1 = 2556
1º

EL CONCEPTO DEL IMAGINARISMO

EN

LA CIENCIA MATEMATICA

CONFERENCIA

DADA EN LA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

EN 10 DE MAYO DE 1894

POR

Don Zoel García de Galdeano

Catedrático de dicha Facultad
y corresponsal de las RR. Academias de Ciencias
de Madrid y Lisboa

BIBLIOTECA PROVINCIAL
LOGROÑO

Precio: UNA PESETA

ZARAGOZA
Imprenta de C. Ariño, Coso, núm. 100, bajos.
1894

BIBLIOTECA
CENTRAL
DE LA RIOJA
EX-LIBRIS

NO SE PRESTA

171379
FAN
9362

EL CONCEPTO DEL IMAGINARISMO

EN

LA CIENCIA MATEMATICA

CONFERENCIA

DADA EN LA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

EN 10 DE MAYO DE 1894

POR

Don Zoel García de Galdeano

Catedrático de dicha Facultad
y corresponsal de las RR. Academias de Ciencias
de Madrid y Lisboa

Regalado á esta Biblioteca
por D. Amós Salvador,
1 Enero 905

BIBLIOTECA PROVINCIAL
LOGROÑO

ZARAGOZA
Imprenta de C. Ariño, Coso, núm. 100, bajos.
1894

R. 77. 177
R/8973

AL EXCMO. SR. D. JULIAN CALLEJA Y SANCHEZ

Al protector de los estudios científicos en Zaragoza y de EL PROGRESO MATEMÁTICO *en testimonio de la más distinguida consideración y de profunda gratitud su afectísimo amigo*

Zoel G. de Galdeano.

SEÑORES:

Durante la antigüedad y la edad media los conceptos matemáticos se desenvuelven con cierta limitación y timidez; las ideas no se separan del objeto á que permanecian unidas; en los elementos de Euclides, las relaciones se ofrecen adheridas á líneas superficies y aun á sólidos que constituyen el fondo material sobre el que aquéllas se sustentan. Los nombres *número superficial* y *sólido* acompañan á estas entidades externas, el de *relación armónica* está basado en una correspondencia exacta entre ciertos números y uno de los acordes de la música, así como por contraposición se llamaron *sordos* aquellos números que hoy llamamos incomensurables y que no se prestan á una determinación exacta, á una expresión en número limitado de elementos constituyentes, *falsos* é *imposibles* á los que aun hoy llamamos negativos é imaginarios. Las propiedades misteriosas de los números desde Pitágoras van unidas á algo que se refiere á la divinidad ó al universo ó á las cosas humanas, y basta con este motivo que citemos las propiedades del número par y del impar tan fundamentales en la doctrina pitagórica, las maravillosas relaciones á que corresponden el número 3 y el número cuadrado, las del 7, número, *venerable* como le llamaban los pitagóricos. La clasificación de los números en gerarquías en las que los números primos eran considerados como soberanos ó jefes de legiones, las configuraciones geométricas de los números que correspondían á las diferentes especies de números poligonales, piramidales, etc., las propiedades particulares por las que eran defectivos, imperfectos ó perfectos, amigables, etc., y, en Algebra, aquella serie de grados desde el *census*, *res* ó *cosa* que representaba la incógnita hasta los números *cuadrados* y *cúbicos*, última gerarquía á que se llegaba como correspondiente á la última entidad geométrica que podía concebirse en el espacio.

Todo esto y el abandono de las soluciones negativas de los problemas como ininteligibles ó desprovistas de valor caracteriza á la ciencia matemática hasta que en el siglo XVI se dibuja una nueva era de generalización expléndida cuyos albores encontramos en la resolución de las ecuaciones de tercero y cuarto grado, en la explicación por Bombelli del asombroso caso de las ecuaciones de tercer grado cuyas raíces, con ser todas reales, aparecen bajo la forma singular del imaginarismo.

Y despues que con Descartes surge la ciencia moderna sobre la decrépita aunque sólida base de la ciencia griega y que con Newton y Leibniz germina el fundamental problema de la generación de la cantidad desde el fondo de lo infinitesimal, todavia las cantidades imaginarias yacian á un lado como relegadas al mundo de las quimeras ó como en pugna con nuestro modo de concebir, cual intermediarios que á lo sumo se manejaban ó empleaban con el caracter de símbolos sin correspondencia material; y aun los astrónomos de fines del siglo pasado y principios del presente, y matemáticos tan ilustres como Euler, Laplace y Lagrange á lo sumo les daban acceso á título de auxiliares é intermediarios entre las cantidades reales, como un instrumento que abrevia el modo de llegar á los resultados. Pero transcurre el áureo período de la formación de la ciencia matemática cuyos contornos se fijan enérgicamente durante los siglos XVII y XVIII, pasa el cetro de esta ciencia de manos de los matemáticos del siglo XVII representados por Descartes, Newton y Leibnitz á sus herederos Euler, Lapace y Lagrange, y de éstos, en el siglo actual, á Gauss, y á Cauchy, y en la geometría de Pascal y Desargues á Carnot y Poncelet; y á brillante alborada que dibujan estos egregios matemáticos en el cielo del pensamiento humano, sucede una época de luz y de idea que hará designar al siglo XIX como *el siglo de las ciencias*, como el de las grandes armonías y de las fecundas síntesis, no solo en sí ó cual organismo de ideas, sino en sus íntimas relaciones con las leyes del Universo. Y ya que he señalado siquiera brevemente esta especialidad de la Ciencia de nuestro siglo, concentrándome por un momento en el objeto que hoy me trae á dirigiros la palabra, os diré que ciñéndome á una sola de las grandes cuestiones que lleva en sus entrañas la ciencia matemática, voy ha hacer unas ligeras reseñas acerca del concepto del imaginarismo en la misma, para lo cual os pido préviamente vuestra benevolencia.

Como ha poco indiqué, á lo sumo desde el siglo XVI coincidiendo con la resolución de las ecuaciones de 3.° y 4.° grado se fijaron los algebristas en una particularidad envuelta bajo la forma del imaginarismo, y á lo sumo podemos saber que en 1750 el prusiano Heinrich Kühn publicó una memoria en la que daba una construcción geométrica de las cantidades imaginarias, memoria que pasó en el olvido.

Más tarde, en 1806, casi al mismo tiempo Argand en Francia y Buée en Inglaterra publican sus trabajos respectivos por los que el signo, hasta entonces tan misterioso y repulsivo, recibe una interpretación geométrica, la de la perpendicularidad á las direcciones positiva y negativa, como una entidad neutral y perfectamente simétrica entre estas dos afecciones ó modos de ser opuestos de la cantidad, y aun avanzando más en este camino, Argand representa las imaginarias binomias, $a+b\sqrt{-1}$ como rectas irradiando en un plano alrededor del origen, é inmediatamente obtiene la representación gráfica de las operaciones aritméticas y aun la representación del logaritmo con relación á su número.

A estos trabajos suceden multitud de otros de Peakock y Warren en Inglaterra, de Français, Mourey, Valles, Faure, Saint-Venant en Francia, trabajos desapercibidos acaso por la modestia de sus autores, desconocidos en las altas esferas de la Matemática; pero llega un momento en que el ilustre Cauchy, envuelto en la prestigiosa aureola de su fama, que le habían conquistado sus numerosos descubrimientos, acoge propicio tan hermosos conceptos y los realza con su fecundo poder inventivo y generalizador; en su *Théorie des quantités géométriques* ya no se trata solamente de las operaciones del cálculo, sino de las funciones analíticas cuyas variaciones se representan en toda la extensión de un plano, siendo la función y su variable como dos móviles que, enlazados por cierta solidaridad, realizan la generación de la cantidad mediante un elemento generador y una ley, y con esto resulta un progreso considerable en el dominio del análisis matemático.

En Francia los discípulos de Cauchy, Puiseux, Liouville y Hermite llegan hasta la representación gráfica de la doble periodicidad de las funciones elípticas; en Alemania Riemann fundó una nueva escuela que siguen Durège, Newmann y otros analistas, y los horizontes de la ciencia se dilatan.

Mas no se reduce á estos límites la evolución que sigue el imaginarismo; en Italia Bellavitis, con las equipolencias, crea un nuevo algoritmo en que se funden el número y la extensión; en Inglaterra, esta nación cuyo genio original brilla en todas las ramas del saber, Boole el filósofo matemático creador del Algebra de la Lógica, desarrolla un sistema en el que el imaginarismo resulta como corolario de las leyes combinatorias de nuestra inteligencia; Hamilton, en su teoría de los cuaternios, oculta bajo formas geométricas la cantidad compleja de tres unidades imaginarias, más general que la de forma binomia hasta entonces considerada, creaciones de las cuales irradian las diferentes clases de álgebras dependientes hasta de un número cualquiera de unidades complejas; y el edificio se dilata indefinidamente, y aun en el dominio de la geometría, añadiremos para terminar, que Carnot había expuesto su teoría de las correlaciones directa, indirecta y compleja por la que explicaba los estados positivo, negativo é imaginario de las cantidades, y Poncelet en la teoría de las cónicas suplementarias, y apoyándose en su principio de continuidad, desenvolvió ampliamente estos puntos oscuros de la ciencia descubriendo extensos horizontes en las altas esferas de lo abstracto y de la generalización de los conceptos matemáticos; y más recientemente en las teorías geométricas de la homografía y de la involución hizo esto Chasles, asunto incluído en el tema hace pocos meses tratado por el profesor de la Universidad Central Sr. Torroja para su ingreso en la Real Academia de Ciencias, que desenvolvió detenidamente y con la profundidad digna de tan ilustrado catedrático este punto difícil de la ciencia; y para no hacer una omisión injusta é imperdonable hacia el sabio profesor que fué del Instituto del Cardenal Cisneros, matemático y filósofo distinguido, no dejaré de citar su notable *Teoría transcendental de las cantidades imaginarias* en la que supo sintetizar, bajo la unidad de un vasto concepto filosófico, los más fundamentales descubrimientos de los que algunos acabo de enumerar concernientes, ya al modo de ser geométrico ó dinámico de las cantidades imaginarias.

Expuestos estos preliminares que condensan la suma de trabajos hechos en este siglo para esclarecer y fundar la teoría del imaginarismo, voy á entrar en materia. ¿No vemos y se han visto en todas las edades esos puntos luminosos que se destacan en el fondo negro de la noche y que solo se nos revelan ó por su posición fija en los más de ellos ó por su movimiento relativo en otros? ¿No se nos ofrece constantemente, ya la pulimentada superficie de un espejo ó de una mesa de mármol como la imagen de un plano, ó el borde de una regla como la representación de una recta?

Pues aquellos puntos luminosos que nada al parecer nos revelan respecto á su solidaridad ó dependencia, están sometidos á una ley comun, á la ley de la gravitación universal, y estas superficies y rectas más allá de lo que nada nos dice nuestra vista, no son tales entidades geométricas, sino mundos invisibles en los que se agita el átomo en vértigo continuo y realiza armonías infinitas que se nos suelen presentar bajo las formas sin cesar variables de los fenómenos físicos y químicos, y éstos fenómenos físicos y químicos realizados en un mundo que se escapa á nuestras percepciones por lo pequeño, se enlazan con aquellos puntos luminosos, y entre unos y otros se establece una corriente incesante á través de las ondas del océano etéreo que en ritmo no interrumpido lleva de unos á otros confines del Universo las palpitaciones de la materia, los estremecimientos más leves de los átomos.

Pero sobre el mundo de la materia, sobre estas alteraciones debidas á las fuerzas mecánicas que trazan figuras geométricas dibujadas sobre el espacio, y en él desvanecidas por un fluir perpétuo, existe otro mundo ideal y racional, un mundo inextenso en el que se refleja la extensión sin fin aparente de aquél, un mundo que no solo refleja, sino que siendo esencialmente activo, crea las artes que idealizan, que enaltecen bajo la forma de lo bello, aquéllo que tan solo es ritmo y movimiento de la materia, el llegar á ser de los fenómenos, las apariencias falaces del tiempo y del espacio, y que crea tambien las ciencias que unifican y encadenan bajo la fuerza atractiva de la inteligencia los fenómenos que de otro modo serían actos repetidos ó entidades aisladas sin engranaje ni solidaridad alguna.

Pues si nuestra inteligencia, además de ser espejo en que se refleja el Universo, es fuente activa que crea las artes y las ciencias y, que cerniéndose sobre lo contingente, sobre lo que aparece, llega á vislumbrar lo necesario, que puede apreciar, no solo la realidad sino la posibilidad; al pretender nosotros estudiar entre las infinitas cuestiones que la ciencia nos ofrece, la que á mi tema actual concierne, á saber, esas nebulosidades que en la ciencia matemática han aparecido bajo la denominación de imaginario y que ha sembrado la desconfianza y la duda en no pocas inteligencias acerca la claridad y evidencia de muchas verdades matemáticas, debemos desde luego hacer una distinción importante entre los elementos objetivo y subjetivo que intervienen en la producción de esta entidad por nombre tan impropio designada.

Y en efecto: tenemos en primer lugar el mundo de nuestro pensamiento en el que se elaboran las ideas unas veces en sus relaciones mútuas y otras en sus relaciones con lo externo. Tenemos una dialéctica que es el molde en que se encierran las leyes de nuestro pensar, que es lo que dirijimos al objeto para asimilarlo á nuestro modo de ser y concebir, y tenemos algo externo que reacciona sobre nosotros y que en nosotros deja la huella de lo que es; y existe además una correspondencia ó conformidad entre nuestro pensamiento y lo externo, sin lo cual sería dificil explicar esta armonía entre lo que sucede independientemente de nosotros y entre lo que nosotros ponemos, armonía que más que ninguna otra ciencia hace ostensible la Matemática al aparecer, no sólo como un organimo ideal *a priori* que se desenvuelve cual corolario de un reducido número de principios fundamentales, sino además como un comprobante de los fenómenos exteriores hasta el punto de que, no sólo las relaciones geométricas y los fenómenos mecánicos, sino que además los fenómenos físicos y aun los químicos propenden á tener su justificante y su correlación con aquellas leyes y relaciones dictadas *a priori;* y de igual modo, en virtud de estos antecedentes, para explicar el fenómeno matemático del imaginarismo, deberemos considerar aparte el sujeto del objeto, aquéllo que se produce en nosotros de aquéllo que viene á nosotros reflejado desde fuera.

Se sabe hasta por los alumnos de enseñanza media, que despues de propuesto un problema general, al presertarlo con ciertos datos numéricos elegidos al arbitrio suele el resultado no siempre ofrecerse con los caracteres de un número positivo ó absoluto, sino bajo ciertas apariencias que ya en los tratados elementales se explican por ciertas incompatibilidades entre los datos arbitrariamente supuestos y los resultados que se piden.

Sucede en este caso, que no abarcando nuestra inteligencia todo el sistema de valores compatibles con las premisas, se encuentra expuesta á proponer una imposibilidad para ella desconocida *a priori;* imposibilidad á la que corresponde el resultado bajo las formas singulares de lo negativo, imaginario, indeterminado é infinito.

¿Quién no sabe que en muchos casos, ilustrados por la especie de resultado singular, nos basta corregir en los datos la incompatibilidad no prevista para establecer la conformidad entre lo que pusimos y lo que debe resultar?

¿No ocurre muchas veces que en una cuestión cualquiera se ponen más condiciones que las que son necesarias? Esto solo es debido á la limitación de nuestra inteligencia á la que le es imposible el ver *a priori* todo lo que entra en la composición de cuanto es ó sucede.

Una explicación muy clara y sencilla nos puede ofrecer á este hecho la Geometría.

El geómetra combina puntos, líneas y planos entre sí y enuncia las relaciones obtenidas *a posteriori* bajo la forma de teoremas, que se reducen por consiguiente á *expresar las relaciones de coexistencia que ligan á las varias entidades que entran en un enunciado.* Así, por ejemplo, se afirma que *la suma de los ángulos de un triángulo es igual á dos ángulos rectos*, y que *los pies de las perpendiculares bajadas desde un punto de la circunferencia á los tres lados de un triángulo inscripto están en linea recta*,etc.; y si caminamos por todo el dominio de la geometría, desde la propiedad fundamental de la línea recta, veremos que por una serie de sustituciones de relaciones equivalentes, llegamos á formar una red de proposiciones expresivas de cierta ley de coexistencia y que se llaman teoremas, como he dicho.

Ahora bien, ¿si esa red de verdades no hubiera sido determinada *a posteriori* y fijada por medio del lenguaje bajo la forma de teoremas; y si por el contrario aspirásemos á presentarla *a priori* segun nuestro arbitrio ¿no encontraríamos enunciados que expresarían incompatibilidades y absurdos? Pues esto sucede tambien cuando al enunciar un problema algebráico elegimos arbitrariamente los datos y buscamos con ellos un resultado especial determinado *a priori* por nosotros. Pretendemos unir á un sujeto un predicado demasiado restringido ó poco extenso y aquél puede no entrar en la circunscripción de éste, y solo nos queda el recurso de limitar el sujeto ó de extender el predicado para llegar á una relación admisible ¿qné sucedería si afirmásemos que en toda sección cónica la relación de las distancias de cada uno de sus puntos al foco y á la directriz es igual á la unidad? que correspondiendo la tesis solamente á la parábola, la proposición sería falsa y sólo sería cierta cuando extendiéramos la tesis al caso de ser la relación una *expresión racional*, que comprende los tres casos de ser igual, mayor ó menor que la unidad, ó si invirtiendo la proposición dijéramos que cuando dicha relación es una expresión racional la curva es una parábola? Que sería necesario extender la tesis ó el predicado.

Si ahora nos referimos al Algebra, cuyas relaciones se expresan por un lenguaje que le es propio, notaremos una ventaja sobre la Geometría y es que al expresarse el absurdo de un enunciado por las formas negativa, imaginaria, indeterminada ó infinita la huella de la imposibilidad ó el absurdo subsiste en éstas, que además de expresar tal imposibilidad ó incongruencia, revelan la naturaleza de éstas, que la imposibilidad es de cierta clase, privilegio que solo tiene esta lengua universal y perfecta que responde siempre directa ó indirecta, afirmativa ó negativamente á la forma de nuestras proposiciones ó de los juicios elaborados por nuestro entendimiento.

Comparemos, para ser más claros, el orden de los fenómenos del mundo material con el del mundo espiritual.

Veamos por un momento cómo el cobre, de brillo metálico, con aquella superficie compacta y tersa desaparece bajo la acción del ácido sulfúrico que sustituye aquel primer aspecto por el de las sales cúpricas; aquella masa metálica habrá llegado á convertirse en una aglomeración de cristales azules. Este sulfato de cobre luego podrá perder el cobre desalojado, por ejemplo, por el hierro, ó sometido á otras combinaciones, sufrir nuevos cambios ante nuestros sentidos. Aquellos átomos de cobre no dejan de ser, en la Naturaleza nada se pierde y todo se transforma; y el cobre sin dejar de ser, tan solo cambiará de apariencia por efecto de la infinidad de relaciones en que puede encontrarse respecto á los demás seres de la Naturaleza.

Pues bien ¿qué es el signo $\sqrt{-1}$ en nuestra inteligencia? Es una transformación de -1 por una operación intelectual ó, más generalmente, el símbolo $a\sqrt{-1}$ corresponde en una fórmula donde a se encuentra elevada al cuadrado á un cambio del signo de a^2, cambio del que permanece la huella cuando las transformaciones del cálculo han conducido del cuadrado á la raíz.

Y, si en la Naturaleza, el cobre que consideramos en nuestro ejemplo, deja su huella en sus sales bajo la apariencia de su color azul ó bajo la forma de sus cristales y siempre es una entidad cuya influencia ha de afectar de algun modo á las demás entidades, conforme á la virtualidad que en sí encierra; y si el cobre metálico oculto bajo la forma de una sal por el ácido sulfúrico, luego, en una pila, puede aparecer en su forma metálica ó ser desalojado de aquélla por el hierro ¿qué otra cosa acontece en la región de las ideas con el signo $\sqrt{-1}$ que apareciendo ó desapareciendo á nuestra vista siempre ejerce su virtualidad sobre las entidades del mundo de la cantidad y de la relación, y sin aniquilarse en este dominio contribuye á efectuar transformaciones de conceptos y, más concretamente, de cantidades en otras cantidades?

Si el éter es el vehículo que cambia las impresiones de unos á otros mundos bajo la forma de rayo de luz como aurea cadena que los une, y sí á traves de este océano la materia sigue sus perpétuas transformaciones sin que en el sistema total se pierda la influencia de uno solo de los átomos, en el sistema de la ciencia tambien *cada idea tiene su lugar y su acción entre y sobre las de más ideas.*

Una cadena más inmaterial pero por eso no menos enérgica que esa fuerza atractiva universal ó esa acción de las ondas etéreas, transmisora de las energías materiales existe en nuestra inteligencia, que se nos presenta bajo la forma que denominamos *Ciencia* y que reune ideas á ideas en indefinida red y no solo enlaza estas entre sí, puesto que además las enlaza con los objetos ó realidades á que aquéllas corresponden; y tanto es así que por eso se las definió como imágenes; y en nuestro modo de conocer, que se verifica mediante representaciones, *per conversionem ad phantasmata* necesitamos que siempre al objeto conocido corresponda en nuestra inteligencia algo que sea su signo, y sino su imagen sensible ó, como ocurre con muchoso bjetos que no la tienen, al menos por su nombre.

Pues bien, si esta es la forma de nuestro conocer ¿qué de extraño puede ofrecernos el *imaginarismo matemático* que solo es la representación de ciertas relaciones, las huellas de las mismas que corresponden á ciertas realidades, en ciertos momentos puramente ideales, pero que en otros aparecen con existencia real á través de los misteriosos enlaces que subsisten en el fondo de nuestra inteligencia, como en la Naturaleza existen los enlaces que ora nos manifiestan ora nos ocultan ciertas acciones productoras de los fenómenos, mediante los que se nos presentan las realidades materiales, cuya esencia se nos oculta bajo aquellos signos perceptibles?

Pero si las relaciones entre los conceptos se ocultan bajo las formas singulares del análisis tales como la de lo imaginario, infinito, etc.,de igual modo que sucede en el mundo físico respecto á las acciones de los átomos bajo las formas de color, temperatura, dureza, etc., unos y otros pueden ser objeto de un estudio más directo, y nosotros vamos á limitarnos á la explicación del imaginarismo. Para ello necesitamos hacer un estudio de los *algoritmos fundamentales* que conducen á la generación de los números.

Si partiendo de la unidad pretendemos formar el sistema de los números, vemos que los tres algoritmos de la sumación, multiplicación y potenciación realizan en forma distinta este propósito.

La suma desarrolla toda la serie de los números enteros. La multiplicación engendra clases especiales. Cada número es el punto de partida de todos sus múltiplos. La potenciación, de la serie infinita de los números solo produce los que son potencias, aislados entre sí por espacios numéricos cada vez más considerables. En la multiplicación, los números primos aparecen como los genuinos representantes de clases de números compuestos, son los generadores naturales de éstos. Pero pudiendo entrar á engendrar clases tambien los números compuestos, de esta variedad resulta un conjunto de clases unas incluídas en otras total ó parcialmente, dando origen á multitud de relaciones, objeto de la Teoría de los números; y si este algoritmo se combina con el de la suma, á la clase de números congruentes con cero resultan agregadas todas las clases congruentes con respecto á cualquier módulo, y, por consiguiente el dominio total de los números enteros, cuyo estudio no es de este lugar.

En estas operaciones distinguimos un carácter común y es, que dándose ó los sumandos, ó los factores, ó la base y el exponente, siempre un resultado responderá que aparezca en la serie de los números, que exista.

Mas si aspiramos á resolver los problemas recíprocos, el resultado no será tan satisfactorio; los números buscados en multitud de casos, ó en la mayor parte de ellos no se hallarán en la serie de los números enteros. Al pretenderse buscar el número que sumado con 7 produzca el 3 nos encontramos con un imposible, así como al buscar el número que multiplicado por 6 deba dar 13, ó el que elevado al cuadrado conduzca al resultado 20.

Pero observemos lo siguiente, á saber, que si la unidad que tomamos como origen no fuera la primera sino que hubiese, por ejemplo, 20 unidades anteriores á ella en el orden de la generación numérica, ya la sustracción propuesta sería posible, y después de haber restado $3+4$ de $20+3$ nos quedarían 16 á contar desde el nuevo origen ó 4 precedentes al primero; y esto nos conduce, generalizando, á admitir una doble generación del número, en sentido inverso, donde se hallen los elementos que nos puedan hacer falta para efectuar la sustracción en todos los casos.

Si consideramos ahora la cuestión de dividir el 13 por el 5, se nos presenta como una imposibilidad que estriba en no pertenecer el 13 á la serie de los múltiplos del 5. Pero abandonemos la idea de la unidad absoluta indivisible, consideremos una unidad concreta, ya sea tiempo ó el espacio susceptible de división indefinida; traigamos á nuestra mente esa manera de generación endógena ó génesis interna, propia de los seres orgánicos que desde un núcleo se multiplican haciendo surgir de un indivíduo otros muchos, medio de producción más ilimitado en las magnitudes extensas, y cada unidad podrá concebirse como descompuesta en otras subalternas capaces de engendrar series de números tan numerosas como sea preciso y que rellenarán las series más espaciadas de los números enteros, los cuales aparecerán aislados entre estos nuevos individuos.

Examinemos el caso de la potenciación ó graduación Los cuadrados, los cubos, etc., aparecen como números solitarios en la serie de los números enteros: el 4, 9, 16, 25, 36, 49, el 64, 81,.... el 27, 64, el 125, 216, 343,.....; y á simple vista el problema inverso aparece susceptible de mayor número de casos en que la operación será imposible, que en el caso de los números *múltiplos*. Las series entera y fraccionarias reunidas no bastan para contener los nuevos números que resultan de resolver en toda su generalidad el problema inverso de la potenciación, ó sea la radicación; la divisibilidad indefinida de las unidades en otras nuevas engendrarán series de números cada vez más compactas que no podrán jamás contener los números irracionales, y de estos números irracionales solo podrá decirse que ocupan lugares comprendidos entre dos consecutivos de dichas series intercaladas, que son los límites de éstos, incesantemente aproximados por sus leyes sucesivas de generación.

Nos hallamos ahora en el caso de distinguir dos modos de generación característicos de los algoritmos de la agregación (suma y resta) y graduación (potenciación y radicación. El crecimiento por *yuxtaposición* de la suma en que el número crece ó disminuye de una manera externa y por *intus suscepción* en que altera de una manera interna y que corresponden al infinito extensivo (alejamiento indefinido) y el infinito intensivo (por multiplicación ó aumento indefinido de los elementos generadores), el infinito intensivo ó de concentración hacia el cero como en busca de los elementos generadores de la cantidad finita cuyo esquema dió Wronski bajo la forma

$$n = \left(1 + \mathrm{L}\, n \frac{1}{\infty}\right)^{\infty}$$

Como dice Rey y Heredia, la graduación excluye la reciprocidad característica de la multiplicación; no hay en ella mas que una base desenvuelta, un número que es conducido á dar de sí y por sí mismo *cuanto puede* (potencia) por una evolución que es sucesiva ó gradual, hasta tomar respecto al punto de partida (base ó raíz) la posición determinada por otro número ordinal (exponente).

El exponente, que determina la evolución, representa la noción de causa; la potencia á que llega la evolución representa la noción de efecto, y la base ó raíz es el sujeto que recibe el influjo de la causa. La raíz es como el gérmen ó la materia de la evolución, la que recibe el influjo causal del exponente, cuyo influjo determina el efecto.

Estas operaciones fundamentales corresponden á conceptos irreducibles del entendimiento.

La segunda potencia contiene á la primera como ésta á la unidad; luego todos los grados ó potencias ulteriores se determinan por múltiplos de la raiz que se van conteniendo unos en otros en la misma razón que la raíz contiene á la unidad.

Establecidas estas nociones generales acerca de los algoritmos que vemos engendran clases diversas de números dependientes de la naturaleza de aquéllos que da en cada caso la ley de la generación, preciso es que nos fijemos en las dos fases opuestas correspondientes á los dos problemas inversos que nos ofrece cada algoritmo, de manera que la sumación comprende la adición y la sustracción; la reproducción á la multiplicación y división; la graduación á la potenciación y á la radicación.

Cada una de las operaciones inversas produce la dilatación del dominio de los números subordinados á la ley de cada algoritmo.

En efecto, al pretender, por ejemplo, dividir un número arbitrario por 5, pretendemos atribuirle una propiedad que solo pertenece á la clase de los múltiplos de 5; el sujeto es de más extensión que el predicado; pero ésta (la clase de los múltiplos de 5) la podemos extender haciendo que la clase de los múltiplos de 5 tenga por unidad $\frac{1}{n \cdot 5}$.

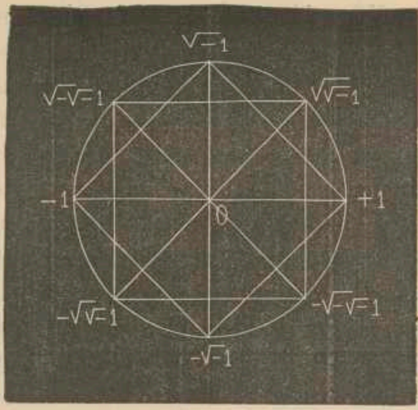
Todos los números de la clase son múltiplos de 5, y solo algunos números de otras clases son multiplos de 5; luego no siempre éstos serán múltiplos de 5. Pero si éstos tienen una unidad divisible por 5, los números de cualquier clase serán divisibles por 5. Así diremos: el 19 es múltiplo de 5 (absurdo), pero el 19 es divisible por 5 cuando la unidad elegida es divisible por este número.

Hemos ya presentado la variedad que corresponde al dominio puramente numérico; pero nuestra inteligencia reacciona sobre el número y lo somete á nuevas combinaciones.

Al aplicar las leyes de la generación al número considerado como positivo y negativo, hace entrar en esta el cambio de dirección. Esto se vé en la suma y la sustracción en las que se combinan el signo de la cantidad con el de la cualidad; y tambien en la multiplicación y división, en que la afección del multiplicando ó dividendo combinada con la del multiplicador ó divisor produce la del producto ó cociente. El signo en la multiplicación ó división no afecta solamente á la serie de individuos ó de los sistemas, á la distribución de aquéllos en éstos, á su extensión ó limitación, sino á la dirección ó situación del sistema total respecto á una de sus posiciones tomada como absoluta, que fija la cualidad del módulo de que depende dicho sistema.

Pero ascendamos en el orden de nuestras combinaciones, y la combinación $a\sqrt{-1}$ ó $\sqrt{-1}$ nos ofrecerá una operación imposible, puesto que $(\sqrt{-1})^2 = -1$; y en la serie de los números, los cuadrados de los positivos y de los negativos engendran siempre números positivos. Este caso excepcional ha sido resuelto observando que existe un nuevo elemento entre la unidad positiva y negativa que es la unidad perpendicular, y por consiguiente, los números perpendiculares, que salen de la región de los números ordinarios ó reales, racionales é irracionales, positivos y negativos; y este resultado singular nos conduce á entrar en la región de la Geometría ó de los números geométricos. Y el símbolo $\sqrt{-1}$ viene á resultar como un individuo especial entre multitud de otros individuos que corresponden, no á la dirección especialísima de perpendicularidad, sino á todas las direcciones alrededor de un punto. Y ya no solo consideraremos la unidad positiva ó la negativa como términos de la evolución potencial, sino que cualquier dirección puede ser término de la misma, lo que tiene su representación gráfica en la teoría de los polígonos regulares.

Las ecuaciones $z^2-1=0$ y $z^2+1=0$, corresponden á los radios $+1$, -1, $+\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$. Ambas ecuaciones se comunican ó reunen en la $z^4-1=0$ que tiene su representación en los cuatro radios del cuadrado, y los de ésta se reunen con los de $z^4+1=0$, que con los anteriores forman los ocho radios del octógono, y así sucesivamente; y si $x^4-1=0$ $z^4+1=0$ forman dos ciclos incluídos en el sistema de ocho radios que reproducen cada uno solo la mitad de los radios, hay de éstos que se llaman raices primitivas que reproducen las ocho raíces en orden, ó entre sí igualmente separadas por el arco generador $\frac{1}{8}$ de circunferencia ó por suma de éstos en número que sea primo con ocho, así, por ejemplo, de 3 en 3 ó de 5 en 5, que reproducen todas las raíces en orden inverso.



Para obtener el arco AB por sus raíces cúbicas, basta hacer girar el radio situado al $\frac{1}{3}$ del arco AB, ó este sumado á las raíces de $z^3-1=0$, es decir,

$$\frac{1}{3}\alpha+\frac{2\pi}{3},\ \frac{1}{3}\alpha+\frac{4\pi}{3},$$

que darán

$$3.\frac{1}{3}\alpha=\alpha,\ 3\left(\frac{1}{3}\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)=\alpha+2\pi,\ 3\left(\frac{1}{3}\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)=\alpha+4\pi.$$

es decir, que la evolución potencial lo llevará siempre á la posición OB.

Esta determinación de los números geométricos da orígen á una nueva amplificación del sistema de números racionales, irracionales, positivos y negativos que corresponde al sistema de las cantidades algebráicas, cuyas leyes de generación están incluídas en los tres algoritmos fundamentales, y mediante ésta agregación todas las operaciones algebráicas son posibles; las premisas quedan incluídas en las conclusiones con reciprocidad perfecta. Y aun por abstracciones sucesivas podremos descender del sistema geométrico, ó de los números dirigidos (correspondientes á todos los puntos del plano), al sistema de números opuestos (positivos y negativos) y de éstos al de los números enteros, fraccionarios é irracionales, y por abstracción del módulo ó de la unidad extensa, á los números absolutos.

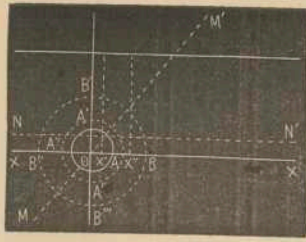
Pero sobre el sistema de los algoritmos fundamentales, existen infinidad de sistemas de algoritmos derivados cuyas representaciones se verifican en el plano mediante el movimiento de dos vectores ligados entre sí por la ley algorítmica que se proponga, es decir, el vector de la variable y el vector de la función.

Limitándonos á un solo ejemplo, veamos la ley de variación de

$$e^{n+x\sqrt{-1}}=e^{n}\times e^{x\sqrt{-1}}=e^{n}(\cos x+\sqrt{-1}\operatorname{sen} x),$$

en que la variable es $n+x\sqrt{-1}$, y la función se compondrá del módulo e^n y del argumento $\cos x+\sqrt{-1}\operatorname{sen} x$, un elemento de movimiento rectilíneo y otro de movimiento circular.

Cuando el punto $n+x\sqrt{-1}$ se mueve en la primera banda, $e^{n+x\sqrt{-1}}$ se mueve en todo el plano; para un valor fijo x' de n, la funcion recorre toda la circunferencia de radio e^n mientras $n+x\sqrt{-1}$ recorre el segmento $x'x'$. Para x constante y n variable, mientras $n+x\sqrt{-1}$ recorre una paralela NN' á Ox, la función recorre una recta MM' inclinada en el ángulo x. En el caso anterior, cuando n recorre otro segmento perpendicular á xx en la 2.ª banda, la función recorre una segunda circunferencia, etc.



Bastándonos haber citado este ejemplo, diremos para terminar este punto, que el sistema total á que llegamos en el más alto grado de generalización, es el sistema de las funciones de variables complejas que nos hacen ascender del dominio del Algebra al dominio del Análisis, en el que las operaciones trascendentes se reunen á las algebráicas.

Si el concepto de dirección nos ha conducido á la Geometría plana, cuyo organismo se desenvuelve por el método de las equipolencias que se funda en los dos conceptos de magnitud y de dirección, una ulterior extensión del sistema fundado en la hipótesis de tres unidades perpendicularmente entre sí dirigidas en el espacio, i, j, k nos conduce al sistema de los cuaternios como representación de un sistema de álgebra de tres unidades complejas, sistema que es á su vez punto de partida de nuevos sistemas de álgebras de n unidades complejas y que tienen por fundamento combinaciones *a priori* dictadas por nuestro entendimiento, pero sin incompatibilidad alguna respecto á los sistemas establecidos y tales que, para valores especiales de los nuevos elementos, el sistema generalizado se convierte en otro de dichos sistemas establecidos. Esto conduce al sistema más general fundado en las leyes combinatorias, de modo que como dice Boole, la validez del Análisis algebráico no depende de la interpretación de los símbolos, sino de las leyes combinatorias de nuestro entendimiento.

Pero antes de llegar á esta última generalización, detengámonos en el dominio de la Geometría.

Hemos visto cómo los diversos dominios algorítmicos se han ido dilatando, asimilándose por extensión los dominios previamente obtenidos á otros dominios externos á aquéllos, é incluyendo unos y otros en un campo común.

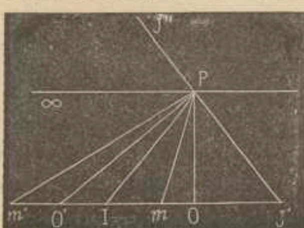
El sistema de los números salió del caos en que existía virtualmente, por efecto de la acción creadora de nuestra inteligencia que fijó leyes según las cuales aquéllos quedaban determinados.

El espacio también es un caos en que virtualmente se hallan todas las figuras que nuestra inteligencia puede concebir; y leyes dictadas por ésta hacen surgir la recta, el plano, el círculo, las secciones cónicas, etc., y las diversas figuras dependen de medios puramente gráficos de generación, ó de estos combinados con leyes numéricas, unas veces fundiéndose y otras separándose el número y la extensión.

La relación del elemento objetivo y subjetivo debe de tenerse muy en cuenta para el estudio de estos sistemas, en que el objeto es la entidad extensa y la ley puede ser *métrica ó descriptiva*.

Ya se sabe que en ciertos límites bastan relaciones puramente descriptivas, el empleo de combinaciones de puntos, líneas y planos para constituir un sistema de Geometría, como lo hizo Staudt, y que en el movimiento de éstos elementos se funda la Geometría cinemática; pero tambien se ha sostenido por los más eminentes geómetras y los hechos por otra parte lo certifican, que es indispensable combinar á las construcciones gráficas otras construciones dependientes de relaciones métricas, si se quiere extender los horizontes de la Geometría y no dejarlos reducidos á muy circunscriptos límites.

Entre los varios sistemas de coordenadas nos fijaremos en el de Chasles, basado en la relación anarmónica y que es continuación del sistema de la Geometría griega, y en el sistema cartesiano, característico de la Geometría moderna. En éste, las diferentes ecuaciones contienen sistemas de puntos que se encierran en líneas ó superficies, á la manera que en la Algoritmia las ecuaciones encierran sistemas de números; y si conforme á los propósitos de Carnot y de Poncelet, buscamos la correspondencia que existe entre las variaciones de las figuras y de las fórmulas que las expresan ó traducen (en las que distinguió el primero las correlaciones directa, inversa y compleja), hallaremos, siguiendo las conclusiones de Poncelet, que las cónicas están enlazadas cada una con una infinidad de otras cónicas suplementarias de tal manera, que las tangentes y las cuerdas reales de las primeras son ideales en las segundas, y recíprocamente. Los lugares geométricos se encuentran así simplificados y amplificados, como, en los lugares algorítmicos, el de los números enteros se amplificaba con el de los fraccionarios, y éstos con los de los irracionales, etc. Y, en este sistema geométrico, lo imaginario tiene cabida, mediante las cónicas suplementarias, como en los sistemas algorítmicos quedaba incluído por la agregación del sistema de direcciones alrededor de un punto. Análogamente, en la Geometría proyectiva, vemos que tienen cabida los



elementos imaginarios mediante la agregación, á los sistemas reales, de otros sistemas. Cuando O' y J' se hallan al mismo lado del punto O, medio de I y de J', correspondientes al infinito en cada una de las dos series homográficas superpuestas los valores de $Om = \pm\sqrt{OO'.OJ'}$ que determinan los puntos dobles, son reales; siendo imaginarios, cuando se hallan á distinto lado; y entonces el punto P determinado por la perpendicular $OP = \sqrt{OI.OO'}$ es el centro de un ángulo de magnitud constante cuyos lados, al girar éste alrededor de P, describen dos series homográficas sin puntos dobles reales, es decir, en que éstos son imaginarios. A los sistemas homográficos de la forma

A B C C' B' A' ó A B B' A' C C'

se unen sistemas homográficos de la forma

A B C A' B' C'

Además, los puntos y las rectas imaginarios tienen algo real y fijo que los determina, ó sea sus *elementos*, pues teniendo cada uno su conjugado, el *punto medio* y el *producto* de sus distancias á un punto fijo, y si se trata de rectas, el producto de las cotangentes de sus inclinaciones, sobre un eje fijo y la recta conjugada armónica de este eje con relación á las dos rectas dadas, constituyen dichos elementos determinativos de los sistemas de puntos y rectas imaginarios.

En Geometría, lo mismo que en la Algoritmia, debemos observar que el tránsito del sujeto al objeto por medio del lenguaje, introduce ciertas particularidades que deben tenerse en cuenta y de las que debe hacerse exámen concienzudo. Una definición sólo puede expresar algunas condiciones de las figuras, omitiendo otras que están implícitamente contenidas en las primeras, pero que establece una diversidad entre el objeto y su expresión verbal. Como que el objeto, si bien depende en general, de las leyes ó condiciones puestas primitivamente por el sujeto y que constituyen la definición adoptada, tiene independientemente otras propiedades que resultan de su naturaleza intrínseca; éstas producen ciertas modificaciones ó variaciones en las fórmulas que las expresan, que están en relación con la existencia ó no existencia de ciertos objetos de las figuras.

Así, por ejemplo, el eje radical de dos circunferencias puede ser cuerda real ó ideal, así como la polar de un punto con relación á un círculo ó á una cónica. Sucede en este último caso que la polar puede obtenerse: 1.° por las dos tangentes trazadas desde el punto ρ á la circunferencia: 2.ª trazando por ρ una transversal que encuentre á ésta en dos puntos a y a' y las tangentes en a y a' y tomando el conjugado armónico de ρ con relación á a y a' 3.° Trazando dos transversales $\rho a a'$ y $\rho b b'$, después las rectas ab' y ba', así como las ab y $a'b'$. 4.° Tomando sobre aa' y bb' los conjugados armónicos de ρ. 5.° Tomando sobre la recta que une ρ con el centro el punto e tal que $Ce.\ C\rho = R^2$, y trazando por e la perpendicular á ρC.

Estas relaciones entre las figuras geométricas y las expresiones analíticas que les corresponden, y aun las propiedades expresadas por sus definiciones ó por medio del lenguaje ordinario han sido estudiadas por Monge, Carnot, Poncelet y Chasles.

Así como en las fórmulas á que conduce la resolución de un problema, las soluciones unas veces se unen, otras se separan, algunas veces se pierden ó se ganan por efecto de las transformaciones del cálculo, en ciertos momentos ó entre ciertos límites, dejan de existir valores reales de las mismas, que se sustituyen por expresiones imaginarias, tambien en la Geometría ciertas partes accidentales de la figura desaparecen, persistiendo las esenciales, así en el ejemplo, anteriormente citado, deja el eje radical de cortar á las circunferencias, aunque no deja de ser el lugar geométrico de los puntos de igual potencia; en las cuerdas ideales de Poncelet, dejan éstas de cortar á la cónica, pero no deja de subsistir la relación armónica entre los extremos del diámetro conjugado á la dirección de aquéllas y los puntos de intersección de dicha cuerda con la prolongación de éste y con la polar que corresponde á dicho punto.

El método de Monge llamado de Transmutación de las figuras, la teoría de la correlación de las figuras de Carnot, el principio de continuidad de Poncelet, han tendido á explicar estas circunstancias que ofrecen las figuras en un estado general de variación, en el que, como dice Poncelet, hay expresión de la no existencia de igual manera que la hay para la existencia; así se dice, por ejemplo, que la intersección de las tangentes en los extremos de un diámetro de una cónica concurren en el infinito; y, en efecto, este diámetro es la polar de un punto del infinito, como el centro es el polo de la recta en el infinito. Lo infinitamente pequeño es la expresión de un círculo que se reduce á un punto; y además diré que la más reciente evolución de la Geometría ha conducido, no sólo á la *Geometría simbólica*, en que se prescinde de las figuras para evitar el aplicarles los razonamientos en situaciones particulares ó excepcionales, como lo hizo Staudt de una manera absoluta, por creerse que basta con que éstas se hallen definidas por sus relaciones esenciales de las que con rigor lógico se derivan todas las demás; sino que, por último, en la más alta esfera de generalización nos hallamos con la Geometría de los hiper-espacios, que ocupa en el orden de las entidades geométricas el mismo lugar que nuestra intuición sensible en el orden de los fenómenos intelectuales, pues así como la intuición sensible da forma inteligible á los objetos que percibimos y los hace aptos para que, por su inteligibilidad, nuestra inteligencia se ponga en relación con ellos, las entidades del hiper-espacio son esquemas de las relaciones algorítmicas, que dan á éstas una forma según las leyes de la Geometría, por lo que aparecen como una generalización de nuestro espacio.

Y, en fin, sobre estos sistemas encontramos las leyes de la dialéctica á las que corresponde la rama superior de la Algoritmia, llamada el Algebra de la lógica, la más próxima al sujeto puesto que establece las leyes primeras de combinatoria en nuestro modo de actuar y las aplica inmediatamente al lenguaje que traduce nuestros actos, que luego se refieren al orden matemático, expresando relaciones, no sobre cantidades, sino sobre objetos ó entidades en general, según el principio de su creador Boole que declara que *la validez del análisis algebráico depende, no de la interpretación de los símbolos empleados sino de las leyes de su combinación;* que parte de las relaciones de subordinación, supraordinación ó de identidad de las clases de entes, de la naturaleza de las proposiciones afirmativas ó negativas, categóricas, condicionales, de las dos operaciones fundamentales que corresponden á la máxima clase contenida en las clases A, B, C,..... ó de la mínima clase que las contiene, ó sea la multiplicación y la suma lógicas, las operaciones sobre las proposiciones, los dominios y las clases; las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva; la dualidad, etc.

Voy á terminar: He tratado del sistema matemático puro, ahora, para concluir, diré que, á parte del espacio en que se desenvuelve el orden geométrico y al que nuestra inteligencia aplica el orden algorítmico ó al menos emplea aquel como substratum de este, y aparte del orden intelectual puro, existe el orden material.

En el espacio podemos concebir las relaciones geométricas en conexión con un nuevo factor, el tiempo; las figuras inmóviles de la Geometría adquieren movilidad relativa, dependiente de una nueva variable, el tiempo; y este sistema es objeto de la cinemática, y, aproximándonos más al orden objetivo, tenemos otro factor en la fuerza que da origen á la dinámica; que en el espacio están los cuerpos, y las alteraciones de la materia bajo las acciones de las fuerzas dan origen á dos sistemas que en el porvenir acaso se confundan en uno, la Física y la Química, á las que las leyes matemáticas, si hoy no se aplican tan directamente como al orden geométrico, se aplican sin embargo.

Todos estos órdenes me conducen á una conclusión: que *el orden de las cantidades imaginarias es el de la conexión del orden objetivo con el orden que representa nuestra inteligencia, y expresa una relación que en ciertos momentos se hace latente, pero que subsiste, como subsiste latente el orden de las substancias oculto bajo las apariencias de los accidentes.*

HE DICHO

BIBLIOTECA PROVINCIAL * LOGROÑO *

ERRATAS

En la página 1, linea 9, en vez de *externas* léase *extensas*.
— — 10, — 5, súplase *Rey y Heredia*.
— — 16, — 19, en vez de *de más*, *demás*.

FAN
9362