G-2410
16

LOS PROGRAMAS DE MIS CURSOS

DE

CÁLCULO INFINITESIMAL

LO QUE SON Y LO QUE DEBÍAN SER

POR EL

Dr. Zoel G. de Galdeano

Catedrático de Cálculo infinitesimal
en la Universidad de Zaragoza, Corresponsal de las RR. Academias de Ciencias
de Madrid y de Lisboa.
Delegado de la Comisión Internacional de la enseñanza matemática
y miembro de otras Asociaciones matemáticas

PRECIO: UNA PESETA

BIBLIOTECA PROVINCIAL
LOGROÑO

ZARAGOZA
Tipografía de Emilio Casañal, Coso, 98
1910

NO SE PRESTA

BIBLIOTECA CENTRAL DE LA RIOJA
10000202602
MDS 007720

T: 71748
Donativo de D. ... - C202602
7 ... 915
R
16|01

LOS PROGRAMAS DE MIS CURSOS

DE

CÁLCULO INFINITESIMAL

LO QUE SON Y LO QUE DEBÍAN SER

POR EL

Dr. Zoel G. de Galdeano

Catedrático de Cálculo infinitesimal
en la Universidad de Zaragoza, Corresponsal de las RR. Academias de Ciencias
de Madrid y de Lisboa.
Delegado de la Comisión Internacional de la enseñanza matemática
y miembro de otras Asociaciones matemáticas

BIBLIOTECA PROVINCIAL
LOGROÑO

R-82.213

ZARAGOZA
Tipografía de Emilio Casañal, Coso, 98
1910

Los programas actuales de mis cursos de cálculo infinitesimal

LO QUE SON Y LO QUE DEBÍAN SER

PARTE PRIMERA

Consideraciones doctrinales é históricas

Hasta principios del siglo XIX la Matemática es eminentemente objetiva. La inteligencia desaparece ante sus actos que se suceden inconscientemente bajo la dirección del método. La inventiva es una elección espontánea dirigida por la inspiración.

Así se va formando un conglomerado de hechos y de relaciones. Las relaciones son inmediatas, directas. Esta es la característica de las obras hasta Lagrange, el último de los clásicos para comenzar la época de Abel, de Galois, de Cauchy, de Riemann. Estos últimos inician una evolución, que es la época moderna.

Las funciones de variables complejas, los grupos, los conceptos de funciones algebraicas y transcendentes transforman el aspecto general de los dominios matemáticos.

Las funciones tienen el carácter general de holomorfas, meromorfas, uniformes, multiformes y periódicas, y estos aspectos son los nuevos puntos de vista que llevan del individualismo clásico á la generalidad moderna.

Las funciones enteras, fraccionarias, en cuanto á la forma. Estas últimas implican casos del infinito que resultan de la correspondencia de infinitud entre el numerador y el denominador. Las funciones uniformes y multiformes implican una correspondencia unívoca ó múltiple. Esta última es una correspondencia heterogénea. Una de las entidades de la correspondencia se ha concretado ó replegado.

La teoría de Puiseux hace desplegarse estos valores en los ciclos que Clebsch expresó por sistemas de lazos fundamentales. Las funciones algebraicas se ramifican.

En la ciencia clásica lo infinito aparece bajo las dos formas de irracional y transcendente por las relaciones de la diagonal del cuadrado y uno de sus lados y por la relación entre un ángulo y un lado de un triángulo. La primera implica una relación entre dos magnitudes, la segunda una relación entre magnitud y posición, generando la Trigonometría y las funciones circulares, así como la correspondencia entre los crecimientos por suma y por producto condujo al logaritmo y á la función exponencial.

La periodicidad es una propiedad que aparece en las funciones circulares y exponenciales y que adquiere mayor importancia en las transcendentes superiores.

La ramificación y la periodicidad, constituyen respectivamente, la propiedad general de las funciones algebraicas y transcendentes.

Las propiedades especiales se hallan en las especies de singularidades, polos y puntos esenciales, crítico y logarítmico.

Las singularidades son las características de los modos de ser cada función; expresan la estructura propia de cada una.

Debemos considerar los modos de variar y de ser.

Así distinguimos entre los modos de variar el potencial, el logarítmico, el exponencial, etc.

Se comprende en ellos, los órdenes-tipos de crecimiento, las funciones de crecimiento regular y otras particularidades expresadas en las obras citadas de los Sres. Borel y Blumental.

La segunda parte de mi curso corresponde á los descubrimientos de Cauchy, Riemann, Abel, Jacobi, Fourier y Weierstrass.

La función se distingue por propiedades generales.

Se estudian las funciones uniformes ó monótropas, multiformes ó politropas, holomorfas, meromorfas y sinécticas.

Sus características son los ceros, los polos, sus singularidades, las discontinuidades y las periodicidades.

El estudio de las funciones bajo la forma de series y productos infinitos adquiere especial importancia, llevando á la teoría de las funciones analíticas de Weierstrass y á su expresión por series enteras.

Por otra parte, la teoría de los grupos discontinuos, constituyendo el criterio superior de la teoría de las ecuaciones algebraicas, lleva á las correspondencias de orden finito, especialmente á la correspondencia algebraica cuyos más característicos principios están dados por los teoremas algebraicos de la adición, debidos á Abel, correspondencia que se enlaza con la aritmética de las congruencias, llevando á la tendencia aritmetizadora que iniciaron Weierstrass, Hermite y Kronecker.

Tenemos, por un lado, el criterio combinatorio de los grupos y por otro las variedades de campos y dominios que sirven de fondo ó apoyo á toda clase de sistemas.

El procedimiento de las transformaciones representa al movimiento en la vida de la Naturaleza.

La transformación es el instrumento imprescindible y capital de la Matemática, cuyo empleo es continuo; por él se simplifican las expresiones, reduciéndolas á formas típicas ó normales.

Además, las transformaciones reemplazan unas entidades ó sistemas por otros, representándolos en todas las fases de su existencia, teniendo especial importancia el problema de la transformación de una función ó sistema en sí, es decir, la *transformación idéntica*, cuestión capital en la teoría de los grupos que determina el número de posibilidades de volver un sistema algorítmico ó geométrico á su estado primitivo.

La Geometría proyectiva y el Algebra de las formas homogéneas, especialmente por los covariantes, son dos ramas especiales de transformaciones, representando papel preponderante la transformación lineal en la teoría de los números; constituyendo por otra parte la teoría de las funciones elíptidas un cuerpo de doctrina de transformaciones algebraicas de unas funciones por medio de otras y finalmente, la teoría de las funciones modulares y automorfas una rama que se distingue por el caracter y tendencia aritmetizadora de sus transformaciones.

Los cuerpos finitos, campo de Galois, dominios de racionalidad, etc.; y desde otro punto de vista, las diferentes especies de conjuntos son regiones matemáticas, dentro de las cuales se estudia la existencia y el modo de ser de las cantidades. Pero el dominio más extenso de todos ellos es el campo funcional, cuya primera idea tuvo Lagrange con el cálculo de variaciones, sobre el que Abel inició un nuevo cálculo de funciones generatrices que ha originado el moderno cálculo funcional en que han colaborado desde Weierstrass hasta los contemporáneos.

Además la Matemática se presenta bajo los dos aspectos numérico y geométrico, cuyo origen, prescindiendo de la Geometría cartesiana, consideramos en el número complejo de Gauss y en el afijo de un punto de Cauchy que funda en esta correspondencia la teoría de las funciones de variables imaginarias, así como Riemann fundó ésta ó sea la teoría de las funciones de variables complejas en su célebre superficie, llegando á las representaciones del *Analysis situs*, así como en la teoría de los conjuntos, tenemos otra representación gráfica de las funciones de variables reales.

Todo esto ha sido el comienzo de la correspondencia geométrica dada por las superficies analíticas, hoy muy diversamente empleada, como representación gráfica de toda clase de funciones.

Y estas representaciones adquirieron al principio un carácter eminentemente algebráico en los ciclos establecidos y definidos por Puiseux y en los sistemas de lazos fundamentales de Gordan, que después se aprovecharon en la tendencia aritmetizadora que, comenzando por la representación geométrica de la periodicidad de las funciones, se llevó á las representaciones de las funciones modulares y á la de las funciones poliédricas y automorfas bajo los conceptos combinatorios de la teoría de los grupos discontinuos, después de haberse empleado varias representaciones, tales como la representación en la esfera de Neumann, la conforme ó las transformaciones isogonales.

Observaremos además que la idea cartesiana de reducir las cuestiones geométricas á consideraciones de ecuaciones representativas de las figuras, no solo tiene como recíproca las representaciones geométricas arriba enumeradas, sino que también ésta lleva á una representación del Algebra moderna ó de las formas homogéneas, cuyo instrumento es la Geometría sobre una curva y aun sobre una superficie algebraica, que estudia las representaciones de los invariantes, covariantes, etc., por medio de curvas, superficies y de las configuraciones, y de haces de cónicas, etc., extendidas por las relaciones dualísticas de los sistemas polares y de los conexos.

Hasta ahora nos hemos limitado á los problemas directos de la Matemática abstracta, prescindiendo de la Geometría pura.

Los problemas inversos se reducen á la resolución de las ecuaciones algebraicas y diferenciales, que ofrecen una muy superior dificultad, pues implican un desdoblamiento de cantidades que se hallan como plegadas en sistemas formados con otras cantidades en relaciones finitas ó infinitesimales.

Las cantidades que se trata de obtener se hallan sujetas á relaciones previamente impuestas, al formular cada ecuación, lo que conduce á relaciones transcendentes, á imposibilidad general de expresiones exactas.

Solo el demostrar la imposibilidad de resolver las ecuaciones generales algebraicas de grados superiores al 4.º, condujo á Abel á estudiar la clasificación de las funciones algebraicas no racionales y á establecer las propiedades de las funciones algebraicas que satisfacen á una ecuación dada.

Lagrange había comenzado, aunque sin éxito, á estudiar las funciones semejantes, es decir, que admiten las mismas sustituciones, llegando á la expresión racional de una función por medio de otra y á la formación de funciones de n variables que admiten sustituciones dadas, y Galois, el fundador de la resolubilidad de las ecuaciones algebraicas por medio de radicales basó su teoría en la expresión de las raíces de una ecuación $f(x)=o$ sin raíces iguales, en función racional de una función racional V de las raíces de aquélla, llegando al criterio de resolubilidad por medio de radicales; y Abel estableció la teoría de las ecuaciones resolubles, á que se ha dado su nombre.

El procedimiento de la adjunción de Galois, el dominio de racionalidad de Kronecker y las teorías generalizadoras y puramente abstractas de Kummer y Dedekind de los números ideales y de los ideales han fusionado las teorías algebraicas con la teoría de los números, siguiendo la tendencia aritmetizadora que se extiende hasta las funciones elípticas y abelianas.

El problema de la integración de las ecuaciones diferenciales constituye la cumbre de las finalidades á que aspira la Matemática.

Necesita como preliminar cuanto se ha indicado acerca del estudio directo de las funciones, pues el desdoblamiento que constituye la obtención explícita de una función, combinada con los coeficientes numéricos ó algebraicos y los diferenciales en la ecuación, conduce á expresiones generalmente transcendentes de muy varia naturaleza, solo limitadas por las condiciones de integrabilidad y las que conducen á una diferencial exacta.

La historia de la Matemática expresa cuán difícilmente se ha avanzado en este escabroso camino, habiéndose comenzado por casos sencillos impuestos por la necesided de resolver problemas que presentaban los fenómenos de la Naturaleza.

La integración formal ó clásica por medio de un número finito de elementos ó cantidades tenía que ser lo excepcional, como sucedía en Algebra, para la resolución de sus ecuaciones por expresiones radicales.

Desde el origen del cálculo integral, como en el Algebra desde Descartes, la integración de las ecuaciones diferenciales constituyó un conglomerado de reglas y de procedimientos para ir resolviendo casos especiales del problema, hasta Lagrange.

Por esta época el cálculo combinatorio había realizado un importante progreso con el algoritmo de Vandermonde y poco después, con las investigaciones de Jacobi acerca de los determinantes, especialmente los funcionales.

El profundo método de Ampère para integrar las ecuaciones de derivadas parciales, el método geométrico de Monge, artificios tales como los paréntesis de Poisson y los conceptos combinatorios de los métodos de Jacobi en la integración de las ecuaciones de derivadas parciales y de Pfaff en la reducción de las ecuaciones de diferenciales totales, juntamente con la consideración de los sistemas completos de

Clebsch y los perfeccionamientos importados por Mayer, y últimamente las importantes contribuciones de M. Darboux á este género de problemas matemáticos, llevaron el problema de la integración clásica á su más elevado grado de esplendor.

Resumen del programa del curso elemental de cálculo infinitesimal

CÁLCULO DE DIFERENCIAS FINITAS

Este cálculo es una preparación para el cálculo infinitesimal, y aun se combina con éste en muchas cuestiones, especialmente de ecuaciones diferenciales; lo que ejercitó el talento de los matemáticos del período clásico.

El cálculo de diferencias finitas ejercita en la teoría de las series y en la determinación aproximada de las funciones por los métodos de interpolación.

CÁLCULO DIFERENCIAL

Como su nombre indica, su carácter es eminentemente práctico, y la deducción de los coeficientes diferenciales ó derivadas de cada una de las funciones elementales, como límites de las relaciones de las diferencias de la función y la variable independiente, no ofrece nada de particular, así como la derivación de funciones y las diferencias totales, con sus condiciones de integrabilidad.

Más delicado es el problema de la obtención de las derivadas de las funciones implícitas, que se resuelve siguiendo á la función en la serie de sus valores que varían de un modo continuo.

Y especialmente, la obtención de las derivadas de los diversos órdenes por medio del teorema de Leibniz, é ingeniosas aplicaciones del método de coeficientes indeterminados, es uno de los ejercicios más provechosos é interesantes de este cálculo.

El cambio de variables constituye la teoría de las transformaciones á través de las relaciones diferenciales, es un cambio mutuo de campo de variación de las funciones, así como la eliminación de las constantes y de las funciones arbitrarias es un medio que efectúa el tránsito de las ecuaciones finitas ó diferenciales de ciertos órdenes á otras ecuaciones diferenciales de órdenes superiores.

Este problema expresa la distinta generalidad de las integrales respecto á sus diferenciales, que corresponde al *grado de libertad* en las cuestiones de Geometría y de Mecánica, puesto que en cada derivación se pierde una constante arbitraria; y el orden de la derivación señala el número de correspondencias arbitrarias que podemos fijar entre cada par de valores de la función y de la variable independiente.

Los clásicos teoremas ó desarrollos de Taylor, Maclaurin y Côtes no son más que las primeras aplicaciones que se obtuvieron de los principios del cálculo diferencial á la representación de las funciones por series.

CÁLCULO INTEGRAL

El cálculo integral corresponde, en su primer desarrollo, al cálculo diferencial que es su problema recíproco.

En el período clásico se obtuvieron sucesivamente las reglas y procedimientos de integración de las funciones enteras, fraccionarias, racionales, irracionales y transcendentes, predominando los métodos de integración por partes, de cambio de variables y por series y coeficientes indeterminados para las integrales indefinidas. Las integrales definidas ofrecen más ancho campo á las investigaciones.

Así como la derivada tiene su representación geométrica por la tangente á una curva, la integral corresponde á una área.

Además una integral definida puede considerarse como función de sus límites ó de uno solo de ellos, y admite una gran extensión cuando la cantidad bajo el signo de integración contiene algún parámetro, lo que conduce á métodos de diferenciación é integración bajo el signo integral que permiten determinar multitud de funciones, llevando, en particular, á las funciones eulerianas, á los polinomios de Legendre, á los números de Bernoulli y de Euler y á numerosos desarrollos de funciones en series.

ECUACIONES DIFERENCIALES

La integración clásica de las ecuaciones diferenciales comprende los capítulos siguientes:

1.º Integrales generales particulares y singulares.

2.º Multiplicador que hace integrable una expresión ó ecuación diferencial.

3.º Ecuaciones diferenciales de primer orden.

4.º Ecuaciones lineales de orden cualquiera con coeficientes constantes.

5.º Ecuaciones lineales de orden cualquiera con coeficientes variables. Método de Laplace,

6.º Ecuaciones diferenciales susceptibles de rebaja.

7.º Sistemas de ecuaciones diferenciales.

8.º Ecuaciones de derivadas parciales por los métodos de Lagrange, de Lagrange-Charpit, de Ampère, de Monge, de Cauchy, de Jacobi, de Hámilton, y de Mayer.

Análisis moderno

FUNCIONES DE VARIABLES REALES

La teoría de los conjuntos constituye un método directo de tratar las funciones de variables reales.

En Italia, el profesor de la Universidad de Pisa, señor Dini, publicó su notabilísima obra *Fundamenti per la Teorica delle funzioni di variabile reale*, fundada en la teoría de los conjuntos con la que tiene íntima conexión su otra obra *Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle Funzioni di una variabile reale*, trabajos en conexión á su vez con los de Du Bois-Reymond, que tienden hacia las aplicaciones á la Física, cuyo origen se encuentra en los de Fourier que creó la teoría de su célebre serie que se extiende en la teoría de las series trigonométricas. Y en este orden de investigaciones tiene importancia capital la célebre *Mémoire sur les fonctions discontinues*, de M. Darboux, así como también entran en el mismo el método de la condensación de las singularidades de Hankel y la obtención de funciones continuas no derivables por Weierstrass, Hankel y otros.

Debe citarse además el teorema de Riemann que expresa la condición de integrabilidad de las funciones de variables reales, determinada por la reducción á cero de la suma de los intervalos en que la oscilación de la función excede á una cantidad fija y tan pequeña como se quiera.

En Francia, M. Borel, bajo cuya dirección se publica la colección de monografías con el título general de *Nouvelles Leçons sur la Théorie des fonctions*, publicó varios tratados, partiendo también de la teoría de los conjuntos, habiendo colaborado, en esta colección, los profesores señores Baire, Blumental, Lebesgue, Lindeloff y otros.

Especialmente, entre las obras que se extienden en análogas cuestiones expuestas por el señor Dini, citaremos: Bukhardt, *Butwicklungen nach oszillirenden, Funktionen, Handbuch der Theorie der Cylinder Funktionen* von Dr. Niels Nielsen y *A Treatise on Bessel Functions* by Andrew Gray, siendo hoy muy rica la literatura de este orden de conocimientos.

Además de esta dirección, en sentido de las funciones esféricas y cilíndricas, que conduce á las aplicaciones, á la Astronomía y á la Física, hemos de considerar la dirección abstracta afine con las expresiones de Weierstrass que tiende á la representación de las funciones bajo la forma de series enteras, y que parte de la consideración de las series uniformemente convergentes y de las funciones uniformemente continuas, constituyendo en este sentido una exposición elemental, interesante el manual de Hoepli, publicado por el profesor E. Pascal, en dos tomos, bajo el título, *Calcolo infinitesimale;* y ateniéndose constantemente al método de Weierstrass, el señor Vivanti publicó también, en la misma colección, su *Teoria delle Funzioni analitiche.*

Con estos antecedentes, la parte de mi programa para mis cursos actuales comprende: Medios generales de expresar una función: 1.º Integral definida. 2.º series enteras, comprendiendo la convergencia uniforme, los teoremas de Abel como fundamento de la exposición de las series enteras y con auxilio del moderno concepto de funciones mayorantes.

Dentro de la consideración de los conjuntos de Cantor, los teoremas de Weierstrass y de Darboux sirven de base á la exposición de lo que concierne á la continuidad y discontinuidad, tratándose de las funciones uniformemente continuas, discontinuas, integrables, continuas no derivables, integrales, definidas, singulares de Cauchy, integrales, en las que la función ó los límites se hacen infinitos.

FUNCIONES DE VARIABLES COMPLEJAS

La feliz idea de Cauchy de representar las funciones de variables imaginarias en un plano dió un carácter definitivo á la teoría de las funciones.

Todas las modernas concepciones, desde las representaciones de las integrales y funciones elípticas de Abel y de Jacobi hasta las funciones analíticas de Weierstrass, con su prolongación analítica y la teoría de los conjuntos, extendida á varias dimensiones, entran en esta representación,

En el segundo tomo de mi *Tratado de Análisis, Principios generales de la Teoría de las funciones*, después de expuestas las indicaciones arriba enumeradas respecto á las funciones de variables reales, trato de las series, definiendo la función monógena, combinando los puntos de vista de Cauchy con los de Weierstrass para llegar al concepto de funciones regulares y á sus factores primarios, exponiendo la demostración del teorema de Mittag-Leffler acerca de la formación de una función regular, llegando á las nociones de la función analítica de Weierstrass.

Pero al tratar de las representaciones por integrales, sigo la teoría de Cauchy para llegar á la integración á lo largo de un contorno ó integrales curvilíneas, enunciando el teorema de éste y el de Riemann acerca de la correspondencia entre la integral doble y la simple, tomada á lo largo de un contorno y el teorema sobre la función sinéctica, lo que conduce á los desarrollos en serie de las funciones sinécticas, según expresan los teoremas de Cauchy y de Laurent, lo que conduce á las propiedades respecto á los ceros, á los polos y á los puntos singulares esenciales.

Con las representaciones geométricas de los ciclos, debida á Puiseux y los fundamentos de la teoría de la superficie de Riemann termina dicho segundo tomo.

En el período moderno se imponía el tratar las ecuaciones diferenciales de una manera general, sustituyendo la yuxta-posición de métodos y puntos de vista individuales por un método fundado en la naturaleza íntima de las funciones consideradas en su mayor generalidad.

A los saltos bruscos de la inventiva aislada urgía el sustituir la uniformidad del procedimiento deductivo, regularmente seguido á partir de un criterio fijo.

Este criterio partió, desde dos puntos de vista, de las investigaciones de Cauchy y de Riemann que establecieron los teoremas de la integrabilidad de las ecuaciones diferenciales y de las funciones explícitas, respectivamente.

El teorema de la *existencia* de la integral, debido á Cauchy, obtuvo un primer perfeccionamiento por Lipschitz y después por M. Picard y otros matemáticos contemporáneos, bajo cuya eficaz acción avanza constantemente la Ciencia.

Establecida esta base fundamental de la teoría de las ecuaciones diferenciales, las demás teorías matemáticas se dirigieron en su auxilio, según el carácter especial de cada una.

En vez de buscar directamente una forma analítica determinada, como según el procedimiento clásico, se trató de definir la integral mediante su estudio inmediato y directo por medio de sus singularidades. Esto puso á contribución cuantos resultados se obtuvieron acerca de las singularidades de las funciones explícitas y de sus representaciones geométricas, desde Briot hasta M. Poincaré, quien reduce el estudio completo de la integral á la parte *cualitativa* ó *estudio geométrico* y á la parte *cuantitativa* ó cálculo numérico de los valores de la función.

El colosal trabajo de Lie sobre los grupos continuos de transformaciones dió nuevo aspecto á los problemas, llevando la integración al conocimiento de la estructura del grupo de la ecuación considerada.

En este sentido los señores Vessiot y Picard han edificado una teoría de las ecuaciones diferenciales, análoga á la de Lagrange y Galois respecto á las ecuaciones algebraicas.

Los trabajos de M. Painlevé, especialmente sus *Leçons* *sur la théorie analytique des équations différentièlles* expresa la importancia del estudio de las singularidades de las funciones, especialmente la distinción de las singularidades esenciales en fijas y móviles, del concepto de irreductibilidad, de las singularidades no algebraicas, dependientes ó independientes de la variable x, así como la importancia de los grupos continuos en esta teoría.

Los descubrimientos de Fuchs señalaron otra dirección especial, tanto en el estudio de las funciones explícitas como en las ecuaciones diferenciales, cuya exposición se puede estudiar en el *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichuugen von* Prof. Dr. Ludwig Schlessinger, en cuyo primer tomo predomina la teoría de Fuchs, después de haber comenzado por el teorema de la existencia y el teorema de Apell sobre las funciones invariantes, importando varios descubrimientos de M. Poincaré, Thomé, etc., comenzando por establecer la ecuación fundamental, los sistemas fundamentales canónicos, con las particularidades que ofrecen los puntos singulares, la forma normal en la proximidad de éstos, el criterio de la existencia de una integral bajo la forma de serie, para exponer después las ecuaciones diferenciales de la clase de Fuchs y terminando con la determinación de las sustituciones fundamentales con coeficientes racionales.

En los tomos II_1 y II_2 tienen especial preponderancia la teoría de los grupos continuos de Lie, el problema de la inversión con referencia á la integración de las ecuaciones diferenciales, las funciones triangulares uniformes invertibles ó especialmente las modulares elípticas con las funciones fuchsianas y las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes doblemente periódicos, las funciones fuchsianas y el desarrollo del principio de Poincaré, considerado por este ilustre matemático como método de continuidad.

Debe citarse también la magistral obra de Mr. Forsyth *Theory of differential equations*, en seis volúmenes.

COMBINATORIA

Tenemos una combinatoria subjetiva que forma una rama lógico-matemática que tiene su lugar en la parte filosófica de la Matemática y su importancia educativa.

Pero dentro del orden de nuestra actual exposición, consideramos:

1.º La combinatoria formal en el sentido de Boole para las ecuaciones diferenciales y de Cayley en general, lo que conduce á establecer diversas especies de Algebras.

2.º Una combinatoria objetiva que conduce al cálculo de probabilidades con sus múltiples aplicaciones.

3.º Una combinatoria abstracta que constituye la teoría de los grupos discontinuos.

4.º Una combinatoria funcional que constituye la teoría de los grupos continuos.

Estas teorías forman ramas especiales de la Matemática; pero de ellas debe tratarse, aunque someramente en un curso de Análisis infinitesimal por la necesidad de aplicarlas á alguna de sus teorías, por ejemplo, á la teoría de las ecuaciones diferenciales y á las funciones modulares.

APLICACIONES GEOMÉTRICAS

Los antiguos tratados contienen algunos capítulos destinados á las aplicaciones geométricas conducentes á la rectificación de las líneas y á las cuadraturas y cubaturas, así como á las concernientes, á las curvaturas de las líneas y de las superficies.

La representación cartesiana sirvió por mucho tiempo para resolver estas cuestiones de geometría diferencial, así como también sirvió para las representaciones geométricas en la teoría de las ecuaciones diferenciales.

Pero la representación paramétrica de Gauss, así como su definición de curvatura superficial sirvieron para crear una geometría diferencial que forma hoy una rama especial de la Matemática. Y ambas direcciones geométricas son objeto del tomo V de mi *Tratado de Análisis matemático.*

APLICACIONES Á LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES

Desde luego citaremos la Física matemática, hoy una de las más extensas ramas, así como la Astronomía y Mecánica celeste á que se agrega como rama heterogénea la Geodesia, importante desde el punto de vista útil y práctico.

Pero en otra dirección, los progresos recientes de la Química conducen á la *Mecánica química* y á la *Termoquímica* cuya exposición se debe á M. Duhem y, aun á tratados como el *Lehrbuch der mathematischen Chemie* von J. J. van Laar.

La teoría del potencial que han desarrollado sucesivamente Laplace, Clausius, Lamé y más tarde Neumann y otros autores, es el primer fundamento de esta teoría que se ha enriquecido con importantes funciones y ecuaciones tales como las de Clausius, Massieu y Van der Waals; y estas nuevas direcciones son ahora de gran importancia para los matemáticos, pues la Naturaleza es una Matemática real, con su geometría construída por las formas cristalinas, con su Algebra constituída por las ecuaciones químicas, con su teoría de las funciones naturales, con sus correspondencias que sirven de base á los sistemas de medidas, á todo lo que solo le falta una traducción en el lenguaje de los símbolos matemáticos, para que resulte constituída la Matemática teórica.

APLICACIONES Á LA VIDA SOCIAL

Cournot con sus *Recherches sur les principes mathématiques des richesses* (1838) inauguró la obra de adaptar la Matemática á las finalidades de la vida social. Más tarde, el profesor belga Walras explicó cursos de economía política conforme con sus publicaciones, las obras de Broggi *Les assurances de la vie*, en Alemania, la *Politische Arithmetik* del profesor de la Escuela politécnica de Carlsruhe L. C. Bleibtreu y la *Politische Arithmetik* de Herr M. Cantor y finalmente la *Statistique mathématique* y el *Petit traité d' économie polytique mathématique* de M. H. Laurent revelan esta nueva tendencia de las aplicaciones matemáticas cuyos fundamentos científicos se hallan en el cálculo de probabilidades.

Estas enseñanzas que son objeto de varias carreras especiales pueden figurar en los estudios universitarios con el mismo carácter con que figuran otras ramas especiales, esencialmente prácticas, tales como la Topografía y Geodesia, ya que la superioridad de los estudios matemáticos permite llevar á las más altas finalidades los objetos de dichos estudios y concretar al mismo tiempo las abstracciones de la teoría pura.

PARTE SEGUNDA

Programas

Subordinándolos á estas consideraciones, redacté mis programas para el curso de 1908 á 1909 y para el actual de 1909 á 1910 en la forma siguiente:

Cursos de 1908 á 1909 y de 1909 á 1910

PROGRAMA DE ELEMENTOS DE CÁLCULO INFINITESIMAL

Lección 1.ª Cantidades infinitesimales de diferentes órdenes.—Principios fundamentales del cálculo infinitesimal.—Relaciones en un triángulo infinitesimal.—Integral: su expresión geométrica.

Lección 2.ª Funciones implícitas.—Condición de independencia de las funciones.—Jacobiano.

Lección 3.ª Cambio de variable independiente.—Cambio simultáneo de variables independientes.

Lección 4.ª Derivadas y diferenciales de diversos órdenes.—Formación de ecuaciones diferenciales.—Eliminación de funciones y constantes arbitrarias.—Aplicación á máximos y mínimos.

Lección 5.ª Longitud de un arco de curva.—Contactos de diversos órdenes.—Recta osculatriz, círculo osculador.—Evolutas de las curvas planas.—Radio de curvatura.

Lección 6.ª Cicloides y epicicloides.—Movimientos epicicloidales y especialmente esférico.

Lección 7.ª Líneas de doble curvatura.—Plano tangente.—Superficies envolventes.—Aristas de retroceso.—Plano osculador.—Normal principal.—Angulo de contingencia.—Hélice.—Movimiento helicoidal.

Lección 8.ª Puntos singulares.—Discusión.

Lección 9.ª Polares de diversos órdenes.—Asíntotas.—Hessiana.—Tipos fundamentales de curvas en la proximidad de un punto.

Lección 10. Integración de las funciones racionales é irracionales.—Diferencial binomia.

Lección 11. Integración de las funciones trigonométricas y exponenciales.—Integración de $z^n Pdx$.—Otras integrales.

Lección 12.—Integrales definidas.—Paso de la integral indefinida á la definida.—Curvas de utilidad y demanda.—Interpretación algebraica de los fenómenos económicos.—Teorema del valor medio.

Lección 13. Fórmula de Wallis.—Idem de Stirling.

Lección 14. *Cálculo de las diferencias finitas.*—Definiciones y notaciones.—Expresión de $\Delta^m u$ en función de u, u_1, ..., u_n.—Expresión de u_m por medio de u y de las m diferencias Δu, $\Delta^2 u$, ..., $\Delta^m u$,—Diferenciación de las funciones simples.

Lección 15. Integración finita.—Definiciones y notaciones.—Integración de las funciones enteras.—Evaluación de las sumas por las integrales ordinarias y de las integrales por sumas.—Sumas de series.

Lección 16.—Fórmulas de interpolación. — Fórmula de Newton.—Fórmula de Lagrange.—Fórmula de Simpson.—Aplicaciones especialmente á la estadística.

Lección 17. Ecuaciones de diferencias finitas.—Caso de la ecuación lineal de primer orden.—Idem de un orden cualquiera.

Lección 18. Integrales de diferenciales totales.—Representación geométrica.—Función de fuerza.—Superficies de nivel.—Intensidad y dirección de la fuerza.—Caso de un líquido pesado.

Lección 19. Integración por diferenciación é integración bajo el signo integral.—Integrales de Fresnel.—Método geométrico de Poisson

Lección 20. Integrales eulerianas de primera y segunda especie.—Relación entre unas y otras.

Lección 21. Funciones monógenas, monótropas y polítropas.—Esfera y plano complejos.—Círculo de convergencia.

Lección 22. Integrales definidas singulares.—Teoría de los residuos de Cauchy.

Lección 23. Integrales dobles.—Integrales de diversos órdenes.—Integración á lo largo de un contorno.—Volúmenes y superficies.

Lección 24. Teoremas de Riemann y de Cauchy.—Desarrollos en series de Cauchy y Laurent.

Lección 25. Propiedades de las funciones monódromas, monógenas, monótropas y polítropas.—Puntos singulares esenciales.

Lección 26. Funciones uniformemente continuas.—Funciones discontinuas.—Teorema de Darboux.—Condiciones de integrabilidad de Riemann.

Lección 27. Funciones hiperbólicas.

Lección 28. Fórmula de Stokes.—Teorema de Green.—Ecuación de Laplace.—Principios de Dirichlet.—Demostración analítica del principio de Arquímedes.

Lección 29. Atracción y potencial.—Fórmula de Poisson.—Potencial newtoniano y logarítmico.—Potencial de los cuerpos continuos.—Potencial termodinámico.

Lección 30. Probabilidad matemática.—Probabilidad simple, compuesta y modificada por el primer suceso.—Probabilidad total en la repetición de sucesos.

Lección 31. Leyes de probabilidad en la repetición de sucesos.—Teorema de Bernoulli y su inverso.

Lección 32. Teoría analítica de la mortalidad.—Tablas de supervivencia.—Grupos cerrados y abiertos.— Axiomas y teoremas de la teoría estadística de la mortalidad.—Algoritmo de Knapp.

Lección 33. Ecuaciones diferenciales de primer orden.—Ecuaciones homogéneas.—Reducción á una ecuación homogénea.—Método de las constantes arbitrarias.

Lección 34. Soluciones singulares.

Lección 35. Factor de integrabilidad.—Aplicaciones á la Física.

Lección 36. Problema de las trayectorias.—Ecuaciones de Bernoulli, de Riccati y de Clairaut.

Lección 37. *Ecuaciones diferenciales de un orden cualquiera.*—Existencia de la integral de una ecuación diferencial cualquiera.—Condiciones á que deben satisfacer las constantes que entran en la integral general.—Integración de la ecuación $\frac{d^m y}{dx^m} = v$.

Lección 38. Integración de las ecuaciones de la forma

$f\left(\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}, \frac{d^m y}{dx^m}\right)=o$.-Ecuaciones de la forma $f\left(\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}, \frac{d^m y}{dx^m}\right)=o$. Ecuaciones susceptibles de rebaja.—Ecuaciones homogéneas.

Lección 39. Ecuación de las fuerzas vivas.—Ecuaciones de Clausius y del trabajo.—Ecuación de Van der Waals.

Lección 40. Ecuaciones lineales sin segundo miembro, sus propiedades.—Ecuaciones con coeficientes constantes.—Casos de las raíces imaginarias desiguales.—Caso de las raíces iguales.

Lección 41. Reducción de la ecuación completa á la ecuación privada de segundo miembro.—Caso en que los coeficientes son constantes.—Rebaja en el caso de conocerse cierto número de integrales de la ecuación sin segundo miembro.—Algunos casos en que se puede integrar la ecuación.

Lección 42. Integración de las ecuaciones diferenciales por series.

Lección 43. Integración de las ecuaciones diferenciales por medio de integrales definidas.

Lección 44. Determinación de las integrales definidas por la integración de ecuaciones diferenciales.

Lección 45. Determinación de las series por la integración de ecuaciones diferenciales.

Lección 46. Ecuaciones diferenciales simultáneas.

Lección 47. Método de D'Alembert para integrar las ecuaciones simultáneas.—Método de Cauchy.

Lección 48.—Ecuaciones de derivadas parciales.—Ecuaciones que se reducen á ecuaciones diferenciales ordinarias.—Ecuaciones lineales de primer orden con dos variables independientes.—Caso de un número cualquiera de variables independientes.

Lección 49. Ecuaciones de diferenciales totales.—Ecuaciones de derivadas parciales de primer orden no lineales con dos variables independientes.

Lección 50. *Aplicaciones de las integrales definidas.*—Cuadraturas.—Rectificaciones.

Lección 51. Cubatura de los sólidos y áreas.

Lección 52. *Aplicaciones geométricas de las ecuaciones de derivadas parciales.*—Superficies cilíndricas, cónicas, conoides, superficies de evolución, líneas de nivel y de máxima pendiente.

Lección 53. Superficies desarrollables.—Integración de la ecuación de las superficies desarrollables.—Superficies regladas.—Ecuación de la cuerda vibrante.

Lección 54. *Curvatura de las superficies.*—Curvatura de una línea situada en una superficie.—Teorema de Meusnier.—Curvatura de una sección normal.—Secciones principales.—Variación de los radios de curvatura en las secciones normales.—Umbílicos.

Lección 55. Teoría de la indicatriz.—Tangentes conjugadas.

Lección 56. Líneas de curvatura: sus propiedades.—Centros de curvatura de las secciones principales.—Radios de curvatura principales.—Líneas asintóticas y geodésicas.

Lección 57. Cálculo de variaciones.—Propiedades generales.—Variación de una integral definida.

Lección 58. Aplicaciones del cálculo de variaciones.

Cursos de 1908 á 1909 y de 1909 á 1910

COMPLEMENTO DE CÁLCULO INFINITESIMAL

Lección 1.ª Grupos de sustituciones.—Grupo alterno y simétrico.—Grupos transitivos é intransitivos, imprimitivos y primitivos.

Lección 2.ª Isomorfismo de los grupos.—Grupos generales de operaciones.—Subgrupos invariantes.—Grupo complementario.

Lección 3.ª Composición de un grupo.—Factores de composición.—Teoremas de Hölder y de Sylow.

Lección 4.ª Grupos finitos de rotación de una esfera.—Grupos cíclicos, diédrico, tetraédrico, octaédrico, icosaédrico.—Representación sobre un plano.

Lección 5.ª Funciones y ecuaciones poliédricas y modulares.

Lección 6.ª Formas hemogéneas.—Invariantes y covariantes, etc.—Aplicaciones á las formas proyectivas y afinidades lineales.—Polos y polares de diversos órdenes.

Lección 7.ª Estudio particular de las curvas planas.—Estudio de las curvas en la proximidad de uno de sus puntos.—Métodos de Newton y de Gua.—Discusión.

Lección 8.ª Estudio de las ramas infinitas, Asíntotas.—Construcción de curvas y determinación de puntos singulares.

Lección 9.ª Propiedades numerativas de las curvas.—Número de puntos que las determinan.—Número de condiciones impuesto por la existencia de un punto singular.—Influencia de la Hesiana.

Lección 10. Intersección de dos curvas.—Fórmulas de Plücker.—Género de una curva.

Lección 11. Transformaciones cuadráticas.—Idem de Cremona.—Idem isogonales.—Teorema de Nöther.

Lección 12. Polaridad é invariación.—Principio de traslación.—Steineriana y Cayleyana.—Conexos.—Coincidencia principal.—Nociones acerca de la Geometría sobre una curva plana.

Lección 13. Representación conforme.—Arcos analíticos.—Representación conforme de una área simple en un círculo.—Algunos ejemplos.—Método de Schwarz.

Lección 14. *Formas y funciones poliédricas y modulares.*—Existencia de las funciones poliédricas y modulares.

Lección 15. Estudio algebraico de las ecuaciones poliédricas y modulares.—Resolventes.

Lección 16. Relaciones entre las ecuaciones poliédricas y la teoría de la resolución algebraica de las ecuaciones.

Lección 17. Nociones sobre los conjuntos.—Potencia ó número cardinal.—Conjuntos enumerables y no enumerables.—Conjuntos ordenados.—Punto límite.—Conjuntos derivados, aislados, perfectos, densos y por todo densos.—Punto-Frontera.

Lección 18. Funciones limitadas.—Funciones integrables.—Oscilación y salto de la función.—Teorema de Darboux.

Lección 19. Convergencia uniforme.—Series enteras.—Aplicaciones á la diferenciación é integración.—Funciones mayorantes.—Fórmula de Lagrange.—Inversión.

Lección 20. Polinomios de Legendre.—Propiedades.

Lección 21. Funciones discontinuas.—Condensación de las singularidades.—Teorema de la integrabilidad de Riemann.

Lección 22. Funciones continuas no derivables.—Ejemplo de Weierstrass y de Hankel.

Lección 23. Funciones regulares.—Teorema de Weierstrass.—Productos infinitos.—Factores primarios.—Polos y puntos esenciales.

Lección 24. Funciones analíticas.—Prolongación analítica.—Convergencia de ciertas series reales.—Curvas de convergencia uniforme.

Lección 25. Series trigonométricas.—Serie de Fourier.

Lección 26. Integrales elípticas é hiperelípticas.—Integrales abelianas.—Reducción de las integrales abelianas.

Lección 27. Integrales de funciones no uniformes.—Reducción del número de períodos en las integrales hiperelípticas.—Serie hipergeométrica.—Relación de los períodos.

Lección 28. Ecuaciones diferenciales.—Demostración de Cauchy de la existencia de la integral.—Idem de Lipsicht.—Demostración de Picard por el método de aproximaciones sucesivas.

Lección 29. Determinación única de un sistema de integrales por los valores iniciales.—Existencia de las integrales de los sistemas de ecuaciones de derivadas parciales.

Lección 30. Ecuaciones de derivadas parciales no lineales.—Método de Lagrange-Charpit.

Lección 31. Integración de la ecuación de Ampère.—Método de Monge.

Lección 32. Método de Cauchy.—Características.

Lección 33. Sistemas completos y de Jacobi.

Lección 34. Métodos de Jacobi y de Hámilton.—Aplicaciones á la dinámica.

Lección 35. Ecuación de Pfaff.

Lección 36. Transformaciones de contacto.—Sistemas de ecuaciones de derivadas parciales.

Lección 37. Teorema de Painlevé sobre las funciones definidas por una ecuación de primer orden.—Inversión de la integral elíptica.

Lección 38. Generalidades sobre las funciones algebraicas de una variable.—Teorema de Cauchy acerca del número de raíces contenidas en el interior de un contorno.—Teorema sobre la continuidad de las raíces.—Método de Puiseux sobre la permutación de las raíces.—Sistemas de lados fundamentales.

Lección 39. Superficie de Riemann.—Superficie de dos hojas.—Reducción á la forma normal.—Principios relativos al orden de conexion.—Reducción á una superficie simplemente conexa.

Lección 40. Periodicidad de las integrales abelianas.—Teorema de Abel.—Número de integrales de primera especie, linealmente independientes.—Integrales normales.

Lección 41. Integrales de segunda y tercera especie.

Lección 42. Función armónica.--Definición.--Las funciones armónicas son analíticas.—Teorema en el plano, análogo al de Green.—Potencial de las velocidades.—Principio de Dirichlet.

Lección 43. Soluciones periódicas y asintóticas de ciertas ecuaciones diferenciales.

Lección 44. Puntos singulares de las integrales reales de las ecuaciones de primer orden.-Puntos críticos fijos y móviles.

Lección 45. Integrales algebraicas de las ecuaciones de primer orden.

Lección 46. Grupos fuchsianos.—Funciones fuchsianas.

Lección 47. Ecuaciones de la clase de Fuchs.

Lección 48. Funciones hipergeométricas.—Problemas de Riemann y el grupo de la función correspondiente.—Representación conforme por medio de dos soluciones de la ecuación hipergeométrica.—Sustituciones lineales que transforman un círculo en sí mismo.

Lección 49. Grupos finitos continuos de transformaciones.—Grupos de Lie.—Ecuaciones diferenciales características.—Grupos de un solo parámetro, sus trayectorias.—Grupos de un parámetro.

Lección 50. Invariantividad de un grupo.—Invariantes de un grupo.—Representación geométrica.

Lección 51. Propiedades relativas á la constitución de los grupos.—Estructura de un grupo.

Lección 52. Ecuaciones diferenciales que admiten un grupo dado de transformaciones.—Analogías entre la teoría de las ecuaciones diferenciales y las algebraicas con respecto á los grupos.

Lección 53. Sistemas completos de funciones homogéneas.

Lección 54. Transformaciones de contacto.

Lección 55.—Invariantes diferenciales.

Lección 56. Superficies algebraicas que admiten un grupo continuo finito de transformaciones.

Lección 57. Diversos modos de definir las transcendentes.

Consideraciones generales sobre mis actuales programas

Mis programas parecerán una mezcla heterogénea de doctrinas desproporcionadas al tiempo de que se dispone en un curso de lección diaria y otro de lección alterna, insuficientes para inculcar en las inteligencias de los alumnos tan copioso cúmulo de ideas.

Pero hemos de tener presente que esta abundancia y este desorden aparentes corresponden á la insuficiencia doctrinal de los actuales cursos matemáticos y al desorden y falta de precisión que lo legislado sobre los cursos de la facultad de ciencias exactas produce en las enseñanzas de las mismas.

Desde hace una treintena de años, al sustituirse la asignatura que con la denominación de *Complemento de Algebra*, ó sea Algebra superior, explicaba D. Juan Cortázar en la Universidad Central, por dos cursos de Análisis matemático; y el abandono en que se dejaba la más importante y fértil de las disciplinas matemáticas, el *Cálculo infinitesimal*, se produjo un estancamiento natural en los estudios de la Facultad que hoy con mayor razón que nunca, tiene la más poderosa influencia en la intelectualidad de las naciones.

El comienzo de los estudios de Facultad en las ciencias matemáticas por las teorías de series, fracciones continuas y derivadas, era el más adecuado hace cuarenta años y aun lo era el que se estudiaran, con cierto detenimiento, las investigaciones de los grandes matemáticos, desde Descartes hasta Sturm sobre la resolución numérica de las ecuaciones.

Pero desde entonces hasta la actualidad, la vulgarización de las teorías de Cauchy, Abel, Galois y Riemann hasta las de Kronecker, Fuchs y Weierstrass en los últimos tiempos, se imponían reformas importantes en nuestros programas, muy contrarias, por cierto, á la tendencia de elementalizar nuestros cursos, diluyendo en dos, prolongados por acumulaciones ó complementos correspondientes, teorías elementalísimas, bajo el pretexto de que los alumnos necesitan siempre repetir con algunas variantes los cursos elementales, en los que jamás se les cree, aunque esto sea desgraciadamente cierto, suficientemente preparados, más que por sus deficiencias elementales por faltas pedagógicas, en todos los grados de la enseñanza; y, cuando en todas las naciones, estos estudios y otros que figuraron entre los superiores, tales como nociones de Geometría analítica, de Geometría descriptiva y aún rudimentos de Cálculo infinitesimal, han pasado á los Establecimientos donde se cursan las matemáticas elementales.

Y aunque tal falta de preparación sea un hecho real, es indudable que un buen profesor puede ir supliendo estas deficiencias, con un método de selección y sobriedad en las doctrinas que adapte al desarrollo intelectual de sus alumnos, y no precisamente á la cantidad de conocimientos que posee, que es siempre fácil suplir con definiciones; pues el encadenamiento de las ideas nunca es tan rígido que no permita disgregaciones momentáneas.

No es de extrañar, pues, que en mis dos cursos de Análisis infinitesimal, haya tratado de suplir con ciertos aditamentos momentáneos, la falta grave de que en un plan de estudios matemáticos se omitan teorías tan generalizadas en las Universidades extranjeras como las de Abel y Galois, en el Algebra; de Cayley, Aronhold, Clebsch, etc., en el Algebra de las formas homogéneas, de Cauchy, Riemann, Schwarz y Fuchs, de Fourier, Du Bois-Reymond, etc., en las teorías de funciones de variables complejas y de variables reales, de de Lie, Darboux y demás matemáticos contemporáneos, en las ecuaciones diferenciales y las múltiples representaciones geométricas que permite el *Analysis situs* y las de Schwarz para las funciones poliedrales, modulares y automorfas, todo lo que deja un enorme vacío en la enseñanza nacional.

Parte muy considerable puede entrar en las enseñanzas de disciplinas que deben sustituir á los dos cursos, mal llamados de *Análisis;* porque esta denominación vaga y falta de significación concreta, puede aplicarse en la Matemática á todo lo que no constituye la Geometría pura.

De esta manera, se daría alimento nutritivo á los alumnos, en vez de conocimientos dispersos, incoherentes y arbitrariamente introducidos, sin finalidad orgánica alguna, debidos á veces á la manía de introducir nombres de objetos sin aplicación inmediata que fomentan el verbalismo y el empleo de la memoria á expensas del espíritu de investigación y del conocimiento metódico que enlaza y facilita por sus conexiones la retentividad natural de los conceptos en agrupaciones sistemáticas.

LOS PROGRAMAS DE CÁLCULO INFINITESIMAL

Las consideraciones expuestas manifiestan cuan aliviados quedarían los programas arriba expuestos, llevando algunas de sus lecciones á su lugar natural.

Además debiera ser un hecho, en un nuevo plan de estudios, el adelantar el Análisis infinitesimal al primer año de estudios universitarios, pues dicho análisis es un instrumento precioso que se emplea, lo mismo en numerosas ramas de la Matemática pura, que en sus aplicaciones á las ciencias naturales y sociales, según arriba se ha expresado.

Respecto á estas aplicaciones, debe tenerse muy en cuenta que hoy se impone la necesidad de llegar inmediatamente á éstas, con objeto de que se reconozca desde luego la utilidad de los estudios matemáticos que, además de desenvolverse en las regiones deductivas de la Lógica ó del entendimiento puro, deben concretarse en las representaciones del mundo material y las utilidades de la vida.

Ante los apremios de tenerse que conocer las finalidades matemáticas en la integridad de sus teorías y la certeza de que, si no se exponen, siquiera según sus líneas generales, se desconocerá su existencia, quedando incompleto el cuadro de los estudios matemáticos y paralizado el progreso intelectual, que no puede seguirse en un organismo mutilado, por esa compenetración de ideas y de teorías que afianza el conocimiento de las unas en el de las otras, ha sido indispensable formar programas sobradamente densos en doctrinas que se ofrecen como saltos bruscos del pensamiento matemático, por ser artificiosa su colocación en aquéllos, con el solo objeto de preparar otras teorías que no deben ser ignoradas en absoluto.

CONSIDERACIONES SOBRE LOS FUTUROS PROGRAMAS

Supongamos que la enseñanza matemática procede desde las primeras nociones inculcadas al niño, siguiendo los procedimientos pedagógicos que prefieren el educar al instruir, el despertar las aptitudes que el almacenar conocimientos no asimilados á la inteligencia, por medio de juegos y ejercicios agradables que enseñan á pensar sin sentirlo, como ejercicio natural, con el mínimo bagaje de libros y el máximo de contemplación de la Naturaleza, con la mirada directa que contempla á ésta, sin el intermediario de aquéllos que hacen extraviarse la intuición natural en los artificios de un lenguaje sin interpretación, cuyas traducciones, las más de las veces es inexacta.

En este caso la inteligencia, vacía de conocimientos inútiles é indigestos, será una capacidad apta para apropiarse aquellos conocimientos que son naturales, con aptitud para estimular la actividad que se dirigirá á producir algo propio, aunque sea rudimentario, tan solo la acción ó movimiento intelectual. Y esto es aplicable á cualquier ramo de conocimientos en el grado correspondiente á cada uno de ellos.

El predominio educativo permitirá más tarde el acumular conocimientos cuya calidad suplirá ventajosamente á la cantidad, y evitará agobiar á las inteligencias y privarlas de su agilidad en su natural ejercicio.

Las Naciones en las que la educación es obligatoria y completa ponen de relieve estos resultados que se continúa en el grado medio de los Liceos y Gimnasios, permitiendo que elementalizadas algunas disciplinas, hace años expuestas como superiores, ya los estudios superiores queden aliviados de un lastre que dificulta el ascenso hacia las regiones superiores, como en el caso nuestro, por efecto de no haber seguido desde los primeros pasos los procedimientos educativos, que son la gimnasia del espíritu, que lo fortalece y le da aptitud para el trabajo intelectual.

La educación retrasa la marcha en los primeros pasos, para acelerarla ventajosamente en los grados sucesivos.

En el caso supuesto, no sería factible lo que ya es un hecho general. El Algebra clásica, las nociones de Geometría cartesiana hasta los principios de cálculo infinitesimal podrían coronar el plan de estudios de segunda enseñanza. Y en los primeros años de Facultad, en vez de sus empalagosos y tardos estudios del mal llamado *Análisis*, que se presta á todas las genialidades y gustos personales, adquiriría el carácter concreto del *Algebra*, estudiada bajo el atrayente concepto de grupo, que ejercita en la combinatoria, del *Algebra de las formas* que habituaría á las transformaciones que conducen á los invariantes, covariantes y multitud de relaciones proyectivas del Algebra y de la Geometría.

Al mismo tiempo, según ya es un acuerdo unánime, en las Universidades extranjeras, el cálculo infinitesimal, colocado en los primeros cursos de Facultad, ejercería su acción poderosa para organizar, en un avance rápido, todas las disciplinas matemáticas y para conducir inmediatamente á las aplicaciones y dar á los estudios el carácter intuitivo, resultado de los estudios de la Naturaleza y la parte utilitaria de la vida social.

Deben sustituirse esos conglomerados informes de asignaturas que se acumularon como al acaso, en un organismo bajo una idea directora que permita el máximo aprovechamiento en este erial donde se embotan las inteligencias precisamente en el período de su desarrollo.

Yo, en mis seis tomos de *Análisis matemático*, he acumulado cuanto he podido, las más varias teorías cuyos desarrollos, al parecer informes dentro de la extensión de nuestros cursos, sin embargo, están sometidos á una idea que los rige, á la compenetración de los conceptos, que se auxilian mutuamente en el organismo que todos ellos sostienen, y también he aglomerado en mis programas disciplinas distintas, no solo para suplir las deficiencias del plan de estudios que roba á las inteligencias los dos primeros años de estudios, derrochados en futilidades infecundas, en dogmatismos perniciosos al desarrollo intelectual y en repeticiones indigestas, sino para ofrecer ancho campo de exploración, para excitar la curiosidad juvenil, ofreciéndole variedad de horizontes y de finalidades, ya para ahondar, ya para extenderse, conservando la flexibilidad del espíritu que produce la vocación científica, análoga al buen gusto artístico en las otras regiones de la imaginación y las fuerzas propulsoras de la espiritualidad. En los estudios superiores, al contrario que en los elementales, debe ofrecerse variedad y número de doctrinas, libros extensos, amplitud de miras, siluetas de pensamiento que han de preparar el desarrollo intelectual futuro, como en el orden de los hechos, se forma el carácter de cada individuo.

Una mezcla de profundidad y ligereza equilibra los dos fines opuestos pero complementarios de los órdenes lógico é intuitivo ó retentivo, que se imponen para la solidez ó profundidad y la flexibilidad expansiva que constituyen las dos direcciones del movimiento intelectual.

No es de extrañar que con el descuido de la parte educativa en los estudios elementales y la falta de expansibilidad en los estudios superiores, nuestra inteligencia siga un movimiento descendente que se va notando en la futilidad de los gustos de las nuevas generaciones.

Las enseñanzas incluídas en los dos programas constituyen materia para varios cursos, como acontece en las Universidades extranjeras, donde la amplitud de los estudios es notoria.

Pero mientras nuestra enseñanza científica no se halle dotada de los cursos indispensables para dar á conocer el estado actual de las ciencias matemáticas, debe suplirse con artificios lo mucho que se omite en nuestras enseñanzas y uno de ellos hubiera sido el extender á diaria la cátedra creada por acumulación de *Complemento de Cálculo infinitesimal.*

Es necesario explorar el horizonte en todas sus direcciones para no ignorar la finalidad total que integra las varias finalidades parciales.

En nuestro caso actual, mientras no esté vigente un plan completo de enseñanzas científicas, siquiera será un mal menor que nuestras actuales deficiencias, el sintetizar y resumir; lo que podrá ser motivo de ulteriores análisis para quien tenga vocación y deseo de ahondar en aquéllo que vislumbró en conjunto.

Los principios capitales de una ciencia ó teoría son los hilos conductores hacia sus consecuencias.

En toda finalidad buena y útil, más vale tarde que nunca; pero es preferible que, evitando esta deficiencia ganemos el tiempo perdido, colocándonos en el nivel señalado por la intelectualidad científica de los actuales momentos.

Cuando esto se haga, se podrá simultanear la extensión con la profundidad en los futuros programas de nuestros estudios matemáticos y llevar cada una de las teorías al lugar propio que le corresponde en el plan total de la Ciencia.

Y confiamos en que tales reformas en pro de los estudios matemáticos quedarán incluídas en las primeras disposiciones oficiales encaminadas á mejorar nuestros estudios.

En resumen, sería conveniente, de acuerdo con la marcha general:

1.º Llevar á la segunda enseñanza algunas teorías que incluimos en los estudios de Facultad, después de haberlas simplificado convenientemente.

2.º Comenzar los cursos superiores por el *Cálculo infinitesimal* por ser éste un instrumento precioso para todas las ramas de dichos estudios.

3.º Simultanear el *Cálculo infinitesimal* con la teoría combinatoria de los grupos y sus aplicaciones á la resolución algebraica de las ecuaciones en el año primero de Facultad.

4.º Simultanear con el estudio de la Geometría analítica proyectiva las teorías también proyectivas del Algebra de las formas homogéneas, en sustitución de los actuales cursos, conocidos con la denominación de *Análisis matemático.*

5.º Extender á ser diaria la asignatura acumulada de *Complemento de Análisis infinitesimal*, pues su inmensa extensión é importancia así lo requiere, conservando el carácter de diaria la de *Elementos de Cálculo infinitesimal*, puesto que al servir de base teórica para los estudios experimentales y de aplicación, debe comprender desarrollos extensos y prácticos en este sentido.

De esta manera se habrá conseguido trasladar de los programas de *Cálculo infinitesimal*, á su lugar propio, algunas teorías, que de lo contrario, los han de complicar, ya que deben ser conocidas, aunque someramente la diversidad de finalidades matemáticas.

FIN

BIBLIOTECA PROVINCIAL * LOGROÑO

R
16101
BIBLIOTECA CENTRAL DE LA RIOJA
10000202602
MDS 007720