Anuario de Propaganda Matemática (1914)

COMPRENDIENDO EL

CURSO DE EXTENSION UNIVERSITARIA

GÉNESIS Y DESENVOLVIMIENTO MATEMATICO

POR EL

Dr. Zoel G. de Galdeano

EX DELEGADO DE LA COMMISSION INTERNATIONALE
DE L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
CATEDRÁTICO DE LA UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA, CORRESPONSAL DE LA REAL
ACADEMIA DE CIENCIAS DE MADRID

CUADERNO PRIMERO

ZARAGOZA
Tipografía de G. Casañal, Coso, 98
1914

A la Commission internationale de l'Enseignement Mathématique

En testimonio de la más distinguida consideración y profunda gratitud, ofrezco este modesto resumen de mi enseñanza, practicada en la Universidad de Zaragoza, como humilde homenaje, por cuya aceptación quedaré siempre reconocido.

Zoel G. de Galdeano.

SUMARIO DE MIS CURSOS
DE
CÁLCULO INFINITESIMAL
CON ARREGLO AL NUEVO MÉTODO DE ENSEÑANZA

1912-1914

Ensayo de síntesis matemática y nuevo método de enseñanza matemática.
1910

Dr. Zoel G. de Galdeano.

Nuevo método de enseñanza matemática.
1911

Obras esencialmente didácticas

Geometría elemental (con nociones de crítica)	1881
Tratado de Algebra con arreglo a las teorías modernas	1883
Tratado de Aritmética	1884
Problemas de Aritmética y Algebra con nociones de crítica algorítmica	1885
Tratado de Algebra (Parte 2.ª, tratado superior)	1886
Tratado de Geometría conforme a las teorías modernas	1889
Geometría general	1894
Cálculo diferencial	1902
Principios generales de la teoría de las funciones	1903
Aplicación del cálculo infinitesimal al estudio de las figuras planas	1904
Cálculo integral	1904
Aplicación del cálculo infinitesimal al estudio de las figuras en el espacio	1905

Teoría de las ecuaciones diferenciales.. 1906-7
El concepto del imaginarismo en la ciencia matemática............................ 1891
Resumen y complemento de la teoría de los números..... 1910

Obras esencialmente críticas

Observaciones útiles en el estudio de las matemáticas.............................. 1874
El Método aplicado a la ciencia matemática 1875
Complemento de Geometría elemental o crítica geométrica........................ 1881
Crítica y síntesis del Algebra.. 1888
Estudios críticos sobre la generación de los conocimientos matemáticos (1.ª 2.ª partes) ... 1908
Carácter y trascendencia de la Matemática en la época presente (discurso inaugural)..... 1895
Las modernas generalizaciones expresadas por el Algebra simbólica, las geometrías no-euclídeas y el concepto de hiperespacio.. 1896
L' Unification des concepts dans les mathématiques (Congreso de Zurich).............. 1898
La moderna organización de la Matemática (diez lecciones explicadas en el Ateneo de Madrid).. 1898
Note sur la critique mathématique (Congreso de París).... 1900
Id. publicada íntegra en el Boletín de Crítica etc. (t. II)... 1910
Estudios de Crítica y pedagogía matemática...................................... 1900
Exposición sumaria de las teorías matemáticas... 1907
Ensayo de clasificación de las ideas matemáticas (Congreso de Zaragoza)............... 1908
La Matemática en su estado actual (Congreso de Zaragoza)............................ 1908
Boletín de Crítica, enseñanza y bibliografía matemáticas........................... 1908-10

Obras esencialmente pedagógicas

Consideraciones sobre la conveniencia de un nuevo plan para la enseñanza de las matemáticas elementales.. 1877
La enseñanza de la ciencia matemática en la universidad (Progreso Matemático). 1894
Ciencia, educación y enseñanza.. 1899
Quelques principes generaux sur l' enseignement mathématique (L' Enseignenement mathématique).. 1899
Quelques reflexions sur l' enseignement mathématique (Congreso de París de l' Association scientifique)... 1900
La enseñanza científica. 1902
L' Enseignement scientifique en Espagne (traducción, L' Enseignement mathématique)..... 1902
Algunas consideraciones sobre filosofía y enseñanza matemáticas.. 1907
Plan de enseñanza matemática (Congreso de Zaragoza).. 1980

Obras de divulgación

Artículos bibliográficos (Progreso matemático y Boletín de crítica, enseñanza y bibliografía matemáticas).. 1891-5; 1899-900-1907-10
Reivindicación de la ciencia.. 1899
Las matemáticas en España (Congreso de Besançón.................................. 1893
Les mathématiques en Espagne (L' Enseignement mathématique).... 1901
La enseñanza de la ciencia matemática en la Universidad.. 1891
La ciencia en la antigüedad y en nuestros días (discurso).. 1880
Armonías del mundo físico.. 1890
Literatura científica contemporánea. Se publicó también en la «Revista de España»....... 1876
El Progreso Matemático.. 1891-95 y 1899-90

Anuario de Propaganda Matemática (1914)

COMPRENDIENDO EL

CURSO DE EXTENSION UNIVERSITARIA

GÉNESIS Y DESENVOLVIMIENTO MATEMATICO

POR EL

Dr. Zoel G. de Galdeano

CATEDRÁTICO DE LA UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA
CORRESPONSAL DE LA R. ACADEMIA DE CIENCIAS DE MADRID

ZARAGOZA
Tipografía de G. Casañal, Coso, 98
1914

PRÓLOGO

Satisfactorio hubiera sido para nuestros propósitos el fundar una Revista dedicada, no sólo a trabajos aislados y especiales sobre diversos puntos concretos y a la resolución de problemas como ejercicios prácticos, sino a toda clase de materias comprendidas en los vastos dominios matemáticos.

Pero el sostener una Revista de matemáticas es tarea casi imposible, donde no hay público adaptado a la misma; y hasta el hecho de darle publicidad es poco menos que imposible, pues la Prensa es un órgano reporteril general, y no se detiene en cuestiones de índole tan concreta como es la divulgación de los estudios matemáticos. Es decir, que la propaganda de los estudios de esta índole se halla destinada a verificarse poco menos que *en secreto*. Y aun cuando así no fuera, el resultado sería el mismo; porque el terreno aun no está preparado; y el reclutamiento falta por sobra de rutina, de miras interesadas y falta de idealidad que domine e interese a las inteligencias.

Y hay otras muchas razones que justifican tal estado de cosas pues, en efecto, comenzamos por no tener ***historia matemática*** propiamente dicha, porque nada significa algunos hechos aislados sin transcendencia alguna en el progreso general de dicha ciencia; y porque la historia sólo se paga de hechos justificados y no de presunciones más o menos deleznables y pasajeras.

En la falta de base histórica se afianza un menosprecio general que posterga este linaje de conocimientos, hasta el punto de ser muy secundarias y tardías las reformas en los planes de estos estudios. De lo cual resulta que nuestras enseñanzas son deficientes y anticuadas, pues no responden a los cambios de orientación que se suceden con los tiempos y que derogan unas tendencias para implantar otras nuevas.

Además, las reformas no deben inspirarse en utilidades especiales, sino en la pauta general del progreso humano, porque una buena organización aventaja a numerosos aditamentos incoherentes, desquiciados y que pueden ser antagónicos.

Se crean muchas clases prácticas, lo cual es siempre ventajoso en las ciencias experimentales; pero esto no rige de igual manera en estudios teóricos de intensión espiritual y educativa que influyen en la cultura nacional, en el *honor del espíritu humano*, como dijo Jacobi.

Y ¿Qué resultados producen en matemáticas, numerosos cursos prácticos si éstos tienden a ahondar siempre en el mismo surco y no extenderse por nuevos horizontes? El machaqueo sobre composición de cuestiones ya conocidas no produce más que el estancamiento; mientras que, como se ve en la historia de la Matemática, los *nuevos* problemas se han resuelto sobre la base de teorías creadas en correlación con tales finalidades.

Y nosotros, con tal fárrago de bagatelas, abandonamos lo *principal*, las teorías; pues antes de lanzarse a resolver problemas, debe conocerse la ciencia, para no repetir el caso eterno de los cuadradores del círculo que se lanzaban a su difícil empresa con el mínimo lastre de conocimientos.

¿Están incluídas en nuestros programas las teorías de Abel, de Galois, de Jordan, de Kronecker, de Klein, etc., concernientes al Algebra? ¿Lo están las de los Cayley, Aronhold, Clebsch, Gordan, etc., en el Algebra que pudiéramos llamar proyectiva y en consonancia la geometría correlativa a esta Algebra, cuyos tratados fundamentales son los de Salmon y Clebsch?

Todavía no hemos efectuado en nuestro caudal de conocimientos semejante importación. Y si todo esto y mucho más que se suple nos falta; no hay *sobra de teoría* sino *sobrada ignorancia* de ella, lo que, al menos por ahora, nos coloca en punto muy distanciado de la corriente general europea. Y bueno es llamar la atención sobre este punto para que nos corrijamos, para que se olvide la especie de que estamos poco menos que *pletóricos* de teoría, cuando padecemos inanición de toda ella. ¿Quién de nosotros lee ni compra las obras de Kronecker, de Fuchs, de Weierstrass, etc.? Pues si esto no sucede, no hay *plétora de teoría*. Y necesario es desterrar esta frase de nuestro vocabulario. Y sin teoría suficiente, toda práctica degenerará en rutina y empirismo y desaparecería todo espíritu inventivo que se fragua en las alturas de los ideales.

Existen entre nosotros teóricos de varias especies; pero en modo alguno *teóricos matemáticos*, es decir, los verdaderos *teóricos realistas*, porque son los únicos que se orientan en todos los sentidos de las ciencias de aplicación.

En vez de lanzarnos a estudiar la inmensa variedad de curvas que clasificaron los Newton, los Euler, los Plücker y los Cayley, nos engolfamos en el estrecho recinto de las cónicas que ya conocía el maravilloso geómetra Apolonio, 200 años antes de la era cristiana. Y para tales resultados nos preparamos con inacabables andamiajes de transformaciones, especies de trincheras formidables para tan fácil conquista, retrayendo al alumno con tales logomaquías de avanzar en los al parecer tan antipáticos estudios; porque hay una ley general que inconscientemente sigue la humanidad: *la de la proporcionalidad de los resultados con el esfuerzo puesto*. Y nada hay tan eficaz como las facilidades obtenidas para realizar un fin.

¿Hemos derogado el culto a autores ilustres, ciertamente, que realizaron con éxito su misión hace cuarenta años, pero que ahora resultan deficientes e impropios para llegar imediatamente a las nuevas finalidades matemáticas? (Porque lo esencial no es que sea bueno lo escrito en tales libros que ciertamente lo es, como por ejemplo, son dos monumentos de la Ciencia los *Exercices de calcul intégral* de Legendre y el *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* de Lacroix). Ciertamente que no.

Pero lo útil y conveniente es un trabajo de condensación de lo que fué de importancia capital en una época y que lo es menos en otra. Y así por ejemplo, sin menospreciar y muy al contrario, sirviéndonos en momentos oportunos, de los inmortales descubrimientos que nos legaron los Euler, Lagrange y Laplace en la integración clásica, siguen hoy los matemáticos los nuevos derroteros de la integración moderna, a partir de la nueva era señalada por Cauchy y por Riemann.

Hoy se impone que nuestras enseñanzas universitarias se rijan por tratados tales como los de los profesores Appell, Darboux, Goursat, Hilbert, Klein, Painlevé, Picard, Poincaré, Rouché, Schlessinger, etc., etc., de los que estamos distanciados, porque para entrar en este nuevo ciclo se impone una reforma radicalísima en nuestros vetustos planes.

Bien es cierto que en algunos de nuestros cursos ya se siguen a algunos de estos profesores, como por ejemplo, el Tratado de Mecánica de M. Appell y algún otro, pero esto no basta; porque es preciso que entremos de lleno en la corriente general. Y sólo podremos conseguirlo, cuando hayamos militado en la región de las teorías arriba consignadas, juntamente con otras que llevan a las funciones analíticas de Weierstrass a las teorías que parten de la consideración de las series de Fourier que han cultivado los Du Bois-Reymond, Neumann, Dini, etc., con las direcciones seguidas, sobre los conjuntos de Cantor por los señores Baire, Borel, Hadamard, Lebesgue, Mittag-Leffler y otros.

A esta falta de *densidad* científica, especialmente teórica, hay que añadir, como hemos dicho, la falta de organización, es decir, el desquiciamiento y la falta de orden.

Hoy, en todas las naciones adelantadas, se tiende a *elementalizar* los estudios que tiempo hace, ocuparon las regiones superiores, por ser empujados hacia los umbrales por otras nuevas teorías.

El Algebra de los Descartes hasta Sturm se ha concentrado bajo la presión del Algebra de los Abel y Galois, por un lado y la de los Cayley y Clebsch por otro; y su finalidad se halla consignada en el notable tratado de H. Weber.

Bajo los auspicios e iniciativas de la *Commission internationale de l'Enseignement mathématique* se realiza la importación de algunos principios de la teoría de las funciones a la enseñanza secundaria, como también nociones de la representación cartesiana y nociones de Geometría descriptiva. Esta, especialmente utilísima en tal grado de enseñanza, porque el dibujo y lo intuitivo atrae a los estudiantes de pocos años, cuyas aptitudes son muy conformes y favorables para estos estudios.

Por contraste deplorable para nosotros, estos estudios se llevaron al tercer año de Facultad, cuando los alumnos apetecen teorías más substanciosas, abstractas e intensivas; y, en cambio, para completar el desquiciamiento intelectual, se diluyen en los dos primeros cursos de Análisis, nociones de la Aritmética, en las que caben repeticiones de la 2.ª enseñanza con el Algebra elemental hasta llegar al teorema de Sturm. Y por otra parte se da excesiva importancia a la Geometría de Staudt que distrae y agobia con sus disquisiciones sobre lo imaginario y lo infinito, que desorienta, con un punto de vista especialísimo, del cauce general, donde se compenetran multitud de teorías, que por esta compenetración se auxilian las unas a las otras, en virtud de cierta unificación que abrevia y auxilia en la adquisición de los conocimientos; pues dicha teoría es un ejercicio rigurosamente lógico; y el exceso de este ejercicio atrofia las disposiciones creadoras e inventivas.

Todo esto es suficiente para demostrar nuestro proverbial atraso matemático, porque nuestra juventud estudiosa se encuentra con trabas en vez de encontrar facilidades y jamás adquiere gusto y afición a lo que se le presenta como indigesto, inútil y antipático.

Y con tales deficiencias, disminuye el culto a las ideas puras, adulteradas por torpes procedimientos, rutinas y manipulaciones. ¿Cómo va a existir entre nosotros público matemático de ninguna especie, con tales precedentes? Ni ¿cómo se han de atraer adeptos a tan indigestos como inútiles manjares?

Si en nuestras universidades carecemos de estudios teóricos suficientes ¿cómo vamos a lanzarnos, sin base alguna, a las investigaciones?

La resolución de los problemas exige conocimientos teóricos; y cuando éstos no son suficientes, han de crearse, puesto que los problemas no son más que transformaciones de los conocimientos teóricos, trayectorias especiales de las teorías que conducen a un fin señalado previamente. Y en la teoría se hallan involucrados infinidad de problemas que corresponden a diversas ordenaciones de los conceptos. Y así la Ciencia se dilata por teorías que envuelven latentes innumerables finalidades prácticas.

Con tales antecedentes no es de extrañar que haya fracasado hace años *El Progreso matemático* y otras revistas que le sucedieron; porque el público adecuado no podía formarse en las universidades, únicos centros capaces de formarlo. Y en vista de tales contrariedades que hicieron fracasar mi intento de publicar la *Nueva enciclopedia matemática*, que cesó después de haberse publicado siete tomos con la única finalidad de servir para mis poco concurridos cursos, por el fatal acuerdo de que sean los últimos de la carrera, cuando debieran ser los primeros, así como otras obras mías de propaganda que han carecido siempre de público, de protectores y de propagandistas, pues la Prensa no se ocupa de escritos matemáticos, ciertamente con un buen sentido práctico, porque nuestros pseudomatemáticos, coreados por cuadradores, rutinarios y desequilibrados utopistas no han podido captarse las generales simpatías que al menos alcanzan los escritores geniales de la literatura, al recrear y hacer grata la vida, aunque no trasciendan sus resultados de este fin meramente espiritual, sin Mecenas protectores, sin fervientes adictos. y convencidos de lo descabellado de la empresa ¿habremos de exclamar desengañados y desalentados, *lasciate ogni speranza*?

De ninguna manera. Podrán detener vientos adversos nuestra marcha, será lento el progreso o avance; pero basta que éste exista aunque sea casi imperceptible, pues mis alumnos en general no carecen de disposiciones ni de afición al estudio; y lo mismo sucedería a otros alumnos, si las enseñanzas se les ofrecieran de un modo adecuado a sus necesidades y se hicieran interesantes. Y esto es lo principal, el hacer las ciencias *tan su-*

gestivas como lo ha sido la literatura, puesto que la región de la verdad y de las realidades no es menos rica que la de la imaginación y de los sentimientos.

No podemos intentar ya la publicación de un nuevo *Progreso matemático* que contó escasísimos suscriptores, ni una *Nueva enciclopedia matemática* que contó muchísimo menor número de éstos todavía, contables casi por números dígitos; pero no hay que desmayar ante las adversidades, cuando contamos con las buenas disposiciones nativas de nuestra juventud, capaz de elevarse, cuando para ello se ponen los medios y se prepara el ambiente, aunque a expensas de largo lapso de tiempo.

Esta confianza en nuestras condiciones dignas de aprecio, y de que al fin, aunque tardiamente se vencerán las dificultades, cuando se disminuyan los obstáculos arriba enumerados, unido a que nuestra actual empresa con ser costosa y llevar al sacrificio pecuniario, lleva consigo la satisfacción del placer intelectual, en contraposición de los que sienten fatiga o tedio por tales ejercicios intelectuales, nos llevan a insistir en nuestra labor de propaganda, ya que no ante un público que no existe; siquiera en el reducido campo de la cátedra, dilatado por los aún no muy fértiles campos de la extensión universitaria que puede ir formando nuevos adeptos y a la que he consagrado mis esfuerzos durante los tres últimos cursos.

Esta nueva decisión, posterior al decaimiento de estos últimos años, ocasionado por desvíos de quienes pudieran haber sumado sus esfuerzos a los míos, para formar núcleos persistentes, en vez de disgregaciones disolventes, me afianzan en mis propósitos, fundados en que nuestra juventud va allá donde se la dirige, con las ventajas o los inconvenientes que sus directores le imponen. Y esto lo he experimentado desde el momento en que he elevado la tesitura de mis cursos, en armonía con mis ideales de siempre, puesto que mis alumnos estudian con afán y complacencia las obras de autores tales como Borel, Bianchi, Goursat, Laurent, Picard, Vivanti y otros que les facilito para hacer de esta manera mi biblioteca pública. En lo que manifiestan un buen gusto nativo, adaptado a preferir las obras que elevan el espíritu sobre las que lo atrofian con indigestos y artificiosos arcaísmos.

En vez de estacionarme en cuestiones especiales y de insistir porfiadamente en tal o cual punto concreto que puede ser desarrollado más tarde como ejercicio práctico, he tratado de ofrecer amplios horizontes al estudio y a las investigaciones.

Por esta razón, al leerse los programas de mis cursos, serán juzgados como excesivos por la cantidad de materias abarcadas; pero este defecto queda compensado por la comunidad de las ideas directoras, como he hecho ver en mis cursos de extensión universitaria, que encauzan hacia estas múltiples finalidades por cierta irradiación que difunde la luz de aquélla hacia nuevos espacios.

Mis programas ofrecen una multiplicidad excesiva de materias, que no habría ofrecido en circunstancias normales; sino fuera porque deben salvarse de algún modo las deficiencias arriba señaladas en nuestros programas, para no dejar a los licenciados que salen de nuestras universidades en la ignorancia de las actuales disciplinas que arrancan, como he dicho, de los trabajos de Cauchy, Abel y Riemann, de los que se prescinde de un modo absoluto en nuestras deficientes enseñanzas o en nuestros cursos.

En otras naciones los numerosos cursos matemáticos permiten señalar amplios campos a la investigación.

Nosotros con la defectuosa organización actual de los estudios, hemos de comenzar por *conocer* lo que es corriente en otras universidades que caminan bajo las orientaciones modernas arriba señaladas.

Y mientras esto no suceda. hay que presentar a nuestros escolares siquiera la silueta de las grandes concepciones de la matemática contemporánea, que, repito, se ignora *por completo* en nuestros cursos y en nuestra pobrísima literatura matemática, reducida a glosar y repetir teorías anticuadas que hoy figuran en segunda línea.

Y como prueba de que es ilusorio el pobre concepto que reducía a nuestra juventud a no exceder de tratados elementales que dominaron durante ha largos años, entonces en armonía con el escaso avance de teorías y de procedimientos educativos, bastará hacer una reseña de las lecciones desarrolladas hasta la fecha por los alumnos de mi curso de *Elementos de Cálculo infinitesimal*, como lo haré en otro lugar.

Y si no puedo decir lo mismo del curso de *Complemento de cálculo infinitesimal*, tal deficiencia obedece a la falta de organización arriba señalada, que exige esperar al *cuarto año* de estudios universitarios para estudiar un *segundo curso de Análisis infinitesimal*.

De manera que los alumnos dedicados a los estudios puramente matemáticos son en escaso número por las dificultades materiales que les imponen los planes vigentes, unido a lo incierto de la recompensa a su benemérita y acrisolada labor, ya que los resultados de un penoso y difícil estudio son tardíos y de escasísimo provecho.

En vista de tales antecedentes, y, para armonizar mis própositos, encaminados a mejorar mis cursos con las dificultades externas que ofrece la carencia de público y de propagandistas matemáticos, dedico esta nueva publicación principalmente a los alumnos de mis cursos, futuros licenciados o doctores y profesores de matemáticas, para que puedan seguirme en mi labor pedagógica emprendida, y para contribuir a extender indirectamente y divulgar este género de estudios, cuando hayan desaparecido trabajos que podemos calificar como antaño de *obstáculos tradicionales* y libres de ellos podamos internarnos en otras regiones más espirituales y vivificadoras.

Y no hay que seguir aferrados a la idea de que los estudios universitarios deban rivalizar con las Escuelas especiales que aprovechan de la Matemática lo inmediatamente útil y práctico.

Este error ha conducido a reforzar en el grado elemental los cursos de primero y segundo año de la licenciatura, en perjuicio del desenvolvimiento *teórico* de la Matemática, propio y exclusivo de la Universidad, cuyo fin es la *cultura nacional* no sólo en la antigua región del *trivium* y el *quadrivium*, sino sobre la amplia base de todos los descubrimientos del prodigioso siglo XIX que agregó a la cultura literaria la cultura científica, vivificada por la espiritualidad de los descubrimientos matemáticos.

Y este menosprecio hacia la ciencia de los Cauchy, Riemann y Weierstrass y aun pudiéramos añadir de los Euler, Lagrange y Laplace, nos ha conducido a nuestro general atraso en esta y otras materias; porque la cultura humana forma un bloque del que no debe menospreciarse ninguno de sus elementos constitutivos, como no puede despojarse de ninguno de sus componentes el aire que respiramos.

Este Anuario, que no me atrevo a elevar a la categoría de Revista, porque esto sería superior a mis medios materiales para sostenerla, contendrá además de lo concerniente a mis programas y cursos, multitud de trabajos de índole crítica, pedagogía y bibliográfica.

CURSO DE EXTENSIÓN UNIVERSITARIA (1913-1914)

GÉNESIS Y DESENVOLVIMIENTO MATEMÁTICO

LECCION PRIMERA

CONSIDERACIONES GENERALES

Antes de comenzar las lecciones de este curso, de extensión universitaria, voy a dedicar la primera conferencia a reunir algunas ideas que expresen la concatenación del mismo con trabajos anteriores y especialmente con el curso del año pasado; pues, la finalidad de mis trabajos, desde hace muchos años, consiste en abreviar y facilitar la adquisición de los conocimientos matemáticos por medio de la síntesis que agrupe las ideas y los procedimientos de un modo sistemático.

La materia es también la propaganda; pero actualmente desde el nuevo punto de vista de las varias tendencias matemáticas.

El año pasado agrupé los conocimientos matemáticos atendiendo preferentemente a su aspecto objetivo.

Tracé los rasgos generales de la Geometría elemental, del Algebra y de la Teoría de los números, que son las tres piedras angulares del edificio de la matemática clásica. Después me elevé a conceptos generales, tales como los de *simbolismo* y *sistemas* que rigen la actividad intelectual en la constitución de las teorías.

A continuación, traté de la finalidad general de toda época, pero refiriéndome especialmente a los grandes problemas formulados desde la época helénica, que condujeron a multitud de descubrimientos tales como los de las curvas cuadratrices y trisectrices, hasta llegar a la época moderna en que se demuestra la imposibilidad de resolver tales problemas, en los términos primitivamente formulados; y, como cuestión ligada a ésta, la de los métodos matemáticos, desde el análisis geométrico de Platón.

Pero además de la Matemática subjetiva, dependiente de las definiciones, axiomas y postulados, existe la Matemática real de la Naturaleza. Y esto fué el objeto de la novena conferencia. Y, por último, pretendí concentrar estos varios puntos de vista, llevándolos a la finalidad dominante en todos mis trabajos desde ha largo tiempo, es decir, hacia lo que considero como un *nuevo método* de exposición didáctica o de enseñanza científica, objeto de la décima y última lección.

En mis primeros trabajos, escritos desde 1874 hasta 1881, me propuse, ante todo, fijar los distintos modos de considerar los teoremas recíprocos e inversos de otros, las transformaciones de las figuras de la Geometría elemental, especialmente por giros y traslaciones y también las transformaciones de unos problemas geométricos en otros equivalentes para producir un encadenamiento que nos llevara a la solución, en conformidad con la idea platónica.

Seguía más tarde, en 1894, las generalizaciones de los Carnot y Poncelet en la Geometría de posición del primero y en la proyectiva del segundo, la generalización que dió Chasler a los porismas de Euclídes, creando la Geometría superior y de los varios métodos analítico-geométricos, debidos a Grassmann, Hámilton, Bellavitis, fuentes del cálculo vectorial, hoy tan difundido bajo formas distintas, hasta llegar a la generalidad superior de la *Pangeometría* que comprende las Geometrías euclídea y las no-euclídeas y la Geometría de *n* dimensiones, fundada por Riemann en el concepto del *Analysis situs*.

Recorrí también los varios progresos del Algebra en sus diversas manifestaciones, tratando sucesivamente del concepto de número hasta los ideales de Dedekind, de la generación del concepto de continuidad, de la generación del concepto de cualidad, según las interpretaciones de Argand y sus sucesores, con los incalculables resultados que produjo a la ciencia Cauchy, aplicando estas interpretaciones en su teoría de las cantidades geométricas que completó Riemann con su célebre superficie y a las que siguieron las representaciones cualitativas puntuales dadas por Cantor en su teoría de los conjuntos y de Du Bois-Reymond en sus sistemas pantáquicos y apantáticos, llevando por otra parte los conceptos combinatorios de Boole, Jevons, Grassmann, Hámilton, y de Clifford a las diferentes especies de Algebras, hasta las álgebras abstractas de *n* unidades complejas de Weierstrass y Dedekind.

Pero las circunstancias de mi vida, que aproveché gustoso, me llevaron a un campo inmensamente más fértil que los anteriores; el que los abarca todos, por lo menos en sus líneas generales; pues nada hay superior al Análisis en la Matemática, como no sean las leyes de la combinatoria que, como emanadas directamente de la inteligencia, prescindiendo de la naturaleza de los objetos, son un molde *a priori* que rige toda realidad concreta u objetiva.

En los seis tomos de mi *Tratado de Análisis*, cuya publicación hube de interrumpir por la falta de medios y de ambiente, reuní las más diversas teorías; porque sus varios objetos y métodos permiten estudiar un método general, del que todos los demás métodos no son sino ramificaciones distintas; ya que el tránsito de las cantidades, sean números o funciones y sus relaciones bajo forma de ecuaciones algebráicas o diferenciales se asimila inmediatamente con sus representaciones por puntos, líneas o superficies; y se pasa de uno al otro campo de un modo natural.

Pero lo que hay que ver en estas investigaciones, para que sea lo más provechoso posible su estudio, es aquéllo de más general que hay en ellas y que constituye su espíritu, con lo cual los conceptos superiores dominarán a sus consecuencias y abarcarán los detalles de las cuestiones a que se refieren.

Por este motivo, mientras fuí delegado de la *Commission internationnale de l'enseignement mathématique*, publiqué varios trabajos; tales son: *Boletín de crítica, enseñanza y bibliografía motemática, Ensayo de síntesis matemática y nuevo método de enseñanza matemática* y *Sumario de mis cursos de Cálculo infinitesimal con arreglo al nuevo método de enseñanza*, con los cuales me propuse contribuir, dentro de mis modestos medios, a facilitar la enseñanza, haciéndola depender de puntos de vista generales, comunes a multiplicidad de objetos, tales como los de: combinatoria, simbolismo, cantidad, sistema, correspondencia, correlación, representación, normalización, singularidad y transformación que cité en una memoria presentada al Congreso científico de Zaragoza.

Y en tres cursos que he explicado, de extensión universitaria, el primero interrumpido por pasajera enfermedad, el segundo del que he hecho algunas indicaciones, y el actual, han tenido y tienen por objeto el seguir este ideal pedagógico de hacer salir a la enseñanza matemática del surco permanente en que algunos aspiran a mantenerla, sin tener en cuenta que los progresos de los métodos de enseñanza han de corresponder a los progresos científicos para poder asimilarse el hoy abrumador contingente de teorías constitutivas de la Matemática actual.

Como dije al comienzo, el curso actual difiere del anterior en los puntos de vista, ya que en el anterior traté la Matemática en su aspecto predominantemente objetivo.

Así, pues, hemos de examinar, el *desarrollo* de las diversas tendencias que han predominado en las varias épocas o en los procesos seguidos por los matemáticos, que entre todas constituyen o integran los métodos de investigación, a saber:

La tendencia individualista determinativa, la tendencia difusiva, la sistematizadora, la constructiva, la intuitiva, la lógica, la simbólica y esquemática, la práctica y la tendencia crítica, que desenvolveré en las lecciones sucesivas.

LECCION SEGUNDA

TENDENCIA A LA INDIVIDUALIZACION DETERMINATIVA

Realmente la tendencia generalizadora que señalan los geómetras, desde el siglo XVI hasta Lagrange, difiere de la tendencia individualista, dominante en los períodos griego y árabe de la Geometría y el Algebra y deberían ser tratados aparte. Pero las exigencias de un curso breve no permiten tal bifurcación histórica y, por ello, serán suficientes algunas indicaciones generales acerca de estos dos puntos.

Nos bastará manifestar que, no teniendo la geometría elemental o Euclídea ningún concepto general al que los demás se subordinan, como no sea el procedimiento determinativo, realizado directamente por la superposición de las figuras o indirectamente por el método *ad absurdum,* no aparece en ella otro enlace general que el debido al análisis geométrico de Platon que establecía encadenamientos de problemas equivalentes, mediante los cuales se llegaba del problema enunciado al problema resuelto; y aun este análisis se continúa en la Aritmética de Diofanto y en el Algebra de los árabes por combinaciones sucesivas de operaciones o de transformaciones numéricas, pues a lo sumo, Euclídes llegó a una tentativa de clasificación de las cuestiones, según las cosas dadas en sus célebres porismas que contenían en germen la Geometría superior, creada algunos siglos más tarde por Chasles, sobre tal base.

Y hemos de consignar que los problemas formulados en la época helénica, tales como la cuadratura del círculo, la trisección del arco y la duplicación del cubo fueron ocasión propicia para un progreso indirecto, consistente en el descubrimiento de multitud de curvas cuadratrices y trisectrices, por esta correlación íntima que siempre ha existido entre los problemas propuestos y las teorías a ellos anejas que se construyen para resolverlos.

El siglo XVI es la época del renacimiento matemático. Galileo, Cavalieri, Descartes, Pascal y Fermat son sus representantes. Y a estos nombres añadiremos los de los geómetras: Roberval, Desargues, Mydorge, Gregoire de Saint Vincent, La Hire y Le Poivre.

Puede afirmarse que esta es la época de generación del Algebra, por Vieta y por Descartes, de la teoría de los números por Fermat, de la Geometría analítica por Descartes, y del cálculo infinitesimal por Fermat, con su método *de maximis et minimis*.

Al atribuir a Fermat la idea filosófica de este método, Poisson se expresa en los términos siguientes:

«A medida que una magnitud se aproxima a su *máximo* o su *mínimo*, varía cada vez menos y su diferencial se anula cuando llega a uno de estos valores extremos. Partiendo de este principio, Fermat tuvo la feliz idea, para determinar el máximo o el mínimo de una cantidad, de atribuir a la variable de que depende, un incremento infinitamente pequeño, e igualar a cero el incremento correspondiente de esta cantidad, previamente reducido al mismo orden de magnitud que el de la variable, etc.»

Pascal y Desargues emplean por vez primera el concepto de la perspectiva. El primero da un principio fundamental a la teoría de las cónicas con su célebre teorema del exágono inscrito en una cónica (*hexagrammum mysticum*), pues determinando cinco puntos una cónica, dicho teorema establece una relación de posición de un sexto punto; y resolvía el problema de determinar una cónica por cinco condiciones, expuesto en su *Essai pour les coniques*.

Desargues concibe la atrevida idea de considerar como variedades de una misma curva, el círculo, la elipse, la parábola, la hipérbola y el sistema de varias rectas paralelas entre sí, como una variedad de un sistema de rectas concurrentes en un mismo punto; y aplicaba a los sistemas de líneas rectas, las propiedades de las líneas curvas, lo que es hoy natural, dice Cha les *Aperçu*, (página 76); porque un sistema de rectas puede ser representado por una ecuación única, lo que le condujo a aplicar a las secciones cónicas, diversas propiedades del sistema de dos rectas, entre ellas, la llamada por Pascal *maravillosa*, que constituye hoy un principio capital de la geometría moderna o su teorema sobre la *involución de seis puntos*, o sea que: *El producto de los segmentos comprendidos sobre una transversal, entre un punto de la cónica y dos lados opuestos del cuadrilátero inscrito, está respecto al producto de los segmentos comprendidos entre el mismo punto de la cónica y los otros dos lados del cuadrilátero, en una relación igual al de los productos obtenidos análogamente con el segundo punto de la cónica, situado en la transversal.* Y aún examinaba el caso en que se confundían dos puntos conjugados, lo que conducía a la involución de cinco puntos que corresponde al lema IV de Pappus, referente a los segmentos producidos en una diagonal por dos lados de un cuadrilátero y sus diagonales, siendo una generalización de éste, según dice Chasles, al considerar las dos diagonales como una cónica que pasa por los cuatro vértices.

Las nuevas ideas de Pascal y Desargues, conducen, pues, a una generalización por la cual, multitud de proposiciones de Euclídes y de Apolonio quedan comprendidas en un sólo teorema.

Y por otra parte, los procedimientos adquieren cierta libertad o flexibilidad, puesto que el teorema de Desargues le permitiría considerar sobre un cono de base circular, secciones arbitrarias sin emplear el triángulo por el eje de Apolonio, que cortaban al cono por planos perpendiculares a este triángulo.

Que los antiguos necesitaban multitud de proposiciones particulares para llegar a los resultades a que llegaron Pascal y Desargues por una sola proposición, se ve en la obra de Chasles, *Les trois livres des porismes d'Euclide*.

La Geometría, en la época griega, siendo eminentemente práctica, pues tendía tan sólo a la resolución de problemas, obedeciendo al carácter determinativo, no tenía otro lazo y ley general que la sustitución de unas cuestiones por otras, facilitada por el análisis geométrico, mientras que los geómetras del siglo XVI, con las relaciones anarmónica, homográficas e involutivas y perspectiva, llegaban a una primera generalización que aun dista mucho, juntamente con los descubrimientos en la teoría de las ecuaciones hasta Newton y después hasta Sturm, de la generalización debida a los matemáticos del siglo XVIII, con el concepto de función y, más aún, del cálculo funcional, cuyos principios estableció Lagrange, creando el cálculo de variaciones.

Además, la cuestión difícil era hallar entre las rectas y las curvas, relaciones que permitiesen concluir, del conocimiento de las primeras la formación de las segundas.

Por último, Descartes hizo del problema de Pappus *ad tres aut plures lineas* la primera aplicación de su geometría, o sea: *Hallar el lugar geométrico de un punto tal, que las perpendiculares, o más generalmente, las oblicuas bajadas desde este punto sobre estas rectas, bajo ángulos dados, satisfagan a la condición, que el producto de ciertas de entre ellas, esté en una razón constante con el producto de las demás.*

Y Descartes, con su nuevo método de las coordenadas, agregó a la Geometría de los antiguos y a la de las transversales, una nueva geometría, subordinando el Algebra a la Geometría, expresando gráficamente las fórmulas algebráicas y la construcción de las raíces de las ecuaciones, lo que ya obtuvo Vieta, efectuando el producto, la división, la elevación a potencias y la extracción de raíces, mediante trazados uniformes y sencillos y Newton en su *Aritmética universal* presenta un modelo perfecto de la aplicación del método de Descartes a la resolución de los problemas de la Geometría y a la construcción de las raíces de las ecuaciones.

Descartes, como Vieta, supone conocidas todas las reglas de la Aritmética, exponiendo que: *Todos los problemas de geometría* pueden reducirse a términos tales, que sólo es necesaria conocer la longitud de ciertas líneas rectas, para construirlos; y llega a la construcción de los problemas sólidos por una ecuación. Y se fija en la significación geométrica de las fórmulas algebráicas para salvar al Algebra de las reglas convencionales y de las obscuridades inherentes a ellas.

Descartes, con la aplicación del Algebra a la teoría de las curvas, halló los medios de salvar los obstáculos en que se habían detenido hasta entonces los grandes geómetras. La concepción de Descartes permite aplicar todos sus métodos de un modo uniforme y general, y constituye la introducción necesaria a los nuevos métodos de Newton y de Leibniz.

Y Newton, con un instrumento más poderoso que el de Descartes, emprende la clasificación de las curvas de tercer orden (que Cramer lleva muy adelante en su *Introduction à l'Analyse des lignes courbes algébriques*, funda el problema de la reversión de las series y obtiene la descripción orgánica de las curvas que desarrolla Maclaurin.

Y en este momento histórico, varios descubrimientos enriquecen el caudal de los métodos y teoremas geométricos. Uno de ellos es la *descripción orgánica de las curvas,* obtenida por Newton mediante el giro de dos ángulos de magnitud constante que giran alrededor de sus dos vértices O y O', de modo que sus lados Oa y Oa' se corten sobre una recta dada L, en cuyo caso, los otros dos lados OA y OA' se cortan sobre una cónica que pasa por O y O'.

A este descubrimiento podemos agregar algunos de Mac-Laurin, expuestos en su *Geometría orgánica, sive Descriptio linearum curvarum universalis* donde se emplea por vez primera el concepto de la *media armónica* de los segmentos comprendidos entre un punto fijo de una transversal y los puntos de la curva considerada. De manera que si: *Alrededor de un punto fijo se hace girar una transversal que encuentra a una curva geométrica en tantos puntos como dimensiones tiene ésta y se toma, en esta transversal, un punto* M *tal que el valor inverso de su distancia a un punto fijo sea media aritmética entre los valores inversos de las distancias de los puntos*A, B, C,... *a este punto fijo, el lugar geométrico de* M *será una recta,* teorema que le fué comunicado por Cotes, a lo que añade Mac Laurin que: *Si se traza por un punto fijo en el plano de una curva geométrica, una transversal que corta a una curva geométrica en tantos puntos como dimensiones tiene y por el punto fijo se traza una segunda recta de dirección arbi-, traria, pero fija; los segmentos comprendidos en esta recta, entre el punto fijo y todas las tangentes a la curva, tendrán constante la suma de sus inversos, cualquiera que sea la primera transversal trazada por el punto fijo,* siendo el primer toerema, de Cotes, como dice Chasles, una generalización del de Newton sobre los diámetros de las curvas, y el de Mac-Laurin otra del teorema de éste sobre las asintotas, siendo este teorema una deducción del de Newton sobre la relación invariable del producto de las abscisas al producto de las aplicadas, paralelas de las curvas.

Pero sobre estas generalizaciones y determinaciones que expuso Mac-Laurin en su Tratado de las curvas de tercer orden, hemos de consignar la transcendencia del método de Newton que por el lado analítico, al aplicar el cálculo de las fluxiones a la doctrina de las series, conduce a la reversión de éstas, consistiendo su carácter esencial en las transformaciones y aproximaciones sucesivas, así como por el lado geométrico, sobre la base de su paralelógramo. prepara las determinaciones que realiza De Gua con su célebre *triángulo* y que aplicó Cramer a la obtención de las ramas de las curvas en la proximidad de un punto, así como de las ramas infinitas, cuyo perfeccionamiento final hallamos en la teoría de Puiseux acerca de los ciclos de las raíces de las funciones algebráicas,

Los *Bernoulli*, el marqués de l'Hospital y, sobre todo Euler, completan y simplifican la obra de Leibniz hasta Lagrange que perfecciona la teoría de las ecuaciones diferenciales, completándola con la de derivadas parciales y el cálculo de variaciones; y aquí podemos dar por terminada la tendencia genuinamente generalizadora individual, consistente exclusivamente en generalización de conceptos especiales, unificación y simplificación de procedimientos; porque esta generalización no llega a ser sistemática, la cual será objeto de una de las siguientes lecciones. Hasta este momento existen generalizaciones, pero siempre restringidas o subordinadas a algún fin inmediato y práctico.

LECCION TERCERA

TENDENCIA DIFUSIVA

Sobre la tendencia individualizadora de la Matemática clásica hoy domina la tendencia expansiva o difusiva de los conceptos.

Antes, la actividad matemática se concentraba en objetos particulares o especiales, en problemas previamente propuestos; y la Ciencia progresaba por descubrimientos incidentales que surgían con motivo u ocasión del fin propuesto. Así se descubrieron multitud de curvas; y la teoría de los números, en tiempos de Fermat, consistía en un amontonamiento de problemas particulares, debidos a iniciativas especiales.

Hoy, por el contrario, las ideas o conceptos se expansionan o extienden por dominios los más diversos.

Antes, lo objetos fueron la ecuación, la congruencia, la integración que eran como sistemas planetarios con infinidad de satélites. En cada problema se concentraban multitud de procedimientos o de métodos. Hoy, se expansionan indefinidamente las teorías para llegar a la resolución de los problemas, meros incidentes, absorvidos en la generalidad de aquéllas.

Las teorías son lo esencial, los problemas lo accidental, la realización de la idealidad propia de aquéllas, el hecho material del cálculo numérico, por la determinación de coeficientes, funciones, variables o parámetros. Aquéllas, son las ideas en estado de movimiento, en su fluir libre, éstos los estados fijos en cada momento de la existencia de las primeras.

En toda cuestión existen dos órdenes antagónicos o en relación inversa: los objetos, sean cantidades constantes, variables o parámetros, de orden analítico o geométrico y condiciones a ellos impuestas. El mayor o menor número de estas restringe o extiende la capacidad de existencia de aquéllos, su libre movilidad. Y cuando los dos órdenes se equilibran, resulta la determinación; y, según el predominio del uno sobre el otro, la indeterminación o la imposibilidad la redundancia o la sobresaturación: Así, pues, todos los problemas matemáticos concernientes a la determinación se hallan potencialmente resueltos y de muy diversos modos, según la configuración o modo de combinarse los datos en modo y en cantidad.

En Geometría, todas las configuraciones con que puede poblarse el plano contienen infinidad de problemas en potencia, como en la cantera se contienen todas las estatuas y las construcciones más diversas. Sólo falta el trazado particular o cánevas adecuado en cada caso. Por esta razón, existe una infinidad de problemas que pueden componerse, combinando convenientemente los datos compatibles, con lo que se deja como desconocido. Todo es cuestión de combinar por sustituciones de elementos equivalentes o de igual grado. Y otras veces, hay que resolverlos, mediante andamiajes de construcciones auxiliares, o densificación del medio, conducentes a la determinación. Y así se comprende cómo Lagrange, Laplace, Cauchy, Ampère, Jacobi, etc., llegaron a integrar las ecuaciones diferenciales, mediante elección conveniente de variables, relaciones o sustituciones y sistemas de operaciones que señalaban surcos distintos en el dominio de las cantidades.

Tan esencial es la teoría y tan preeminente, que la resolución moderna de las ecuaciones diferenciales se funda en el teorema de Cauchy, de la existencia, como antes se fundó, en el teorema de D'Alembert, la teoría de las ecuaciones algebráicas.

Y esta necesidad de probar la existencia, depende de que en los problemas, las cantidades o entes matemáticos se hallan replegados, englobados o amalgamados; y es necesario saber si la desplegadura de las entidades buscadas es posible, a la manera que se despliega en un plano una superficie desarrollable, sin ruptura ni duplicatura, sin que el sistema altere más que en la manera de presentarse. Y a esta desplegadura contribuyen la multitud de relaciones de los grupos en las ecuaciones algebraicas y de transformaciones de funciones y de variables que vemos en los trabajos de Jacobi, Meyer, Lie, ete., y derivaciones e integraciones que sirvieron a Ampère, Laplace, etc., para hallar las soluciones de las ecuaciones diferenciales,

Y la capacidad para resolver problemas está en razón directa de la suma de los conocimientos teóricos. Y cuando esto no sucede, es necesario crearlos, inventando nuevas teorías o desarrollando las ya conocidas para rodear los elementos desconocido del andamiaje necesario que conduzca a la construcción buscada.

Por esta razón, como dijo el profesor Hilbert en el Congreso de París, multitud de problemas propuestos han originado nuevas teorías, cuyas correlaciones y dependencias manifiesta en muy distintas y capitales teorías. Y, en general, vemos que la Matemática avanza entre problemas y teorías que son precedentes y condiciones necesarias para su resolución.

De igual manera, vemos cómo la aspiración a demostrar el postulado de Euclídes condujo a la Geometría de Lobatschewsky y luego a la de Riemann. Y esto lo vemos realizado desde la antigüedad, pues siempre en la Ciencia, ciertas finalidades útiles o prácticas son las propulsoras de multitud de descubrimientos teóricos, sin las cuales éstos no son posibles, al menos en las ciencias teóricas o especulativas.

Parece que la ciencia de los antiguos, que se concentraba en problemas especiales, se dirigía a puntos determinados en los que convergían las tendencias de cada matemático y que más tarde estas convergencias, cada vez menos marcadas o íntimas, iban aminorándose por efecto de otras atracciones externas de nuevas ideas, hasta llegar al paralelismo, emblema de la indiferencia que homogeneizaba así el campo ideal, estableciendo entre todas igual capacidad para contribuir a los más variados fines.

Así como en Astronomía sucedió al sistema de Tolomeo el de Copérnico y en la Física a la teoría de la emisión la de las ondulaciones, creándose el flúido etéreo; de igual manera, los matemáticos, en los intersticios que dejaban los números enteros y fraccionarios, crearon los irracionales y los transcendentes y sobre los dominios de integridad y de racionalidad, crearon los cuerpos finitos, los ideales y las diferentes especies de conjuntos hasta el contínuo que los comprende a todos. Y así, en torno de cada problema, la teoría crea multitud de andamiajes o de edificaciones auxiliares, a la manera que se forma un cristal por la acción del líquido disolvente que lo rodea.

Vemos, pues, cómo las ideas se disgregan, se concentran o se dispersan como los átomos que integran un cuerpo en sus diversos estados físicos y químicos y se cambian los puntos de vista.

Hoy las ideas se compenetran como los elementos que forman seres organizados. Al aislamiento de antes se ha sustituído una armonización entre todas ellas.

Todas se substituyen, se transforman, se representan, se correlacionan, se sistematizan, se ordenan y normalizan, se coordinan y se clasifican. Estos modos y otros análogos son como sus atributos en el mundo de su existencia orgánica.

Y estos atributos, que en las ideas son como las categorías de los metafísicos para la ordenación de todo lo existente, se concretan en las varias finalidades y modos matemáticos.

Por ejemplo, en una ecuación diferencial, las soluciones se expresan por un sistema fundamental, las integrales tienen su representación en una curva o superficie integral; las integrales se relacionan en un grupo, tienen entre sí, por ejemplo, relaciones algebráicas, sus singularidades, etc. De manera que concurren en esta sola entidad infinidad de relaciones propias de muy de diversas teorías.

De igual manera, en la teoría de las funciones modulares intervienen: la teoría de los grupos discontinuos con los conceptos de isomorfismo, de subgrupos, etc., el concepto de congruencia, para separar diversas clases, la representación esférica y conforme, el concepto de invariante, las relaciones anarmónicas y sus transformaciones lineales, nociones de la Geometría sobre una curva algebráica y acerca de la representación sobre la superficie de Riemann con sus puntos de ramificación, con el estudio de las conexiones y de la normalización, la idea de cuerpo y de dominio de racionalidad, conceptos de Riemann y de Jacobi acerca de las funciones abelianas, elípticas y modulares, etc.

Se observa, pues, una superposición de ideas variadas para desarrollar una especial teoría, una movilidad en éstas, análoga a la de las energías naturales que, en formas diversas, concurren a la producción de cada fenómeno, una invasión de conceptos en la región de otros conceptos, que a su vez pueden ser centros de los demás, desarrollándose las diversas teorías, no según el escueto encadenamiento de los tiempos clásicos, sino a la manera de crecimiento de los seres orgánicos, por *intus-susceptionem*. Nos hallamos en el caso de la lógica que considera los predicados adaptables a un mismo sujeto, en comprensión, es decir, aquel fondo indefinido de cualidades adaptables a la infinidad de sujetos existentes para formar toda la realidad posible, que en la esfera de los hechos posibles es el objeto del cálculo de probabilidades.

Así como un proyectil lleva en bloque cierta cantidad de fuerza viva que al chocar con un objeto, la distribuye en la de infinidad de partículas que vibran, conservando la equivalencia de la energía en otra forma, los antiguos bloques de la Aritmética, el Algebra, la Geometría, etc., en los que se concentraba la energía del pensamiento matemático, hoy se disgregan en infinidad de partículas intelectuales, de ideas, que se difunden y extienden en el espacio ideal, actuando sobre los puntos más diversos, expansionando así o desplegando lo que se hallaba plegado o concentrado.

Y esto consiste, en que la Matemática es hoy una ciencia constructiva, eminentemente teórica, como antes era un conglomerado de procedimientos, encaminados a las finalidades prácticas, las mediciones, los cálculos de la Aritmética práctica, las observaciones astronómicas, las probabilidades de los sucesos, etc. Y había una concentración en torno de estas finalidades que desquiciaban el mundo ideal para emplazarlo alrededor de estos centros y esta concentración, composición y descomposición, la realizan las definiciones matemáticas por las que se crean incesantemente nuevos seres,

A la tendencia individualizadora de las ramas elementales: Aritmética, con sus operaciones, teoría de la divisibilidad y de las congruencias, proporciones, progresiones y logaritmos, Geometría con sus relaciones de perpendicularidad, paralelismo, igualdad y semejanza de figuras, con sus aplicaciones a la determinación de las áreas y de los volúmenes, el Algebra con sus cálculos directo y su teoría de las ecuaciones hasta el cuarto grado, que concentra un escaso número de teoremas sobre sus aplicaciones inmediatas, en la resolución de los problemas, ha reemplazado otra tendencia teórica que concentra multitud de relaciones en torno de cada idea. Por esta razón, hoy constituyen cuerpos separados de doctrina, por ejemplo: El imaginarismo, las configuraciones, los grupos discontinuos y continuos, la representación conforme, las series trigonométricas, el problema de Pfaff, las superficies hiperelípticas e infinidad de otras tésis que pudiéramos enumerar, que dan lugar a tratados, en torno de una idea; pero que pueden concentrarse a su vez en torno de un problema o en el desarrollo de una teoría.

Hoy, la antigua tendencia se conserva, cuando lleva a las ciencias de aplicación que conducen la teoría allá donde conviene a los fines útiles de la Ingeniería, la Arquitectura, la Industria, el Comercio y las artes; pero el manantial perenne de verdades que se ordenan según su naturaleza propia, independientemente de finalidades contingentes y más o menos arbitrarias con carácter de utilidad, hoy se extiende como los cauces de los grandes ríos que distribuyen sus aguas en infinidad de derivaciones, expansionándose siempre, conservando la frescura al ambiente, transmitiendo y comunicando la fertilidad y la vida o como la substancia etérea que transmite sus expansiones y concentraciones a todo universo.

La Matemática pura hoy es este manantial del que todas las finalidades humanas pueden utilizar sus aguas, como el agricultor utiliza el agua de los ríos. Y por esta razón puede progresar y perfeccionarse indefinidamente al lado de las ciencias de aplicación, en la seguridad de que siempre sus teorías les serán útiles, pero sin preocuparse de ello; porque la utilidad de la idea pura es la que produce las más directas e íntimas satisfacciones.

LECCION CUARTA

TENDENCIA SISTEMATIZADORA

Hemos visto en la segunda lección cómo la Matemática se ha generalizado desde la geometría de Euclídes hasta la de las transversales y la geometría analítica de Descartes; y que, desde la Aritmética de Diofanto, se llegó a la Teoría de las funciones de Lagrange.

Al mismo tiempo aparecen los gérmenes de nuevas ramas: el cálculo de probabilidades de Pascal, el combinatorio de Leibniz, el cálculo de transformaciones de Vandermonde, de Waring y de Lagrange y el cálculo de variaciones de este último, que son ramas destinadas a desarrollarse en el siglo XIX y a entrelazarse íntimamente con las anteriores y otras que sucesivamente aparecen, por cierta compenetración.

El desarrollo matemático hasta Lagrange puede calificarse como puramente objetivo e individual. Se perfeccionan las notaciones, se generalizan los conceptos, se multiplican los métodos particulares. Cada cuestión hace surgir una idea y un procedimiento más o menos especial para resolverla. Se ignora lo íntimo y esencial de las cosas; y el genio suple con frecuencia a la falta de este conocimiento.

En Geometría, la tendencia sistematizadora aparece por vez primera en la *Géométrie de position* en la *Correlation des figures* de Carnot y en el *Traité de Géométrie projective* de Poncelet.

Hasta entonces sólo había existido una tendencia generalizadora que se diseñaba en la aspiración de Fermat y de Simson a descifrar y adivinar los porismas de Euclídes, sólo conocidos por los comentarios conservados de Pappus.

Carnot concibe sistemas deformables de figuras, en correspondencia con las mutaciones de signos de sus partes o elementos, lo que conduce a las tres relaciones: *directa, inversa* y *compleja;* pero es un sistema poco general, pues sólo se refiere a la especialidad del cambio de signo de las expresiones en correspondencia con el cambio de disposición de los elementos constitutivos de las figuras.

Monge es el creador de las ficciones que entrañan los entes imaginarios, con su idea de la transmutación de las figuras, su método de generalización y la distinción entre las *partes integrantes* y las partes *secundarias* o *contingentes* de las figuras que pueden ser indiferentemente reales o imaginarias, como ocurre, por ejemplo, con el eje radical de dos círculos, que resume bajo la denominación de *Método o principio de las relaciones contingentes* y le permite dar una explicación a la palabra *imaginario.*

Poncelet, deseoso de afianzar su *principio de continuidad,* aplicable a una figura, en *estado general de construcción,* o independiente de toda condición de posición, que rige a la mutación de las figuras de un sistema, introduce el concepto de la recta y del plano en el infinito y se ayuda para la sistematización completa, sin excepción alguna, por su ingeniosa concepción de las cónicas suplementarias, cuyas tangentes y cuerdas son ideales, en contraposición a las que son reales, para hacer intervenir, en las relaciones, los entes que sólo gozan de una imposibilidad relativa, haciendo intervenir simultáneamente las entidades reales y las imaginarias en los dos órdenes de propiedades métricas y descriptivas, estableciendo la unidad del sistema con la creación de los puntos circulares en el infinito que permiten asimilar los círculos y las esferas a las cónicas y superficies de segundo grado, diciendo que tienen un elemento imaginario común en el infinito. La adjunción de los elementos en el infinito y de los imaginarios extiende el sistema geométrico y disminuye el número de imposibilidades, relacionando lo existente efectivo con lo que dejó de existir por condiciones restrictivas impuestas.

El sistema geométrico de Staudt, aunque muy original en su desarrollo, está calcado en los conceptos de Poncelet, pues consiste en una representación puramente gráfica de las relaciones armónica, anarmónica, en involución y todo orden de relaciones proyectivas, con la adopción de lo que llama puntos, planos y rectas *impropios*, estableciendo la geometría proyectiva, independientemente de la métrica, sin admitir otros axiomas que los concernientes a la *posición* y al *orden* de los elementos fundamentales, punto y rectas, comenzando por establecer la propiedad de las diagonales del cuadrilátero completo, de quedar divididas armónicamente, teniendo esta división el carácter de un *invariante proyectivo*. Es una traducción gráfica de la métrica, como ésta es una traducción numérica de las propiedades de las figuras.

Y a estas creaciones de Monge y de Poncelet siguen las de Plücker con su ingeniosa definición de los focos como círculos de radio infinitamente pequeños, doblemente tangentes a la curva que se considera, o también, según este geómetra, un punto F se llama *foco* de una curva cuando las rectas FI, FJ, que pasan por los puntos circulares, son tangentes a la curva o es la intersección de la I-tangente con la J-tangente; y citaremos las relaciones por las cuales Chasles define los puntos imaginarios en su Geometría superior, las rectas isótropas de Laguerre y las numerosas proposiciones que, relacionando lo imaginario con lo real, dan generalidad a las proposiciones y unifican los sistemas.

Otra tendencia sistematizadora se realiza con ocasión de haberse descubierto las geometrías de Lobatscheswsky y de Riemann que conduce, desde luego, a denominarlas hiperbólica y elíptica, para designar con el nombre de parabólica, la ordinaria o euclídea, que se calcan en las propiedades de las tres secciones cónicas de tener dos, ninguno o un sólo punto en el infinito; y Herr Klein ha dado la representación plana de las tres geometrías en su Memoria; *Ueber die sogenante Nicht-Euklidischen Geometrie.*

Pero además de este aspecto sistematizador y representativo, debemos señalar otro también sistematizador que da a conocer Cayley, al referir las figuras de un plano a la cónica fundamental, como Poncelet refirió las cónicas a los puntos circulares del infinito; porque esto le permitió definir la distancia y el ángulo por medio de las relaciones anarmónicas de cuatro puntos o de los lados del ángulo con las tangentes trazadas desde el vértice del ángulo a la cónica fundamental, expresión que Herr Klein sustituyó por el logaritmo de dicha relación, multiplicado por una constante. Y esto lleva a la determinación métrica en el plano, relativa a una cónica fundamental imaginaria (*Geometría elíptica*) o relativa a una cónica fundamental real que nos rodea (*Geometría hiperbólica*) que dan las imágenes a estas geometrías o la *Geometría parabólica*, cuya figura fundamental *son los puntos imaginarios en el infinito*, es decir, construcciones que permiten concebir cómo se comportan dichas geometrías; y llegando Herr Klein a expresar cómo se deducen de la Geometría proyectiva las tres especies de geometría.

Y en el análisis, vemos envuelta el Algebra ordinaria en el sistema de Algebras de *n* unidades complejas, creadas por Weierstrass y Dedekind; y, dentro de los dominios combinatorio y geométrico, las diferentes especies de algebras asociativas, definidas por su tabla de multiplicación que expusieron principalmente Cayley y Clifford.

Y por último, en el dominio de las ecuaciones diferenciales, los sistemas completos y jacobianos, los paffianos, los sistemas fundamentales de Fuchs, y los grupos de las ecuaciones diferenciales expresan las leyes de representación y de sustitución o transformación de las soluciones de las ecuaciones diferenciales, a la manera de las correspondencias proyectivas de la Geometría.

LECCION QUINTA

TENDENCIA CONSTRUCTIVA

Esta es una tendencia moderna que sustituye ventajosamente a las antiguas generalizaciones.

Desde los tiempos remotos el análisis domina en la Matemática y la sustitución es el procedimiento general.

Los filósofos Pitágoras y Platon llevan por el hilo conductor de la sustitución de cuestiones equivalentes a la resolución de los problemas.

Y esto depende de que la realidad matemática puede concebirse como un mundo de ideas, a semejanza del mundo material, donde los objetos se hallan simultáneamente, ocupando cada uno un lugar en el espacio. Y son en número infinito los senderos que conducen de los unos a los otros.

De igual manera, las ideas y los objetos correspondientes o representativos se hallan eslabonados de modo diferentes, porque entre aquéllas no sólo existe el orden de la sucesión que corresponde al orden de dependencia lógica de antecedente y consiguiente, sino el de simultaneidad, hasta el punto de que el mundo real o físico es un mundo matemático con sus presiones, tensiones, acciones, reacciones y movimientos. Y tal acción o movimiento puede sustituir a tal otro.

Pues de igual modo, de la infinita posibilidad de relacionarse las ideas, tal o cual matemático vislumbra y elige tal o cual otra manera. Y he ahí los diferentes métodos o procedimientos para llegar a un mismo fin, como por ejemplo sucede con los diferentes métodos de integración de las ecuaciones diferenciales, sean de Lagrange, de Laplace, de Ampère o de Jacobi.

Y en Geometría, existen potencialmente las bisectrices de los ángulos, las perpendiculares y paralelas a las rectas, los círculos inscritos y circunscritos, las innumerables figuras de la Geometría del triángulo, con sus puntos, rectas y círculos especialmente designados por el nombre de su descubridor, como en la Tierra se fijan los nombres de los puntos por primera vez conocidos.

Existen potencialmente, no sólo las configuraciones hoy conocidas, tales como son las de Pascal, el punto g de Steiner, las líneas G de Cayley, los puntos h de Kirkman, que resumió Veronese en varios teoremas, sino infinidad de configuraciones por conocer, como en el mundo estelar, aun quedan por descubrir a los astrónomos infinidad de estrellas.

La inteligencia traza, en el campo de las ideas, los surcos donde han de brotar las teorías científicas, como el arado señala los surcos donde han de germinar las semillas las plantas de las nuevas cosechas.

Antiguamente predominaba lo sucesivo, hoy predomina la simultaneidad. Antes, el individuo, hoy el sistema. Antes, la Ciencia era un conjunto de encadenamientos de hilos sútiles, trazados por las ideas; hoy la Matemática adopta la forma de irradiaciones que, partiendo de centros distintos, acaban por compenetrarse.

Antes, los matemáticos procedían por generalizaciones sucesivas. Se encontraban ante resultados imposibles para su finalidades especiales, y salvaban estas dificultades, generalizando sus definiciones. Así hicieron entrar en la noción de número, sucesivamente los números negativos y los imaginarios y en la de cantidades, las transcendentes imaginarias, siquiera mantenidas por las relaciones de sus operaciones simbólicas, como lazo meramente lógico. Y esto consistía en que se procedía de lo concreto a lo abstracto. Y por esta razón el lenguaje algebráico luchaba con esta adaptación de la realidad material a la lógica; y sus problemas se asociaban o se disociaban de modo vario según las circunstancias. Y esta deficiencia estribaba en que los puntos fundamentales o bases eran accidentales como lo han sido siempre las sucesivas hipótesis de las ciencias experimentales, que se fundan edificando cada vez sobre las ruinas de las antiguas, otras nuevas.

Hoy, los matemáticos, proceden construyendo de nueva planta su edificio, como Descartes, al pretender fundar la Ciencia moderna prefirió destruir la villa antigua de su ejemplo, a edificar parcialmente sobre las calles tortuosas y entre los edificios ruinosos, lo que no habría respondído a un ideal perfecto y, sobre todo, a una unidad de plan ni a nada acabado y sistemático.

Si el Análisis tiene como base para su edificación los fértiles conceptos de la inteligencia que crea indefinidamente, por definiciones, conceptos sobre la base del número y de la cantidad continua o discontinua, el geómetra en el fondo de sus figuras elementales, recta y plano y luego curvas o superficies, especialmente definidas o creadas o producidas por varios modos de generación, tiene también un campo inagotable de entidades y de sistemas muy distinto del mundo del Análisis; porque se extiende en el espacio como aquel en la pura región del orden de la sucesión y de la pluralidad.

A los sistemas creados por Poncelet, Chasles, Staudt, basados en la adjunción de conceptos tales como los de *imaginario* e *infinito,* suceden otros sistemas constructivos mediante combinación de figuras.

La fecundidad del talento creador de Steiner, en su *Systematische Entwitckelung* dió origen a numerosos sistemas, tomando como base la noción de las *figuras fundamentales*, considerándolas como elementos de operaciones nuevas y estableciendo *métodos proyectivos de generación* de las figuras.

Y casi simultáneamente con Steiner, Moebius en su obra *Der barycentrische Calcul* y después Chasles, se construyó la Geometría sobre la base de las *figuras fundamentales de* diversas especies o rangos, desde la *forma rectilínea* o *división puntual*, el *sistema plano* y la *irradiación* (*gerbe*); y de sus mutuas correspondencias, surgió un mundo de relaciones, tales como la *colineación* de Moebius, la correspondencia homográfica de Chasles, así como Poncelet había creado las teorías de las figuras homológicas y de las polares recíprocas, al realizar su labor sistemática y como Staudt más tarde, resolviendo el problema de la *proyectividad* con sus correspondencias proyectivas.

Tenemos pues, como medios generadores, las *transformaciones homográficas*, las *proyectividades cíclicas* que producen grupos ciclo-proyectivos de elementos y análogamente a como sucede en el Análisis, homografías y correlaciones desvanecidas (*évainouissantes*), *correlaciones singulares* y diversas especies de *degeneraciones*. Y citaremos, para terminar este orden de consideraciones sobre la Geometría, el cálculo de transformaciones homográficas que se enlaza con el concepto de grupo,los haces y las redes de correspondencias homográficas que llevan a considerar el conjunto de los colineaciones como una multiplicidad caracterizada por su orden y las multiplicidades formadas por colineaciones o correlaciones particulares, etc.

La primera idea que, en la región del Análisis, encontramos conducente a este fin es la de la *adjunción* de Galois.

Este insigne y malogrado matemático concibe la original idea de hacer reducibles ecuaciones que son irreducibles para coeficientes racionales, amplificando el campo de estos coeficientes por la adjunción de las raíces de ciertas ecuaciones. Así pues, ecuaciones que son irreducibles en un campo dado, son reducibles en otro campo más extenso. Y Kronecker desarrolla ampliamente esta idea en su memoria sobre lo que llama dominios de integridad y de racionalidad.

Pero como idea fecunda, la de Galois, se extiende en nuevas aplicaciones, pues el mismo Galois, en sus pocos pero substanciosos escritos, ya había señalado la teoría de las funciones y ecuaciones modulares, es decir, no simples ecuaciones de identidad o funciones existentes de un modo absoluto, determinadas por uno o vario valores, con el simple carácter de ser uniformes o multiformes, sino ecuaciones y funciones *con relación a un módulo*. Y esto conduce al fértil campo de las ecuaciones y de las funciones modulares.

Y por otra parte, Kummer y Dedekind, al continuar las investigaciones de Gauss, sobre la divisibilidad, extendida por éste al caso de los números imaginarios o complejos, crean el nuevo instrumento matemático de los números ideales (de Kummer) o de los ideales (de Dedekind), como Galois condujo a la noción de cuerpo (o campo de Galois) cuya teoría dió Dedekind en su obra *Sur la théorie des nombres entiers algébriques* y en el *supplement* XI de las *Vorlesungen über Zahlende theorie* de Dirichlet.

Y todas estas construcciones parten de los elementos irreducibles, ecuaciones, curvas, grupos primitivos, exponente a que pertenece un número dado, etc.

Los problemas formulados desde la antigüedad, se resuelven generalmente en sentido negativo, por efecto de hallarse mal formulados.

Abel demuestra la imposibilidad de la resolución general de las ecuaciones algebráicas, Lindermann la de la trisección del arco y de la cuadratura del círculo. Cauchy, Riemann y Weierstras crean nuevos métodos para atacar el problema de la integración, especialmente el de la integración de las ecuaciones diferenciales.

Pero cada problema tiene el privilegio de exigir la creación de una o varias teorías para resolverlo, edificaciones en las que queda contenido como el cristal en el cuerpo disolvente que lo forma. Y de esto vamos a ocuparnos.

Fermat dió un paso gigantesco en la teoría de las ecuaciones indeterminadas a las que dotó de un principio fundamental que se designa con su nombre que generalizó Euler; y Gauss hizo una primera síntesis, en la Teoría de los números, bajo el concepto de la congruencia, edificando la teoría de las formas cuadráticas, de los restos y de las equivalencia de las formas, sistema que se extiende y generaliza con las funciones y ecuaciones modulares de Galois, con los cuerpos algebráicos finito los números ideales de Kummer y los ideales de Dedekind, nuevas teorías creadas en torno de la generalización que intentó Gauss de las leyes de divisibilidad a los números complejos.

El problema de la resolución de las ecuaciones algebráicas, aunque resuelto en sentido negativo por Abel, deja un extenso campo positivo en el que se desenvuelven las ecuaciones abelianas, las de la división del círculo, las metacíclicas, etc., entrando en la región de las ecuaciones modulares elípticas, bajo los conceptos capitales señalados por Herr Klein en su notable obra sobre la ecuación de grado 15.

El cálculo de las probabilidades hoy comienza a internarse en la vasta región de la estadística y de las aplicaciones a las ciencias de observación.

El problema combinatorio de la característica universal de Leibniz hoy se dirige en el orden subjetivo del Algebra de la lógica y de las clases.

El cálculo combinatorio de Vandermonde ha sido la piedra fundamental de la teoría de los grupos discontinuos, edificación aneja al problema de la resolución de las ecuaciones algebráicas.

La aspiración a demostrar el postulado de Euclides ocasionó los descubrimientos de las geometrías de Lobatschewsky y de Riemann.

La integración de las ecuaciones diferenciales condujo a Lie a la creación de su teoría de los grupos continuos y a Cauchy a edificar de nueva planta la teoría de las ecuaciones diferenciales, sobre la base del teorema de la *existencia* de las soluciones de éstas, elevando con tal fin el nuevo edificio de la teoría de las funciones de variables complejas que permiten abordar el problema de la determinación *cualitativa*, según la expresión de Poincaré, ya que, por otra parte, se atacaba el problema de la determinación cuantitativa, fundando como lo hicieron Weierstrass y Meray, sobre la base de los teoremas de Abel y los propósitos de Lagrange, la teoría de las funciones analíticas en la teoría de las series enteras y al Análisis todo, según la nueva tendencia *aritmetizadora*, seguida por Hermite, Kronecker y Poincaré.

LECCION SEXTA

TENDENCIA INTUITIVA

La tendencia intuitiva tiene su origen en Cauchy que, aprovechando la interpretación geométrica de las cantidades negativas, debida a Argand, la aplicó a su *Teoría de las cantidades geométricas*, llegando a la teoría de las funciones de variables complejas, cuyo fundamento se halla en la definición de las funciones monógenas y luego en las distinciones entre las funciones monótropas y polítropas, hasta la definición de las sinécticas que son uniformes, monógenas, finitas y continuas, que condujeron a la definición de las funciones algebráicas con sus *puntos críticos algebráicos*, a la definición de las funciones holomorfas y meromorfas y a la ley de permutación de las raices alrededor de los puntos críticos que desarrolló Puiseux en su célebre memoria *Recherches sur les fonctions algébriques* (1850) obteniendo la ley de la permutación de las raíces alrededor de los puntos críticos, con la manera de obtener los sistemas circulares y el sistema de lazos fundamentales definidos por Clebsch y Gordan en la teoría de las funciones abelianas; y estas representaciones se continúan en la teoría de los resíduos de Cauchy.

Tales representaciones adquieren un valiosísimo e inestimable complemento con la *superficie de Riemann* y el *Analysis situs,* con los nuevos conceptos de conexiones de los espacios, todo lo que permite a este insigne matemático desarrollar su teoría de las funciones abelianas.

Y a estas representaciones hemos de añadir la de la doble periodicidad de las funciones, mediante los paralelógramos de los períodos, hecha por Liouville. Y a todo esto añadiremos la fecunda idea de Cauchy que permite determinar una integral a lo largo de un contorno.

Y llegamos a la representación de las variedades de tres dimensiones en el espacio de cuatro dimensiones, como lo hace Poincaré en una de sus memorias sobre el *Analysis situs* (*Journ. de l'Ecole Polytechnique,* 1895), reemplazando el lenguaje analítico por el lenguaje geométrico, por considerarlo más conciso, pues permite crear asociaciones fecundas y generalizaciones útiles. Y realiza esta representación, considerando en el espacio ordinario cierto número de poliedros P_i, correspondientes a ciertas variedades Q_i de tres dimensiones en el espacio de cuatro, respectivamente, homeomorfas con los P_i, es decir, definidas por sistemas de igualdades y de desigualdades en dominios correspondientes y cuyos puntos se corresponden biunívocamente por lo que son equivalentes, dando el conocimiento de los poliedros P_i y el del modo de conjugación de sus caras en el espacio ordinario, una imagen de la variedad V; lo que conduce a estudiar, en cada caso, los ciclos de vértices y de aristas en estas representaciones, al grupo fundamental de una variedad y las equivalencias fundamentales y a los órdenes de conexión de una variedad de n dimensiones, definidos por los números de Riemann y de Betti que permiten definir las fronteras, como puede verse en la obra de M. Picard, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendentes,* t. I, cap. II.

Otra tendencia a la intuición se manifiesta en obras tales como las *Vorlesungen über Geometrie* de Clebsch que conduce por las relaciones invariantes y covariantes de las formas homogéneas a sistemas proyectivos en álgebra y en geometría. Y, basándose en el estudio de las singularidades de las curvas, cuya ley se condensa en las fórmulas de Plücker, llega hasta la Geometría sobre una curva algebráica a la de los conexos, a la integración geométrica y a la teoría de las integrales abelianas.

Por otra parte, tenemos las representaciones dadas por las curvas y superficies integrales que llevan a la consideración de las características en las teorías de Monge y de Cauchy a la representación de la integral singular de Lagrange, como envolvente de las demás integrales, pasando por cada punto de esta superficie una infinidad de características que le son tangentes, y especialmente, citaremos la relación obtenida por M. Darboux de ser el resultado $R(x, y, z,) = o$ de eliminar p y q entre las ecuaciones $F = o$, $P = o$, $Q = o$ (derivadas estas dos de F respecto a p y q) el *lugar de los puntos de retroceso de las curvas características.*

Y respecto a las transformaciones de contacto de Lie, podemos recordar que *el conocimiento de una transformación de contacto permite formar una infinidad de sistemas en involución, del cual puede escribirse inmediatamente una integral completa.*

LECCION SEPTIMA

TENDENCIA LÓGICA

Aunque parezca que en esta lección debe tener lugar preferente el *Algebra de la lógica,* creada por Boole y desarrollada hasta Peano y Schoeder, no vamos a seguir por este derrotero, puesto que al decir Boole que la validez del análisis algebráico depende, no de la interpretación de los símbolos empleados, sino de las leyes de su combinación, pudiendo una misma fórmula, según su interpretación, expresar soluciones de problemas muy distintos, no debemos preocuparnos de dichas interpretaciones, pues consideramos esta rama con carácter preferentemente combinatorio, y no hemos de tratar ahora de ella.

Lo que sí es capital para nuestro objeto, es la tendencia puramente abstracta que muchos matemáticos contraponen a la tendencia intuitiva o representativa de otros. En este sentido procedían los matemáticos antes que Argand diera la representación geométrica de las cantidades imaginarias, empleando estos símbolos como meros instrumentos del cálculo que conducían fácil y rápidamente a los resultados apetecidos.

En este sentido proceden otros, entre los que ocupa lugar preeminente Herr Hilbert que expuso los principios de una Aritmética puramente lógica (*Jahresbericht*, 1900, págs. 180-84), lo que, en el orden geométrico, le ha llevado a exponer la serie de postulados y axiomas en que se funda cada especie de geometría (*Grundlagen der Geometrie*), estableciendo cinco grupos de axiomas y las geometrías correspondientes.

Tratando esta cuestión, M. Couturat en su obra *De l'infini mathématique*, indica la labor de los matemáticos encaminada a desterrar de las demostraciones todo argumento imaginativo, toda llamada a la intuición, y a purificar el análisis de las consideraciones geométricas, de manera que todos los principios sintéticos se hallasen formulados desde el comienzo de la ciencia, reunidos y resumidos en sus hipótesis primordiales, para presentar las nociones y proposiciones constitutivas de la ciencia, bajo la forma más elemental y la más accesible, en un encadenamiento riguroso y sistemático.

Según esta tendencia, proceden Weierstrass y Meray que aspiran a reducir el Análisis a la teoría de las series enteras, en el sentido que ya señaló Lagrange, que trató de reducirlo al *Análisis algebráico* de las cantidades finitas, desterrando la idea del infinito; y a este fin, Tannery, en *Introduction a la Théorie des fonctions d'une variable*, dice: se puede constituir enteramente el Análisis con la noción del número entero y las relativas a la adición de los números enteros, reduciéndose la noción del infinito a esto: después de cada número entero existe otro. Y en vez de referir las fracciones a partes de la unidad, considerar una fracción como el conjunto de dos números enteros, colocados en un orden determinado y aplicarles las relaciones de igualdad, de desigualdad y de las operaciones aritméticas. Así, por ejemplo, dos fracciones (a, b) y (a', b') son iguales cuando verifican la relación siguiente. $ab' = ba'$. Y si se multiplican los dos términos de la fracción (a, b) por el entero n, se tiene $(a, b) = (an, bn)$ porque queda satisfecha la condición $abn = ban$ de la igualdad.-

También Meray en sus *Leçons nouvélles sur l'Analyse infinitesimal* (*première partie*) se expresa de análoga manera.

Considera al *Análisis matemático como la ciencia general de los números*, es decir, de las relaciones *numéricas* concebibles entre los objetos a que puede dirigirse nuestra atención, prescindiendo de su naturaleza particular.

La Aritmética trata de las propiedades especiales de los números enteros y fraccionarios, el *Análisis* estudia las relaciones posibles entre números de orígenes determinados, abstracción hecha de sus valores, siendo el Algebra su parte principal que es la teoría de las funciones *racionales* y de las *irracionales algebráicas*. Y el *Análisis infinitesimal* se reduce a la teoría de las *series enteras*.

Y, aunque los números enteros son los solos que intervienen en las especulaciones teóricas, las imposibilidades, en ciertos casos, exijen para conservar la uniformidad, sustituir a los números y a la operaciones ciertas ficciones que evitan así las restricciones en los enunciados. La introducción en cada caso, de estos entes ficticios, permite conservar las correlaciones a través de los encadenamientos de relaciones y de operaciones, y así se salvan las divisiones imposibles; y así se asimilan los números fraccionarios a los enteros. Y, considerando las cantidades *calificadas* y *neutras* que sustituye a los sumandos o a los factores, establece Meray la teoría de las cantidades negativas, sin recurrir como antiguamente, a consideraciones de orden concreto. Y análogamente, conserva las correlaciones, en el caso de las cantidades imaginarias, con auxilio del módulo y el empleo de las cantidades conjugadas.

El método lógico estriba en definiciones impuestas por *decreto*, como dice Poincaré; y su única preocupación consiste en salvar las contradicciones. Por su virtud, la Matemática pura es un organismo abstracto en el que tienen cabida las entidades más chocantes, sean hiperespacios, cantidades de n unidades complejas, sistemas de álgebras y de geometrías, como anteriormente lo fueron las claves de Cauchy. Y la lógica se encarga de construir un sistema irreprochable que permanece como molde abstracto, en el que más tarde puedan encajar algunas realidades, como por ejemplo ha sucedido con los cálculos vectoriales y las diversas álgebras.

Meray construye un sistema lógico del Análisis, fundado en las reglas mencionadas del cálculo, pasando a establecer la teoría de las series enteras, basada en la definición de las variantes, de sus índices que siguen el crecimiento o decrecimiento, de la convergencia, su adición, sustracción y multiplicación, la equivalencia de dos variantes, la continuidad, el módulo, comenzando por los polinomios enteros, primer anillo de las funciones analíticas que son desarrollables en series enteras, definiendo lo que llama función *olótropa* en x_0 y_0 ... con sus *olómetros* S_x S_y ... y los radios de convergencia, la fase *singular*, las derivadas y diferenciales, el cálculo de los valores de las funciones para cualquier sistema de variantes en las mismas áreas, el cálculo por caminada (*cheminement*), las *pseudo-funciones* con sus *artículos* y *esquemas*, la generación de las funciones por desarrollos sucesivos, con el ajuste (*raccordement*) indefinido de las series de Taylor, construídas a partir de los sistemas de valores iniciales.

Esta tendencia lógico-constructiva o francamente *sintética*, opuesta a la tendencia *analítico-individual* del clasicismo se acentúa más en el *cálculo inverso de las derivadas*, que comienza con la integración de las diferenciales totales, siendo los conceptos más interesantes en esta teoría los de variables *principales* y *paramétricas* y de *composición* de las funciones (*) y los modos de dependencia entre las componentes y las compuestas, y las relaciones de recurrencia de los coeficientes de las series representativas y, sobre todo, la formación de los sistemas *inmediatos*, según los diversos ejemplos posibles que pueden formarse con las funciones integrales de éstos y la obtención de las relaciones diferenciales *primitivas*, cuyo primer miembro es de orden diferencial superior a todos los del segundo, cuyos diversos grupos se forman eliminando o sustituyendo, en cada caso, a las derivadas de las funciones sus expresiones sacadas de los grupos anteriores hasta llegar a las relaciones *últimas*.

Y puesto que la existencia de las integrales puede resultar, sea de una elección conveniente de ciertos valores de las cantidades que entran en las ecuaciones, sea de una *correlación mutua*, independiente de toda precaución en la elección de los valores iniciales en cuestión, este último caso conduce a la existencia de los *sistemas pasivos*, cuya existencia se refiere a la existencia de las integrales de ecuaciones de diferenciales totales.

Estas indicaciones bastan para dar una idea del método lógico-sintético seguido por Meray en su original tratado de Análisis infinitesimal, a lo que podríamos añadir otros puntos de vista de su colaborador M. Riquier en la teoría de las ecuaciones de derivadas parciales tales, como por ejemplo, los *sistemas ortónomos*, los *rangos de regularidad*, los *sistemas prolongados*, etc.

La tendencia lógica se expresa muy señaladamente en la obra de M. Drach, *Essai sur une Théorie générale de l'intégration et sur la classification des Transcendentes* y en su *Algèbre supérieure*.

Partiendo de los números enteros positivos y negativos, comienza por definir los elementos sobre que razonamos a saber, los números y las funciones algebráicas, las diferenciales y las derivadas de estas funciones, o sea las funciones de una o diver-

(*) En este orden de ideas es oportuno citar los conceptos de *raíces* y *espacios de raíces* de una operación distributiva. *(Le operazioni distributive e loro applicazioni all' Analisi* di Salvatore Pincherle).

sas variables que verifican relaciones diferenciales algebráicas *por sus enlaces con los elementos de un primer sistema,* formulando, desde luego, las condiciones a que satisface, o sea su modo de composición, llegando a la consideración del grupo que forman dichos elementos por su modo de composición, elevándose sucesivamente, desde los números racionales,a los polinomios, fracciones racionales a los números y funciones algebráicas, cuidándose de que todas las consecuencias de dichas relaciones no sean jamás contradictorias; y llegando a los sistemas irreducibles, lo cual se continúa para las funciones algebráicas y para las funciones y los sistemas derivables e integrables, empleando el procedimiento de la adjunción sucesiva de soluciones distintas del sistema irreducible, para considerar la medida de lo arbitrario o de la transcendencia de los elementos de un sistema fundamental, llegando a los invariantes diferenciales del grupo de transformaciones que cambian un sistema de argumentos en otro de las funciones independientes y a los tipos de subgrupos que lleva a la clasificación de los tipos de transcendentes que verifican ciertas ecuaciones diferenciales.

Por último, indicaremos cómo el desarrollo lógico predomina en la Geometría de la posición de Staudt, en la del Sr. Enriques, en la exposición de la del Sr. Killing, en la Veronese y en las geometrías de 4 dimensiones de los Sres. Brouncker y Jouffret, de las que he dado algunas lecciones en este curso.

Ordenando estos conceptos, diremos que Staudt aprovechó una idea expuesta por Chr. Paulus (*Encyclopaédie des Sciences mathémaiques* (t. III vol. 2. fasc 1, pág. 102) que para interpretar las imaginarias emplea una involución elíptica y el par de puntos homólogos de distancia mínima de la misma, par al que corresponde, en la involución hiperbólica, el sistema de los dos puntos dobles. Y Staudt añade en su teoría, la noción del *sentido* que le permite establecer una distinción entre los dos puntos imaginarios conjugados, constituídos por los dos puntos dobles de la involución, de manera que un *punto imaginario* se halla definido por una involución elíptica sobre una recta real y un sentido recorrido sobre esta recta.

Pero lo esencial, en el sistema de Staudt, es aplicar a los elementos imaginarios los axiomas proyectivos fundamentales, especialmente los que conciernen a las alineaciones de puntos y a las intersecciones de rectas, partiendo de la consideración de cuatro elementos imaginarios (*Wurf*) pertenecientes a una misma serie lineal, habiendo sufrido algunas modificaciones el sistema de Staudt por varios matemáticos como puede verse en la *Encyclopaedie der Mathematische Wissenschaft.*

Señalados los caracteres fundamentales del método lógico de Staudt que sustituye al auxilio de las figuras el encadenamiento riguroso de sus proposiciones, hemos de señalar otro desenvolvimiento también rigurosamente lógico de la Geometría sin objeto real o existente, cual es la Geometría de más de tres dimensiones.

En diversos tratados y publicaciones debidos a los Sres. Ovidio, Veronese, Killing, Brouncker, Jouffret, etc., hallamos la exposición de sistemas sometidos a un plan de definiciones, axiomas y postulados de carácter combinatorio.

Se definen los r-puntos, distinguiéndose el p-punto o recta, el (n—1) punto o plano, etc.

En el tratado de Herr Killing se expresa la genealogía de las entidades geométricas, expresándose que por cada punto pasan figuras de (n—1) dimensiones con las propiedades siguientes:

Por cada punto de los planos de $(n-1)$ dimensiones pasan figuras de $(n-2)$ dimensiones o planos $(n-2)$ veces extensos, mediante cuyo reposo aun es posible el movimiento en el espacio.

Además, en cada plano de $(n-2)$ dimensiones existen figuras de $n-3$ dimensiones, por cuyo reposo los planos de $(n-1)$ pueden moverse en sí, describiendo cada punto una línea cerrada.

Y tenemos proposiciones tales como las siguientes:

a) Si una recta tiene dos puntos comunes con un plano, se halla toda en éste.

b) Si un plano de n dimensiones tiene con otro de m dimensiones $(m \geqslant n)$ un plano de $(n-1)$ dimensiones y, además, un punto común, se halla totalmente en éste.

c) Por un plano de $n-1$ dimensiones y un punto exterior, puede pasar un plano de $n+1$ dimensiones.

Por otra parte: si un plano de n dimensiones y otro de dos se hallan en un tercero de $n+1$ dimensiones, y tienen un punto común, se cortan en una recta y: Si una recta es perpendicular en un mismo punto a k rectas, por las que no pasa ningún plano de $k-1$ dimensiones, es perpendicular a todas las rectas trazadas por su pie en el plano P_k, determinado por la k rectas. Y: Si k rectas $r_1, \ldots r_k$ son perpendiculares en el mismo punto p a las l rectas $h_1, \ldots h_l$, determinando las primeras un plano de k dimensiones y las segundas otro de l, entonces cada recta r del primero, trazada por p es perpendicular a cada una de las trazadas por este punto en el segundo plano.

E indicaremos tan sólo que la exposición dada por el Dr. Max

Bruncker depende de cuatro axiomas: 1.º Un espacio (de tres dimensiones) corta a una variedad de cuatro dimensiones en dos partes separadas.

2.º Por cuatro puntos que no se hallan en un mismo plano, pertenecientes a un P_4 sólo puede pasar un espacio (determinado por aquéllos).

3.º Un plano que tiene tres puntos, no situados en línea recta, comunes con un espacio, se halla totalmente contenido en éste.

4.º Una recta que sólo tiene un punto común con un espacio, queda separada por éste en dos partes.

Y con estos fundamentos se demuestra que;

Dos espacios tienen siempre un plano común. Un espacio y un plano tienen una recta común, así como *un espacio y una recta, no contenida totalmente en éste, tienen un punto común.*

Y siguiendo estos desarrollos se demuestra sucesivamente que:

Dos planos de dos espacios distintos tienen siempre un punto común, llegándose a la noción de *dos planos que se cruzan*, de manera que, *por dos rectas que se cruzan en dos espacios distintos, puede pasar un sólo erpacio*; *y*, en cuanto a la perpendicularidad: *una recta que es perpendicular a tres rectas de un espacio que se cortan en un punto* (y no pertenecen a la misma orientación) *es perpendicular a todas las rectas trazadas por este punto del espacio. Dos espacios que son perpendiculares a una recta, son paralelos*, etc. Y esto conduce a la construcción de los polítopos o poliedros regulares del espacio de cuatro dimensiones.

LECCION OCTAVA

TENDENCIA SIMBÓLICA Y ESQUEMÁTICA

El símbolo es el instrumento propio de la Matemática, en el dominio algorítmico y también lo es en Geometría, cuando el objeto carece de existencia, como sucede en el dominio imaginario o en el de los hiperespacios.

La Matemática es un lenguaje abreviado. Y la inteligencia razona directamente sobre los símbolos representativos de las cantidades, fiando la validez y precisión de los resultados al rigor lógico desplegado en la práctica de las operaciones. Y este lenguaje tiene una variedad considerable, susceptible siempre de nuevas formas.

Primero se expresaron las relaciones de los números por las ecuacionse indeterminadas o de congruencia y las cantidades por polinomios y sucesivamente las cantidades transcendentes por expresiones exponenciales o logarítmicas y las funciones trigonométricas y después las transcendentes elípticas e hiperelípticas, con nuevos símbolos, tales como los de Legendre o los de Jacobi y Gudermann, etc.

Las fracciones continuas, las series, las integrales definidas, los productos infinitos, etc., han representado cantidades; y el razonamiento matemático ha permitido expresar las circunstancias en que es válida o según las cuales es válida esta representación, estudiando las singularidades que nos hacen llegar a los casos de indeterminación, discontinuidad y el infinito.

Y estas singularidades han conducido a esquemas que representan tales estados de las cantidades, por medio de los puntos de ramificación, lazos fundamentales, de cortaduras y espacios lagunares que expresan la no existencia de las funciones.

Pero sobre este modo directo y genuino de representar las cantidades en sus propiedades y en sus transformaciones, se han intentado a veces otros procedimientos simbólicos, tales son los de Boole, Spotiswoode, Herschel, Russell, Morgan, Carmichael. Y entre fines del siglo XVIII y principios del XIX, la tendencia simbólica ha predominado, como se ve en las fórmulas de Laplace y especialmente con el algoritmo de las factoriales de Kramp que desarrollaron Ohm y Oettinger hasta que Weierstrass perfeccionó este algoritmo. (*Ueber die Theorie der Analytischen Facultaten*). Y citaremos el formulario matemático dirigido por el Sr. Peano y otros trabajos como el de Mr. Withehead, que llevan, no sólo como éste al esquematismo implicado por las geometrías no Euclídeas, sino a perfeccionar el lenguaje del Algebra de la Lógica para constituir un lenguaje abreviado de todas las relaciones matemáticas, en sustitución del ordinario.

Por otra parte, Grassmann inició un cálculo general, fundado sobre objetos que después trató Cauchy bajo el nombre de *claves algebráicas* con las leyes fundamentales $i_k\, i_l = i_l\, i_k, i_k\, i_k = 0$ que aplicó a su *Ausdehnungslehre* como Hámilton aplicó su cálculo, fundado en las leyes $i^2 = j^2 = k^2 = 1$, $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$ etc., que aplicó a su teoría de los cuaternios.

Otro esquematismo hallamos en las geometrías de más de tres dimensiones, en las que falta la representación intuitiva, pero en la que prevalece el rigor de las deducciones lógicas, si como vemos en la geometría de Killing, de Veronese de Jouffret y en los trabajos de Schlegel, Stringham y de Brouncker, se fundan dichos sistemas en definiciones y postulados especiales, de modo que se salve el principio de contradicción, de igual modo que en las álgebras abstractas.

Y estos esquematismos, en el Algebra y en la Geometría, se concretan frecuentemente, en las aplicaciones, a la realidad, pues como dice Boole, al exponer su teoría el *Algebra de la Lógica,* la validez de este lenguaje sólo depende de las leyes combinatorias y de ningún modo de sus múltiples interpretaciones.

En este sistema tenemos signos numéricos o literales para expresar las cosas, 1 (todo, 0 (nada), x, y, z,... Signos de operaciones $+$, $-$, $\times$, $=$ y el — para la negación, para representar las operaciones del espíritu. El signo $\times$ expresa la conjunción copulativa, el $+$ la disyuntiva el $=$ la identidad.

Las operaciones están sometidas a las propiedades combinatorias que rigen al cálculo general, asociativa, conmutativa, distributiva, sin que haya coincidencia entre el álgebra, lógica y el álgebra numérica. Siendo necesario para sustituir el cálculo lógico *el desarrollar las funciones* por medio de dichos símbolos, para después realizar la interpretación de las ecuaciones lógicas formadas, efectuando la eliminación de ciertos términos.

Sólo indicaremos que: La *suma* de dos conceptos a y b es el concepto mínimo que contiene a a y b y el *producto* de dos conceptos es el concepto máximo contenido en a y b. La negación de un concepto se expresa por Jevons mediante el subíndice 1. Así, la fórmula $aa_1 = 0$ expresa el *principio de contradicción* $a + a_1 = 1$ expresa la totalidad de los seres, y la fórmula $(a_1)_1 = a$ expresa la neutralización de dos negaciones.

De manera que tenemos.

$(ab)_1 = a_1 + b_1$	$(a + b)_1 = a_1\, b_1$
La negación de un producto es la suma de las negaciones de los factores.	*La negación de una suma es el producto de las negaciones de los sumandos.*
Una suma de negaciones es la negación del producto.	*Un producto de negaciones es la negación de la suma.*

Esto ha conducido al formulario matemático cuyos trabajos se han efectuado en Italia bajo la dirección del Sr. Peano. Y hemos de citar la inmensa labor del matemático alemán Schroeder y la extensa obra de Mr. Rusell, *Principia mathematica*, cuyo carácter es eminentemente esquemático.

LECCION NOVENA

TENDENCIA PRÁCTICA

La tendencia práctica consiste en calcular directamente las funciones, sean explícitas, sean integrales de ecuaciones diferenciales.

La integración de las funciones a lo largo de un contorno y los teoremas de Abel que facilitan el empleo de las series uniformemente convergentes, son los dos principios que rigen la teoría actual de las funciones.

Los teoremas de Cauchy y de Puiseux que establecen las relaciones algebráicas de las funciones, definiendo sus puntos críticos, los ciclos de las raíces y los sistemas de lazos fundamentales, constituyen el medio determinativo o enlace definido que realiza y concreta cada valor de los que dan el encadenamiento sucesivo de valores de la función, teniendo en la algoritmia la *relación algebráica* análogo alcance que el *lugar geométrico* en la Geometría. Y las huellas que en el plano de Cauchy dejan las funciones con sus especies de puntos singulares, de cortaduras o espacios lagunares, como han estudiado entre otros, Poincaré y Painlevé, dan el estudio topográfico, según la expresión del primero o su *estudio cualitativo*.

Los conjuntos de Cantor, que establecen el infinito actual como base de valores de las funciones y, por otra parte, los dominios que fijan la región en que una función tiene limitados sus valores o goza de cierta propiedad, como por ejemplo, el ser holomorfa o sinéctica, constituyen el fondo o campo donde está determinada por tales o cuales propiedades.

Con estos precedentes, vemos cómo el cálculo de los resíduos, conduce a la integral de Cauchy y ésta al desarrollo en serie en el plano de Cauchy y al teorema de Mittag-Leffler que permite construir funciones con singularidades dadas y a discontinuidades que pueden quitarse o desaparecer y a definir previamente funciones con tales o cuales propiedades, en cuanto a sus límites. Así, respecto a la discontinuidad, tenemos las discontinuidades que pueden suprimirse, tenemos funciones continuas a un lado del punto *a* y discontinuas al otro lado; y cuando la discontinuidad es tal, que los valores de x al mismo lado de a tienen un límite determinado, tendremos una discontinuidad de *primera especie*, siendo de *segunda* especie cuando no existe tal límite. Y podrá suceder que existan discontinuidades ordinarias en ambas partes del punto *a* o que sea continua a un lado de *a* y al otro tenga una discontinuidad ordinaria, o que, siendo discontinua a ambos lados de *a*, tenga a ambos lados una discontinuidad ordinaria o una discontinuidad de segunda especie o tenga a un lado una discontinuidad ordinaria y al otro una discontinuidad de segunda especie, etc., lo que conduce a la noción de *salto* de la función.

Y por otra parte, respecto al grupo de puntos, representativos de los valores de la función, que conduce a la definición del punto límite y a los grupos derivados de los diferentes órdenes, tenemos la noción de límite superior o inferior de los valores de una función y a la existencia o no existencia del valor máximo o mínimo de una función y a la existencia de un segmento tan pequeño como se quiera, en el que la función tiene su límite superior, según el teorema de Weierstrass, observando además que en un segmento finito de una recta podrá existir un punto de ésta tal, que a su derecha no existan puntos del grupo y que además o pertenezca al grupo, y en un intervalo tan pequeño como quiera, a su izquierda, existan siempre puntos del grupo, o bien perteneciendo al grupo, no se verifique la segunda propiedad o que, en fin, *no perteneciendo al grupo* se verifique la segunda propiedad, lo que conduce al máximo (1.ª y 2.ª hipótesis o a un límite superior (3.ª hipótesis). En suma, como en la teoría de las funciones de variables complejas, se trata siempre de la correspondencia entre dos puntos de un plano o de planos distintos, y se ve este plano señalado, en cada caso de una función, como se ha indicado, por cierto puntos o líneas singulares y aun espacios lagunares; en la teoría de las funciones de variables reales, vemos también el modo de variar una función con sus oscilaciones en intervalos dados de puntos y sus propidades, cuando disminuyen estos intervalos, como por ejemplo, la que da la integral de Riemann o de Lebesgue y, basándonos en la consideración de las series de series, llegamos a definir las funciones derivables e integrables y las funciones continuas sin derivadas, todo ello valiéndonos de la representación puntual y especialmente de los puntos límites, fronteras, etc.

Pero los teoremas de Abel sólo se refieren a la simple determinación de la función que representa, independientemente del intervalo, con tal que sea suficientemente pequeño; y luego los criterios de convergencia de Bertrand dan un instrumento que permite conocer el modo de crecimiento y graduar su mayor o menor rapidez y fijar los grados de infinitud de las cantidades para establecer sus íntimas correspondencias y distinguir la regularidad y la irregularidad en el crecimiento, todo lo cual constituye un estudio directo, inmediato en el que la representación analítica por medio de las series es un instrumento secundario ante la intuición clara que comunican al razonamiento los sistemas de desigualdades que rigen la convergencia mayor o menor de los valores o su divergencia en el dominio cuantitativo.

Y en las ecuaciones diferenciales tenemos el principio de la existencia, necesario en un estado implícito de una función que debe hacerse explícita, después del modo de determinación, dependiente de la arbitrariedad de la variable independiente para la arbitrariedad de la función o correspondencia de los puntos determinativos, en cuyos entornos las funciones o la variable, son uniformes u holomorfas, debiéndose distinguir con Fuchs los puntos críticos móviles e inmóviles, siendo en esta teoría lo culminante, en los hechos, el estudio de las singularidades que es la parte *cualitativa* del problema, que lleva a Poincaré a lo que llama representación topográfica y además a la determinación de los coeficientes de las series representativas de las integrales; y, en cuanto al modo o a la forma, hay que recurrir a la teoría de los grupos para llegar a la integral, a los sistemas de integrales fundamentales; y como medios, tenemos los sistemas completos y jacobianos, los pfaffianos, etc. En cuanto a las relaciones, tenemos los sistemas en involución. Y partiendo del concepto de irreductibilidad, se llega a extender las teorías de Lagrange y de Galois a las ecuaciones diferenciales, formulando teoremas análogos, correspondientes a la teoría de los grupos discontinuos.

Pero las relaciones culminantes son las que expresan los grupos continuos en los modos de cambiar las variables y los parámetros, según resulta de los trabajos de Lie, de Picard, etc., teniendo como base la existencia de las sustituciones infinitesimales, instrumento esencial en la teoría de los grupos continuos, siendo el enlace algebráico, el hilo conductor de todas las relaciones, según la idea de Fuchs.

LECCION DECIMA

TENDENCIA CRITICA

Durante la primera fase, la Matemática en la región de sus principios estaba supeditada a la Metafísica por la acción dominante de los grandes filósofos. Descartes, Leibniz, Malebranche, Espinosa, Kant, Balmes, hasta Comte y Wronski someten esta ciencia a sus puntos de vista exclusivos, en la región de los conceptos fundamentales, mientras que en la región de los hechos progresaba, mediante métodos particulares generadores, de teorías auxiliares para la resolución de problemas, con finalidades concretas y prácticas.

Pero en la época moderna se han deslindado los campos; porque la Matemática, conservando las reglas de la lógica que rige sus creaciones y sus procedimientos, ha adquirido un carácter *a posteriori* opuesto a los *apriorismos* de la Filosofía que se desenvuelve exteriormente al dominio matemático. Porque éste se funda en seres creados por definición que originan un mundo de relaciones abstractas, no contradictorias que, susceptible de tener su correspondencia efectiva en entidades del mundo real, es un molde indefinido que puede definirse o adaptarse a algo existente en condiciones especiales.

Los juicios propios de la Matemática son los hipotéticos, expresados en cada uno de sus teoremas. Esto en cuanto a la Matemática pura o teórica.

Pero, en contraposición al mundo creado por la inteligencia, que sólo se realiza en la región de las ideas, existe el mundo de la realidad física o cósmica que contiene objetos adaptables a las relaciones matemáticas, en su materia y las energías que actúan sobre ésta. Y resulta una Matemática que se amolda a la Matemática abstracta e hipotética, que termina en la Mecánica racional y en la Física matemática y que hoy tiene su ramificación hacia la Química, merced a las nuevas ramas hoy conocidas con los nombres de Termodinámica y Termoquímica.

Dos circunstancias han contribuído pues, a la constitución de dos ramas teóricas de la Matemática, a saber; la Crítica y la Pedagogía, por efecto del considerable desarrollo actual, cuyas numerosas teorías exigen un doble trabajo encaminado a su coordinación sistemática y a su adquisición por la inteligencia.

La coordinación sistemática se realiza por medio de la lógica que llega a este resultado, por el método deductivo que sustituye al silogismo de los filósofos el silogismo matemático, referido a ecuaciones e inecuaciones, como aquél se reducía al sujeto y al predicado, es decir, a los juicios sintéticos, en contraposición a los juicios analíticos que nada añaden a lo contenido en un término, mientras aquellos extienden indefinidamente su fondo por adjunción de nuevos elementos o por construcción indefinida.

Por otra parte, como hemos dicho, el exuberante conjunto de teorías, capaz de abrumar a la inteligencia más poderosa, exige una acción organizadora y de aligeramiento que permita la fácil adquisición de lo esencial y culminante, siquiera el esqueleto de este cuerpo robusto, para llegar por él, a cualquier región que se haya de conocer con todos los aditamentos propios del organismo.

Esta doble tarea se ha realizado actualmente, primeramente por trabajos de insignes matemáticos como Poincaré, Picard, Hilbert, Enriques, etc., y de otro modo, por la unión de los esfuerzos de todos los matemáticos que han concentrado sus esfuerzos en la *Encyclopaedie der Mathematische Wissenschafften* y últimamente, por medio de la *Commission internationale de l'Enseignement mathématique.*

Yo, en la modesta esfera de mis escasos medios, siempre he aspirado a esta doble finalidad, desde hace muchos años, porque me he esforzado siempre en contribuir a amenguar nuestro reconocido y considerable atraso, tratando de ponernos, dentro de la corriente general de que tan distanciados nos hallamos por nuestros deficientes planes de enseñanza, juntamente con nuestra proverbial indolencia. Y poco he de indicar acerca de esto, pues aparte de mis numerosas publicaciones, basta recordar, cómo he recordado, las lecciones de mi curso anterior y las del que con esta lección termina.

Dos tendencias se siguen en la crítica, la una externa o formal y la otra interna que se refiere a la discusión de los principios fundamentales y su valor relativo.

La tendencia formal se refiere al orden y a la correlación de las verdades, prescindiendo de la naturaleza de los principios.

Esta tendencia he procurado seguir en mis numerosos trabajos, porque realiza un fin pedagógico, facilitando la adquisición y asimilación de la Ciencia por las conexiones, enlaces, correlación y compenetración de las verdades y de las teorías. Y esta crítica se reduce al arte de la coordinación y subordinación de las unas y de las otras, pudiendo servir de ocasión para la inventiva o, por lo menos, cierta originalidad de estilo que nos emancipe del antiguo procedimiento exclusivamente lógico y deductivo, creando cierta libertad en la exposición de las ideas que nos permita recorrer el campo matemático en diversas direcciones, por aquella compenetración de los conceptos que les da igual importancia en los sistemas complejos, mediante ellos construídos. Y de esto ya trataremos en varias ocasiones.

La tendencia interna, afecta, no a la forma sino a la esencia de las cosas, es la *crítica de los principios* o *fundamentos* científicos.

Las primeras obras que se publicaron tales como *Les méthodes dans les sciences de raisonnement* de Duhamel, *L'origine des limites et de la correspondence dans l'Algèbre et la Géométrie* de Cournot, *Applications d'Analyse et de Géométrie* de Poncelet, *Les principes du calcul infinitesimal* de Carnot, *Essai sur les principes fondamentaux de la Géométrie et la Mécanique* par J. Tilly y otras análogas se referían únicamente a la deducción lógica y tendían al rigor de las demostraciones y a la legitimación de ciertas prácticas o admisión de ciertas entidades.

Posteriormente las obras críticas han ahondado más en la cuestión de los principios. Las tendencias *lógica y aritmetizadora* han señalado dos rumbos en la Matemática. Y el catálogo de tales obras va siendo cada día más extenso.

Al frente de estas publicaciones citaremos las obras *Las cience et Hypotèse* y *La valeur de la Science*, *Science et Méthode* del insigne Poincaré, *La science moderne par* E Picard, *The Evanston colloquium* (*Lectures on Mathematics*) by F. Klein, *Problème der Wissenschaft* (Federico Enriques). *Die logischen Grundlagen der exacten Wissenschaften* (Paul Natrop), *Science et philosophie par* J. Tannery, *Fundamental concepts of Algebra and Geometric* (John Wesley Young), *The principes of Geometrie* de Rusell, *Essai sur l'Hyperespace, le temps, le matière et l'énergie* par M. Boucher, *La Méthode dans la philosophie des mathématiques* par Maximilien Winter, *La vérité scientifique* par Edmond Bouty, *Etude sur l'espace et le temps* par G. Lechalas, *La philosophie matématique* par Richard, etc.

Este curso de extensión universitaria improvisado, no puede ofrecer una división de materias siquiera regularmente combinadas, que expresen las tendencias principales que se distinguen en el desenvolvimiento histórico de la Matemática.

Difícil es distinguirlas y separarlas en cada una de las lecciones explicadas; porque, como he dicho varias veces, hay una compenetración de todas ellas, pues los hechos de que se trata tienen una complejidad natural. Y lo que se ha buscado ha sido el expresar el *predominio* de una de ellas sobre las demás en cada caso. Así, por ejemplo, desde luego, la tendencia lógica predomina sobre todas, pues la Matemática y cualquiera otra Ciencia es esencialmente un encadenamiento lógico.

Pero aquí se trata no del encadenamiento que sostiene unas verdades por medio de otras, sino un procedimiento puramente abstracto, prescindiendo de la realidad del objeto que ha servido a los matemáticos para exponer algunas ramas de la matemática, atendiendo exclusivamente al *rigor* demostrativo.

La tendencia constructiva se confunde muchas veces con la tendencia páctica, porque ésta se realiza por construcciones sucesivas de los sistemas formados con objetos previamente definidos. Y en esta tendencia lo pedominante es la *acción inmediata* y *directa* sobre el objeto que se estudia, esencialmente opuesta a la tendencia clásica que procedía sobre las fórmulas representativas de los objetos, como especialmente, en Geometría analítica, se procede sobre las ecuaciones en vez de procederse sobre el objeto geométrico por éstas representado; mientras que en la tendencia constructiva, lo predominante es el *modo de formación* de los objetos, aunque éste sea directo.

La tendencia lógica puede confundirse con la tendencia simbólica o esquemática; pero en ésta lo característico no es el rigor lógico que necesariamente se respeta, sino los *principios combinatorios* que predominan en la serie completa de los razonamientos y, en particular, la *especie de signos* o *de símbolos* empleados en cada caso.

En los casos de la tendencia intuitiva, nos hallamos con una serie de construcciones de los objetos; pero predomina sobre éstas el carácter *representativo* de las relaciones abstractas o de seres sin existencia real.

Hemos pues considerado únicamente la *preponderancia* de cada punto de vista que nos ofrecen las varias cuestiones matemáticas, difíciles de separar en absoluto, por la compenetración de las finalidades y de los varios conceptos.

Sinopsis de la lección 1.ª—Consideraciones generales

- Resumen del curso anterior.
  - MATEMÁTICA IDEAL. (Definiciones, axiomas, postulados).
  - MATEMÁTICA REAL. (Materia y energía).
    - GEOMETRÍA, ALGEBRA, TEORÍA DE LOS NÚMEROS. (Bases fundamentales).
    - SIMBOLISMO, SISTEMAS. (Conceptos generales).
    - ASPIRACIONES. (Problemas clásicos).
    - MEDIOS. (Métodos matemáticos).

- NUEVO MÉTODO DE ENSEÑANZA. (Compenetracion de los conceptos).
  - SUBJETIVO. Combinatoria y simbolismo.
  - OBJETO. Cantidad elemental. Sistemas.
  - RELACIÓN. Correlaciones. Correspondencias. Transformaciones.
  - MODOS. Normalización. Singularidades.
  - TRANSFORMACIONES. Generación.

DESARROLLOS EN MIS OBRAS ANTERIORES.

- ALGEBRA.
  - NÚMEROS DISCONTINUIDAD.
    - Formas cuadráticas (Gauss).
    - Números ideales (Kummer).
    - Ideales (Dedekind).
  - CANTIDAD.
    - Descartes. Rolle. Budan-Fourier. Lagrange. Cauchy. Sturm.
      - Algebra, Geometria analítica.
      - Aproximación de las raíces.
      - Fracciones continuas (Brouncker).
      - Fórmulas. Taylor. Maclaurin.
  - CUALIDAD.
    - Argand......... Interpretación geométrica.
    - Cauchy......... Cantidades geométricas.
    - Riemann. ..... Funciones de variables complejas.
    - Puiseux. ... .. Ciclos de funciones algebraicas.
    - Gordan .... Lazos fundamentales.
  - ALGEBRAS COMBINATORIAS.
    - Boole, Schroeder — Algebra de la Lógica.
    - Peirce, Cayley . . — Algebra lineal asociativa. Diversas especies de Algebras.
  - ABSTRACTA. (Weierstrass y Dedekind).

- GEOMETRÍA
  - Geometria métrica. — Euclides. Chasles.
  - De posición proyectiva. — Carnot. Poncelet.
  - De posición. — Staudt.
  - Geometria algebraica. — Bellavitis. Hámilton. Grassmann.
  - Geometria constructiva — Lemoine. Brocard. Laisant, Longchamps.

Sinopsis de la lección 2.ª

Tendencia a la determinación individualizadora

GEOMETRÍA

Determinación inmediata (Euclides)	Por identificación. » reducción al absurdo.
Encadenamiento analítico (Platón). .	Enlace de dos proposiciones extremas por un encadenamiento de otras.
Principios genera -	Teoremas de Menelao y Ceva. Hexagammum mysticum de Pascal. (Principio de la teoría de las cónicas). Perspectiva de Pascal y Desargues. Relación involutiva de Desargues. Centro de las medias armónicas (Mac Laurin).
Lemas referentes a los porismas de Euclides. . .	Referentes al cuadrilátero cortado por una transversal. Referentes a la relación anarmónica de cuatro rectas concurrentes sobre dos transversales. Idem al exágono inscrito en dos rectas. Idem a la relación anarmónica de cuatro puntos. Lemas concernientes al círculo.
Métodos. .	Descripción orgánica de las curvas (Newton). Determinación por aproximación de las curvas (Newton, De Gua, Cramer).

ALGEBRA

Métodos.	Aritmético de Diofanto y los árabes.		
	Geométrico de	Newton. (Aritmética universal).	
		Descartes.	Aplicación del Algebra a la Geometría. Resolución numérica de las ecuaciones.
	Determinaciones y aproximaciones	Rolle, Newton, Lagrange, Fourier-Budan, Sturm.	

Principios generales de las ecuaciones algebraicas.	Relación entre las funciones simétricas de las raíces y los coeficientes de una ecuación	Newton, Vandermonde, Lagrange.
	Determinante de Cramer (eliminación) Bezout, Euler, Sylverter.	

ANÁLISIS

Métodos. .	Indivisibles de Cavalieri. Maximis et minimis de Fermat. Fluxiones de Newton. Infinitamente pequeños de Leibniz

Sinopsis de la lección 3.ª—Tendencia difusiva

- **Métodos generales.**
  - EXPANSIVOS.. Adjunción, construcción de dominios, introducción de variables y parámetros, generación orgánica (por elementos irreducibles, configuraciones etc.)
  - RESTRICTIVOS Ecuaciones, relaciones, diferenciación.
  - ARMÓNICO... Por compenetración de los conceptos.
- **Dominios o sistemas**
  - Inclusión (espacios).
  - Interferencia (prolongación analítica).
  - Identificación, coincidencia o ajuste.
  - Exterioridad.
- **Individuos**
  - Rígidos (geométricos) (condicionados). Recta, plano, (euclideos), circunferencia, esfera.
  - Disgregables (analíticos). (incondicionados) Puntos, números, variables, parámetros.
- **Generación......**
  - Expansiva. (Extensión)
    - Cálculo directo....... Aritmético, algebraico, integación, cuadratura
    - Proyecciones, integrales...... Obtención de espacios superiores.
  - Restrictiva. (determinación).. Sistemas de ecuaciones, ecuaciones algebraicas, diferenciales Secciones geométricas, lugares geométricos.
- **Teoria...** Correlaciones. (propiedades) Axiomas, postulados, teoremas, corolarios.
- **Realización condicional..**
  - Implícita...... Problemas latentes en las correlaciones.
  - Contingente... Problemas externos a la actualidad teórica.
- **Obras con tendencia difusiva.**
  - Geometria de Clebsch. Geometria analítica, sistemas de coordenar, dualidad, invariantes, covariantes, etc., afinidad lineal, características, geometría sobre una curva algebraica, conexos, integración.
  - Algebra de Weber. Algebra clásica, transformación lineal, invariantes, transformación de Tschirnhausen, teoría de Galois, ecuaciones cíclicas, división del círculo, resolución algebraica, ecuaciones metacíclicas, teoría de los grupos, grupos abelianos, grupo de la división del círculo, cuerpo de Abel, grupos de las sustituciones lineales, puntos de inflexión de las curvas de tercer orden, tangentes dobles de las de cuarto orden, ecuación de quinto grado, grupos lineales de sustituciones ternarias, números algebraicos, números trascendentes integrales elípticas, funciones theta, sus transformaciones, funciones elípticas, funciones modulares, transformación de las ecuaciones, grupo de las de quinto grado, cuerpos cuadráticos, multiplicación compleja, clases de cuerpos, funciones algebraicas, diferenciales algebraicas y abelianas.
  - Teoria de las funciones modulares y automorfas. (Klein y Fricke)... Los invariantes de las funciones modulares y elípticas, los periodos de las integrales elípticas de primera especie, ciertas representaciones conformes y sus funciones triangulares correspondientes, problema fundamental, representación analítica, aplicación de la teoría de los grupos al problema fundamental, los subgrupos del grupo modular, etc. Aplicación de las teorías de las funciones, fundamentos de la teoría de Riemann, etc., sistemas modulares etc., transformaciones etc., ecuaciones modulares etc., grupos de congruencias etc..... correspondencias modulares..... determinanión de la métrica proyectiva. Fundamentos de los grupos discontínuos etc. Teoría de los grupos poligonales etc, etc.

Sinopsis de la lección 4.ª—Tendencia sistematizadora

Geometria ...

- Geometría descriptiva de Monge.
- Teoría de las transversales de Carnot.
- Método proyectivo de Poncelet.
- Geometría métrica de Euclides y de Chasles.
- Geometría de la posición de Staudt.
- Homología.
- Polares recíprocas de Poncelet.
- Dualidad de Chasles y polaridad.
- Geometría reglada (Plücker).
- Complejos, congruencias, superficies regladas:
- Geometría circular.
- Geometría esférica de Lie.
- Conexos (Clebsch).
- Sistema polar de un grupo de puntos.
- Involuciones de órdenes superiores.
- Haces de cónicas (Steiner).
- Afinidad lineal.
- Sistemas cíclicos-proyectivos.
- Geometría analítica superior (interpretación de la teoría de las formas algebraicas.
- Geometría proyectiva de los hiperespacios. (Bertini).
- Geometría analítica de *n* dimensiones. (Laurent).
- Transformaciones lineales.

Teoría de los números. ..

- Congruencias, equivalencias de las formas cuadraticas (Gauss).
- Números ideales (Kummer).
- Ideales (Dedekind).
- Cuerpos finitos, funciones de un cuerpo.

Algebra ordinaria.......

- Teoría de los grupos (Ruffini, Lagrange, Abel, Galois).
- Principio de imposibilidad, clasificación de las funciones algebraicas (Abel).
- Grupos de sustituciones lineales.
- Funciones semejantes (Lagrange).
- Ecuaciones abelianas y metacíclicas.
- Adjunción, grupo de una ecuación (Galois).

Algebra de las formas.....

- Invariantes y covariantes proyectivos.

Análisis....

- Grupos continuos (Lie).
- Sistemas completos (Clebsch).
- Sistemas jacobianos.
- Pfaffianos.
- Sistemas fundamentales (Fuchs).
- Variaciones de Lagrange.
- Cálculo funcional.....; Funciones de líneas...; Ecuaciones integrales. — Fredholm, Volterra, Hadamard.

Sinopsis de la leccion 5.ª—Tendencia constructiva

Geometría...	Geometria del triángulo. Configuraciones. Involuciones planas. Caracteristicas de Chasles. Curvas, hessiana, cayleyana, steineriana y jacobiana. Geometria sobre una curva algebraica, curva fundamental.
Conceptos generales.....	Independencia lineal, sistemas reducidos, ecuaciones y curvas irreducibles. Grupos primitivos.
Algebra ordinaria y teoría de los números......	Dominios de integridad y de racionalidad. Cuerpos de números (de Abel y de Galois). Funciones modulares y automorfas. Discriminante de una forma cuadrática y de un cuerpo.
Algebra proyectiva.....	Emanantes, método de las funciones simétricas Idem de derivación y de las ecuaciones diferenciales. Proceso Ω de Cayley.
Análisis......	Método constructivo de Meray. Construcción por números irracionales, conjuntos, series, productos infinitos, funciones elementales, lenguaje geométrico, (Tannery). Determinantes funcionales (Jacobi). Construcción de funciones meromorfas con infinitos dados (Mittag-Leffler). Condensación de las singularidades (Hankel). Normalización de la superficie de Riemann. Ciclos de Puiseux: Reducción y normalización de las trascendentes Ecuaciones adjuntas, multiplicadores y reducciones (Método de Pfaff). Teorema de Appell sobre las funciones invariantes Determinantes infinitos, funciones inf. ec. con un número infinito de incognitas. — Hill, Appell, Poincaré, Koch
Obras geométricas......	*Introduction à l'Analise des lignes courbes algébriques* (Cramer). *A Elementary Teatrise on Curve tracing* (Percival Frost). *Einleitung in die analytische Geometrie der höheren algebraischen Kurven* (Dr. Paul Sauerbeck). *The tweraty-seven lines upon the cubic surlace* by A. Hederson.
Obras de análisis...... ..	*Vorlesungen über das Ikosaeder* (F. Klein). *Geometrie der Zahlen* (Minkowski). *Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften un der conformen Abbildung,* von Gustav Holzmüller. *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales* (P. Appell, E. Goursat). *Construction der differential gleichungen aus particularen Integrales* von Aloys Mayr. *Sur la théorie des équations differencielles du premier ordre et du premier degré* par Leon Autonne *Sur les formes mixtes* par Leon Autonne. *Mémoire sur les systèmes modulaires de Kronecker* par M. Harris Hancock. *Sur la transformation des fonctions fuchsiennes* par M. X. Stouff. *Beitrage zur Interpretation der partiellen Differentialgleichungen* P. du Bois-Reymond. *Théorie des Transformationsgruppen* von Sophus Lie. *Vorlesungen über continuierliche Gruppen* von Dr. Georg Schefers (S. Lie) *Géometrie der Berührungs transformationen* von S. Lie und G. Scheffers.

Sinopsis de la lección 6.ª—Tendencia intuitiva

Geometria....
- Representación esférica (Gauss).
- Id. conforme (Schwarz).
- Poliedros de Schlegel y Stringham.
- Politopos (Brouncker y Schoute).
- Geometria de los números (Minkowski y Klein).
- Representación de las geometrías (Klein).

Análisis . . .
- Puntos singulares, algebraicos y esenciales.
- Ciclos de Puiseux.
- Sistemas de lazos fundamentales (Clebsch y Gordan).
- Cortaduras, espacios lagunares.
- Representación de las funciones periódicas.
- Representación de las funciones abelianas.
- Integración a lo largo de un contorno.
- Residuos de Cauchy.
- Superficie de Riemann.
- Analysis situs.
- Curvas y superficies integrales.
- Características de Monge, Ampère y Cauchy.
- Representacion de Lie, transformaciones de contacto.
- Representación de las variedades (Poincaré).
- Id. de funciones algebraicas de dos variables.
- Superficies de Kummer e hiperelípticas.

Sinopsis de la lección 7.ª—Tendencia lógica

Aritmética....
- Aritmética lógica (Hilbert).
- Aritmética y Algebra de Schroeder.

Geometria....
- Princios fundamentales (Pasch).
- Axiomas, postulados y especies de geometrías (Hilbert).
- Geometrías de más de tres dimensiones.

Análisis......
- Análisis, ciencia general del número (Meray).
- Análisis infinitesimal reducido al estudio de las series enteras (Weiertrass, Meray).

Algebra de la Lógica (Boole, Jevons, Schroeder).

LECCIONES DE CÁLCULO INFINITESIMAL EXPLICADAS POR LOS ALUMNOS

Lecciones explicadas por el alumno A. Santaliestra

I. Nociones sobre los conjuntos, según E. Pascal.
II. Determinantes funcionales.
III. Cambio de variables y eliminación de constantes y funciones arbitrarias.
IV. Reversibilidad de las series.
V. Teoremas de Laplace y Lagrange.
VI. Máximos y mínimos.
VII. Series enteras.
VIII. Convergencia uniforme.
IX. Continuidad y discontinuidad.
X. Teorema de Darboux.
XI. Funciones regulares.
XII. Integrales curvilíneas.
XIII. Integrales de las diferenciales totales.
XIV. Polinomios de Legendre.
XV. Funciones Eulerianas.
XVI. Trascendentes engendradas por integración.
XVII. Integrales singulares.
XIIX. Ecuaciones diferenciales simultáneas de primer orden.
XIX. Ecuaciones de derivadas parciales de primer orden.
XX. Ecuaciones de diferenciales totales.

Tratado de Análisis por Z. G. de Galdeano.

XXI. Cuerpos de números (Algebra de Weber).
XXII. Series de Fourier (Analyse de Picard).
XXIII. Series de términos positivos, criterios de 1.ª especie. Monografía de Borel.
XXIV. Criterios de 2.ª especie por E. Borel.
XXV. Estudio de los criterios de Bertrand, por E. Borel.

Monografía de Borel

Lecciones explicadas por el alumno Jesús Yoldi

1. Determinantes funcionales o jacobianos.
2· Series uniformemente convergentes.
3. Teorema de Abel.
4. Teorema de Darboux.
5. Funciones de variables complejas; series y funciones monógenas monódromas, polítropas, etc.
6. Cálculo de los resíduos.
7 y 8. Funciones algebráicas, su continuidad y obtención de los sistemas circulares.
9. Curvatura de las curvas planas.
10. Sistemas completos.
11. Especies de integrales.
12, Método Cauchy; características.
13. Teoremas de Poisson.

Tratado de Análisis de Z. G. de Galdeano

14. Teorema de Sofía Kowalewski.
15. Aplicación de los teoremas de Poisson.
16. Teoría de los grupos.
17, Transformaciones de contacto.
18. Método de Jacobi y Mayer.

Leç. sur l'integr. des equ aux dererivées part. por E. Goursat

19. Sistemas invariantes y covariantes.
20. Puntos singulares: su estudio.
21. Transformaciones de Cremona.

Geometria de A. Clebsch

22 y 23. Grupos contínuos. (E. Picard, t. III).
24 Teoría de los conjuntos (E. Borel).

Lecciones explicadas por el alumno Luis Sancho Izquierdo

1. Funciones implícitas.
2. Integrales curvilíneas (Teorema de Riemann).
3. Desarrollo en serie de las funciones sinécticas.
4. Cálculo de los resíduos.
5. Curvas osculatrices.
6. Evolutas y evolventes.
7. Integrales hiperelípticas.
8. Integrales de las diferenciales totales.
9. Ecuaciones de derivadas parc:ales.
10. Ecuaciones de derivadas parciales no lineales. Método de Cauchy.
11. Ecuaciones de diferenciales totales.

Tratado de Análisis matemático por Z. G. de Galdeano.

12. Grupos de sustituciones, según el Sr. Bianchi.
13. Isomorfismo de los grupos » » »
14. Grupos de composición (Teoremas de Jordan y de Hölder).

Lec. sulle teor. dei gruppi de sost. (Bianchi).

15. Sustituciones lineales. (Teoremas de Jordan y Hölder.
16. Pseudo-sustituciones lineales de Jordan y Hölder
17. Grupos finitos de rotación de una esfera sobre ella misma.
18. Construcción de los grupos finitos de sustituciones lineales.
19. Representación de los grupos finitos sobre el plano.

Funcioni poliedriche e modulari Vivanti

20. Teoría de sustituciones (Funciones semejantes).
21. Ecuaciones Abelianas.
22. Estudios de Galois sobre las ecuaciones resolubles algebraicamente.

Algèbre supérieure de J. Serret.

23. Ecuaciones integrales (por T. Lalesko.)

Lecciones explicadas por el alumno José M.ª Ríos

1.ª Cambio de variables.
2.ª Teorema de Darboux y definición de integral según Riemann.
3.ª Cálculo de los resíduos.
4.ª Obtención de los sistemas circulares de raíces, evolutas y evolventes.
5.ª Integrales hiperelípticas y elípticas.
6.ª Cálculo de variaciones.
7.ª Funciones Eulerianas.
8.ª Integrales dobles.
9.ª Integrales curvilíneas.
10. Generalidades sobre las ecuaciones diferenciales.
11. Sistemas de ecuaciones de diferenciales totales; ecuaciones de derivadas parciales.
12. Ecuaciones lineales de primer orden.
13. Integración de las ecuaciones simultáneas lineales.
14. Método de Jacobi.
15. Principio del último multiplicador.

Tratado de Análisis por Z. G. de Galdeano

16. La Geometría sobre una curva algebráica.
17. Generalización del principio de la correspondencia.

Geometría de A. Clebsch

18. Transformación de Cremona.
19. Ecuaciones diferenciales de func. implícitas.
20. Las integrales abelianas no pueden expresarse por los signos ordinarios del Algebra.
21 y 22. Integrales elípticas (2 conferencias).
23. De los ciclos.
24. Transformación homográfica y su aplicación a la determinación del género de una curva y del número de puntos singulares y de inflexión.
25. Funciones periódicas.

Traité d' Analyse par H. Laurent

Lecciones explicadas por el alumno Manuel Pontes

1. Cambio de variables.
2. Integrales dobles.
3. Integrales curvilíneas.
4. Desarrollo en serie de las funciones sinécticas (Teoremas de Cauchy y Lagrange).
5. Superficie de Riemann.
6. Estudio de una curva en las proximidades de uno de los puntos.
7. Propiedades numerativas de las curvas.
8. Ecuaciones diferenciales de primer orden.
9. Polinomios de Legendre.
10. Método de Lagrange-Charpit (ecuaciones de derivadas parciales de primer orden).
11. Ecuaciones de diferenciales totales.
12. El problema de Pfaff.
13. Método de La Place (ecuaciones de deriv. parc. de 2.º orden.)
14. Método de Ampère (ecuaciones de deriv. parc. de 2.º orden.)
15. Método de Darboux; características.
16. Ecuación de Ampère.

Tratado de Análisis de Z. G. de Geldeano

17. Ecuación de La Place.
18. Representación conforme.
19. Sistemas isotermos.

Traité d'Analyse par E. Picard.

20. Principios sobre ecuaciones integrales (V. Volterra).

Lecciones explicadas por el alumno Fernando Fernández García

1.ª Teoremas de Abel sobre convergencia de las series. 2.ª Método de Newton y triángulo de De Gua para el estudio de una curva en la proximidad de uno de sus puntos. 3.ª Método de Cauchy; características. 4.ª Representación conforme. 5.ª Razones anarmónicas equianarmónica y armónica.	**Tratado de Análisis por Z. G. de Galdeano**
6.ª Generalidades sobre la representación analítica de las ecuaciones algebráicas. 7.ª Invariantes y covariantes . 8.ª Ecuaciones de diferencias finitas. 9.º Determinantes funcionales.	**Geometría de Clebsch**

OBSERVACIONES

Los resultados expresados en la lista de lecciones explicadas por mis mejores alumnos demuestran la eficacia del *nuevo método* que sigo en la enseñanza, adecuado a subsanar, *provisionalmente*, nuestros deficientes planes de estudios.

A nuestra vetusta práctica de emplear un *curso anual* para exponer lo que llamamos *una asignatura*, opongo la *variedad de materias*, elegidas y desenvueltas, indistintamente de diversas teorías, lo que permite al alumno fijarse en los conceptos capitales, sin engolfarse en indigestos y pueriles detalles, propios de nuestro muy notorio *machaqueo*, procedente obligado del estancamiento, o rémora para el avance expedito; porque lo principal, en todo caso, es la idea directora y culminante, no el fárrago abrumador de hechos u objetos indiscernibles casi, por su escasa importancia, y el preferir los *rasgos característicos* de cada cosa, no lo incidental.

La feliz renovación de las ideas, aviva y depierta el interés y estimula nuestra actividad. Y quien posee lo fundamental, posee las consecuencias en ello encerradas, y esto es fuente de producción intelectual.

Aquellos interminables encadenamientos que unían las ideas por el orden exclusivo de *sucesión*, hoy queda sustituído ventajosamente por relaciones de coexistencia y de compenetración que irradian desde centros múltiples y diversos.

Al punto de vista exclusivo de un sólo autor, opongo la consideración de varios de ellos; porque así se contrastan entre sí, diversos criterios en el modo de exponer, susceptible de variedad indefinida, suprimiendo los *caminos cerrados*, los earriles obligados que engendran la rutina y matan el espíritu de la iniciativa. La ciencia progresa mediante una perseverante colaboración de muchos talentos; y nadie tiene en absoluto la exclusiva ni por el fondo ni por la forma.

Es muy ventajoso además el señalar los puntos de encuentro o de intersección de las verdades y de los conceptos en el enrejado que todos ellos forman y que se iluminan los unos por medio de los otros. Y esta luz es grata y un estimulante para caminar por el espacio iluminado.

Y para no prolongar más este trabajo, concluiré citando las ideas expresadas en la exposición del nuevo método.

OBSERVACIONES FINALES

Mi deseo de terminar este trabajo antes de celebrarse el Congreso de la enseñanza matemática, me impide, por la premura del tiempo, el insistir en los defectos de nuestra organización de estudios matemáticos.

Bastará, para terminar este primer cuaderno del *Anuario de divulgación matemática*, consignar la deficiencia de los estudios matemáticos en nuestros *Institutos de 2.ª enseñanza*, reducidos a: 1.º *Nociones de Aritmética y de Geometría*. 2.º Aritmética. 3.º Geometría. 4.º Algebra y Trigonometría.

Los estudios de Geometría no debieran interrumpirse y sí continuarse por ciclos progresivos, hasta llegar a nociones de Geometría descriptiva en el último año del bachillerato, porque el carácter intuitivo de estos estudios es apropiado al escaso desarrollo intelectual del alumno.

Retrasándose la Aritmética demostrada un año, y alternando su estudio con la Geometría y los cálculos del Algebra, podría llegarse con mejores resultados que los actuales, a una instrucción matemática más completa.

Los dos primeros cursos de estudios matemáticos en la Facultad son muy deficientes, pues en ellos debieran tener cabida el Algebra ordinaria moderna y la de los invariantes y covariantes con la Geometría correlativa y nociones de la teoría de funciones y del Cálculo diferencial e integral, desde el primer año, para distribuir con regularidad las diferentes materias que hoy deben conocerse por un licenciado y un doctor, más alguna asignatura de crítica, de filosofía o de pedagogía matemática, exclusiva para los que hayan de dedicarse al profesorado.

Mis especiales puntos de vista sobre la enseñanza me han permitido salvar provisionalmente algunas de estas deficiencias. Una de ellas es que los alumnos dedicados a la sección de ciencias químicas sigan un curso de *Elementos del Cálculo infinitesimal, diario,* pues con que fuera alterno les era suficiente y en cambio el curso de *Complemento de Cálculo infinitesimal* que es *alterno,* debiera ser *diario,* para los dedicados a la sección de ciencias exactas o también físicas.

Estas deficiencias las he salvado, dedicando el primer trimestre al *cálculo* de las derivadas, diferenciales, integrales y resolución de las ecuaciones diferenciales, en los casos más generales y cuyo conocimiento es suficiente para los químicos, quienes han de resignarse, en el resto del curso, a actuar en muy contadas ocasiones, porque el ejercicio de *machaqueo* es impropio de cursos superiores, dejando el lugar preponderante a los matemáticos que deben elevarse a los estudios teóricos de la Matemática contemporánea, los cuales, deberían, no condensarse violentamente, como hoy se hace, en un par de cursos del doctorado; sino distribuirse uniformemente en los cursos de la licenciatura para dar lugar a que las ideas se posen y se asimilen a las inteligencias.

Otro de los remedios provisionales, aplicables a nuestras enfermedades universitarias, consiste en la *selección* de materias que deban ser estudiadas, en la simplificación y toda clase de facilidades, muy contraria a la creación arbitaria de obstáculos que retrasen a la inteligencia en el camino de la verdad y de su ilustración.

El prurito de señalar para ser estudiadas obras agotadas y el seguir el método de los apuntes, cuando hay obras superiores a éstos en la mayoría de los casos, puesto que sólo son admisibles cuando se trata de lecciones de *excepcional importancia* y no de asuntos *ordinarios* que se encuentran tratados en obras que basta designar a los alumnos, evitaría el hacer difícil e indigesto, lo que es facil, agradable y de inmediata asimilación.

El haber proporcionado tales facilidades a mis alumnos, me ha permitido el que todos los años encuentre algunos capaces de seguir los estudios matemáticos y el elevar la tesitura para bien de su cultura, dejándola distanciada a la de los anticuados programas que prescinden de los adelantos del siglo XIX.

Ahora bien; estos resultados que pueden apreciarse por la lista de las lecciones expuestas y desarrolladas, por mis alumnos, no pueden considerarse como un éxito completo y definitivo.

No basta en la Ciencia el ser un mero repetidor de lo que otros han dicho, una especie de estante de biblioteca o un intérprete de doctrinas, aún desarrolladas con detalle, en virtud del ejercicio regular de los procedimientos lógicos, puramente deductivos. Hay que aspirar a algo más, a despertar las iniciativas para salir del estado pasivo de quien almacena conocimientos para ser meramente un erudito

Este segundo resultado es más difícil que el primero, entra en la *fase educativa* que agiganta los esfuerzos y eleva el nivel de las naciones. Y debe comenzarse en los grados inferiores, cultivando las aptitudes y las facultades del espíritu gradualmente, desenvolviendo la actividad y buscando más que la adquisición de los conocimientos, el perfeccionamiento de dichas facultades y aptitudes.

Ya la Pedagogía matemática y las prácticas seguidas en las diversas naciones legislan sobre este punto, y por ello no es necesario el tratar de ello en este resumen de mis últimos trabajos y procedimientos.