

9 = 2549

LA ENSEÑANZA

DE LA

CIENCIA MATEMÁTICA

EN LA UNIVERSIDAD

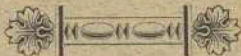
POR EL DOCTOR

D. ZOEL GARCÍA DE GALDEANO

Catedrático de la Universidad de Zaragoza, Socio correspondiente de las RR. Academias de Ciencias de Madrid y de Lisboa.

(Publicado en *El Progreso Matemático*)

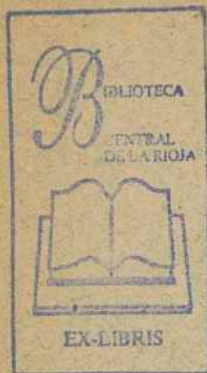
Precio: UNA PESETA.



ZARAGOZA

Imprenta de C. Ariño, Coso. núm. 100, bajos.

1894



NO SE PRESTA

BIBLIOTECA CENTRAL DE LA RIOJA



10000210286

MDS 009832

T=77874

C. 210.286

Donación de D. Ariño, Gobernador,

FAN

9361

LA ENSEÑANZA

DE LA

CIENCIA MATEMÁTICA

EN LA UNIVERSIDAD

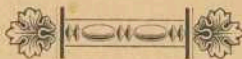
POR EL DOCTOR

D. ZOEL GARCÍA DE GALDEANO

Catedrático de la Universidad de Zaragoza, Socio correspondiente de las
RR. Academias de Ciencias de Madrid y de Lisboa.

(Publicado en *El Progreso Matemático*)

Precio: UNA PESETA.



R. 89.248

ZARAGOZA

Imprenta de C. Ariño, Coso. núm. 100, bajos.

1894

R/8.972

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

1913

THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS

CHICAGO, ILL.

THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS

CHICAGO, ILL.

THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS

CHICAGO, ILL.

THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS

CHICAGO, ILL.

THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS

CHICAGO, ILL.

Al Excmo. Sr. D. Segismundo Moret
y Prendergast

al instaurador de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza y protector de El Progreso Matemático.

Homenaje de consideración y profunda gratitud.

Z. G. de Galdeano.



1877

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

PHYSICS

REPORT OF THE PHYSICS DEPARTMENT

FOR THE YEAR 1877

CHICAGO, ILL.

LA ENSEÑANZA DE LA CIENCIA MATEMÁTICA

EN LA UNIVERSIDAD (*)

I

Voy á comenzar este trabajo cumpliendo con el deber moral, aunque este sea poco grato, de consignar un hecho que se viene repitiendo como por excepción lamentable en nuestra España, patria de tantos talentos ilustres, de tantos eximios oradores, de tantos preclaros genios artísticos, que han mantenido á gran altura nuestro nombre en Europa durante algunos siglos, hecho que repito es un deber de todo aquel que se interese por la prosperidad y enaltecimiento de nuestra querida patria el consignarlo. Este hecho es el abandono en que se encuentra la instrucción científica en España, y especialmente la enseñanza de las ciencias matemáticas, hecho que debiera llamar con urgencia suma la atención de los jefes de Instrucción pública y aun también de los que estamos obligados por nuestra profesión á elevar la cultura de la juventud de hoy, que ha de sucedernos mañana en el legado que les dejamos para continuar su mision en esta vida.

Que nuestra instrucción en la ciencia matemática es inferior á la de las demás naciones de la Europa es un hecho, y los hechos son indiscutibles; pero si son indiscutibles, son al menos explicables, y este es uno de los objetos de mi actual trabajo; y no solo voy á limitarme á consignar y explicar el hecho; sino que voy á hacer algunas indicaciones acerca del modo de remediarlo, siquiera como

(1) El interés de actualidad que tiene el discurso del Sr. Vallin, del que hemos dado una noticia bibliográfica, así como el importante artículo publicado por el Sr. Menendez Pelayo de que también hemos transcrito algunos párrafos nos obliga á publicar la conferencia que preparábamos sobre análogo asunto en el salón de la Facultad de Ciencias y que será substituida por otra sobre *El imaginarismo en la ciencia matemática*.

precedente para que otros de mayor competencia, puedan completar la obra, que realizada solo por mí sería por necesidad deficiente.

Pero colaboremos varios en esta grande obra; reunamos nuestros esfuerzos; conduzcamos nuestras actividades, no en direcciones divergentes, sino hacia un mismo fin; y veremos nuestras energías no sólo sumarse, sino multiplicarse y centuplicarse y aun aumentar según otras funciones matemáticas más rápidamente crecientes.

Para demostrar que nuestro nivel científico es por desgracia inferior al nivel científico medio de otras naciones basta preguntar por la escuela científica española, ó concretándose, por la escuela matemática española, y aun extremando más el caso, por un solo nombre de matemático español cuyo eco resuene en el mundo como resuenan los nombres de Arquímedes, de Euclides, de Vieta, de Descartes, de Newton, de Leibnitz, de Abel, de Wronsky, de Lobatesfky, por citar uno solo de cada nación y de las más variadas latitudes, y por no seguir haciendo una enumeración de otros muchos talentos matemáticos de diversas gerarquías que llenan uno de los cuadros de honor de la inteligencia humana en una de las direcciones á que ésta ha llevado su actividad para complementar el gran cuadro de la ciencia universal

Pero hay más; no solo no existe escuela matemática española, ó sea un núcleo de doctrina original y exclusiva que engrane con las doctrinas cultivadas siempre con afán y entusiasmo creciente en otras naciones, que se funda en la ciencia general, y nos permita ocupar un lugar, aunque sea modesto, dentro del vasto plan de la arquitectónica matemática, sino que á manera de contrapeso, pero de contrapeso negativo, vemos por todas partes el indiferentismo por la ciencia, un utilitarismo siempre dispuesto á preguntar por el fin util de tal ó cual acción ó esfuerzo, antes de haberse hecho uno digno de tal fin. Unas tendencias hoy caracterizadas con una palabra, *lo práctico*, repetida hasta inconscientemente y por costumbre, y que pugna con el nobilísimo abolengo de nuestra inteligencia, que ella sola nos hace superiores á todos los demás seres de nuestro planeta, y ella sola nos ha creado nuestra fuerza material y nuestras comodidades y nuestras riquezas; esas comodidades y riquezas que buscan aquéllos que ni aun tienen una palabra de gratitud hacia el manantial benéfico que las han procurado y que se

reduce, en última síntesis, á la *condensación del trabajo intelectual de la humanidad durante muchos siglos*.

Muy cargado de tonos oscuros se encontrará el cuadro que he principiado á diseñar, y que no me creo en la precisión de concluir, puesto que mi objeto no es este, sino el de presentar los perfiles que otros podrán completar trayendo á nuestro espíritu la perspectiva deplorable que hoy se ofrece como conjunto de hechos permanentes en España, para enseguida pretender disculpar esta decadencia en que nos hallamos, este desnivel intelectual que hoy nos agobia, y aun detiene y hace ineficaces nuestros esfuerzos para la lucha de la competencia que también, como se sabe, trasciende á la esfera de lo material y que á su vez, por esa reciprocidad tan propia de los teoremas geométricos, de la esfera de nuestra penuria material se eleva á la deficiencia de nuestras energías intelectuales.

Basta para explicar y disculpar el hecho excepcional que ofrece España y que hace poco he consignado, de su aislamiento científico, el recordar la vida toda de nuestra nación que constituye su historia, y que se resume en una guerra de raza sostenida con perseverancia incansable por espacio de ocho siglos que ha concentrado allí todo el esfuerzo patrio, y que no le han permitido distraerse hacia otros fines que no fueran cantar las glorias de nuestra raza en tan tenaz contienda, de idealizar las proezas de nuestros héroes, de ensalzar el amor patrio, y de conservar y sostener y afianzar nuestras creencias frente á las del invasor, lanzado al fin por siempre de nuestro suelo regado por la sangre de los que nos lo restituyeron y que más tarde, á través de nuevas guerras y disturbios necesarios para la constitución de la nacionalidad española, no pudieron vivir en la paz del hogar desde donde, en la época del triunfo, el esfuerzo material cede su plaza á otra energía que se enseñoorea de su ser, y que además de contribuir á afianzar sus conquistas materiales, llévale á otra etapa de la vida de la humanidad, que los que vivimos al acercarnos al siglo XX podemos consignar diciendo que hemos llegado al *siglo de las ciencias*.

Pero si hemos llegado á sincerarnos del hecho al parecer inexplicable de no tener hoy escuela científica española, ni de haberla tenido cuando Italia, Francia, Alemania é Inglaterra renacían y

fundaban las suyas, bajo los resplandores del genio que á intervalos surgía y concentraba en sí los adelantos de las ciencias, ¿podremos hoy que la paz se ha restablecido después de nuestras guerras extranjeras é intestinas, después que la experiencia nos ha mostrado que el desequilibrio de una nación con respecto á las demás, la precipita hacia su ruina y decadencia material y moral, cejar en nuestra empresa de enaltecernos y esforzarnos por ofrecer nuestro óbolo en esa obra del progreso á que todas las naciones concurren, en las que todas tienen una parte como fruto de su individualidad y de su energía propia? Y no basta que para destruir este cargo aleguemos que España debe considerarse como una nación poco ha reintegrada en su vida, después del periodo de sus guerras y de su reconstitución; porque los Estados Unidos y las repúblicas del Sud de América son naciones ayer nacidas y hoy cuentan ya en su seno, no sólo los más variados organismos de producción material y de enaltecimiento intelectual, sino los alientos propios para llevarlos más adelante en virtud de sus energías individuales, de cierta autonomía moral ó espiritual que han sabido crearse. La Universidad, el Libro y la Revista Científica, hoy en estas naciones compiten con las de la vieja Europa, sobre todo en la primera de las citadas, hasta el punto de amenazar con llevarse, acaso en épocas no remotas, el centro de gravedad de la ciencia y de la civilización, desde el centro del mundo que hoy oscila entre las Universidades de la sabia Alemania á las aún casi vírgenes regiones del Occidente.

Establecidos estos preliminares necesarios para servir de trabazón en el conjunto de ideas que voy á exponer concernientes á la enseñanza de las ciencias matemáticas, voy á comenzar á llenar mi cometido.

Existen en las naciones, como en el organismo humano, dos entidades que, aun con fines opuestos, al parecer, engranan perfectamente, se armonizan, y dan una resultante, expresión de esta correspondencia armónica; y de igual modo que el sol dibuja con anchas zonas de fuego los surcos que abre en el espacio al impulso de su veloz carrera, y en nuestra inteligencia, al traducirse en idea este hecho, se reduce á una simple línea inmaterial que el centro de gravedad describe y que una fórmula matemática encierra como esquema y ley del fenómeno físico; también en el organismo social

aparecen dos hechos correlativos, dos entidades complementarias, dos tendencias distintas pero armónicas, algo que es como el alma al cuerpo, como el espíritu á la materia. Estas entidades son las que corresponden á las dos palabras *ideología* y *técnica*: los organismos que las encierran son la Universidad y las Escuelas ó Academias técnicas.

La Universidad es la síntesis de la vida intelectual de la Humanidad en cada época; recoge la herencia del pasado, la acumula y organiza y la conserva para ofrecer una más ancha base al porvenir que ha de continuar extendiendo la obra en nuevas síntesis cada vez más amplias y complejas. Este trabajo de asimilación y de síntesis va unido á un trabajo correlativo de perfeccionamiento de los métodos que acrecen las energías intelectuales á medida que son más dilatados los horizontes científicos; y esta correlación es tan necesaria, que sin ella no sería posible á la inteligencia el abarcar la ciencia en su conjunto. Por tal motivo, la misión de la Universidad, además de ser instructiva, debe ser educativa.

Las Escuelas ó Academias técnicas realizan una obra paralela á la de la Universidad; si ésta cultiva la ciencia por la ciencia, aquéllas la cultivan por sus aplicaciones. La Universidad tiene por fin el dilatar el mundo de la inteligencia, en el cual permanece, el presentarlo como un encadenamiento ú organismo de ideas y de métodos. La Técnica tiene por fin el llevar á la realidad material los principios abstractos de la ciencia y llegar á encadenamientos materiales, que son los canales, los puentes, el telégrafo, el teléfono, las transformaciones varias de la Industria, todo lo que tiende á presentar ante la obra de la Naturaleza la obra del Arte humana. No necesita saber los procesos varios de la inteligencia en conexión con la verdad; le basta poseer ésta en la medida conveniente para lanzarse á las aplicaciones y transformar la obra de la Naturaleza en la obra del Arte, como se acaba de indicar.

Prescindiendo, pues, de la Técnica que no es actualmente el asunto de este trabajo, y volviendo á la obra de la Universidad, que resulta debe ser esencialmente educativa, ya podemos abordar la cuestión de la enseñanza matemática que debe hallarse indisolublemente unida al desenvolvimiento científico.

Y si existe este enlace indisoluble, variando la ciencia, correlati-

vamente ha de variar la obra de la enseñanza y de la educación intelectual.

La ciencia es el encadenamiento convertido en organismo: y es claro que siendo en sus albores el encadenamiento más sencillo y los espacios que separan las verdades más amplios, también la energía del esfuerzo intelectual que las encierra había de ser proporcionalmente más intensa. Los descubrimientos de Euclides y de Arquímedes en la ciencia naciente de la antigüedad no son menos admirables que los de Descartes, de Newton y de Leibnitz y que los maravillosos inventos de la ciencia contemporánea. Aquéllos necesitaban el esfuerzo prodigioso del genio que adivina y que enlaza de un modo misterioso los extremos distantes de un encadenamiento lógico; nosotros poseemos el prodigioso recurso de los métodos que suple al genio, y que hace fácil el esfuerzo intelectual y naturales las deducciones más remotas. Aquéllos avanzaban lentamente; cada paso era el paso de un gigante por exiguo que hoy lo consideremos, bajo el prisma amplificador de los métodos modernos. Por esta razón no es extraño que en la antigüedad y aun en los siglos anteriores al nuestro la enseñanza matemática tuviera un campo muy circunscripto, y que la inteligencia llegase abrumada á poseer un corto número de verdades enlazadas por el esfuerzo del genio, por un procedimiento inventivo más que por un procedimiento lógico y deductivo.

Y siendo esto así ¿podemos tolerar, sin perjuicio grave, que en España los libros y los programas que sirvieron en el primer tercio ó aun en la mitad de este siglo continúen siendo los mismos que al finalizar éste, cuando en el espacio de cincuenta años la ciencia matemática ha sufrido las más radicales transformaciones? ¿Podemos seguir estudiando autores como Legendre, Lacroix, Cirodde y otros que si fueron notables y aptos para sus fines en la época en que se escribieron con sumo acierto y llenaron cumplidamente su misión ya no responden á las necesidades de la actualidad?

La ciencia que heredó este siglo de los Euler, Laplace, Legendre y Gauss, se extendió de una manera que causa asombro á contar desde que reveló Cauchy su inagotable poder inventivo en el análisis, á cuyo nombre une luego la historia de la Ciencia los de Jacobi, Abel y de los egregios matemáticos Cayley y Weierstrass,

que aún hoy por fortuna pueden seguir enriqueciéndola; y á estos nombres otros hay que agregar ilustres, ya en las teorías combinatorias, ya en el desenvolvimiento del Algebra de la lógica, ya en las múltiples ramas de la Geometría; y si de aplicaciones se trata, ya en la hoy espléndida ramificación que ofrece la física matemática. ¡Cuantos nombres ilustres hay que citar actualmente como esquemas de cada uno de los descubrimientos efectuados en las múltiples irradiaciones según las que se descompone la ciencia matemática! En la teoría de las cantidades imaginarias Argand, Buée, François, Warren, Saint Venant, Cauchy. En la combinatoria de las sustituciones que se enlaza con la de las ecuaciones algebraicas, Cauchy, Abel, Galois, Jordan Kronecker, Kummer y Sophus Lie.

En la teoría de las formas algebraicas homogéneas Boole, Cayley, Sylvester, Salmon, Aronhold, Hermite, Clebsch. En la de los números después de Gauss y Legendre: Dirichlet, Dedekind, Kummer, Kronecker. En la de las funciones, Riemann, Durège, Newmann, Hermite, Halphen, Weierstrass, Bois-Reymond y Cantor. En las de la Geometría algebraica, cimentada sobre los conceptos combinatorios, las equipolencias de Bellavitis en Italia, la teoría de la extensión de Grassmann en Alemania y la teoría de los cuaternios de Hamilton en Inglaterra, y la fundada en el concepto del movimiento y de continuidad, la Geometría cinemática, cuyos cursos ha unido M. Mannheim á su curso de Geometría descriptiva en la Escuela Politécnica de París. En las del Algebra de la lógica Boole, Jevons, Peirce, Schroeder. En sus múltiples ramificaciones la Geometría se inaugura en este siglo con Monge y Carnot, á que siguen Poncelet con su teoría de las propiedades proyectivas, Chasles con la de la relación anarmónica bajo las que se unifican todas las propiedades proyectivas de las figuras, el original, fecundo y elegante geómetra alemán Steiner, el rígido Staudt que hizo independiente la geometría proyectiva de toda noción numérica, el francés Bobillier que creó las coordenadas homogéneas, el insigne geómetra alemán Plücker que agregó las coordenadas tangenciales, y por último, hay que citar la geometría no-euclídea que crearon Lobalchesfi y Bolyai y la que inició Riemann, el creador del concepto del hiper-espacio en dicha ciencia, que han extendido Schlegel, Scheffler, Strigham y otros, á la teoría de los poliedros; habiéndose publicado sobre es-

tos singulares conceptos numerosos escritos y obras que constituyen una *nueva era en el pensamiento humano*, como expresa una obra reciente del autor inglés C. Howard Hinton, (*A New era of Thought*, 1888,) acerca de la noción del hiperespacio, conceptos novísimos que han dado origen á la clasificación de las geometrías que hoy se estudian con los nombres de parabólicas, hiperbólicas y elípticas.

Este es el resumen del cuadro brillantísimo en que hemos reseñado á grandes rasgos la ciencia matemática del siglo diez y nueve, limitándonos á citar en cada rama los nombres más importantes ó los primeros, ya que citarlos todos sería tarea más complicada y extensa, puesto que bien las *Philosophical Transactions of Londres*, *Cambridge and Dublin Mathématique Journal*, *Proceedings of the London, Mathematical Society*, *Quarterly Journal of Mathematics* y otros varios periódicos matemáticos de Inglaterra, los *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, de *E' Ecole Polytechnique*, los *Comptes rendus*, y otros muchísimos periódicos de Francia, el *Journal de Crelle*, el *Matematische Annalen* y otros varios de Alemania, los que publican en Italia Brioschi, Battaglini y el Círculo matemático Palermo, las *Acta Matemática* de Stokolmo, el *Journal of Mathematics of Baltimore* y otros periódicos de varias nacionalidades, ofrecen constantemente desarrollos diversos de aquellas teorías someramente indicadas, que forman el resumen de la Matemática contemporánea. Y hecho este resumen cabe ahora continuar preguntando: ¿Es posible que en España se continúe adoptando y siguiendo teorías deficientes que los adelantos de la ciencia durante este siglo han abolido ó reformado? ¿No nos indican las obras que se publican en otras naciones y los cursos que se dan en las Universidades, la conveniencia de que cambiemos nosotros también de planes y de procedimientos?

La ciencia tal cual existe hoy, es la cantera inmensa y riquísima en mármoles y jaspes, los más variados que cada cual debe utilizar en la medida de sus necesidades ó con arreglo á los fines que se proponga. Los programas de las Universidades dan los cánones que determinan en cantidad y calidad la manera de la distribución entre los consumidores; los libros fijan la posición de cada sillar en la edificación formada por cada autor, donde el organismo científico se

halla determinado de una manera más ó menos perfecta según el arte empleado en su determinación.

A medida que la ciencia se enriquece con nuevos descubrimientos, que su esfera se dilata, que sus teorías se multiplican, la edificación ó el organismo que la expresan dándole forma en el libro, deben ser más ricos, no sólo en detalles, sino en el engranaje armónico de éstos dentro del conjunto que determina su unidad.

Véanse sino las obras notables que en las diversas naciones han ido condensando las teorías recientes, que al principio expuestas aisladamente luego, se han ido amalgamando con otras en el núcleo común para ofrecer nuevas unidades sistemáticas.

Ya en 1835, Plücker expuso en su sistema de geometría analítica su nuevo sistema de coordenadas-líneas. En 1847, Staudt publicaba su *Geometría de situación* conforme á su método esencialmente gráfico, que luego han divulgado los profesores Reye y Cremona, haciéndolo más fácil é inteligible por la forma de exposición adoptada, y en 1852, encargado Chasles por el Ministro de Instrucción pública de Francia de crear una cátedra de Geometría superior, escribió su magistral tratado tan conocido en el mundo científico, que hizo depender del concepto de la relación anarmónica; y además, acrecentado el caudal de las teorías geométricas por Steiner, numerosos tratados de esta nueva geometría han circulado en Alemania, entre ellos la teoría de las secciones cónicas, según la Geometría sintética de este matemático, publicada por los Dres, Geiser y Schröter, como también la teoría de las funciones, según el método de Riemann fueron divulgadas en Alemania por los discípulos de éste, Durège y Newmann, y luego generalizadas en múltiples tratados por todas sus Universidades. En Francia Serret publicó bajo forma doctrinal y didáctica, en su Tratado de Algebra superior, las teorías de las congruencias y de las sustituciones para ofrecer como natural coronamiento las teorías de Lagrange, Abel y Galois sobre las ecuaciones algebraicas. El profesor de la Universidad de Dublin, Mr. G. Salmon, en su Algebra superior y sus tratados de geometría, organizó para la enseñanza las recientes teorías de *las formas* á que principalmente hoy ha dado tan considerable impulso, y más tarde los profesores Faá de Bruno y Rubini las adaptaron para la enseñanza en los establecimientos docentes de Italia. Baltzer en Alemania

reunió en sus tratados de matemáticas, de gran originalidad por la forma, á la parte doctrinal antigua, las teorías recientes, de los Números, del Algebra y de la Geometría, dando al conjunto una elegancia y unidad admirables. Hoüel en Francia, que intentó aclimatar algunas teorías extranjeras, en sus tratados de las cantidades complejas y del cálculo infinitesimal, reunió también en cuerpo de doctrina multitud de teorías de diversa nacionalidad, que todas ellas contribuyen al engrandecimiento de la Matemática bajo diversos puntos de vista.

No citaré de obras magistrales más que las recientes del Algebra de la lógica del profesor de la Escuela Técnica superior de Karlsruhe Sr. Ernest Schroeder y la monumental del profesor de Berlín Sophus Lie, hoy apenas acabadas de publicar, pues no me propongo más que citar las más principales y generalmente conocidas, terminando con el importante tratado de Algebra de G. Chrystal de la Universidad de Edimburgo, de cuyo vasto é importante contenido ya me ocupé en otra ocasión y las notables Lecciones de Geometría superior dadas por el Dr. G. B. Guccia en la Universidad de Palermo; ni tampoco me detendré en citar la excelente y riquísima colección de Tésis presentadas para la obtención del grado de Doctor en la Facultad de Ciencias de París, ni las variadas producciones de las universidades alemanas con que sus profesores coronan la obra de esta institución social, que representa en todas épocas á la inteligencia humana, pues habría material para llenar numerosas páginas; y aún, si con lo citado acaso he sido demasiado prolijo, no me he propuesto otro objeto que venir con esta base á algunas conclusiones.

Si pues tal es el conjunto de doctrina matemática que cabe en los programas universitarios como determinan las obras citadas, si la suma científica resultante es la que habilita para obtener sus grados superiores, y agregando aún otras asignaturas que he creído innecesario citar por ser las menos abstractas, habiéndome limitado á enumerar las que constituyen la Matemática pura, ya tenemos una norma que nos ha de guiar en la determinación del problema de la enseñanza.

Esas diversas teorías modeladas según el plan de cada libro de texto y que parecen trozos informes y dispersos más bien que ele-

mentos de un todo uno y armónico, responden tan solamente á un modo artificial y un tanto arbitrario, si bien lo menos posible y lo más conforme con la naturaleza del todo, la Ciencia, que se ha descompuesto en sus ramas para facilitar el trabajo de su adquisición por el alumno.

Más no por esto la Ciencia ha de resultar mutilada en nuestra inteligencia que aspira á poseerla. Las ideas tienen una movilidad indefinida, como los átomos de los gases, que encerrados en recipientes, rebotan contra las paredes de éstos y se atraen ó se repelen según las influencias varias á que están sometidos, y así aquéllas se chocan, se cruzan, convergen ó se separan en el fondo de la inteligencia humana.

Una verdad puede estar colocada antes ó después de otra en su encadenamiento deductivo, según el plan que forma cada libro, donde sin embargo todas forman un sistema perfecto bajo el punto de vista dialéctico. El orden de las proposiciones de la geometría de Euclides y Legendre no es el mismo, y los dos libros son sustituibles en la enseñanza, salvo algunas ventajas ó inconvenientes que cada uno pueda presentar respecto al otro, y que no es de este lugar esclarecer; y ascendiendo á considerar las diversas ramas de la ciencia dentro de su totalidad, iguales relaciones encontraremos de estas entre sí que las de las verdades y razonamientos dentro de cada rama.

Cada ciencia particular en que se halla actualmente dividida la ciencia matemática, ha perdido algo del carácter que ofreció en sus orígenes. Esas joyas del entendimiento humano que son centros de irradiación de luz en forma de ideas, tales como los elementos de Euclides, las Cónicas de Apolonio, la Aritmética de Diofanto, el Álgebra de Vieta, las geometrías de Descartes y Monge, el tratado de las fluxiones de Newton y de los infinitos de Leibnitz, son centros de irradiación distintos que se difunden en esferas cada vez más amplias, que se encuentran reforzándose y sumándose en ciertos puntos de su curso, en los que se ofrecen nuevos centros brillantes que irradian á su vez de nuevo en sistemas de luz cada vez más espléndidos y ofrecen á la inteligencia raudales de ideas, veneros de verdades de fecundidad creciente y los nombres de Euclides, Arquímedes, Diofanto, Vieta, Descartes, Newton, Leibnitz y Monge aparecen como esquemas de aquellos primitivos focos de luz intelectual;

luego otros nombres se agrupan como esquemas de nuevos centros, nombres que en nuestra inteligencia evocan, por cierto poder asociativo de nuestras ideas, la síntesis científica parcial que cada uno representa; estos nuevos nombres son los de Desargues, Pascal, Fermat, Wallis, Huygens, Cotes, Moivre, Euler, Lagrange, Laplace, Legendre, Carnot, Poncelet Brianchon, Cauchy, Abel, Jacobi, Argand, Poinso, Sturm, Riemann, Chasles, Boole, Cayley, Grassmann, Hamilton, Plücker, Staudt, Steiner, Wronski, Lobatchefsky.

Reunid los primeros y tendreis los primitivos centros de luz en cada uno de los puntos fundamentales de la ciencia; sumad los segundos y tendreis nuevos centros que se asocian á los primeros como la luz de un sistema estelarío es la resultante de las luces de todos los focos parciales desde los que se propaga. Y si hoy que la ciencia ha adquirido un carácter de universalidad y cosmopolitismo, merced á la obra de la Universidad que no sólo se ha limitado á instruir y educar á los discípulos, sino que ha trascendido hasta continuarse en las Revistas y publicaciones generales, que complementan la ciencia aprendida en las aulas, aún podríamos agregar á las dos series de nombres una tercera en donde se encontrarían, por derecho propio, matemáticos insignes de diversas nacionalidades que en esta segunda mitad del siglo XIX han extendido en múltiples direcciones la ciencia, juntamente con otros de distintas épocas que tambien contribuyeron á establecer los engranajes parciales de unas teorías con otras, ó completar el contenido de cada rama general de la Matemática ó á perfeccionar la disposición de su organismo.

Si pues la ciencia matemática se nos ofrece actualmente con tan incomparable grandeza, tanto por la indefinida variedad de su contenido, como por la extensión de sus contornos que parecen apartarse cada vez más y más por una expansión continua de sus primitivos orígenes, por necesidad la enseñanza ha de amoldar sus procedimientos y métodos á la magnitud y naturaleza de su objeto, ha de seguir una marcha también progresiva, sino se quiere aspirar á un imposible.

La ciencia progresa constantemente pugnando por perderse á la mirada de la inteligencia; pero ésta á su vez posee medios cada vez más eficaces para acercarse á la verdad que se le aleja, y estos recursos intelectuales son los métodos. Cuando la ciencia era pobre y

sencilla, el genio como ya se dijo, tenía que salvar las distancias considerables entre los elementos del naciente organismo cuyos contornos apenas se hallaban diseñados; luego el método evita los esfuerzos extraordinarios y regulariza la marcha de la inteligencia hacia el descubrimiento ó la posesión de la verdad. Si la Matemática se nos ofrece sucesivamente como un organismo cada vez más rico de verdades, á su vez se nos ofrece como un sistema sucesivamente más rico de métodos que se acumulan y acrecientan nuestra fortaleza. El Algebra, que es un sistema de verdades acerca de un objeto determinado, lleva en su esencia un nuevo método más fecundo y eficaz que la Aritmética. Los procedimientos aritméticos se hallan contenidos en los algebraicos á la manera que la especie en su género. Llega el Algebra á presentarse como conteniendo en sí un método universal, sobre todo cuando Descartes la dió colosal impulso aplicándola á la Geometría; y más tarde sobre el método algebraico se elevan los nuevos métodos que aportan Newton y Leibnitz y que extienden prodigiosamente los recursos de la inteligencia, apta ya para resolver problemas de nueva transcendencia y para reducir á un ejercicio de dialéctica lo que sin estos métodos debiera ser la obra del genio que adivina y atrae con su esfuerzo vigoroso aquello que apareciera bajo la acción de fuerzas repulsivas. A su vez aquella geometría de Euclides que podría llamarse la *Geometría lógica ó dialéctica*, porque tan sólo se basaba en el encadenamiento de proposiciones equivalentes por una deducción inmediata ó por el método ad absurdum, hoy aparece entre multitud de métodos que han aportado los Desargues, Pascal, Cavalieri, Roberval, y en nuestra época los Monge, Carnot, Poncelet, Chasles, Staudt, etcétera. Tenemos, pues, una ciencia vasta y rica, al lado de métodos numerosos y eficaces, y unos y otros son los objetos que acogidos en el seno de la ciencia, hoy en ella prosperan y se desenvuelven.

La Universidad que hoy es un organismo robusto y bien formado, puede decirse que en sus albores se fué componiendo de elementos dispersos. Euclides, Arquímedes y Apolonio como en otras ciencias varios de sus representantes, según pudiera decirse de Aristóteles en el Liceo y de Platón en la Academia, eran en la Universidad de hoy como las piedras fundamentales en un edificio. Ellos comenzaron el desenvolvimiento científico; luego el espíritu de asociación

de la humanidad fué reuniendo tan dispersos esfuerzos y la Universidad apareció con un nombre que antes no tuviera, nombre que ya era un emblema bajo cuyo significado se contenía una institución dentro de la que entran por derecho propio aquellos que fueron en el aislamiento de sus lucubraciones sus predecesores, sus genuinos representantes, sus generadores en las épocas donde estaban por formar las instituciones sociales que han ido viniendo como consecuencia de las vicisitudes por que ha atravesado la humanidad en su vida social.

Esta movilidad de los conceptos en la ciencia, comparable á la movilidad de los átomos en los cuerpos, ya en sus modos de estar, ya en sus modos de alterarse que llamamos fenómenos físicos ó químicos, exige que el organismo de la enseñanza varíe armonizándose con las alteraciones de aquélla en su contenido, y en la disposición de éste dentro de la totalidad. Y así como las condiciones de estabilidad de un cuerpo sobre su base de sustentación aumenta á medida que desciende su centro de gravedad, en la ciencia que se eleva constantemente sobre sus cimientos, debe buscarse el acumular su contenido desde la cúspide hacia éstos para mantener el equilibrio. Por tal razón nuestros planes de enseñanza debieran responder á esta ley á que obedecen algunos modernos programas y algunas obras recientes dedicadas á la enseñanza. Las teorías nuevas que se consideran de orden superior en el momento de su aparición, luego van descendiendo hacia el centro de gravedad de la ciencia para que ésta no resulte de cabeza grande y pies pequeños. Aquellos tratados de cálculo diferencial é integral que en el primer tercio y á la mitad de este siglo se limitaban á la simple exposición del algoritmo creado por Newton y Leibnitz, aquellos libros de Geometría analítica circunscritos á aplicar las coordenadas cartesianas á las secciones cónicas, aquellos tratados de álgebra que se reducían á presentar casi en orden cronológico algunos procedimientos felices ó algunos conceptos originales de Newton, Lagrange, Fourier, Rolle, Sturm y otros matemáticos que se han ido sumando para mostrar la manera de resolver las ecuaciones numéricas, no eran ni con mucho lo que debieran ser: verdaderos tratados de estas ramas de la Matemática. El Algebra no es tan sólo el conjunto de reglas para resolver un problema, es la teoría combinatoria aplicada á un sis-

tema de Algoritmos y á la determinación de las relaciones de coexistencia entre los elementos dados y los desconocidos de las ecuaciones. La geometría analítica no es un tratado de las secciones cónicas expuesto según el método cartesiano, sino la Geometría toda desde el punto, la línea y el plano hasta las líneas y superficies de diversos órdenes y clases, y aún hasta las familias, sistemas y grupos de líneas y superficies, tratados mediante procedimientos analíticos que varían según los múltiples sistemas de coordenadas creadas, no sólo por Descartes, sino por Moebius, Plucker, Bobillier, Bellavitis, Grassmann, Hamilton, y aún por sistemas susceptibles de tanta variación como es posible establecer correspondencias entre sistemas variables y constantes dependientes de leyes múltiples y definidas, conforme á condiciones especiales. El cálculo infinitesimal no se reduce sólo al algoritmo de Leibnitz; éste consiste en un método fecundísimo, un nuevo elemento importado á la Matemática, ó sea el de lo infinitamente grande ó infinitamente pequeño relativos, ó si tomamos como punto de partida la cantidad finita, lo infinitesimal. Más los tratados hoy llamados de Análisis, tienen una superior transcendencia. Hoy el concepto de combinación y de orden se cierne sobre el de cantidad lo mismo en el análisis infinitesimal, que en el algebraico y geométrico, que en la Aritmética superior ó Teoría de los Números que en la Geometría sintética; y este concepto de combinación unido al de continuidad, aunque el primero dominando sobre el segundo, entran bajo el nombre, creo que poco adecuado, pero al menos debido á una convención tácita y universal, de Análisis infinitesimal; más no sólo para exponer el algoritmo de Leibnitz, sino para aplicar este instrumento poderoso á la teoría de las funciones analíticas, que dejando ya en una categoría inferior al grupo de las funciones continuas, se aproxima al concepto de combinación que resulta presidiendo el vasto conjunto de las entidades que constituyen el fondo substancial de la ciencia matemática.

Obedeciendo, sin duda, á esta expansión de los conceptos, á esta dilatación de los límites de cada rama matemática, se vienen publicando, en la última mitad de este siglo, obras dignas de consignarse; entre otras, algunas de las que me creo en el caso de citar. Además de los tratados de Salmon, que han sido el primer ensayo de

llevar á la enseñanza clásica los nuevos conceptos del Algebra de las formas, apenas dados á la publicidad por los talentos creadores y organizadores á quienes son debidos, deben citarse muy preferentemente las *Lecciones sobre la Geometría* de Clebsch que expone esta ciencia desde el elevado punto de la dualidad, y que estudia, por consiguiente, primero las curvas, según su orden y su clase, llegando enseguida á la introducción de la teoría de las formas, y luego á las curvas en general, y especialmente las de tercer orden y tercera clase, concluyendo la geometría en el plano con la geometría sobre una curva algebraica y con la teoría, ya eminentemente combinatoria y sistemática de los conexos. Entre los tratados notables de Análisis, publicados en la época de que tratamos, y aparte del notable Curso del profesor de Burdeos M. Houël, que introdujo en él algunos de los resultados debidos á Cauchy y á Riemann, y del magistral Tratado debido á M. Laurent, citaremos el de M. C. Jordan, ya conocido por su importante obra sobre las Substituciones, y en cuya teoría se le deben importantes resultados, que en el t. III de su primera edición ⁽¹⁾, dió amplio desarrollo á esta teoría combinatoria en la de las ecuaciones diferenciales, y que actualmente, en su segunda edición ⁽²⁾, da nueva amplitud á su plan incluyendo la noción de *conjunto*, debida al matemático alemán Cantor, y otras de Cremona, Halphen y Nöther. Y, en fin, como respondiendo al propósito que hoy se impone de hacer descender algunas teorías hacia los umbrales de la exposición en las obras de enseñanza, podemos ver cómo en el Algebra de los Sres. Rouché y Comberouse, así como en la del Sr. Longchamps se exponen nociones sobre las integrales y los infinitésimos, que los Sres. Rouché y Comberouse extienden en cada nueva edición de su Geometría los Apéndices que llevan á la instrucción elemental ó media los recientes adelantos cómo en su elegante Geometría analítica el Sr. Longchamps encierra en una extensión relativamente reducida, y adecuada también á la enseñanza, las antiguas teorías asimiladas con las modernas bajo unidad de plan ⁽³⁾; y mucho tendría que extenderme si fuera á citar al-

(1) Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique.

(2) Idem, t. I, 1893, París.

(3) Y en cuanto á este descenso de las teorías superiores hacia los elementos, mucho nos harían extender la obra *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra* (1878) del Sr. Schröder, en que se hallan aplicados los conceptos combinatorios de las operaciones y del Algebra de la lógica á la Aritmética y el Algebra elemental, los *Elemente der Arithmetik und Algebra* del Dr. Friedrich Meyer, Halle 1885, etc.

gunos de los recientes tratados italianos cuyo acertado modo de exponer la ciencia dentro del plan que comprende los adelantos modernos realizan el propósito de simplificar y facilitar el acceso á la misma de la juventud, mediante los recursos de los métodos expositivos más sintéticos y comprensivos, pues la Ciencia, como nuestro planeta, tiene sus cumbres y llanuras; allá, los puntos de vista son más espléndidos, se abarcan de una mirada cientos y cientos de detalles, y tantos más cuanto más nos elevamos. Este es el efecto de la síntesis. Acá, el terreno poco accidentado permite que nos detengamos en cada detalle que nos impresiona sucesivamente á medida que con lentitud caminamos; nuestra marcha es ahora segura, no tememos tropezar con rocas abruptas, con simas y precipicios, si bien no podemos tampoco extender nuestra vista más allá del horizonte que nos cierran las vecinas eminencias ó los accidentes del terreno.

Estos son los dos métodos fundamentales de la Ciencia, y según ellos se debe guiar á las inteligencias de la juventud. El análisis las fortalece, les da seguridad en su acción, los ejercicios prácticos evitan la ligereza, dando solidez á los conocimientos adquiridos y facilitando su asimilación en la inteligencia; pero no debe olvidarse que también se necesita conducir las á las cumbres para distinguir horizontes y caminar conscientemente hacia fines previamente determinados.

¿Por qué hay algunas obras que nos admiran y que admirarán á todas las edades futuras como nosotros las hemos admirado? ¿Por qué esas obras no perecen y se destacan siempre como piedras preciosas que centellean con luz purísima é inextinguible? Porque han condensado miles de ideas en una síntesis fecunda, y son manantiales perennes de verdad; porque forman como los puntos de reposo del pensamiento humano en su trabajo incesante por alcanzar la ciencia; porque son garantía firme de que nuestros esfuerzos del presente y en el porvenir se encontrarán centuplicados por la eficacia de su poder fecundo y nos permitirán llegar á nuevas cumbres en los senderos de la verdad.

En esto se halla el secreto de que, á pesar de la continua expansión de la ciencia, la inteligencia puede seguirla y aun llevarla más adelante. Si en el siglo XIX estas ideas fecundas y los métodos que

envuelven no nos prestaran su poderoso concurso, la inteligencia no habría podido seguir á la ciencia, ó más exactamente, la una y la otra se habrían detenido en su marcha.

Pues si los métodos y las ideas sintéticas exigen reformas en los libros de texto destinados á la juventud, ¿cómo puede tolerarse, ni aun admitirse, que en España sigamos con obras hace treinta ó cuarenta años importantes en género, sin atender á las mejoras y alteraciones reclamadas por los modernos adelantos?

Hace doce ó catorce años aproximadamente que en la Escuela de Ingenieros de caminos de Madrid se exigieron las modernas teorías de las formas homogéneas para el ingreso en dicho centro; poco más ó menos desde esa época se introdujeron en España por el profesor de la Universidad Central Sr. Torroja las teorías de la Geometría proyectiva según el método de Staudt, y aun anteriormente, en 1867, el Sr. Echegaray publicó su introducción á la Geometría superior, y en los últimos años algunos tratados se han publicado en España sobre esta rama geométrica. Pero ¿y las otras numerosas ramas de que he expuesto algunas indicaciones y que figuran en los programas universitarios de las demás naciones? ¿Podremos esperar nunca llegar á su nivel descuidando la educación intelectual de nuestra juventud que mañana se encontrará sin medios de sostener esta competencia del trabajo, que hoy es factor necesario en la vida social? Lejos de esto, tendremos que confesar con rubor que en la Universidad Central, en vez de crearse alguna de las asignaturas superiores que tanta falta hacen en el plan de nuestra instrucción científica, se creó una cátedra de Análisis matemático, primer curso, en cuyo programa figuran las teorías de la Aritmética y del Álgebra elemental⁽¹⁾. Si en todas las naciones, como he dicho, lo mismo en los programas que en los libros de texto se

(1) El apoyar esta anomalía en que los alumnos se hallan poco preparados para los estudios superiores, es argumento que no merece los honores de la contestación. Bastará decir que esta deficiencia los inhabilita *á priori* para aspirar á ser de los *elegidos* ó de los *selectos* en la delicada labor de la ciencia pura.

Sólo en el caso probable de que en época más ó menos próxima nuestras Universidades, como acontece en las Universidades alemanas é italianas, fueran en sus primeros cursos escuelas de preparación, en la parte teórica, para las escuelas de ingenieros, podría sentirse la necesidad imperiosa de afianzar la enseñanza superior en una enseñanza media que los franceses denominan *matemáticas especiales* y que diera la solidez á los estudios matemáticos fundamentales que debe exigirse á los que han de abandonar el cultivo de la ciencia pura por el de sus aplicaciones.

efectúa un trabajo de descenso desde las teorías superiores hacia las elementales, reforzando éstas y aliviando aquéllas para dar cabida á nuevas teorías superiores que engranan con las antiguas. ¿Cómo en España siquiera no se limita el descenso hasta el nivel de la antigua asignatura de Algebra superior que explicó el profesor don Juan Cortázar?

El sabio profesor Weierstrass, en la Universidad de Berlín, explica un curso de Análisis que comienza con la teoría de las integrales abelianas. El curso que explica en la de Pavía el profesor Ernesto Pascal, del cual ha publicado una relación, versa sobre las cuestiones mas capitales de la teoría de las funciones, y basta recordar las lecciones de Geometría de Alfredo Clebsch, ya citadas, que son traslado de lo que explicaba en sus cursos tan distinguido geómetra. Y creo que es innecesario continuar reuniendo datos en este sentido por ser asunto éste muy generalmente conocido, pues todos los días vemos libros importantes que expresan la extensión de los cursos dados por sus autores.

He desarrollado á grandes rasgos la parte primera de las que comprende mi trabajo. He tratado de la ciencia principalmente; he consignado la necesidad de ir modificando las síntesis parciales que la expresan y diseñan á medida que se modifican por los progresos en cada época ó en el transcurso de algunos años, y he hecho notar de paso lo deficientes que son nuestros programas, los libros empleados en nuestras Universidades y los planes que en su consecuencia desenvuelven los profesores en lo concerniente á la enseñanza de la Matemática. Ahora voy á tratar de la segunda parte complementaria de la primera, concerniente al carácter educativo que debe tener la obra de la Universidad para ser eficaz y para realizar cumplidamente su fin.

II

La ciencia es una, uno su proceso aunque con dos fases distintas que llamamos análisis y síntesis; y la inteligencia humana escala los dominios de los principios ó descende al de las consecuencias mediante un cambio de dirección en su marcha.

El objeto es múltiple, pues existe en la naturaleza con su inmensa variedad ó también en nuestra inteligencia que es á la vez sujeto y objeto de nuestras investigaciones. El matemático que analiza los elementos hipotéticos ó dados para la resolución de un problema, emplea el mismo procedimiento que el químico para explicar una reacción entre cuerpos dados sometidos á condiciones especiales; en el un caso el objeto serán los puntos, las líneas ó los números, en el otro son los átomos; y como el químico busca en el fondo del fenómeno los átomos actuando entre sí de tal ó cual manera, el metafísico á su vez indaga en el fondo de nuestra inteligencia el modo de colocarse entre sí y de relacionarse las ideas.

Cada individuo, dentro del dominio que abarcan los estudios universitarios, sigue una dirección especial por efecto de su idiosincracia ó idoneidad para aplicar sus aptitudes preferentemente á tal ó cual objeto, y en la esfera de acción que se ha trazado, en virtud de sus aficiones ó aptitudes especiales, será una medianía ó podrá ser un genio; que todas las categorías caben dentro de cada una de las direcciones de que es susceptible el humano saber; y en su labor habrá aplicado el método general á un objeto más ó menos abstracto, más ó menos complejo.

En toda ciencia existe un fondo de hechos ó de fenómenos y una superficie ó límite superior donde residen las leyes ó las causas de los mismos, y á esos dos extremos corresponden la técnica, ó la ideología ó la metafísica. Toda ciencia, además de una región en que se encuentran los hechos observables, sus relaciones y dependencias que la misma en su estado rudimentario principia por catalogar, tiene otra región altísima que á todos no es dado poder escalar, por ser la región de las causas y de los principios á que no siempre se llega con la certeza con que llegó Newton á establecer la gravitación universal ó Leverrier á determinar el lugar y tiempo en que debiera aparecer el planeta Neptuno. Estas breves consideraciones en que creo ya innecesario detenerme, bastan para establecer la universalidad de la ciencia que entra en el dominio de la Universidad, centro donde debe hallarse reunida en su unidad y en su totalidad.

Y si la Universidad tiene por objeto la ciencia, necesariamente ha de entrar de lleno en su dominio el arte de dirigir la inteligencia ó mejor, la ciencia de la educación, ciencia parcial cuyo objeto es

nuestro ser espiritual, y cuyo fin es la dirección en nuestro modo de actuar ó de desenvolvernos, la metodología aplicada á la regularización de nuestros actos.

El niño que en la escuela aprende á deletrear comienza á analizar y hacer pequeñas síntesis; al dirigir sus observaciones al mundo físico, principia á relacionar un objeto externo con un signo interno que es la idea; luego, al aprender la gramática principia á aprender á pensar, á componer y descomponer sus ideas ocultas bajo la apariencia de los objetos á que estas corresponden; y en esta primera fase de su existencia en que el objeto se impone al sujeto, que aun no se ha revelado en nuestro yo, almacena materiales en ese fondo que, aunque inextenso, parece superar en extensión al Universo, puesto que, sin agotarse ante la multiplicidad de este, aún hace surgir de su inagotable seno relaciones y entidades que trascienden más allá de cuanto puede ser objeto de nuestra observación sensible.

Estos múltiples objetos, cuyos signos se fijan en nuestra inteligencia ya desde que en la escuela de primeras letras se nos han ofrecido en la variedad que comprenden sus estudios elementales, y que continúa aumentando el caudal durante la segunda enseñanza, impresionan de muy diverso modo á cada individuo, según aquéllo que es propio de su personalidad, de su individualidad. Uno se ve atraído por las relaciones que distingue entre los fenómenos físicos, otro afanoso comienza á buscar el por qué oculto tras las apariencias de los hechos, aquél atraído por los afectos humanos se dibuja como el futuro sociólogo ú hombre de Estado. Pero unos y otros se mueven en una atmósfera común dentro de un solo dominio que luego recorren en distinta dirección, cuando revelándose el yo, cuando reaccionando su ser sobre las influencias exteriores, le marquen su vocación en la vida social á la que se ha de preparar en la sección superior de los estudios que comprende tal ó cual Facultad de la Universidad, donde ha de poder realizar la aspiración sentida ó la vocación formada allá en los albores de su desenvolvimiento material y moral.

Tratado, aunque someramente lo que concierne al carácter educativo de la obra de la Universidad, voy, antes de ocuparme especialmente de la ciencia matemática, á señalar un punto intere-

sante, cual es el de la relación general en que se hallan las Facultades que la constituyen, el modo de contribuir cada una á formar el conjunto comprendido en la palabra Universidad.

Desde luego observamos en ésta una aspiración que eleva hacia los ideales de la ciencia, otra que hace descender hacia las aplicaciones inmediatas de ésta. Las Facultades de Filosofía y Ciencias llevan hacia lo abstracto, hacia lo elemental; las de Derecho y Medicina hacia lo concreto y compuesto ó complejo, hacia aquéllo que tiene su explicación en alguna de las ramas de las primeras, el Derecho aplica los principios generales de la filosofía y de la historia al organismo social, como la Medicina los principios de las ciencias físicas y naturales al organismo de la ciencia humana; á su vez las Ciencias y las Letras tienden, aun dentro de su carácter ideológico, ya una hacia el mundo de la experiencia física, la otra hacia los ideales del alma humana; la primera trata de sistematizar las leyes del Universo, la otra á legislar sobre las obras del arte humano, sobre el Universo que nos ofrece el alma humana, en ese organismo espiritual que también tiene sus leyes aparte de las del mundo físico; y entre unas y otras nos hallamos con la Matemática, ciencia que parece reunir á las dos Facultades en un estrecho abrazo, pues mientras por un lado aspira á medir con sus cálculos y sus fórmulas los hechos ó los fenómenos de la Naturaleza, á esquematizarlos en sus fórmulas, á idealizarlos en sus leyes, por otro lado se constituye como un organismo *á priori* que radica en el fondo de las ideas y que, conforme con nuestra organización espiritual se desenvuelve, con fecundidad inagotable, con fuerza deductiva incesante y siempre creciente en un mundo más rico y más variado que el Universo entero, puesto que además de la realidad de la existencia actual abarca la posibilidad, y cerniéndose sobre cuanto es como fenómeno y objeto real, se eleva sobre lo independiente de la existencia accidental por sí, y aun se mueve en el mundo de la pura relación de coexistencia á lo que le autoriza la naturaleza lógica de su objeto enclavado dentro de las leyes de la dialéctica por que se guía nuestro entendimiento, siendo de maravillar además que, á pesar de ese carácter eminentemente subjetivo, de esa generación *á priori* efectuada allá en el último y más escondido seno de nuestra razón, al descender en sus deducciones, llena de vida y de

fuerza creadora hacia el Universo material, encuentra á éste subordinado á sus leyes. Ve que los astros realizan las curvas que sus fórmulas fijaron, que la gravitación universal materializa una expresión numérica, que algunas de sus funciones dislocadas para despreciar cantidades infinitesimales, que si no se pierden de vista á nuestra razón, son despreciables para nuestros sentidos, en la apreciación de los fenómenos materiales, consiguen en una de sus ramificaciones más concretas, la física matemática, subordinar y enclavar dentro de sus dominios las leyes por las que los átomos se relacionan y producen las apariencias que llamamos fenómenos físicos y químicos.

Expuestas estas consideraciones generales acerca de la relación en que se encuentran los organismos parciales de la Universidad dentro de ésta, y que nos han de facilitar el obtener conclusiones generales en lo que atañe al carácter educativo de la enseñanza matemática, voy á hacer algunas observaciones previas, con objeto de desvanecer ciertos prejuicios, ciertos argumentos muy en boga repetidos con frecuencia, aún por aquéllos que por su profesión están obligados á combatirlos.

Se dice con frecuencia, y aun por profesores de tal ó cual asignatura, que los alumnos no se hallan suficientemente preparados para comprenderla; se pregona por los mismos profesores la dificultad ó incomprendibilidad de la misma; se dice que la ciencia es árida, se trata poco menos que de hacerse ver que la ciencia y la inteligencia son dos entes antagónicos, que en vez de tender por su naturaleza á fundirse el uno en el otro, se apartan y divergen cada vez más. Se desconfía de que tal ó cual asignatura, según cierto grado de desenvolvimiento, pueda ser abarcada por la débil inteligencia del alumno, etc.

Ante todo principiaremos por combatir cierta tendencia, hoy muy en uso, de prescindir del carácter educativo de la ciencia dentro de la Universidad, siendo la creencia de algunos que la enseñanza tiene por único objeto el implantar en la inteligencia de los alumnos algunos teoremas y las reglas necesarias para resolver unos cuantos problemas.

La obra de la enseñanza es más vasta; si tiene por fin necesario el fijar en las inteligencias algunas verdades matemáticas, este he-

cho debe considerarse, más que como fin, como medio de despertar la actividad intelectual. El principal objeto de la enseñanza en los Institutos y en las Universidades es el ejercicio intelectual; es el hacernos conocer y emplear bien los recursos que poseemos para vencer las dificultades que nos han de conducir á la verdad. El enseñar la verdad por la verdad tiene el inconveniente de no facilitar el camino para hallarla, único medio que tiene y puede emplear el genio, que allana obstáculos insuperables para una inteligencia vulgar, y que sabe salvar por su poder misterioso las distancias que separan dos extremos distantes.

La enseñanza debe saber graduar las dificultades en la medida de la inteligencia, en cada uno de los estados de su desenvolvimiento, sobre todo en la Matemática, que por su naturaleza es un tratado de lógica aplicado á la cantidad, al orden, á la combinación y al número.

El admirable tratado de Euclides, que no han podido derogar los progresos de la Geometría, es un conjunto graduado de dialéctica que fija más que ningún otro el proceso deductivo de nuestra inteligencia.

Poco importa que un alumno haya almacenado según cierto desorden en su inteligencia unas cuantas verdades. «El alumno que estudia matemáticas, decía yo en una obrita publicada el año 1877, las aprende (más exacto sería decir: *aprende de memoria el libro*) muchas veces y otras tantas las olvida. Las ideas adquiridas en su inteligencia no son como las substancias que por combinación química se hallan infiltradas en el agua formando una sola esencia, sino como las arenas ó sedimentos que arrastra en su corriente y que después abandona quedando transparente y pura»⁽¹⁾.

El libro de texto ofrece un fondo inmóvil, invariable, donde se halla impresa la síntesis presentada por cada autor de la ciencia. El profesor debe dar movilidad y vida á ese fondo, debe hacer desprenderse aquellos caracteres impresos de la superficie del papel y convertirlos en ideas fecundas para el alumno, traducidas en lenguaje que sea fiel transmisor desde una inteligencia á la otra. Si este enlace está mal establecido, si el medio conductor no es adecuado, no

(1) *Consideraciones sobre la conveniencia de un nuevo plan para la enseñanza de las matemáticas.*

se podrá decir que una inteligencia es inepta para comprender, sino que se ha encontrado en relación con signos cuyo significado ignora y que no puede traducir en sus ideas correlativas.

Déjese de presentar á la inteligencia del alumno esas ideas fecundas y generales que envuelven en sí cientos de ideas subalternas; háganse desfilan éstas en tropel como casos numerosos de divisiones y subdivisiones más ó menos artificiales, y la inteligencia quedará abrumada y ahogada bajo la multitud de los detalles. Procúrese por el contrario sintetizar y presentarlas en agrupaciones más ó menos generales. Hágase, por ejemplo, estribar la teoría de los números fraccionarios en el carácter inverso de la influencia del numerador y denominador en el modo de variar aquéllos. En vez de recorrer pausadamente los casos de la divisibilidad por 3, por 11, por 7, etcétera, preséntese el fecundo teorema de Fermat que señala períodos de restos de una, de dos y de 6 cifras respectivamente, como la ley á que se hallan sometidos los números bajo el punto de vista de su divisibilidad por otros. Hágase notar, como lo hizo Chasles en su obra de los porismas de Euclides, que aquellos lemas de Pappus presentados como proposiciones aisladas ó independientes sólo son casos particulares debidos á posiciones distintas de una misma figura, de la propiedad perspectiva de ciertos sistemas de puntos, ó del exágono inscripto en una cónica, admirable proposición de que Pascal hizo depender toda la teoría de estas curvas.

En vez de llevar al alumno por multitud de proposiciones que expresan tan sólo las vicisitudes por que pasó en el orden cronológico y bajo el esfuerzo prodigioso de los Newton, Lagrange, Rolle, Fourier, Sturm, Cauchy y otros, el problema de la resolución, de las ecuaciones numéricas, presentadles la clave de la cuestión en la teoría de las sustituciones, en el teorema de Lagrange y en las proposiciones fundamentales de Abel y Galois acerca de la resolución algebraica de las ecuaciones, y los alumnos verán, desde las cumbres á que se elevan estos teoremas, el conjunto del organismo del Algebra.

¿Qué conseguiría el que buscarse estudiar el vasto conjunto de la Naturaleza si se propusiese por sí elevarse desde los infinitos detalles que ofrece su examen hasta la totalidad de su plan? Pero si se le lleva por el estudio de sus múltiples ciclos en que se efectúan las

acciones de las fuerzas, las transformaciones de sus energías, el fluir de los fenómenos periódicos, el sistema de los astros, la unidad de las fuerzas atractivas y repulsivas que actúan sobre los átomos como sobre los cuerpos celestes, la gravitación actuando universalmente, las energías transformándose á través del océano etéreo por el cual hoy la Física explica los fenómenos del mundo material, la unidad dominando á la variedad, las síntesis sucesivas abreviando el trabajo analítico de la inteligencia, harán más suave el acceso de ésta hacia la verdad. Y lo mismo en la naturaleza física que en las evoluciones del arte ó de la ciencia humana ó en la de los pueblos cuyas leyes explica la historia, veremos que esas síntesis son el fruto del trabajo incesante de la inteligencia humana en las diversas ramas del saber, trabajo que debemos considerar como hecho en el seno de la Universidad.

Y concretándonos á la Matemática: ¿Qué inteligencia podría seguir uno á uno los innumerables escritos que constantemente se publican en libros y revistas? Una pequeña parte de esta labor sería suficiente para anegarla en un océano de ideas. Pero supongamos que se hace un trabajo de condensación de las unas en las otras, de las consecuencias en sus principios, que restando lo accidental se hace permanecer lo esencial; tantos y tantos libros y producciones, resultado individual de multitud de inteligencias, se irán sintetizando, y al fin la ciencia matemática se reducirá á un sólo libro que contenga la esencia de tanta labor particular, de tanto detalle secundario que sólo era la expansión de un corto número de ideas. Pues de igual manera en las aulas el profesor debe aprovechar las síntesis, fruto de la labor de nuestros antecesores que nos las han legado para que nos sirvan de punto de partida, evitándonos el repetir las penosas investigaciones que les condujeron á ellas, son cimas conquistadas que no debe abandonar la Ciencia para poder contemplar la labor del pasado ó para continuar ascendiendo en un indefinido porvenir.

Pero no nos confiemos en absoluto á la síntesis, no creamos que el solo fin de la enseñanza se reduce á aprovechar las síntesis ya hechas en la ciencia para facilitar nuestro acceso hacia la verdad. Tal modo de proceder exclusivo conduce á una adquisición vaga y poco sólida de la verdad, á una ciencia efímera que no arraigará

en nuestra inteligencia, que sólo pasajera y superficialmente resbalará como visión fugaz en la superficie, sin haber penetrado en el fondo. La afición exclusiva hacia las síntesis engendra la pereza del espíritu que se acostumbra á acoger el fruto de la labor extraña, mas á no producir jamás nada por efecto de sus propios esfuerzos. Es preciso para no habituarnos á una pasividad perjudicial, el reaccionar también sobre el objeto, el someterlo á nuestro esfuerzo personal, el clavar en él nuestra mirada para desenvolverlo, el analizar, en una palabra, y desmenuzar su contenido de una manera intelectual.

Pero notemos que en dos condiciones se efectúa el análisis. Cuando aspiramos á ejercitar nuestras fuerzas intelectuales por medio de cierta gimnasia del espíritu ó las de nuestros alumnos, al realizar nuestra misión educativa, ó cuando un talento superior salva por efecto de su energía excepcional algunas distancias que llevan á elevar el nivel científico de su época.

En el primer caso nos movemos en un terreno ya explorado, sino por nosotros, por otros; se trata solamente de hacer enlaces más ó menos ingeniosos ó felices entre los elementos conocidos y los desconocidos de un teorema ó de un problema con auxilio de términos medios que poseemos y á hacer acompañar á nuestras transformaciones sucesivas tales ó cuales encadenamientos de teoremas ya establecidos ó demostrados en la ciencia, y conseguir, por efecto de sustituciones oportunas hechas, de unas condiciones con otras ó por la feliz distribución de éstas en las hipótesis y tesis de los enunciados, llegar á ver colocados en la hipótesis los datos del teorema ó problema por demostrar ó resolver juntamente con algo dado ó determinado y conocido que hemos puesto en nuestras construcciones ó términos medios, y en la tesis aquello que buscábamos, que ahora se encuentra encadenado sólidamente con lo conocido mediante el enunciado de un teorema admitido.

Este ejercicio gimnástico que á nada nuevo nos conduce, si no es para nosotros, aviva y acrece nuestro esfuerzo intelectual, por más que sólo nos conduzca á inventar lo ya inventado, lo que está dentro del sistema que forma la parte teórica de la ciencia, y que se reduce á un trabajo combinatorio de nuestra inteligencia, á una distribución y á sustituciones de elementos en series de proposiciones que al fin de nuestro trabajo originará un encadenamiento

desde la proposición, punto de partida, hasta la final que nos da la cuestión resuelta (análisis) y un encadenamiento inverso por el que ya se puede descender en forma deductiva, desde la proposición obtenida y considerada ahora como principio ó fundamento, hasta la proposición propuesta, convertida en última consecuencia (síntesis).

En el segundo caso, el análisis consiste, más que en un ejercicio regulado por la teoría, dentro de cuyos dominios se realiza, en un salto brusco desde un punto de éstos hasta un punto exterior que los ha de unir á nuevos dominios conquistados por el genio. El examen de las leyes de Kepler, es muy posible que elevara á Newton á la nueva síntesis expresada por su principio de la gravitación universal. Los trabajos rudimentarios de Vieta al aplicar el Algebra á la resolución de algunos problemas geométricos, acaso llevó á Descartes á su nuevo sistema de Geometría analítica, y tal vez ésta sirviera á Newton y á Leibnitz de punto de apoyo para alzar su vuelo hasta la nueva ciencia hoy llamada *Cálculo infinitesimal*; y la historia de la ciencia, nos hace notar este modo de apoyarse cada una de estas nuevas teorías en otras de las anteriormente establecidas, ó el descubrimiento importado por un talento superior en el de sus predecesores; y así como en Mecánica la antigua noción de fuerza instantánea ha hecho plaza á la de fuerza continua, en las evoluciones de la ciencia las transiciones, sobre todo en cada época sucesiva, parecen ser menos bruscas, si bien ha de notarse que así como en el cálculo integral lo finito se forma de lo infinitésimo, entre los individuos de la humanidad, á pesar de existir diferencias, al parecer imperceptibles, en la intensidad de su esfuerzo intelectual, puede, entre ciertos extremos de la escala, notarse esa incomparabilidad que da el cálculo infinitesimal entre cantidades que tienen distinta categoría en las varias regiones de los infinitos.

Y ahora que he explanado algo respecto al plan de la enseñanza de la ciencia matemática, antes de concluir voy á extractar el plan que he creído oportuno ir presentando, aunque paulatinamente, durante el transcurso de tiempo en que he publicado algunas de mis obras.

Ya en la obrita anteriormente citada expuse algunas detalladas consideraciones acerca del carácter educativo que debé tener la en-

señanza de la Matemática y su modo de corresponder á las varias fases del desarrollo intelectual, y en 1881 hice seguir la exposición de la Geometría elemental de una segunda parte denominada *Crítica geométrica*, donde traté de la metodología geométrica, de la crítica de las verdades geométricas, haciendo destacarse los conceptos de la *existencia* y de la *determinación* geométricas muy afines con el carácter de las definiciones matemáticas, tan claramente expuesto en la lógica de Port-Royal, y también puse de relieve la relación de subordinación y coordinación de las verdades en la síntesis geométrica, señalando así los conceptos generales á que subordiné la exposición de la Geometría hecha en el cuerpo doctrinal de la obra.

Al escribir mi Tratado de Aritmética, en el que el número concreto se halla asimilado al abstracto por un enlace lógico y cuanto se refiere á la especulación se destaca sobre lo que se refiere á la acción, según el plan de Wronski, que estableció las dos ramas generales de la ciencia denominadas Algoritmia y Teenia, decía: «Así, pues, necesitamos hoy para terminar esta contienda, en que las antiguas preocupaciones y rutinas se desmoronen al impulso de las modernas ideas, constituir una *filosofía matemática* que exponga el criterio de la verdad matemática, una *literatura matemática* que organice el mundo de lo bello matemático por la exposición de las infinitas armonías del número y del espacio, y una *pedagogía matemática*, que consagre las leyes de la exposición científica armonizándola con el modo de ser de nuestra inteligencia; y esto será el objeto de nuestras próximas publicaciones destinadas á consolidar nuestro modo de exposición didáctica.»

Ahora bien: esa literatura matemática existe de hecho en el inmenso caudal de obras publicadas durante este siglo según tan diversos objetivos como se sintetizan en la clasificación de materias hecha en el «Índice de la Comisión permanente de Bibliografía matemática»; pero falta, según el concepto arriba expresado, hacer una preceptiva para las matemáticas como existe para las obras literarias según los criterios por que se juzga de la verdad y de la belleza de los conceptos y de los sistemas matemáticos, obra cuya realización podrá esperarse, ya de algún talento superior, ya de la colaboración de varios. Lo mismo puede asentarse respecto á la Pedagogía y á

la Filosofía matemática que cuentan ya obras destinadas á su constitución como cuerpo de doctrina y rama que concierne al desenvolvimiento formal de la ciencia matemática; y con este carácter publicó en 1888 la *Crítica y síntesis del Álgebra* y en 1885 los *Problemas de Aritmética y Algebra con las nociones correspondientes de crítica algorítmica*, donde se contiene un somero estudio sirtético de las ramas elementales de la Matemática, y por último los dos primeros cuadernos de los Estudios críticos sobre la *generación de los conceptos matemáticos*, y aún he publicado ya en EL PROGRESO MATEMÁTICO algunos artículos de la obra que puede corresponder á la asignatura denominada *Geometría general*, que debiera comprender el estudio comparado de las diversas geometrías conocidas con nombres especiales, cada una de las que dependen de un método, ó que más bien es un método aplicado á la Teoría de la extensión.

Si á estas consideraciones añadimos el hecho de existir en algunas universidades, ya de América ó de Europa, la asignatura de *Historia de las matemáticas* y el carácter filosófico que reviste el estudio de las matemáticas en Alemania cuyas universidades tienen reunidas las Facultades de Filosofía y de Ciencias, llegaremos á la conclusión de que se impone, sobre todo en nuestras facultades de Ciencias no sólo la creación de alguna asignatura de Matemática superior, sino de una asignatura de *estudios críticos é históricos de la ciencia matemática*.

Y en efecto, si por razón de nuestras vicisitudes históricas, ni tenemos escuela científica, ni hemos llegado especialmente, en la ciencia matemática al nivel medio de otras naciones; si ya que hemos de deplorar el hecho, debemos dirigir nuestros esfuerzos á evitar su continuación en el porvenir, urge que en nuestros procedimientos educativos de la juventud, en vez de malgastar nuestros esfuerzos en pueriles detalles de ninguna importancia, nos dirijamos á las grandes síntesis, á introducir en nuestras prácticas en la enseñanza aquellas ideas generales y fecundas que llevan en sí el germen de otras muchas ideas; más con el fin de que las inteligencias no adquieran una falsa dirección exclusivamente teórica, que puede contribuir al extravío, que nos fijemos también en los grandes repertorios de ejercicios prácticos que ponen á prueba el poder inventivo de los alumnos en que se encierra el porvenir de la Patria.

Así podremos alcanzar á marchas forzadas el nivel científico que nos corresponde en la culta Europa, y al mismo tiempo la intensidad de nuestro esfuerzo propio, por ejercicios que lo pongan á prueba y mantengan su virtualidad ó capacidad para producir.

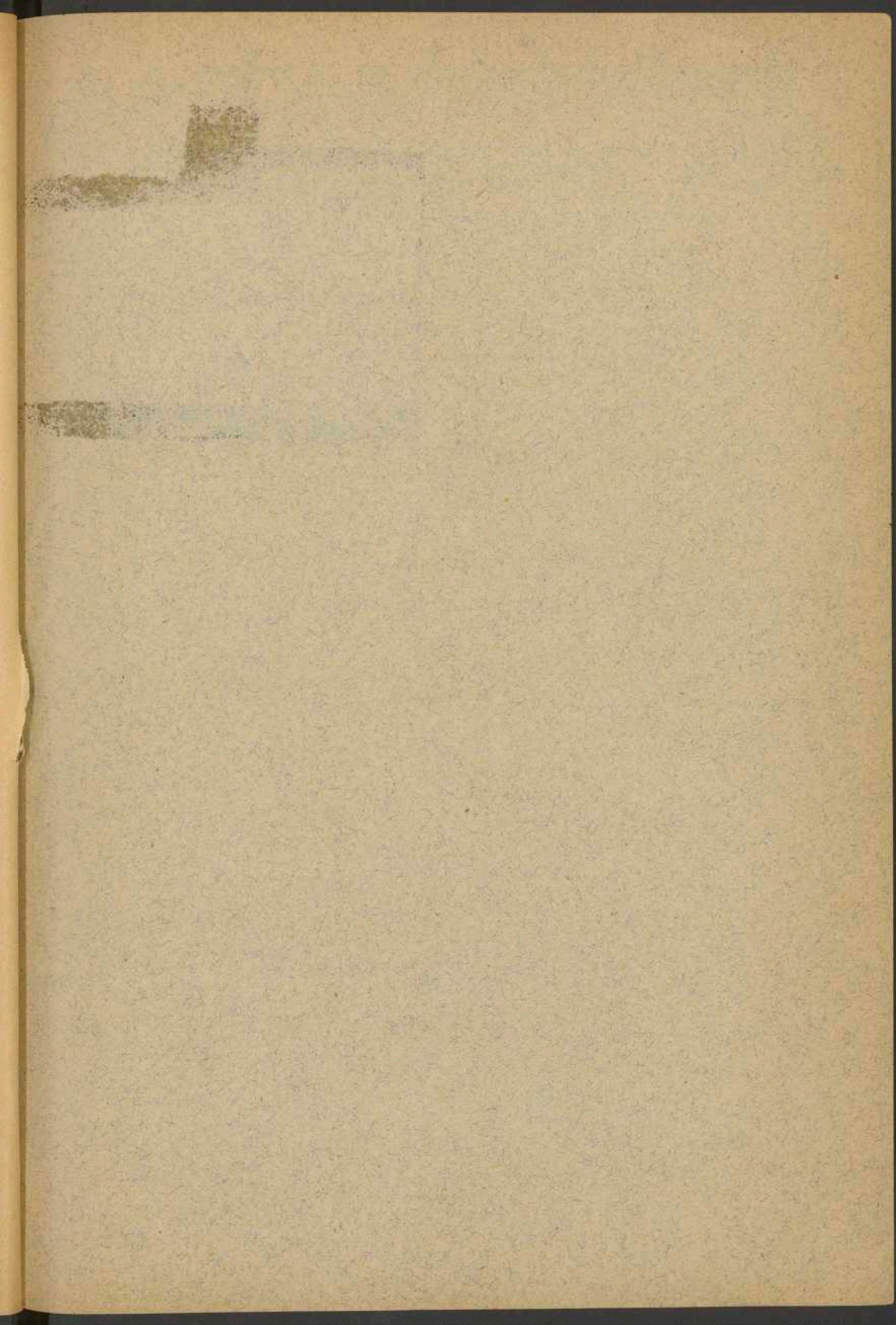
Que se deroguen aquellas costumbres perniciosas de hacer malgastar el esfuerzo intelectual de la juventud en cuestiones tan baladíes como las que suelen proponerse á manera de lazos matemáticos en las oposiciones ó exámenes de ingreso, eligiéndose en cambio otras de alguna transcendencia y susceptibles de ser útiles en estudios ulteriores, que, en fin, al crearse cátedras de Análisis superior correspondientes al período último de su desarrollo, también se creen, como ya se dijo, asignaturas de crítica histórica, prudentemente distribuída entre el primero y el último grupo de asignaturas, y hasta si es preciso, suprimiendo en ellas la obligación del examen, con lo que se facilitaría á los alumnos de verdadera vocación científica el simultanear con los estudios hechos bajo forma dogmática de cada asignatura, otro estudio de su conjunto, ó *Matemática general*, desde el punto de vista de la generación de los conceptos matemáticos, de sus dependencias y correlaciones mutuas, etc., lo que en conjunto constituye la *metafísica de la Matemática*, cuya exposición pudiera hacerse, no sólo en el orden lógico, sino también en el orden cronológico é histórico.

Y antes de terminar diré, que las desventuras del pasado, no influirán en nada para disminuir nuestra confianza en el porvenir. Que si nuestro estado científico no es tan brillante como el actual de otras naciones, en la nuestra no han faltado los destellos del genio ni los esplendores de épocas de grandeza para las ciencias y las letras. Ni el clima ni la raza limitan la potencia intelectual de los pueblos. El Egipto, colocado en una de las regiones más ardorosas del viejo continente, tuvo su espléndida civilización inmortalizada por Euclides, Apolonio y Tolomeo, como la tuvieron los antiguos imperios del Asia, como la ha tenido la India, región donde también se ha conocido un periodo de desenvolvimiento matemático. Pero si aquellas regiones, emporio de la civilización del pasado, hoy no sienten las palpitaciones del espíritu científico, esto es debido á que las épocas las separaron de las evoluciones sucesivas por que pasó el espíritu humano; y es imposible el genio allá donde el te-

reno quedó estéril é inerte y donde la Naturaleza vuelve á recobrar su imperio y sobreponerse á la obra de la Humanidad.

Pero nosotros que hoy seguimos el movimiento de las ciencias, que les erigimos templos para implantar en ellos sus últimos progresos, si por un momento de nuestra vida nos apartamos del gran foco, en alas de nuestro espíritu generoso que nos devolvió después de largas guerras á nuestra querida patria, es indudable que nos aperebimos para conquistar el puesto que nos corresponde en la ciencia, lo que se logrará cuando las iniciativas de los altos poderes, fijándose preferentemente en estas ramas del saber, enaltezcan sus enseñanzas según hemos manifestado, presentando los ideales de la ciencia á la juventud, y ésta responda con entusiasmo á las esperanzas que en ella tenemos todos los que hemos de procurar con nuestro esfuerzo individual á que las logre y realice, con el enaltecimiento de las ciencias, la prosperidad de la Patria.





FAN
9361

BIBLIOTECA CENTRAL DE LA RIOJA



10000210286

MDS 009832