley que el entendimiento concibe como universal en cuanto la ha visto realizada en multitud de elementos que dependen estre sí de un mismo modo.

Considerando el fin que nos proponemos distinguiremos: Teoremas que se refieren á la especulacion y á la accion.

Demostraciones que se refieren a la accion.

Su objeto es probar la identidad de resultado que dan la operacion propuesta y otra ú otras mas fáciles de resolver, por las que se sustituye la primera; como ejemplos se pueden citar las relativas á las operaciones fundamentales y las del *m. c. d.* y *m. c. m.* de dos ó varios números en que se notan sustituciones sucesivas de operaciones.

Demostraciones que se refieren a la especulacion.

Las divisiones que hagamos bajo este punto de vista fundándose en modos de considerar el número, incluimos en ellas cuanto se refiera á la segunda agrupacion que hacemos de las demostraciones.

Podemos estudiar el número segun su naturaleza y su forma.

Por su naturaleza el número es entero, fraccionario ó incomensurable.

Por su forma es, simple ó compuesto.

Naturaleza del número.

Para comprender lo concerniente á la naturaleza del número convendrá advertir que desempeña tres funciones: 1.ª Ser simplemenet pluralidad. 2.ª Ser modificativo de una operacion, es decir, que determina el grado de esta. Así en $\frac{7}{8}$ el denominador indica que se ha de hacer, no en el número, sino en la unidad, ó mejor en lo que algunos autores llaman módulo, una modificacion; pero el 8 determina dicha modificacion que aunque de igual naturaleza seria distinta para otro número. Lo mismo se verifica con el índice de los radicales que es un determinativo que completa la modificacion indicada por el radical.

Por último, el número puede ser considerado como medida de la cantidad, como determinacion de valor.

De esto se origina la division del mismo en absoluto y relativo.

El absoluto esencialmente entero, cualidad inseparable de los séres que solo podemos considerar separada de ellos por medio de la abstraccion.

El relativo resulta de considerar esa cualidad que se llama número absoluto unida al ser que se espresa y se conoce del modo que puede ser espresado y conocido en matemáticas, es decir, por su valor ó sea referido al módulo.

En el número relativo hay un tipo que sirve de punto de partida desde el cual se cuentan todos los valores, que es el centro desde donde se parte en direcciones opuestas á los dos límites, el infinito y el cero.

La consideracion del número relativo origina los números fraccionarios é incomensurables, entrando en los fraccionarios los complejos, que no son mas que sumas de fracciones con relacion á cierto módulo, que puede ser variable.

Y así como las figuras semejantes no son mas que los diferentes grados de una misma forma, así los diferentes números fraccionarios no son mas que la série de los números contemplada, segun diversos grados de magnitud, no de otro modo que un mismo objeto visto á través de microscopios de distinto poder.

Esta doble consideracion que entraña el número relativo, esplica la teoría de los números fraccionarios que se fundan en la doble variacion de número y de valor del módulo, tipo de medida esencialmente estenso.

Omitiremos consignar algunas ideas relativas á números incomensurables á que damos cabida en otro lugar.

Expuesto cuanto es conducente á nuestro propósito respecto á la naturaleza del número, citaremos las siguientes proposiciones que se refieren á este punto de vista. *La raiz de cierto número que no se puede obtener exactamente en entero es incomensurable. Los coeficientes de los términos obtenidos en el desarrollo del binomio de Newton son enteros. Ni la suma ni la diferencia de dos fracciones irreducibles, tales que el denominador de una de ellas contiene un factor que no contiene el de la otra, no puede ser entero.*

FORMA DEL NÚMERO.

La forma es la manera de hallarse compuesto, puede considerarse de dos modos: 1.° Cuando se trate de la composicion del número prescindiendo de su espresion por medio de la numeracion. Así la forma del número 56 estará caracterizada por ser divisible por 7 y 8 lo cual se verifica independientemente del sistema de numeracion en que está espresado. 2.° Cuando se trata de la composicion de un número con arreglo á un sistema de numeracion.

La primera clase de forma se puede llamar *no aparente,* (pues no se manifiesta por sus cifras) y la segunda *aparente* (pues se manifiesta por sus cifras.)

Las relaciones de forma no aparente entre dos números son tres. O uno de ellos está contenido en el otro, ó no estando contenido, ambos contienen un mismo factor, ó no estando contenido uno en otro no contienen ningun factor comun.

Tratemos de las demostraciones que se refieren á la *forma aparente.*

En este género se hallan incluidas las relativas á caractéres de divisibilidad de los números que se pueden condensar en la siguiente proposicion general: *Si un número tiene ciertas condiciones de forma es divisible por cierto número.*

Otra observacion hará comprender lo que caracteriza á estas demostraciones. Componiéndose los números expresados segun un sistema de numeracion de varias unidades de diversos órdenes, se trata de pasar á los elementos, es decir, á hallar las relaciones de una unidad de un órden cualquiera con el número respecto al cual se van á determinar los caractéres de divisibilidad.

La cuestion queda, pues, reducida á hallar las leyes de los residuos de dividir 1000... por 2, 3, 5, 7, etc., que se reduce á: *averiguar las modificaciones que deben sufrir las unidades de los diversos órdenes para constituir números divisibles por* 2, 3, 5, 7, 11 etc. (por ej. en la divisibilidad por 3, cada unidad de un órden ha de sufrir la modificacion de ser disminuida en 1.)

Y es evidente que de una unidad se puede pasar á varias de un mismo órden y de estas á sumas de números de unidades de diversos órdenes.

Consideremos las demostraciones que se refieren á la forma *no aparente.*

Tres secciones pueden hacerse segun consideremos la continencia ó no continencia de unos números en otros, ó finalmente la alteracion ó no alteracion de valor con relacion á la de la forma.

A la primera corresponden los teoremas: *Si dos sumandos son divisibles por cierto número, la suma tambien lo será,* del que es caso particular: *Si dos números son pares, su suma será par. Si un* *factor de un producto es divisible por un número, el producto tambien lo será* que incluye: *El producto de varios números pares, es par.*

A la segunda seccion corresponde: *Si un número es primo con los factores, es primo con el producto,* que incluye: *El producto de dos números impares es impar.*

En la tercera seccion consideraremos el caso de la permanencia de valor con variacion de forma siendo la proposicion fundamental: *El órden de sumandos no altera la suma* cuya consecuencia mas inmediata é importante es que: *El órden de factores no altera el producto.*

Probadas estas proposiciones es fácil establecer, fundándose en ellas, las variaciones que sufren las cantidades segun las alteraciones que esperimenten los elementos que las forman.

En esta clase encontramos: *Si uno de los sumandos aumenta ó disminuye, la suma aumenta ó disminuye en el mismo número.*

Demostracion ad absurdum.

Habiendo expuesto lo que creemos conducente á nuestro propósito en otro lugar acerca de la demostracion, solo añadiremos lo que se refiere al método ad absurdum que creemos merece alguna detencion.

Tres casos admitiremos y son: 1.° Cuando se ha de probar una proposicion aislada. 2.° Cuando probados todos los casos del directo falta hacer lo mismo con todos los del recíproco. Y 3.° Cuando cada caso del recíproco se prueba á continuacion de su correspondiente en el directo.

El medio empleado para probar una proposicion aislada es, partiendo de la tésis contraria llegar á una conclusion que se oponga á alguna verdad admitida, como sucede al demostrar que: Dos perpendiculares á una recta, son paralelas y que si una recta corta á una de dos paralelas cortará á la otra de las que las tésis opuestas conducen á una contradiccion respectivamente con que: Por un punto solo puede trazarse una perpendicular y una paralela á otra recta.

Supongamos que estando probados los dos casos del teorema: *Todo punto situado en la perpendicular levantada, á una recta en su punto medio, equidista de los estremos de la misma* y *si está fuera etc. dista desigualmente, etc.* se trata de probar los del recíproco. Para ello diremos: Dos proposiciones que tienen igual hipótesis y tésis contradictoria son necesariamente incompatibles.

En este caso se hallan: *Si una recta encuentra á una de dos paralelas encontrará á la otra, si encuentra á una de dos paralelas no encontrará á la otra.*

En toda proposicion la hipótesis tiene menos estension, ó á lo mas, igual que la tésis. Así la tésis de: *Los ángulos opuestos por el vértice son iguales*, se aplica no solo á los ángulos que son opuestos por el vértice sino tambien á los que no lo son. En el caso de igual estension hay reciprocidad y por consiguiente la proposicion es invertible.

Demostremos ahora el recíproco del teorema, enunciado, esto es que: *Todo punto equidistante de los estremos etc. dista igualmente* y todo el que *dista desigualmente está fuera etc.*

Razonaremos del siguiente modo: La tésis del propuesto *dista igualmente etc.* ó es mas estensa ó igualmente estensa que la hipótesis *está en la perpendicular etc.* (es evidentemente falsa una proposicion que tenga hipótesis mas estensa que la tésis) si probamos que es igualmente estensa, probado quedará que es invertible la proposicion, es decir, que podremos ponerla como hipótesis pasando á ser tésis la hipótesis.

Supongamos que la tésis citada es mas estensa que la hipótesis Entonces tendremos que admitir que: *Todo punto situado en la perpendicular etc. dista igualmente etc.* y *todo punto situado fuera de la perpendicular etc., dista igualmente etc.* proposiciones que obtenemos combinando á la tésis comun todas las hipótesis posibles. Pero esta segunda proposicion así formada se opone á la segunda parte del directo *todo punto situado fuera de la perpendicular, etc. dista desigualmente, etc.* y como esta es cierta, la anterior será falsa, es decir, que tenemos que rechazar que: *Todo punto situado fuera etc. está en la perpendicular*, luego solo será cierto que: *Todo punto situado en la perpendicular etc. dista igualmente etc.* siendo la tésis de idéntica estension que la hipótesis: luego se puede invertir y tendremos que todo punto que dista igualmente etc. está en la perpendicular etc.

De igual modo llegaremos á probar que la tésis *dista desigualmente etc.* es idéntica en estension á la hipótesis *todo punto situado fuera de la perpendicular etc.* y por consiguiente la certeza de que *si un punto dista desigualmente etc., está fuera de la perpendicular etc.*

Supongamos por último que habiendo probado que: *Todo punto situado en la perpendicular etc. dista igualmente etc.* y que *todo punto que dista igualmente etc. está en la perpendicular etc.* tratemos de probar que *todo punto situado fuera etc. dista desigualmente* y que *todo punto distante desigualmente etc. está fuera de la perpendicular levantada en su punto medio.*

En virtud de ser cierta la primera parte del teorema directo y su recíproco queda probado que la hipótesis; *Todo punto situado en la perpendicular* tiene idéntica estension que la tésis *dista igualmente.* Luego la proposicion: *Todo punto situado fuera de la perpendicular etcétera dista igualmente etc.* no puede ser cierta, porque como además lo es que *todo punto situado en la perpendicular etc. dista igualmente etc.* la tésis comun *dista igualmente* tendria mas estension que la hipótesis *está en la perpendicular*.

Siendo falso que: *Todo punto situado fuera de la perpendicular etc. dista igualmente etc.* será cierto que: *Todo punto situado fuera de la perpendicular etc. dista desigualmente etc.* De igual modo se probará que *todo punto que dista desigualmente etc. está fuera de la perpendicular* partiendo de que *todo punto que dista igualmente está en la perpendicular*.

Para comprender mejor esta exposicion formaremos el siguiente cuadro:

2.° caso.

Todo punto situado en la perpendicular etc. dista igualmente etc. Todo punto situado fuera etc. dista desigualmente.	(probado.)

Si la tésis 1.ª fuese mas estensa que la hipótesis 1.ª tendriamos

(1) Todo punto situado en la perpendicular etc. dista igualmente etc. (2) Todo punto situado fuera etc. dista igualmente etc.	(hasta ahora ninguna desechable)

Pero

Todo punto situado fuera etc. dista igualmente etc. Todo punto situado fuera etc. dista desigualmente etc.	(incompatibles.)

La 2.ª es cierta; luego la 1.ª falsa; luego solo es cierta la proposicion (1) con identidad de estension; luego es invertible.

3.er caso.

Todo punto situado en la perpendicular etc. dista igualmente etc. Todo punto que dista igualmente etc. está en la perpendicular etc.	(probado.)

Por ser idéntica la estension de la hipótesis y tésis

Todo punto situado en la perpendicular etc. dista igualmente etc. Todo punto situado fuera de la perpendicular etc. dista igualmente etc.	(no pueden ser al mismo tiempo ciertas.)

Pero la primera es cierta; luego la segunda es falsa; luego: *Todo punto situado fuera de la perpendicular etc. dista desigualmente etc.* es cierta.

Cuestiones geométricas.

Respecto al objeto dividiremos las cuestiones geométricas en tres grupos segun se trate de relacionar posiciones con posiciones, magnitudes con posiciones ó inversamente, y magnitudes con magnitudes.

Así en el teorema: *Dos rectas perpendiculares á una tercera son paralelas* se establece una relacion entre posiciones.

En el teorema: *La perpendicular es la mas corta distancia que se puede trazar de un punto á una recta,* se relaciona la posicion con la magnitud.

Y en el teorema: *Dos paralelógramos son proporcionales á los productos de sus bases por sus alturas* se trata simplemente de relaciones de magnitud.

Existencia de las figuras.

En matemáticas y especialmente en Geometría es necesario muchas veces probar la existencia de ciertas entidades, y esto es debido á que la arbitrariedad del entendimiento puede producir lo contradictorio que no es admisible en el mundo de la realidad.

Así muchos geómetras ponen especial cuidado en probar la existencia de la perpendicularidad y paralelismo y distinguirla de otra cuestion distinta que inmediatamente trataremos, cual es la determinacion.

Legendre prueba la existencia de dos ángulos adyacentes rectos valiéndose del movimiento de una recta al rededor de un punto.

El paralelismo es probado por el teorema: *Dos perpendiculares á una tercera son paralelas,* y hay que observar que así como la igual inclinacion de una recta á ambos lados de otra da la perpendicularidad, la igual inclinacion de una recta con relacion á dos y á un mismo lado da el paralelismo, ya sea este ángulo oblícuo, ya recto ó ya sea cero, casos á que corresponden respectivamente las proposiciones: *Dos rectas que forman con otra ángulos correspondientes iguales son paralelas; dos perpendiculares á una tercera son paralelas y dos paralelas á una tercera son paralelas.*

Establecida la existencia en lo que podemos llamar elemento de posicion ó sea el ángulo, concluiremos estableciendo la existencia del polígono; pues admitida la existencia del ángulo, ó sea la de dos rectas pasando por un punto, probada está la del triángulo, porque es posible tomar dos puntos de ambos lados y unirlos con una recta, que no pasará por el vértice, pues si pasara, los dos lados se confundirian en una recta.

Existiendo el triángulo, existe el cuadrilátero, pues sobre uno de los lados del primero es posible la construccion de otro triángulo, pasando á ser diagonal el lado comun; continuando de esta manera quedaria probada la existencia del pentágono, exágono y en general del polígono.

Un breve razonamiento demuestra la existencia del paralelógramo. Dado el ángulo *bac* (fig. 2) es posible la existencia de las paralelas *bd* y *cd* respectivamente á *ac* y *ab*, y trazando la recta *bc*, como los ángulos *bcd* y *cbd* son respectivamente iguales á los *cba* y *bca* por alternos, seria superponible la parte *bcd* de la figura sobre la *cba* mediante un giro de 180° en el plano, y como *ca* y *ba* se encuentran, *cd* y *bd* tambien se encontrarán; queda, pues, probado que la figura será cerrada teniendo sus lados paralelos dos á dos.

Análogas consideraciones probarian la existencia de los demás polígonos que tengan determinado grado de regularidad.

Determinacion de las figuras.

Despues de la existencia se debe tratar la determinacion, que es una especie de esclusion; pues determinar, por ejemplo, la perpendicular ó la paralela por un punto á una recta, es escluir todas las que pueden pasar por dicho punto menos una que es la perpendicular ó paralela, dicha esclusion la verifican los autores por reduccion ad absurdum.

Tenemos, pues, que los teoremas: *Por un punto solo se puede trazar una perpendicular y paralela á otra recta* determinan la perpendicular y paralela á dicha recta.

Y la proposicion siguiente: *Por un punto no se puede trazar en una direccion mas que una recta con inclinacion determinada*, que Vallejo enuncia como teorema diciendo que: *Dos ángulos iguales se pueden superponer de modo que se confundan*, y otros geómetras como definicion exponiendo que: *Dos ángulos son iguales cuando superpuestos coinciden*, es la que determina la oblicuidad.

La determinacion del triángulo se verifica mediante estas proposiciones, pues con su auxilio se consigue la superposicion ó sea la identificacion de uno, del cual se dan elementos, con otro ya existente. Ocurren en esta cuestion tres casos principales segun se den tres lados, dos y el ángulo comprendido y uno y los ángulos adyacentes.

La determinacion del polígono se verifica, ya con auxilio de las demostraciones que determinan el triángulo, ya con el de las que determinan los elementos de posicion ó sea los ángulos.

Relaciones del contenido de las figuras.

Determinada una figura, lo inmediato es conocer *relaciones de su contenido*, esto es, las relaciones de coexistencia entre sus elementos y los que resultan de combinarla con ciertas construcciones.

Toda figura geométrica es resultado de la combinacion de elementos rectilineos ya finitos, ya infinitamente pequeños y de sus posiciones respectivas. En el caso de ser de longitud finita se obtiene el polígono, en el caso de ser infinitamente pequeños, obtenemos la infinita variedad de curvas en que la posicion respectiva de dichos elementos está determinada por el ángulo de contingencia.

Despues de estudiada cada figura en su existencia y determinacion se combina con construcciones arbitrarias. Y unas veces se trata de hallar el modo de encontrarse las tres alturas de un triángulo ó las tres medianas del mismo, otras de hallar la relacion entre la perpendicular bajada desde el vértice de un triángulo isósceles á la base y los demás elementos que lo constituyen etc.

Todas estas proposiciones estudiadas y sistematizadas son como el andamiaje que sirve para infinidad de construcciones geométricas, pues en cuanto se ha hallado la solidaridad de combinaciones dadas de elementos, esta solidaridad nos da medios de supuesto cierto número de ellos obtener los restantes.

Figuras equivalentes y semejantes.

Por último, podemos referir unas entidades á otras.

Lo haremos con arreglo á los dos casos que ocurren; el de igual estension y distinta forma y el de idéntica forma y distinta magnitud, ó sea *la equivalencia* y *la semejanza*.

Distinguiremos en las figuras dos clases de líneas: *dimensivas* y *formales*; llamamos dimensivas las que influyen en la estension y formales las que determinan la forma.

Para proceder metódicamente en las relaciones de figuras de forma distinta se debe principiar por considerar aquellas en que las líneas dimensivas se confunden con las formales (rectángulos de bases iguales y desiguales alturas), continuando con la comparacion de rectángulos cuyas bases y alturas son distintas, y terminando con la de figuras en que las líneas dimensivas son distintas de las formales, (paralelógramos de igual base y altura.)

Es útil observar qne las cuestiones de equivalencia (distinta forma é idéntica magnitud) se reducen á cuestiones de identidad, porque es fácil *convertir las que se refieren á formas distintas en otras que se refieran á sumas ó diferencias de formas idénticas*.

Las cuestiones de semejanza se reducen á *hacer ver la identidad de forma de figuras desiguales en magnitud*.

La forma resulta de la combinacion de longitudes é inclinaciones tanto en las figuras curvilineas como en las rectilineas. La identidad de forma es debida á la conservacion de la posicion relativa de elementos y á la constancia de relacion entre sus magnitudes en una y otra.

Probado que: *Si se cortan dos lados de un triángulo por una paralela al tercero, el triángulo parcial es semejante al total*, (lo cual equivale á decir que son de igual forma) al estudiar cualquier caso de semejanza de triángulos, la cuestion se reduce á identificar, por ejemplo, el triángulo $a' b' c'$ (fig. 3) con el amn que es semejante al abc.

Antes de pasar á otro órden de ideas, añadiremos que las líneas dimensivas están en razon inversa en figuras de igual magnitud y las formales en razon directa en figuras de igual forma.

Figuras referidas al círculo.

Falta exponer otra série de cuestiones importantísimas que abre vastos horizontes á la ciencia matemática, nos referimos á la teoría de ángulos y polígonos considerados con relacion al círculo. Esta rama de la geometría elemental tiene grandes analogías con la geometría analítica. Así como en esta determinamos un punto por la posicion con respecto á un sistema de ejes, y un lugar geométrico por el conjunto de posiciones relativas de sus puntos, así en la teoría que nos ocupa se trata de establecer cuantas relaciones se han estudiado, pero no en absoluto, sino asociadas á la idea de posicion relativa á la circunferencia. Esta nueva categoría de ideas permite el estudio combinado de las figuras rectilíneas y curvilíneas y tratar en toda su amplitud las relaciones de coexistencia.

Fácil es obtener todas las relaciones de posicion antes estudiadas independientemente, y ahora considerando las posiciones de la recta ó combinacion de rectas en el círculo.

En los teoremas. *El ángulo cuyo vértice se halla en la circunferencia y cuyos lados pasan por los estremos de un diámetro, es recto. Las bisectrices de los ángulos formados por los lados opuestos de un cuadrilátero inscripto, son perpendiculares* se hace ver cómo las relaciones de arcos y ángulos con el círculo dan la relacion de perpendicularidad.

El teorema: *Si por el punto de contacto de dos circunferencias se trazan dos cuerdas, las rectas que unen en cada una sus estremidades son paralelas,* (fig. 4) ofrece un ejemplo en que se determina el paralelismo.

Otros muchos ejemplos podíamos citar donde se viera repetida la série de relaciones estudiadas en las teorías anteriores.

Añadiremos por último algunas ideas dignas de recordarse acerca de la proporcionalidad de líneas considerada juntamente con su posicion.

Solo trataremos de distancias proporcionales tomadas en dos rectas que se encuentran.

Dos casos debemos distinguir: 1.° Cuando las posiciones están en razon directa con las magnitudes. 2.° Cuando las posiciones están razon inversa con las magnitudes. Tanto en uno como en otro puede considerarse si se toman las distancias en un solo lado del vértice ó en ambos.

Si se trata de la relacion directa, la proporcion debe establecerse: 1.^{er} segmento *es á* 2.° segmento *como* distancia en 1.° ó prolongacion del 1.° *es á* 2.° ó distancia tomada en prolongacion del 2.°, esto es; $ob :: oa : oa' : ob' :: oa'' : ob''$ (fig. 4.)

En este caso hay paralelismo entre las rectas que unen los puntos correspondientes en los segmentos.

Si se trata de la relacion inversa, la proporcion debe establecerse: 1.^{er} segmento *es á* 2.° *como* distancia en 2.° ó prolongacion del 2.° *es á* 1.° ó distancia en prolongacion del 1.° ó bien (fig. 5) $o'a : o'a' :: o'b' \; o'b ; oa' : oa :: ob' : ob$.

El teorema: *Si por un punto fuera de una circunferencia se trazan una secante y una tangente, esta es media etc.* es caso particular del relativo á las dos secantes como se ve por la (fig. 6.) pues el producto de los segmentos de la secante movible es siempre igual al de los de la fija, y por consiguiente lo será en el límite de las posiciones.

Se puede considerar como el tránsito de la proporcion directa á la recíproca.

Si en los lados om, on se toman dos distancias oq, oa inversas con relacion á oa y ot, términos de $oa : ot :: ot : ob$; tendremos $oa : ot :: oq : op$ y sustituyendo en la 1.^{a} proporcion resulta $oq : op :: ot : ob$ que están en razon directa, y hay paralelismo.

Teoremas fundamentales en las diversas teorías geométricas.

Los teoremas relativos á la igualdad de triángulos apoyados en los que determinan la posicion de una recta con respecto á otra en los tres casos, sirven de fundamento, á las cuestiones en que se trata de relaciones de igualdad; mediante ellos, conocida cierta combinacion de posiciones y magnitudes que entran en un sistema de líneas ó figuras llegan á determinarse otro cierto número de rectas, posiciones, ó unas y otras juntamente

En las cuestiones relativas á desigualdad de rectas es fundamental la proposicion: *De dos quebradas compuestas de dos rectas cada una y cuyos estremos son comunes, es mayor la que mas se aparta de la recta*, que se apoya en la verdad.

La recta es la línea mas corta que se puede trazar entre dos puntos.

En las cuestiones relativas á igualdad y desigualdad de inclinaciones tiene gran importancia el teorema: *El ángulo esterno de un triángulo es igual á la suma de los no adyacentes á él.*

En las cuestiones de semejanza la proposicion fundamental es: *Si se traza una recta que corte á dos lados de un triángulo sin pasar por el vértice paralelamente al tercero, el triángulo parcial será se-*

mejante al total, que sirve para probar las relativas á semejanza de triángulos, reduciendo esta cuestion á cuestiones de identidad.

Las cuestiones de proporcionalidad de rectas fúndanse en el teorema: *Dos ángulos inscriptos que tienen un arco comun ó arcos iguales, son iguales* del cual son inmediatas consecuencias el relativo á las cuerdas que se cortan y á las secantes dirigidas de un punto esterior á una circunferencia, y no dejaremos de añadir que así como el teorema relativo á la tangente y los segmentos de la secante se desprende del anterior, el teorema: Un cateto es medio proporcional entre la hipotenusa y su proyeccion sobre la misma, se desprende de este último, como puede verse en la (fig. 8) pues es uno de sus casos particulares.

En la teoria de las áreas los teoremas: *Dos paralelógramos de igual base y altura son equivalentes* y dos rectángulos son proporcionales á los productos de sus bases por sus alturas son fundamentales, sirviendo el primero para la reduccion de formas lo cual se hace reduciendo la cuestion de equivalencia á de identidad, y el segundo es importante para resolver las cuestiones de relaciones de magnitedes en su mayor generalidad.

En geometría del espacio con poca diferencia, análogas consideraciones podrian hacerse.

Análisis de algunas cuestiones matemáticas

Hemos indicado que la actividad intelectual combina los datos suministrados por la razon y los sentidos. Estos datos en el caso que nos ocupa son la estension y la cantidad.

Un conjunto indeterminado de unidades es la cantidad.

El entendimiento concibe la série de la pluralidad por la agregacion que comienza con la unidad consigo misma.

Este hecho elemental encierra en sí el gérmen de todas las cuestiones matemáticas. En primer lugar tenemos una igualdad de la suma con la reunion de los sumandos; en segundo la sustitucion de operaciones sucesivas elementales á una operacion compleja. La série sucesiva de resultados nos da el órden sucesivo en la escala de la pluralidad (aumento por unidades), órden fundamental, sin el cual todos los demás órdenes son imposibles.

Hemos comenzado por la agregacion sucesiva de unidades; el tránsito á la agregacion sucesiva de grupos de unidades es muy natural, y así como la primera operacion se puede representar por la forma $y=n$ que representa que un número es la suma de sus unidades, la segunda se puede expresar por $y=a+b+c+d+\ldots$ que representa que la suma es la reunion de los sumandos. El caso particular $y=a+a+a+\ldots=an$ en que los sumandos son iguales se llama multiplicacion. Todo esto se funda en el principio: *Lo que se hace con el conjunto de las partes etc.* que legitima la sustitucion de lo sucesivo por lo simultáneo,

Asi como hemos pasado de la agregacion de unidades á la de grupos de unidades, podemos pasar de la agregacion de números á agregaciones de productos $y=an+an+an+...=anp$ $y=anp+anp+anp+...=anpq$. es decir, á la forma $y=a.b.c\ d.e...$ que es la forma general de los productos, cuyo caso particular $y=a.a.a.a...=a^n$ da la forma *potencia*.

Vemos, pues, que la aplicacion del principio citado y la consideracion de los conceptos de igualdad y desigualdad, nos ha conducido á las tres formas $y=a+b+c+..$ $y=an$ $y=a^n$ fundamentales en matemáticas que expresan los tres modos elementales de formacion de los números.

El entendimiento puede proponerse cuestiones inversas á estas, esto es, partiendo de los resultados llegar á los datos, de la suma, producto y potencia, al resto, cociente y raiz (estas nuevas operaciones no forman números como las anteriores, pues las inversas suponen directas que ya los han dado; por esto, los resultados de las directas siempre son aceptables y comprensibles, mientras que no siempre sucede esto en las inversas como veremos.)

En cuanto á la suma, la cuestion inversa es indeterminada, pues á una suma corresponden muchos sistemas de sumandos, por lo cual solo se estudia en matemáticas la cuestion referente á una suma de dos sumandos, que es mas determinada, y para cuya determinacion completa se fija el otro sumando.

Respecto á la multiplicacion, considerando tambien el caso de dos factores, se determina fijando uno de ellos.

Ocurre preguntar ¿estamos en idénticas circunstancias al comenzar por los resultados que cuando comenzamos por los datos? Y es fácil notar que no.

Al proceder directamente hemos ido formando séries de números sometidos á las leyes arbitrarias que el entendimiento fijó. Asi arbitrariamente podemos constituir la série de múltiplos de 3; 3, 6, 9, 12, 15; ó la de los cuadrados de los números 4, 9, 16, 25, casos que corresponden á las formas $y=an$ $y=a^2$ y aquí no puede haber contradiccion. Pero al retroceder por medio de operaciones inversas (sustraccion, division, estraccion de raices) partimos de números ya formados, números que están todos ellos sujetos á leyes propias (así el 30 está sujeto á ser divisible por 5 y 6, y el 11 á no ser divisible por ninguno.) Y es evidente que procediendo arbitrariamente sobre lo que ya está formado en conformidad con ciertas leyes que constituyen su esencia, exigiremos acaso que sea sometido á otras leyes en contradiccion con las que únicamente le son aplicables. De aquí resulta que nos sea imposible hallar las veces que 30 contiene á 12, pues es contra su naturaleza ser divisible por 12; así como es tambien imposible hallar el número que multiplicado por sí de 5, pues hemos tomado como punto de partida un número á que no corresponde la ley de ser cuadrado, la cual está en contradiccion con su esencia.

De manera, que al proceder inversamente puede suceder que, ignorándolo, las condiciones supuestas repugnen con las condiciones existentes, entonces obtenemos tres resultados: *negativo, fraccionario incomensurable*. Esto da origen á cuestiones curiosas de que nos ocuparemos mas tarde.

Obtenidas las formas $y=a+b+c+..$ $y=an$, $y=a^n$ que podemos considerar como elementales, se observa que por su combinacion se pueden originar formaciones complejas ó derivadas en número indefinido. De ellas solo citaremos las $y=a+bn.$ $y=a.b^n$ que encierran en sí las teorías de progresiones y comprenden los números formados por progresion ya aritmética ya geométrica.

Las formas citadas y cuantas se pueden suponer indican que el género es la reunion de especies, es decir, que en $y=ab^n$ la forma progresion encierra los infinitos casos que pueden ocurrir para las infinitas combinaciones de valores que se pueden dar á $a.$ b y n.

Fácil es pasar de estas ideas á la teoría de ecuaciones.

Para lo cual basta advertir: 1.° Que una cantidad puede admitir infinidad de formas. 2.° Que una forma puede corresponder á infinidad de cantidades. Así $15=7+8=3.5=6+3^2$ etc. y $5=1+2^2$; $11=2+3^2$; $12=3+3^2$ etc.

3.° Esto da ocasion á la resolucion de problemas siempre que se deje alguna condicion indeterminada.

De las condiciones puede haber una sola indeterminada, ó puede haber varias. En el primer caso el problema es determinado é indeterminado en el segundo. Así $7=x+12^2$ es determinada. $7=x+4y$ es indeterminada. Resolver la segunda es hallar los sistemas de valores de x é y que las satisfacen, y para esto se fijan valores de una de las indeterminadas para hallar el valor coexistente de la otra; pero fijar un valor á x, por ejemplo, es lo mismo que introducir una ecuacion que en último resultado se podrá expresar por $x=$ *número que se fija* y como esto se tendrá que hacer para todas las indeterminadas menos una, resulta que la ecuacion en que entran todas, ó sea la propuesta y además $n-1$ ecuaciones determinan igual número de indeterminadas dando un sistema de n ecuaciones con n incógnitas. En el caso general cada ecuacion de determinacion en vez de expresar el número á que es igual cada indeterminada, podrá expresar relaciones entre várias indeterminadas.

Hechas estas indicaciones observemos, que siendo una cantidad susceptible de infinidad de formas, puede proponerse el siguiente problema: *Dadas dos formas ó modos de construccion de una can-*

tidad, hallar qué combinaciones de valores de algunos elementos corresponden á sistemas de valores de otros que se suponen conocidos. Así, suponiendo $y = 7x + 4z$; $y = 5x + 23$ se busca el sitema de valores de x y z que coexiste con los números 7, 4, 5 y 23 para que las dos formas den una misma cantidad.

Tenemos, pues, reducidas las cuestiones relativas á ecuaciones á: *Hallar las condiciones de coexistencia de elementos en formas distintas de una misma cantidad.*

Escritas las espresiones citadas en su forma general tendremos $y = ax + bz$, $y = cy + d$, y expresando la condicion de igualdad $ax + bz = cx + d$ en que hay que ver la variedad de valores de x y z que coexisten con la variedad de sistemas de valores que pueden suponerse para a, b, c y d.

Ahora es fácil dar una esplicacion de ciertos resultados singulares que se obtienen. Segun las cuestiones pueden ocurrir tres casos: ó hay infinidad de valores de ciertos elementos que combinados con los conocidos dan para las cantidades valores iguales; ó no hay ningun sistema de valores de ciertos elementos que satisfagan á dicha condicion, ó hay un número limitado.

Si consideramos las formas $y = a^2 + 2ax + x^2$, $= (a + x)^2$ obtendremos para la realizacion de $a^2 + 2ax + x^2 = (a + x)^2$ infinidad de valores de x; este es el caso de la indeterminacion que se obtiene cuando se han propuesto condiciones idénticas.

Supongamos que $y = \frac{x}{v}$ $y = \frac{x-a}{v}$. Al pretender que satisfagan á la condicion $\frac{x}{v} = \frac{x-a}{v}$, es decir, que den valores idénticos nos encontramos con un imposible, y efectivamente, se comprende que desarrollando la série de números que en la escala de la pluralidad dan $y = \frac{x}{v}$ $y = \frac{x-a}{v}$ jamás podremos obtener dos números iguales, y como esto se verifica cualesquiera que sean los valores de x, a y v, esta imposibilidad no es introducida por causa de los mismos sino por causa de la naturaleza de las relaciones en que entran; estas relaciones son incompatibles.

Algunas veces sucede que se han supuesto tales relaciones y combinaciones de valores que no pueden satisfacer á la exigencia de igualdad sino con valores negativos. Asi en $y = 2\ (34 + x), = 60 + x$, solo el valor -8 satisface á $2\,(34 + x) = 60 + x$.

Observemos que así como el valor infinito proviene de una repugnancia de las relaciones supuestas que no depende de los valores de las cantidades sino de la naturaleza de las relaciones, así el valor negativo indica una incompatibilidad en relaciones de magnitud, incompatibilidad que es fácil ver se corrige variando los signos adictivos en sustractivos de ciertas cantidades ó inversamente. De manera que $2\,(34 - x) = 60 - x$ dará $x = +8$.

Hemos pues, manifestado el diferente orígen de la aparicion del valor infinito y negativo, y en resumen que los resultados singulares provienen de la arbitrariedad del entendimiento al poner las condiciones de los problemas en contradiccion con las leyes ó relaciones de las cantidades.

Indicaremos brevemente que para dar amplitud al mundo de las relaciones y para no dejar incompleto el sistema de cuestiones que provienen tanto de las operaciones inversas, como de las hipótesis arbitrarias (las operaciones inversas tambien implican hipótesis arbitrarias) que se pueden hacer en las igualaciones de formas distintas, se han dado cabida en el cálculo á los números fraccionarios é incomensurables. La introduccion de estos se hace asociando á la idea de número la de continuidad, y considerando que este no solo puede expresar pluralidad, no solo sirve de espresion de la cantidad, sino de medida como anteriormente espusimos y por consiguiente que en este segundo caso la unidad es compleja, pues está acompañada de lo que se llama módulo que indica la modificacion de naturaleza especial que se ha de realizar sobre el número. Así en $^3/_4$ la unidad está modificada por el signo $^1/_4$ lo cual quiere decir que á cada número se ha de aplicar el modificativo que afecta á su unidad. Mediante estas consideraciones el cálculo de las fracciones queda reducido á cálculo de enteros, cuyo resultado se ha de someter á la modificacion espresada por el denominador comun.

Los números incomensurables, hemos hicho, resultan de una operacion inversa. Tambien resultan de condiciones impuestas á alguna operacion como sucece al hallar la fraccion decimal equivalente á $^3/_7$ que equivale á pedir la relacion entre 3 y 7 expresada en valores dependientes entre sí segun la ley decimal, lo cual es incompatible con la naturaleza de los números dados.

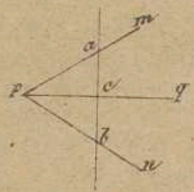
La fraccion decimal periódica resultante puede explicarse mediante la consideracion del módulo, diciendo que es una suma de un número infinito de sumandos cuyo módulo está sujeto á decrecer con arreglo á la ley decimal. Asi $^7/_9$ =0,4285714..... es la suma de 0,4; 0,02; 0,008; 0,0005.....

Esto se aplica tambien á las raices incomensurables.

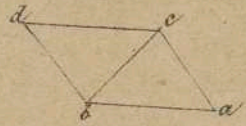
Por último los números negativos segun distinguidos matemáticos se esplican por la adjuncion á la idea de número de la de orígen.

Con esto damos por terminado este trabajo, pues nuestro propósito ha sido únicamente tratar algunas cuestiones de las muchas que ofrece la ciencia matemática.

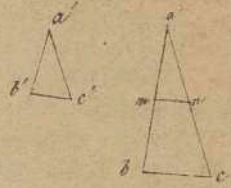
Figª 1ª



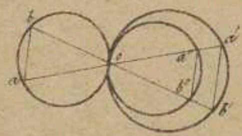
Figª 2ª



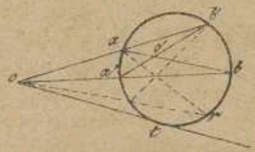
Figª 3ª



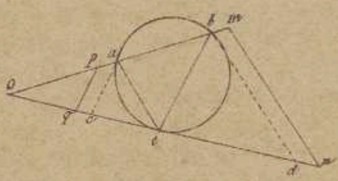
Figª 4ª



Figª 5ª



Figª 6ª



Figª 7ª