4 - 3328

ANUARIO DEL CURSO DE 1915 A 1916

RAZONAMIENTO

DE MI

Curso Elemental de Cálculo infinitesimal

COMPRENDIENDO NOCIONES DE

MATEMÁTICA FÍSICO-QUÍMICA

POR

Z. G. de Galdeano

PRECIO: 5 PESETAS

BIBLIOTECA PROVINCIAL LOGROÑO

ZARAGOZA
Tipografía de G. Casañal, Coso, 98
1915

90828

NO SE PRESTA

LECTURA

EN

SALA

Gobierno de La Rioja
BIBLIOTECA CENTRAL
10000223842

T. 90828
Donativo de D. Amós Salvador
18 Octubre 1915

ANUARIO DEL CURSO DE 1915 A 1916

R
16103

RAZONAMIENTO

DE MI

Curso Elemental de Cálculo infinitesimal

COMPRENDIENDO NOCIONES DE

MATEMÁTICA FÍSICO-QUÍMICA

POR

Z. G. de Galdeano



BIBLIOTECA PROVINCIAL
LOGROÑO

I 101.042

ZARAGOZA
Tipografía de G. Casañal, Coso, 98
1915

M Ilmo Sr D Antonio Salvador

su afmo y agradecido amigo

Raul Carbonell

SUMARIO DE MIS CURSOS

DE

CÁLCULO INFINITESIMAL

CON ARREGLO AL NUEVO MÉTODO DE ENSEÑANZA

1912-1914

Ensayo de síntesis matemática y nuevo método de enseñanza matemática.
1910



Nuevo método de enseñanza matemática.
1911

Dr. Zoel G. de Galdeano.

Obras esencialmente didácticas

Geometría elemental (con nociones de crítica)	1881
Tratado de Algebra con arreglo a las teorías modernas	1883
Tratado de Aritmética	1884
Problemas de Aritmética y Algebra con nociones de crítica algorítmica	1885
Tratado de Algebra (Parte 2.ª, tratado superior)	1886
Tratado de Geometría conforme a las teorías modernas	1889
Geometría general	1894
Cálculo diferencial	1902
Principios generales de la teoría de las funciones	1903
Aplicación del cálculo infinitesimal al estudio de las figuras planas	1904
Cálculo integral	1904
Aplicación del cálculo infinitesimal al estudio de las figuras en el espacio	1905

Teoría de las ecuaciones diferenciales 1906-7
El concepto del imaginarismo en la ciencia matemática 1891
Resumen y complemento de la teoría de los números 1910

Obras esencialmente críticas

Observaciones útiles en el estudio de las matemáticas 1874
El Método aplicado a la ciencia matemática 1875
Complemento de Geometría elemental o crítica geométrica 1881
Crítica y síntesis del Algebra 1888
Estudios críticos sobre la generación de los conocimientos matemáticos (1.ª 2.ª partes) ... 1908
Carácter y trascendencia de la Matemática en la época presente (discurso inaugural) 1895
Las modernas generalizaciones expresadas por el Algebra simbólica, las geometrías no-euclídeas y el concepto de hiperespacio 1896
L' Unification des concepts dans les mathématiques (Congreso de Zurich) 1898
La moderna organización de la Matemática (diez lecciones explicadas en el Ateneo de Madrid) 1898
Note sur la critique mathématique (Congreso de París) 1900
Id. publicada íntegra en el Boletín de Crítica etc. (t. II) 1910
Estudios de Crítica y pedagogía matemática 1900
Exposición sumaria de las teorías matemáticas 1907
Ensayo de clasificación de las ideas matemáticas (Congreso de Zaragoza) 1908
La Matemática en su estado actual (Congreso de Zaragoza) 1908
Boletín de Crítica, enseñanza y bibliografía matemáticas 1908-10

Obras esencialmente pedagógicas

Consideraciones sobre la conveniencia de un nuevo plan para la enseñanza de las matemáticas elementales 1877
La enseñanza de la ciencia matemática en la universidad (Progreso Matemático) 1894
Ciencia, educación y enseñanza 1899
Quelques principes generaux sur l' enseignement mathématique (L' Enseignenement mathématique) 1899
Quelques reflexions sur l' enseignement mathématique (Congreso de París de l' Association scientifique) 1900
La enseñanza científica 1902
L' Enseignement scientifique en Espagne (traducción, L' Enseignement mathématique) 1902
Algunas consideraciones sobre filosofía y enseñanza matemáticas 1907
Plan de enseñanza matemática (Congreso de Zaragoza) 1980

Obras de divulgación

Artículos bibliográficos (Progreso matemático y Boletín de crítica, enseñanza y bibliografía matemáticas) 1891-5; 1899-900-1907-10
Reivindicación de la ciencia 1899
Las matemáticas en España (Congreso de Besançón 1893
Les mathématiques en Espagne (L' Enseignement mathématique) 1901
La enseñanza de la ciencia matemática en la Universidad 1891
La ciencia en la antigüedad y en nuestros días (discurso) 1880
Armonías del mundo físico 1890
Literatura científica contemporánea. Se publicó también en la «Revista de España» 1876
El Progreso Matemático ..... 1891-95 y 1899-90

PRÓLOGO

Causará asombro y extrañeza a quien siquiera se tome la molestia de leer la cubierta de este nuevo trabajo, el ver que no abandonamos la que puede considerarse como fenecida empresa de divulgar los estudios matemáticos entre nosotros, pues nada nos preocupa este orden de ideas; y aunque algo nos preocupase, los vetustos planes de enseñanza que, entre otras muchas deficiencias (que no corresponde tratar en este momento), tienen la falta capital, en el orden pedagógico, de ofrecer a los alumnos dos primeros cursos completamente vacíos de doctrina, de métodos y de medios educativos de la inteligencia, ofreciendo el manjar poco nutritivo de las materias que trataban las matemáticas anteriores al siglo XVIII con algún que otro aditamento modernista, tal como es la teoría de los determinantes y algunas nociones de Geometría proyectiva o de la posición. Pero nada de substancial referente al Cálculo funcional, ni siquiera a nociones de esta teoría que ya constituyen objeto de estudio en la sección de matemáticas elementales, fuera de España.

Pero si la finalidad nos falta por carecer esta ciencia de adeptos desinteresados, ya que no entusiastas, pues esto sería mucho pedir, siquiera nos decidimos a publicar este breve trabajo, con toda la concisión posible, sin desarrollos suficientes de cada asunto, sin medios gráficos o descriptivos que pudieran servir de auxilio para la más clara comprensión de las ideas o de los razonamientos, por creer que podremos aprovechar las

materias elegidas, en las explicaciones de nuestros próximos cursos como complemento y síntesis de algunas teorías expuestas, principalmente en nuestro *Tratado de Análisis* que terminó, por falta de impulsión externa, en la primera parte de la *Teoría de las ecuaciones diferenciales*, principalmente dedicada al problema de la integración clásica, por más que en este tomo, así como en los anteriores de la obra, se hace referencia a algunas teorías de actualidad.

Lo que decía Descartes al fundar su nuevo método en la Ciencia, podemos repetirlo al referirnos a la Matemática en España.

La indiferencia, el feroz y preponderante utilitarismo que sólo mira al fin inmediato, nos ha llevado a un estancamiento crónico y a la cómoda manía de no pensar, cuando no a un retroceso, fundado en el deseo de rebajar todo nivel que se juzgue superior al hondo nivel ordinario, parecido al egoísmo del náufrago que todo lo atropella en favor de su propia salvación. Por eso hay que barrer hasta los últimos escombros y edificar de nueva planta.

Laborábamos algo (y no decimos ya ni siquiera *laboramos*); pero verbigracia en hallar logaritmos, en construir tales o cuales tablas, en aproximar valores numéricos, en calcular errores, reptando en vez de caminar. Nos encastillamos en los abacos y máquinas de contar como Raimundo Lulio buscó una máquina de pensar o como Jevons construyó otra para obtener silogismos, en el cálculo de la Lógica.

Reducimos la Matemática a un museo, buscando una clasificación de objetos a veces quiméricos, fundados en la arbitrariedad individual que nos conduce a lo particular, distanciándonos cada vez más del espíritu científico que consiste en la generalidad, rebajando el orden ideal hasta el orden concreto.

Respecto a la materia, no se amplifica el contenido de la ciencia clásica, cuyo último confín lo vemos en los trabajos de Lagrange y Laplace, que Lacroix sintetizó en su monumental *Traité de Calcul différentiel et integral*, Monge en su *Application du Calcul à la Géométrie*, Legendre en sus *Exercices de Calcul intégral* y Lagrange en sus *Réflexions sur la résolution algébrique des équations* y sus *Leçons sur le Calcul des fonctions*.

Y no sólo no extendemos el orden material de los descubrimientos hallados hasta entonces, sino que los desfiguramos, atrofiándolos bajo forma de exposición indigesta y repulsiva.

Al leer el antiguo tratado de Lacroix o los ejercicios de Legendre y el cálculo de las funciones de Lagrange, podemos concebir que sirvieran de fuente de inspiración a talentos creadores como Abel, Jacobi y otros, que extendieron la ciencia con el sólo conocimiento de tales obras; porque en ellas se oculta una filosofía que ordena los conceptos y establece sus correlaciones mutuas, así como un orden metódico que puede servir de pauta para la creación o perfeccionamiento de otros métodos.

Y hemos de reconocer que esta filosofía siempre es la misma; porque es el fondo de las cosas que sucesivamente se extiende cuando la mirada del espíritu ha enfocado nuevas regiones de este fondo, que se hallaban según se hallaron las nebulosas antes de presentarse como astros perceptibles y de tal o cual manera determinados.

El método, modo de proceder del espíritu, es también el mismo en sus líneas generales, ramificándose tan sólo a medida que lo exigen sus varias finalidades que aparecen sucesivamente en el campo de la ciencia o campo visual del espíritu.

Y hemos de reconocer, desde luego, lo urgente que es presentar uno y otras al recorrer este campo, con sus notas características y el coordinar los materiales según estos dos tipos correspondientes a la especulación y a la acción.

Dos maneras hay de llegar a este doble fin. La primera es la seguida hasta la actualidad, que lleva consigo el inconveniente de que la riqueza de materias ahoga la unidad bajo la que éstas se subordinan. Y sólo estudiamos retazos o trozos. Y en la más amplia forma, el *summum* de estos resultados se halla en la *Encyklopaedie der Mathematischenwissenschaften*, donde encontramos el arsenal de conocimientos, métodos y teorías matemáticas. Esta obra monumental se ha realizado sobre un cúmulo inmenso de publicaciones de todo género.

En el siglo XIX, sobre las teorías comprendidas bajo los nombres de *Aritmética, Algebra, Geometrías elemental, proyectiva,*

descriptiva e infinitesimal, Cálculo diferencial e integral y *Teoría de las funciones*, se han acumulado las teorías de los *grupos*, de los *conjuntos*, del *Algebra de las formas*, tratados especiales de funciones e infinidad de trabajos conducentes a enriquecer la teoría de las funciones de variables complejas, las teorías de las series enteras y funciones analíticas y principalmente la integración moderna de las ecuaciones diferenciales en sus dos aspectos cualitativo y cuantitativo, y, en sus últimos avances, la Matemática se ha internado en teorías tan originales y elásticas como la de las ecuaciones integrales y las funciones de líneas que ha dilatado considerablemente el cálculo de variaciones de Lagrange.

Pero el objeto del presente trabajo no se refiere a la composición y forma de la Ciencia; y sólo consiste, en facilitar la adquisición de los conocimientos matemáticos y la formación de las aptitudes científicas. Es un trabajo de carácter predominantemente pedagógico, pero extremadamente abreviado, pues la carencia de lectores en esta clase de obras, me lleva al mayor grado de concisión posible. Por eso hago referencia a mi *Tratado de Análisis*, que se convierte en un complemento útil y necesario de esta labor pedagógica.

Me propongo desterrar inveteradas rutinas que no sólo dificultan la adquisición de la ciencia, sino que la hacen repulsiva y antipática, defecto que se acentúa cada vez más. ¡Y cuánta responsabilidad cabe por ello a nuestros publicistas matemáticos!

Nuestros libros de enseñanza o de divulgación parecen compuestos por máquinas. Son obras hechas a destajo con miras hacia el lucro inmediato, no meditadas con arreglo a un plan definido en pro del máximo producto educativo e instructivo. El marco a que se ajustan todas ellas es el mismo con ligerísimas variantes, la acción intelectual exigida es un mecanismo subordinado a la memoria. No existe la libre acción intelectual deductiva que lleva por encadenamientos evidentes a las transformaciones, a las modelaciones, a la exteriorización o manifestación explícita de lo que se halló latente con el carácter provisional, de elementos adherentes o de enlace que, como nudo in-

visible, sujeta otros elementos coexistentes, perceptibles o manifiestos que forman las ecuaciones u otros objetos de naturaleza varia.

Estos diversos procesos del desenvolvimiento matemático, juntamente con otros que ocasionalmente veremos, son aquéllos sobre los cuales llamaremos la atención para evitar en todo lo posible, la intervención inconsciente y ciega de la memoria.

Cierto es que no podemos prescindir de las hipótesis que transforman unas expresiones en otras con el fin de normalizar los objetos o hacerlos más sencillos y reducidos a fin de eliminar elementos extraños o parásitos que llevan a otros sistemas u objeto distintos de nuestro objeto principal o que conducen a algún objeto o sistema irreducible.

Las hipótesis son saltos bruscos en el progreso científico, formas irregulares debidas a la inspiración del genio o a alguna *idea feliz*, como por ejemplo, el método de *variación de la constante* de Lagrange o el de D'Alembert para integrar sistemas de ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Pero existen otras hipótesis que son transiciones sucesivas de formas o modos de ser de las entidades que se continúan en un razonamiento y que sin abandonar la evidencia por un sólo instante, nos lleva al final, como veremos, al seguir los razonamientos de Lagrange o de Laplace en el cálculo de las funciones o en el de las ecuaciones de derivadas parciales.

Las hipótesis suelen consistir en el modo de dependencia de las funciones o en la forma de la expresión o en reducción a casos particulares de un problema o en modos de descomposición en problemas elementales o en cualquiera simplificación que lo reduzca a grados sucesivos de un procedimiento complejo o a la reducción de otros problemas o cuestiones conocidas, como por ejemplo, cuando se reduce la integración de una ecuación de derivadas parciales a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias o a una ecuación de Bernoulli, de Clairaut o de Riccati, o una ecuación de diferenciales totales a un sistema de ecuaciones de derivadas parciales. Y estos son los escalones

que forma la ciencia para elevarse de unas teorías o problemas a otros, despejando y allanando los caminos.

Principalmente consideraremos como hemos hecho en otras ocasiones (*) *cantidad* u objeto cualquiera y sistema; *correspondencia*, *correlación* y *representación* (relaciones), *normalización* o regularización, *singularidades*, caracteres o cualidades individuales (modos). La *combinatoria* y el *simbolismo* (acción intelectual constitutiva, efectiva, inmanente o representativa formal) y la *transformación* (operación generadora transcendente) que cambia unas regiones o sistemas en otros. Y este modo de considerar los conceptos que indico nada más, ha sido tratado por mí en varias conferencias, cursos extraordinarios y publicaciones.

Y aunque a algunos parezca anticuada la materia expuesta en el desarrollo de este trabajo, referente a matemáticas del siglo XVIII, no deja de ser útil en el arte de pensar, pues precisamente estos clásicos que escribieron hace más de un siglo, son modelos que, no sólo enseñan a discurrir, sino que pueden servir de fuente de inspiración y son de gran provecho en el orden pedagógico, pues, particularmente, en los trabajos de Lagrange y de Ampère se nota un gran fondo de filosofía matemática que no vemos hoy en los tratados escritos en lengua española, por más que yo me haya esforzado en ofrecer a mis compatriotas el resumen de los inventos y teorías de la mayor importancia conocidas allende los Pirineos; porque antes que lanzarnos a descubrir mediterráneos, hemos de conocer lo que otros han hecho, lo existente.

Y es en alto grado vergonzoso que cuanto más años han transcurrido en el siglo XIX hasta contar ya tres lustros del siglo XX, la exposición científica española retrocede de un modo alarmante para nuestra intelectualidad que parece hoy hallarse de cuerpo presente.

Y, en efecto, me basta citar la obra española *Instituciones*

(*) Véase (Congreso de Zaragoza) *Ensayo de clasificación de las ideas matemáticas, y en el Boletín de Crítica, enseñanza y Bibliografía matemática, Fundamentos para una clasificación de las ideas matemáticas*, p. 74-80, 196-209.

de cálculo diferencial e integral, por D. José Chaix, escrita en 1801, y comparar su natural sencillez y su recuerdo de los sugestivos métodos newtonianos respecto a desarrollo en series con los libros de matemáticas indigestas y repulsivas que hoy entre nosotros se publican por autores intransigentes con las obras de los demás, aferrados a transformaciones interminables, cuyo fin y objeto nunca se llega a ver o a lo sumo como un punto lejano del horizonte que se pierde por su insignificancia y que en seguida evoca a cualquiera, como ya dije en el *Sumario de mis cursos* aquellos versos: *Tantas idas y venidas, tantas vueltas y revueltas, quiero amiga que me digas ¿son de alguna utilidad?*

Y si comparamos estos y otros libros parecidos a almacenes de objetos varios, clasificados o encasillados, según puntos de vista individuales y detallistas, como si constituyeran un inventario de muebles de una almoneda, difíciles de retener ni aun en la memoria por su abigarrada constitución, que parecen hechos *exprofeso* para causar tedio y repulsión, con la sencilla filosofía que se descubre en todos los párrafos de las *Leçons sur les fonctions*, de Lagrange; en la *Application de l'Analyse* de Monge y en las memorias de Ampère, tratadas en este folleto, se verá cuán justa es esta crítica y cuánta responsabilidad corresponde en nuestro retroceso científico (por más que hoy se disfrace bajo el socorrido título de *estudios prácticos, ciencias de observación* u otros análogos conducentes a despojarnos de lo que existía entre nosotros de intelectualidad) a todos los autores o maestros cuya acción que debiera ser propulsora, lleva al estancamiento o al retroceso y al vacío intelectual, por falta de alicientes que despierten y vigoricen las inteligencias, que al encaminarse a través de las teorías, también se dirigen a las aplicaciones, como demostraron matemáticos tan insignes cual Gauss, Lagrange, Laplace, Ampère, Monge, Dupin, Poncelet y otros.

Y aunque el defecto capital entre nosotros fué siempre el preferir los idealismos de la poesía y de la oratoria, asociados a los estudios congéneres referentes al personalismo y no al objetivo externo; comparando los dos tercios primeros del si-

glo XIX con los años restantes transcurridos hasta el actual momento, notemos una inferioridad abrumadora si ritamos los nombres que pudieran citarse por muchas docenas de talentos teóricos a quienes no hubieran faltado condiciones para los estudios de otra índole y haber constituído una gran densidad intelectual en los estudios científicos, con sólo corregirlos de los achaques de lirismo, por un encauzamiento que nos llegó muy tarde hacía los estudios que inmortalizaron a los Descartes, Newton, Galileo, Ampère, Faraday y otros muchos que pudieran citarse.

Hace cuarenta años, la casa de Medina y Navarro editaba las obras de Platon, Aristóteles, Descartes, Leibniz, etc., la de Gaspar y Roig publicaba las de Chateaubriand, las de los viajes de Colón y otras análogas; hoy hemos descendido a que sólo predomine la caricatura, lo que habla a la vista y en general a los sentidos, pero no a lo que llena el fondo del alma con ideas puras y razonamientos abstractos o concretados a descubrir la espiritualidad que encierra el universo, expresada por la ciencia pura y por sus aplicaciones.

Termino haciendo notar que a las nociones matemáticas destinadas a mis cursos teóricos he agregado otras nociones de Matemática-físico-química por creerlas como complemento obligado en los estudios físico-químicos de la licenciatura de aquéllos.

Pues, en efecto, además de la Matemática pura existe la Matemática de la Naturaleza con regiones correlativas tales como la Aritmética, el Algebra y la Geometría de la Naturaleza, el cálculo funcional, la estética y la dinámica de la Naturaleza para cuyo mejor conocimiento, he incluído en las nociones teóricas unos capítulos concernientes al cálculo de probabilidades, al potencial y a las series trigonométricas.

Método algebraico de ajuste y eliminación de Lagrange y de Monge

Método de Lagrange.— Comenzamos por tratar del desarrollo de una función de una variable, cuando se atribuye un incremento a ésta.

Desde luego observa Lagrange que el desarrollo de la función $f(x+h)$ no puede contener términos con potencias fraccionarias de h tales como $uh^{\frac{m}{n}}$, porque al sustituir $x+h$ por x en fx, no podría aumentar ni disminuir el número de radicales de fx, mientras x y h son cantidades indeterminadas. Pero por tener un radical o potencia fraccionaria multiplicidad de valores, al combinarse en la función desarrollada cada valor de fx con cada valor de un término del desarrollo con exponente fraccionario, resultarían más valores en la función desarrollada que en la función sin desarrollar, lo que es absurdo. Y tampoco podrán existir, en el desarrollo, términos con exponentes negativos, porque siendo m entero, $\frac{r}{h^m}$ sería infinito y sería preciso que fx fuese infinita, lo que sólo puede realizarse para valores particulares de x: Y desarrollada la función $f(x+h)$ en serie entera, los coeficientes de las diversas potencias de h son funciones de x que se llaman respectivamente la *primera*, la *segunda*, etc., funciones derivadas de fx.

Y en este desarrollo vemos cómo Lagrange obtiene las derivadas de las funciones potencial, logarítmica, exponencial y las circulares, siendo estas funciones los elementos que constituyen las funciones que pueden formarse por operaciones algebraicas, de lo que pasa a formar las funciones derivadas de funciones, p, q, r, ... de una misma variable (*Leçons*, pág. 25-46).

Y hay que considerar ahora una doble correspondencia de cómo influyen en estas componentes de y, la alteración sufrida por x; y mirando p', q', ... como nuevas funciones, por procedimiento iterativo, se obtienen las expresiones de p'', q'', ... (Idem pág: 51).

Y aun en el caso de la función implícita dada por $F(x, y) = 0$ la variabilidad mutua de x e y y la indeterminación del incremento de x permite un ajuste que determina la expresión de la derivada (Véase en el formulario (1) y *Leçons*, pág. 52-54).

Y, cuando una función contiene varias variables hay que obtener las relaciones entre las funciones derivadas (Véase *Cálculo diferencial*, pág. 54-62) según las cantidades consideradas como variables, siendo éste el punto fundamental referente a los enlaces entre las mutaciones, entre las cuales se hallan en primer término las que constituyen el cambio de variables (Véase *Leçons*, p. 62-68, *Galdeano, Cálculo diferencial*, p. 79-91).

El caso del desarrollo de las funciones cuando se da un valor determinado a la variable que lleva a la consideración de lo infinito e indeterminado, cuando los exponentes son fraccionarios o existen irracionalidades, es un comienzo de la teoría de las singularidades que Lagrange examina en el desarrollo de la serie de Taylor, siendo en ello ciertas excepciones que no influyen en la teoría general. Y la determinación del valor exacto del resto lleva a la expresión de las funciones, mediante un número finito de términos.

Pero las derivadas que han servido a Lagrange como medio para la formación de las series de las que las hace originarse, ofrecen un nuevo sistema de operaciones algebraicas, constituyendo la clave para la formación de las funciones.

Dos formas diferentes de una función de una variable igualadas entre sí, forman una *ecuación idéntica*, por verificarse independientemente de la variable y por consiguiente cuando se le atribuya un incremento h (*Leç.* p. 111), tomando las derivadas de cada término, se van formando las ecuaciones derivadas de los diferentes órdenes, que además de x e y, irán conteniendo sucesivamente nuevos elementos, tales como y', y'', ... que implica

también la consideración de x como función de y con ecuación prima entre y, x, x', ecuación segunda con y, x, x', x'', etc., cuyas combinaciones permiten obtener ecuaciones primitivas (Lagrange, *Leçons sur le calcul*, etc., página 112).

Además, verificándose las ecuaciones derivadas al mismo tiempo que las primitivas, así como sus diversas combinaciones, y permaneciendo las mismas las constantes de una función en sus derivadas, podremos eliminar tantas de éstas como una ecuación primitiva lleva ecuaciones derivadas que serán ciertas al mismo tiempo que la primitiva, conteniendo tantas constantes de menos como unidades contiene el exponente de su orden.

Así la ecuación primitiva combinada con las ecuaciones derivadas primera y segunda dará una ecuación de segundo orden con dos constantes menos que la ecuación primitiva, y así sucesivamente. Y una ecuación de segundo orden puede resultar de dos ecuaciones diferentes de primer orden, cada una con una constante arbitraria de más, una ecuación de tercer orden podrá derivarse de tres ecuaciones de segundo, pudiendo tener tres primitivas de este orden y así sucesivamente (Lagrange, p. 151-167. Galdeano, *Cál. dif.* p. 92-98).

Una circunstancia hay que tener presente, la de poderse preparar la ecuación de modo que la constante arbitraria quede libre de variables, en cuyo caso la ecuación derivada también se hallará libre de la constante, resolviéndola cuando se pueda respecto a la constante (*Leçons*, pág. 157).

Al pasar de las ecuaciones derivadas a las primitivas, vemos que el número de constantes arbitrarias va aumentando. Y, por ejemplo, la primitiva de una ecuación de segundo orden tendrá dos constantes arbitrarias y no podrá tener más, por no ser posible su eliminación entre dicha ecuación y sus dos derivadas, lo que deduce Lagrange considerando el desarrollo en serie, en cuyos coeficientes entran los valores de y y sus derivadas sucesivas para $x = 0$. Y puesto que en una ecuación de primer orden puede despejarse y' en función de x, y, en una de segundo y'' en función de x, y, y', etc., se obtienen sucesivamente los valores de $(y^{(n)})^0$ para $n = 1, 2, \ldots$ con una, dos, ... constan-

tes arbitrarias, respectivamente (*Leçons*, página 161). Formulario (*b*)), observando por consiguiente que, *si se ha obtenido, de cualquier modo que sea, una ecuación que satisfaga a una ecuación derivada de orden cualquiera que contenga tantas constantes arbitrarias como indique este orden, dicha ecuación será su primitiva con toda la generalidad de que es susceptible.* De manera que las constantes arbitrarias forman el enlace entre las ecuaciones primitivas y las derivadas, siendo por tanto éstas más generales que aquéllas, de las cuales se derivan a causa de las constantes desaparecidas. De modo que equivalen a todas las ecuaciones primitivas que sólo diferirán por el valor de estas constantes, que según mi modo de expresión, quedan latentes o como elementos adherentes, que pueden manifestarse o hacerse explícitos en las ecuaciones primitivas en una correlación indestructible, que permite el libre tránsito de las unas a las otras.

Y, además, como una ecuación de segundo orden puede provenir de dos de primero, una de tercero de tres de segundo, etc., se observa una ley distributiva de las varias jerarquías de ecuaciones que se ramifican, extendiéndose con las diversas constantes explícitamente existentes, para establecer una perfecta reciprocidad con sus valores latentes en las ecuaciones diferenciales.

Esta distribución aparece, a poco que se medite, en las consideraciones de Lagrange que presenta una serie de desarrollos de $f(x-x)$, $f'(x-x)$, ... en los cuales, cuando se trata de una ecuación de primer orden (que da y', y'', ... en x e y), después de sustituir los valores de y', y'', ... obtenidos por derivación indefinida, llega a una ecuación entre x e y con la constante arbitraria y^o; en el caso de una ecuación de segundo orden (que da y'', y''', ... en x, y, y'), después de sustituir los valores de y'', y''', ... en x, y, y', llega a dos ecuaciones en x, y, y', cada una con una constante arbitraria y^o e $(y^o)'$, ecuaciones primitivas de primer orden de la propuesta de segundo, y así sucesivamente, ecuaciones por su forma esencialmente diferentes (exclusivas) que sólo pueden existir en número igual al del orden de la dada

(*Leçons*, página 165, formulario (*c*)). Y podríamos añadir que forman un sistema irreducible, de modo que cualquiera otra ecuación de primer orden con una constante arbitraria que satisfaga a la de segundo orden dada, se hallará contenida en una de las dos primitivas obtenidas. Y de estas dos ecuaciones primitivas se deducirá la ecuación primitiva absoluta, sin funciones derivadas.

Ya hemos obtenido, desarrollando las ideas de Lagrange, un sistema que distribuye las funciones en forma análoga a la que un sistema de numeración distribuye todos los números enteros con exclusión unos de otros y de un modo completo. Pero de igual modo que una categoría de éstos sea la de los enteros, la de los fraccionarios, la de los irracionales y la de los transcendentes de diversas clases y así como las unas no se adaptan a las otras; de igual modo la totalidad de las funciones existentes en el campo funcional, no se adaptan a la particularidad de ser diferenciales exactas con relación a tal o cual sistema de cantidades tomadas como variables independientes. Y de esta circunstancia depende el que busquemos sistemas de funciones modeladas según esta cualidad, referente a las ecuaciones diferenciales.

De igual modo que entre las ecuaciones algebraicas sólo son resolubles algebraicamente las ecuaciones abelianas, cuyas raíces tienen la propiedad de hallarse enlazadas por una relación racional y las ecuaciones diferenciales se modelan mediante el factor de integrabilidad. Y así como no se puede proponer al arbitrio una ecuación algebraica que tenga raíces enteras o racionales, no puede proponerse una ecuación diferencial que corresponda a una integral; y esto depende en general del modo, según el cual, las funciones y las variables se hallan involucradas; y otra circunstancia que complica la cuestión, es el modo de existir las constantes fijas o arbitrarias.

Como en las ecuaciones algebraicas éstas han de subordinarse a la condición de ser abelianas, en las ecuaciones diferenciales existe la condición llamada de integrabilidad, que es la igualdad de las derivadas de los coeficientes que afectan a dx, dy,

respecto a la variable de la otra diferencial que por su simetría indica ya la neutralización u homogeneización respecto a una y otra variable.

Y se ve que la diferenciación y eliminación de la constante arbitraria hacen desaparecer un factor que debe sustituirse para que la propuesta sea una diferencial exacta (Lacroix, t. II, 261).

Y en el vasto campo que comprenden las funciones primitivas por un lado, las diferenciales por otro, a la manera que en el campo de las variables complejas se consideran en dos planos distintos o superpuestos, todos los valores de las z y de las $u + vi$, tenemos la infinidad de factores integrantes que pueden obtenerse por multiplicación cuando uno de éstos se ha obtenido. Y las formas de los factores integrantes, según circunstancias especiales, pueden verse en los tratados de Lacroix, t. II, p. 266-88 y de Boole, p. 61-88, Galdeano, *T. A.*, t. VI, *ec. dif.* Y la teoría del último multiplicador, importada por Jacobi, constituye una teoría sistemática donde predomina el concepto de normalización y reducción en forma recurrente (Laurent, *Traité d'Analyse*, t. VI p. 26-36. Jacobi, *Determ. func.*).

Pero, en el vasto campo de las ecuaciones diferenciales, además de la ecuación primitiva con todas sus constantes arbitrarias que le dan la mayor generalidad posible, existen otras que Lagrange llamó *singulares*, por no hallarse comprendidas en las ecuaciones primitivas. Y esto depende de que la constante a puede a su vez considerarse como variable.

Siguiendo el razonamiento de Lagrange (*Leçons sur le calcul des fonctions*, p. 179), vemos que el resultado de la eliminación de a entre la ecuación primitiva y su derivada es la misma, siendo a constante o variable, de modo que $f(x, y, y') = 0$ podrá resultar de $F(x, y, a) = 0$ lo mismo cuando sea constante que cuando sea variable y función de x, siempre que $F'(x, y, a) = 0$ sea $F'(x) + y'F'(y) = 0$. Y el ajuste verificado, en este caso, conduce a $a'F'(a) = 0$ que comprende las dos ecuaciones correspondientes a cada uno de los factores, el primero correspondiente a la ecuación primitiva ordinaria, y el otro, cuyo primer miembro es función de x, y, da el valor de a en x, y; por lo que,

al eliminar a, quedará latente en la ecuación primitiva, donde sólo se manifestarán x e y, constituyendo la solución singular, pudiendo, por otra parte, ser a una constante correspondiente a cada uno de los casos particulares, cuyo conjunto constituye la ecuación primitiva ordinaria (Id., pág. 183). Y puesto que la condición $F'(a) = 0$ expresa la existencia de dos raíces iguales, da la representación de este caso por medio de la envolvente, lo que es aplicable a una ecuación diferencial de cualquier orden (*Leç.*, pág. 186-193), observándose que siempre se obtiene la misma ecuación primitiva singular de cualquier ecuación primitiva que se deduzca. Así, tendremos las dos ecuaciones primitivas de primer orden, sustituyendo en $(x, y, y', a, b) = 0$ el valor de b en x y a y el valor de a en x, y, b, sacados de $F(x, y, a, b) = 0$, y las primitivas singulares, eliminando a en la primera, o la b en la segunda, mediante sus derivadas respecto a ó b.

Y, no sólo se deduce la ecuación primitiva singular de toda ecuación derivada de la cual se conoce una primitiva de orden inmediato inferior, sino que puede deducirse la ecuación primitiva singular de la sola ecuación derivada, pues sabemos que, eliminando a entre la primitiva $F = 0$ y su derivada respecto a x, resulta la ecuación derivada $F' = 0$, y resultará la singular, eliminando a entre la primitiva y su derivada respecto de a.

Si de $F' = 0$ despejamos a y sustituimos su expresión $\varphi(x, y, y')$ en $F = 0$, se tendrá una ecuación en x, y, y', derivada de $F = 0$ ó $F(x, y, \varphi) = 0$, cuya derivada será $F'(x, y) + \varphi' F'(\varphi) = 0$.

El primer término es idénticamente nulo, por ser el primer miembro de $F' = 0$, en el cual se ha sustituído la expresión de a por su valor φ deducido de la misma. Luego nos queda el segundo término, cuyos factores igualados a cero nos dan: El primero, $\varphi'(x, y, y') = 0$, ecuación de segundo orden que da la ecuación primitiva de primero, $\varphi = a$, que con $F(x, y, \varphi) = 0$ son las dos primitivas de $\varphi' F'(\varphi) = 0$, que es de segundo orden, de las que resultará la primitiva de $F(x, y, \varphi) = 0$ eliminando y'. Pero y' entra sólo en $\varphi(x, y, y')$; luego el resultado será el mismo que el de eliminar φ (sustituyendo φ por a), lo que da $F(x, y, a) = 0$.

Además, la otra ecuación $F'(\varphi) = 0$, por contener sólo y e y', puede considerarse como otra integral de la ecuación de segundo orden, sin constante arbitraria. Eliminando y' entre ésta y a de primer orden $F(x, y, \varphi) = 0$, se tendrá una nueva ecuación primitiva, diferente de la anterior. Y por hallarse y' tan sólo en φ, será lo mismo eliminar φ entre $F'(\varphi) = 0$, $F(x, y, \varphi) = 0$, lo que da $F'(a) = 0$, $F'(x, y, a) = 0$. Y el resultado de la eliminación será la primitiva singular de la propuesta.

Pasando a considerar las ecuaciones de segundo orden, cuya ecuación primitiva representamos por $F(x, y, y') = 0$, tendremos que la expresión de φ será $\varphi(x, y, y', y'')$ que será el valor de a sacado de dicha ecuación derivada $F'(x, y, y') = 0$, sustituyéndose dicha expresión en la primitiva. Y volviendo a retroceder por derivación, y suprimiendo el primer sumando, por ser idénticamente nulo, como se vió por el razonamiento anterior, la parte restante constará también de dos factores, siendo $\varphi' = 0$ de tercer orden, puesto que φ conteniendo y'', es de segundo, ecuación que dará la expresión de y''. Y tendremos, integrando, $\varphi = a$, que será de segundo orden. Y llegaremos por eliminación de y'' que se halla contenida en φ, mediante $F(x, y, y' \varphi) = 0$, al mismo resultado que por la eliminación de φ, es decir, a la ecuación primitiva $F(x y, y', a) = 0$.

La otra ecuación $F'(\varphi) = 0$ dará también por la eliminación de y'', el mismo resultado que por la eliminación de φ; y, por consiguiente, el mismo que por la eliminación de a entre $F'(a) = 0$, $F(x, y, y' a) = 0$, que son las mismas cambiando a en φ, a la ecuación primitiva singular de segundo orden, de la cual $F(x, y, y', a) = 0$ es la ecuación primitiva de primer orden (*Leçons*, pág. 215).

Vemos por lo expuesto la unidad de idea y de procedimientos que guía a Lagrange en sus investigaciones que encierran una profunda filosofía.

Construye un mundo de relaciones en el fondo de las funciones sometidas a la relación siempre existente entre las derivadas sucesivas de órdenes cualesquiera, no precisamente como el mundo de las cantidades infinitesimales de diversos órdenes

irreducibles entre sí que pueden tomarse hasta tal o cual orden para realizar dentro de un grado de finitud o infinitesimal construcciones y problemas dados, sino que estas derivadas se comunican entre sí por ascensos y descensos que permiten identificaciones para determinar ciertas cantidades, como se ha visto por los desarrollos anteriores.

Y ahora vemos que estas consideraciones se completan y se perfeccionan mediante la consideración del factor integrante, especie de regulador general en el mundo de las funciones.

Toda ecuación derivada $f = 0$ sólo puede ser el resultado de eliminar la constante arbitraria entre la primitiva $F = 0$ y su derivada $F' = 0$; y al sustituir a por φ se ha efectuado dicha eliminación.

Pero las ecuaciones $f(x, y, y') = 0$ y $F(x, y, \varphi) = 0$ pueden no ser idénticas; y entonces sólo diferirán por un factor que afectará a una de las dos, siendo función de x, y, y', e igualando una de ellas a la otra multiplicada por dicho factor, por tanto, al obtener la ecuación derivada, y teniendo presente que $F(x, y, \varphi)$ es igual a $\varphi' F'(\varphi)$, se llega a la forma general de la derivada $f(x, y, y')$ de la ecuación propuesta que esquemáticamente representamos por $a'_{x,y,y'} = MA'_{\varphi} \cdot \varphi' + \frac{M'}{M} \cdot a_{x,y,y'}$ (indicando con a la derivada de A).

Y observando que $F'(\varphi) = 0$, de primer orden, satisface a la ecuación de segundo orden $\varphi' F'(\varphi) = 0$, sin constante arbitraria; y tendremos que se podrá satisfacer a $f'_{x,y,y'} = 0$ mediante $F'_{\varphi} = 0$, y combinada con $f_{x,y,y'} = 0$ que pueden considerarse como sus primitivas de primer orden, bastando eliminar y' para obtener la primitiva singular.

Pero también de $f_{x,y,y'} = 0$ se obtiene $y'' f'_{y'} + f'_{xy} = 0$ que independientemente de y'' reducen esta ecuación a $f'_{y'} = 0$, y $f'_{x,y} = 0$, entre las que se eliminará también y'. Y si estos dos pares de ecuaciones dan la misma ecuación, tendremos la ecuación primitiva singular.

En caso contrario no existirá ecuación primitiva singular. Y cuando las dos funciones $f'(y')$, $f'(x, y)$ tienen un factor común, igualándolo a cero, satisfará las dos condiciones y dará la ecuación primitiva singular, eliminándose y' por medio de la propuesta.

Pero observaremos además que, siendo nulas dichas funciones, de las cuales una se halla multiplicada por y'' en la ecuación de que proceden, y'' se presentará bajo la forma indeterminada cero dividido por cero, de manera que bastará igualar a cero el numerador y el denominador de la expresión de y'' para hallar la ecuación primitiva singular de una ecuación de primer orden; y análogamente se concluirá para las funciones siguientes y''', y'''', ... al tratarse de los órdenes superiores al primero, consistiendo el carácter distintivo de estas soluciones el que estos valores son indeterminados.

Y si bien las ecuaciones primitivas singulares son menos extensas que las primitivas propiamente dichas, observa Lagrange que aquéllas pueden considerarse, desde cierto punto de vista, más generales que éstas; porque el problema consistente en hallar una ecuación derivada que tenga una ecuación primitiva singular dada, es indeterminado; problema que se resuelve por una serie de eliminaciones de las constantes que intervienen en las ecuaciones primitivas propiamente tales y ajustes, consistiendo una de las dificultades en reconocer *a posteriori*, si las funciones dadas, mediante las cuales se halla constituída cierta ecuación, dependen de una misma ecuación primitiva, de modo que puedan representar los valores de las constantes sacadas de esta ecuación y de sus derivadas.

Y como especialidad notable, citaremos el procedimiento de diferenciación de Clairaut que permite obtener integrales, diferenciando una de dos ecuaciones dadas con dos funciones arbitrarias de una variable u que trataba de eliminar, y sustituyendo el valor de dy sacado de la otra ecuación.

Continuando su generalización del estudio de las funciones, observa Lagrange que el cálculo de las derivadas parciales corresponde al de las funciones derivadas relativas a diversas varia-

bles. Y esto conduce a extensos desarrollos de derivaciones que se ramifican en el sentido de la multiplicidad de derivadas resultantes de continuar el proceso según tales o cuales variables independientes; y las relaciones pierden su simetría según que tal o cual variable se tome como principal. Y aun la teoría de las funciones de dos o de más variables puede reducirse a las de una sola variable, refiriéndolas a una variable t, como vimos al tratar de cambios de variables.

Y como ya se indicó, es de capital importancia, la ecuación condicional para que la diferencial considerada sea exacta, independientemente de relación alguna entre las variables, o ecuación idéntica para que la variable z pueda ser una función de x e y; y, por consiguiente, la ecuación diferencial propuesta tenga una primitiva en x, y, z. Y cuando dicha condición no se verifique, sólo podrá subsistir la propuesta, suponiéndose una relación cualquiera entre x, y, z, por la cual dos de estas variables sean función de la tercera. Y cuando sea imposible obtener la ecuación primitiva, puede darse a la función arbitraria una forma adecuada para la determinación de z, y en x (*Calcul des fonctions*, página 342), y, en muchos casos, convertir en variables las constantes arbitrarias, de modo que no varíen las expresiones de las derivadas x', y', z'; y entonces se tomarán las derivadas de las ecuaciones con respecto a dichas constantes para determinar las que sean necesarias.

Y si tiene lugar la ecuación primitiva con sus dos ecuaciones de derivadas parciales respecto a x e y, se verificará cualquier combinación de éstas que podrá sustituir a su ecuación derivada.

Ahora bien; si tenemos la ecuación $\frac{\partial z}{\partial x} + M\frac{\partial z}{\partial y} = N$, su ecuación primitiva será $z - Nx = \varphi(y - Mx)$ como puede verificarse diferenciando respecto a x e y y eliminando la función φ'. Y suponiendo, en el caso de ser M, N funciones cualesquiera dadas de x, y, z, y que $F(x, y, z) = 0$ sea su ecuación primitiva; obteniendo sus derivadas parciales y sustituyendo sus expresiones en la ecuación diferencial propuesta, se llega a la expresión de su ecuación derivada que llamaremos E. Además tene-

mos la expresión de la derivada $F'(x, y, z)$ como suma de las derivadas parciales, considerando a x, y, z como funciones de t. De estas dos ecuaciones resulta, (Lagrange, *Leçons sur le calcul des fonctions*, pág. 356).

$F'(x, y, z) = (y' - xM)\ F'(y) + (z' - x'N)\, F'(z)$ que se anulará igualando a cero los coeficientes binomios. Y estas dos ecuaciones permitirán determinar los valores de dos de las variables en función de la tercera, de manera que $F(x, y, z)$ será una función de ésta. Pero como su función derivada es nula, desaparecerá esta variable; luego la función F sólo contendrá constantes. Y como dichas dos ecuaciones son de primer orden, tendrán dos constantes arbitrarias a y b sus primitivas, pues si se elimina z entre estas dos ecuaciones, resultará una ecuación de segundo orden en la que podrá hacerse $x' = 1$ ó $y' = 1$, según que y se considere como función de x o ésta como función de y cuya ecuación primitiva tendrá dos constantes arbitrarias. Y en seguida se obtendrá z en función de x e y, mediante una de las dos ecuaciones. La función $F(x, y, z)$ se reducirá a una función $\Phi(a, b)$, y la ecuación primitiva a $\Phi(a, b) = 0$, o sustituyendo por a y b sus valores en x, y, z sacados de las dos ecuaciones primitivas, la ecuación primitiva de la propuesta será $\Phi(P, Q) = 0$ ó $Q = \varphi(P)$. Y en el caso de cuatro variables la ecuación primitiva será $R = \varphi(P, Q)$.

Partiendo Lagrange de la ecuación primitiva $F(x, y, z, a, b) = 0$, y considerando a, b como funciones de x, y, llega a las ecuaciones $F'(a) = 0$ y $F'(b) = 0$ ó en lenguaje corriente $\frac{\partial F}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial b} = 0$, condiciones a que satisface la ecuación *primitiva singular de la propuesta*. Y si b es una función cualquiera $\varphi(a)$ de a se satisface a las ecuaciones conocidas de condición, por $\frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial b}\frac{\partial \varphi}{\partial a} = 0$.

En resumen, $F(x, y, z, a, b) = 0$ es la forma de la *ecuación primitiva completa* y $F(a, \varphi a) = 0$ la de la ecuación *primitiva general*. Y de la ecuación primitiva completa resulta la *primitiva singular*, determinando a y b en función de x, y, z, mediante sus dos derivadas respecto a y b.

Y en cuanto a la representación geométrica, puesto que la naturaleza y posición de la superficie representada por la ecuación primitiva completa depende de estas constantes, bastará indicar que la superficie representada por la ecuación primitiva general será tangente en toda la extensión de una línea a una de las superficies representadas por la ecuación primitiva completa, en la cual se supondrá $b = \varphi a$. De manera que la ecuación primitiva completa $F(x, y, z, a, \varphi a) = 0$, donde a es constante, dará, haciendo variar el valor de a, una infinidad de superficies sucesivas, cada una de las cuales tendrá una línea de contacto con la superficie representada por la ecuación primitiva general.

Y si se considera a, b como variables, determinadas por las ecuaciones derivadas de F respecto a y b, lo que da la ecuación primitiva singular, la superficie representada por esta ecuación será tangente a la superficie de la ecuación primitiva completa, en la cual a y b serán constantes.

La introducción de las funciones arbitrarias es el verdadero carácter que distingue las ecuaciones derivadas de muchas variables de las que sólo tienen dos.

Llegamos finalmente al problema que trata de obtener las condiciones necesarias para que una función dada de $x, y, y', y'', \ldots$ sea una función derivada exacta de una función de orden inferior para lo cual se considera a y como una función de x desconocida, problema conocido bajo el nombre de *condiciones de integrabilidad* que trataron Euler y Condorcet, que trata Lagrange al final de la obra de que nos ocupamos y que termina con los principios del cálculo de variaciones, ya que, como dice Lagrange, este problema tiene una conexión íntima con el problema de los isoperímetros que, considerado en toda su extensión, consiste en obtener las ecuaciones que deben tener lugar entre las variables, para que la función primitiva desconocida de una función dada de estas variables y sus derivadas, se haga *máximo* o *mínimo*.

Método de Monge.—El método de Monge consiste en la evidencia que resulta de la contemplación inmediata del objeto, seguida de la traducción analítica de los hechos contemplados.

De la ecuación finita $M = 0$ de una superficie curva pasa a la expresión diferencial de z, en cuyos coeficientes diferenciales sustituye el valor de z en x e y, que serán funciones conocidas de estas dos variables. Y si x', y', z' son las coordenadas de un punto de la superficie, las expresiones relativas a las letras acentuadas serán las mismas que las de las letras sin acentuar.

Y dada la ecuación de un plano que será la misma para las letras acentuadas y sin acentuar, resultará eliminado el término común independiente por la combinación de las dos expresiones, obteniéndose la ecuación conocida del plano que pasa por un punto dado.

Pero siendo el plano tangente, cuando un punto infinitamente próximo al dado se halla también sobre la superficie curva, según cualquiera dirección, es decir, si la ecuación diferencial del plano para el punto x', y', z', es la misma que la ecuación diferencial de la superficie para el mismo punto, de la identificación de las ecuaciones correspondientes resultarán las del plano tangente. Respecto al plano normal, es muy sugestiva la consideración de dos esferas que se cortan en los dos puntos infinitamente próximos que, son sus centros, determinando un plano perpendicular a este arco infinitesimal que, considerado por otra dirección cualquiera en la superficie, determinará la normal, secciones que, para mayor sencillez, considera respectivamente perpendiculares al eje de las y y al eje de las x, de modo que en el uno será x' constante y en el otro lo será y', lo que dará las dos ecuaciones expuestas en todos los tratados.

Respecto a las superficies cilíndricas, se funda en el carácter de estas superficies de ser sus planos tangentes paralelos a la recta generatriz. Y en virtud de esta propiedad, si se transportan la recta y el plano tangente al origen, la nueva recta quedará contenida en el nuevo plano; y la identificación de las nuevas ecuaciones correspondientes dará la condición característica de las superficies cilíndricas. Y, de otro modo, ya que al

cambiar de posición el punto móvil quedando en la misma generatriz, las constantes o parámetros α y β o sus expresiones iguales $x - az$, $y - bz$ son constantes, o ya que al pasar de una a otra generatriz son variables; al ser estas dos cantidades simultáneamente constantes o variables, resulta que la una es una función cualquiera de la otra, dependiendo la forma de esta función de la naturaleza de la curva que dirige el movimiento de la recta generatriz, por lo que dichos binomios serán iguales respectivamente a α y $\varphi\alpha$.

Y si se conoce la directriz de una superficie cilíndrica, es decir, sus ecuaciones $F = 0$, $f = 0$ y la dirección de la generatriz dada por los coeficientes a y b de x e y; eliminando x, y, z entre estas dos ecuaciones y las dos de la directriz que acabamos de considerar, resultará una ecuación cuyo primer miembro, igual a cero, será una función arbitraria de dichos dos binomios iguales respectivamente a α y $\varphi(\alpha)$.

El obtener la ecuación de una superficie cilíndrica que envuelve una superficie dada, cuando se conoce la dirección de la generatriz, se reduce al problema anterior con sólo considerar que la superficie cilíndrica debe pasar por la curva de contacto de estas dos superficies. Y al sustituir la expresión de los coeficientes diferenciales de la superficie en la ecuación diferencial de las superficies cilíndricas, tendremos una ecuación $f = 0$ que pertenecerá, juntamente con la $F = 0$ de la superficie dada, a la curva de contacto, y habremos reducido este problema al precedente. E identificando las dos ecuaciones diferenciales, y anulándose a y b en el caso de ser la generatriz paralela el eje de las z, el resultado de eliminar z entre la ecuación obtenida y la de la superficie, dará la proyección de la línea de contacto sobre el plano perpendicular a la generatriz o sea el plano x, y.

Respecto a las superficies cónicas que se hallan engendradas por el movimiento de una recta que pasa por un punto fijo a, b, c, la condición de que el plano tangente ha de pasar por dicho punto o vértice, exige que la sustitución de los valores de las coordenadas corrientes en dicha ecuación por las coordenadas

del vértice la satisfagan, lo que reduce la superficie considerada a ser una superficie cónica.

Por otra parte, dadas las ecuaciones de la generatriz que son las de las rectas que pasan por a, b, c,; ya que al moverse el punto variable sin dejar la generatriz o, por el contrario, al pasar de una generatriz a otra los coeficientes α y β, son respectivamente constantes o variables, sus expresiones (diferencia de las abscisas divididas por la diferencia de ordenadas) serán, la una, función cualquiera de la otra. Y la forma de esta función dependerá de la curva que sirve de base a la superficie. Y, para obtener la ecuación de la superficie cónica individual, cuando se dan las ecuaciones de la directriz, bastará eliminar x, y, z de las cuatro ecuaciones, obteniéndose $f(\alpha, \beta \alpha) = 0$, ó $f\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right) = 0$

Si se trata de hallar la ecuación de la superficie cónica circunscrita a una superficie curva dada, puesto que para los puntos de esta curva las dos superficies tienen el mismo plano tangente, los valores de los coeficientes diferenciales han de ser los mismos en una y otra, de modo que, sustituyendo los de la superficie dada en la ecuación diferencial de las superficies cónicas, se obtendrá una ecuación $f = 0$ que pertenecerá a la curva de contacto que también está en la superficie dada $F = 0$, de lo que reduce el problema al anterior.

De igual manera, para el caso de las superficies de revolución; de que la cantidad α que determina la posición de un plano perpendicular al eje de rotación es constante para el mismo plano perpendicular y variable para otro cualquiera, así como en la ecuación general de las esferas concéntricas, cuyo centro $x = a$, $y = b$, $z = 0$ es la intersección del eje con el plano x, y, el radio β es simultáneamente constante o variable, según se halla en una misma esfera o en otra, se obtendrá la función característica de este género de superficies.

Respecto a las envolventes, considerando una superficie curva conocida, en cuya generación interviene cierto parámetro α cuya ecuación representaremos por $F = 0$; para cada valor de α representará una superficie individual, y el conjunto de

todas estas superficies individuales correspondientes a todos los valores de α, desde el infinito negativo al positivo, quedará envuelto por otra superficie que se llama la envolvente. Y si además dicha ecuación tiene otro parámetro β que sea una función $\varphi(\alpha)$ del primero, a cada forma de esta función corresponderá una envolvente individual distinta y para todas las formas posibles existirá una serie de envolventes, que tendrán un carácter general, una propiedad común y una misma generación independiente de la curva $y = \varphi(x)$.

Si en la ecuación general $F = 0$ de las curvas envueltas se da al parámetro α un incremento infinitamente pequeño, se obtendrá la ecuación de una nueva envuelta infinitamente poco diferente por su forma y posición de la primera; y la curva de intersección de las dos será la línea de contacto común de las dos envueltas consecutivas; de manera que si se diferencia la ecuación $F = 0$ respecto de α, la ecuación obtenida, pertenecerá a la curva de contacto. Dicha ecuación, con su derivada así obtenida, determinará la posición de la curva de contacto. Y se obtendrán curvas de contacto diferentes sobre la envolvente, dando valores distintos a α. Y eliminando este parámetro entre las dos ecuaciones, tendremos la ecuación de la envolvente. Esta línea de contacto de gran importancia en la teoría de derivadas parciales es la *característica* de la envolvente.

Además, cuando se ha dado al parámetro un incremento infinitamente pequeño, las dos nuevas ecuaciones que se obtengan serán las de una nueva característica infinitamente poco diferente de la primera que tendrá con ella uno o varios puntos comunes, para los cuales x, y, z no varían. Y cuando en las dos ecuaciones consideradas se incrementa el parámetro, tendremos la ecuación $F = 0$ y sus dos derivadas, primera y segunda, para estos puntos de intersección por reproducirse la segunda, derivando la primera. Y si en estas tres ecuaciones se dan al parámetro valores diferentes, se obtendrán por su eliminación los valores de las coordenadas, para los cuales la característica correspondiente encuentra a la que sigue; y existirán tantos puntos de esta especie como existan valores distintos del paráme-

tro, formando, sobre la envolvente, la serie de estos puntos la arista de retroceso así llamada, porque todas las partes de las *características* situadas a un lado respecto a sus puntos de contacto con dicha curva, forman una hoja de la superficie y las partes de la característica situadas al otro lado de los mismos puntos de contacto forman la otra hoja, siendo cada uno de los puntos de la arista de retroceso la intersección de dos características sucesivas. Y todas las aristas de retroceso de las envolventes sometidas a la misma generación, tienen también un carácter común, independiente de la curva que particulariza la envolvente.

Si dadas en el espacio dos curvas de doble curvatura, se hace mover una recta que se apoye en ellas, siendo constantemente paralela a un plano fijo, la superficie tendrá una propiedad independiente de las dos curvas directrices. Si no contiene vestigio de la naturaleza de éstas, contiene derivadas parciales de segundo orden, hallándose libre de toda función arbitraria. Si contiene vestigios de una de las directrices puede expresarse en diferenciales parciales de primer orden; pero con una función arbitraria, lo que es posible de dos maneras distintas; y si sólo contiene cantidades finitas, conserva vestigio de las dos directrices y contiene dos funciones arbitrarias.

En la superficie considerada, el plano tangente pasa por la generatriz. Y si el punto que consideramos se mueve sin salir de la generatriz, el nuevo plano tangente pasará todavía por la generatriz y cortará al primero según ésta.

Basta considerar las ecuaciones: 1.º, del plano fijo que pasa por el origen y al cual la generatriz es constantemente paralela; 2.º, la del plano tangente a la superficie; 3.º, la del plano paralelo al fijo que pasa por el punto considerado.

Si el punto de contacto cambia de posición en la superficie, cualquiera que sea la dirección de su movimiento, el nuevo plano tangente cortará al primero en una recta, cuya ecuación se obtendrá diferenciando la ecuación del plano tangente en la que $\frac{dy}{dx}$ depende de la dirección del movimiento del punto de

contacto (x', y', z' coordenadas generales del plano). Pero si el punto de contacto no sale del plano paralelo al plano fijo, dx, dy dz, tendrán entre sí la relación que da la ecuación de este plano lo que dará la ecuación $Adx + Bdy + C(pdx + qdy) = 0$ (véase *Applic.*, de Monge, pág. 64) por la que se obtendrá el valor de $\frac{dy}{dx}$. Y puesto que la intersección de los dos planos tangentes consecutivos debe coincidir con la generatriz, los valores de x', y', z' serán los mismos para las cuatro ecuaciones que deben verificarse para todos los puntos de la superficie, es decir, cualesquiera que sean x, y, z, $\frac{dy}{dx}$.

Luego eliminando $\frac{x-x'}{z-z'}$, $\frac{y-y'}{z-z'}$, $\frac{dy}{dx}$, la ecuación resultante

$$(Cq + B)^2 r - 2(Cq + B)(Cp + A)s + (Cp + A)^2 t = 0$$

de derivadas parciales lineales, será la de la superficie buscada.

Respecto a la característica, considera Monge dos superficies sometidas a la misma generación, siendo comunes asi dos tangentes en cada uno de los dos puntos que se consideran en las directrices. Estas dos superficies tienen común la característica. Y para obtener la ecuación diferencial observa que, siendo dicha línea común una línea de contacto, x, y, z, p, q tienen los mismos valores en las dos superficies, y no cambian, por consiguiente, al variar el parámetro, siendo r, s, t las únicas que dependen del mismo respecto a las cuales se obtendrá la ecuación diferencial (*T. A.*, t. VI, pág. 656), a la cual se debe añadir las dos que expresan que las diferenciales de p y q son nulas y eliminar las derivadas de r y t respecto a s para obtener dicha ecuación diferencial, que es de segundo grado y da dos valores para el coeficiente diferencial de la característica, siendo las dos características resultantes dos ramas de una mismas curva; y en el caso considerado, resultan dos factores lineales iguales cuya integral es $Ax + By + Cz = \alpha$, ecuación de un plano paralelo al fijo que corta a la superficie en la generatriz.

Respecto a las superficies desarrollables, en las cuales dos

características sucesivas se hallan en un mismo plano; pudiéndose considerar la envolvente compuesta de elementos planos de longitud indefinida, de anchura infinitamente pequeña, su ecuación diferencial $rt - s^2 = 0$ deriva de la ecuación del plano tangente; x, y, z varían, sin que varíen p, q, $z - px - qy$, e igualando a cero por consiguiente las diferenciales de estos tres coeficientes. Y, además, al satisfacer simultáneamente a estas dos ecuaciones diferenciales el valor de $\frac{dy}{dx}$, cualquiera que sea éste, eliminándolo se obtiene dicha ecuación diferencial. Y, puesto que al variar el punto de contacto en las superficies desarrollables sin que el plano tangente cambie de posición, dichos tres coeficientes son simultáneamente los tres constantes o los tres variables, de manera que uno es una función de los otros dos, y sus ecuaciones son diferenciales parciales primeras, de manera que la ecuación en la que $F(p, q, z - px - qy) = 0$, indica una función cualquiera de tres cantidades, pertenece en general a una superficie desarrollable.

Y siendo una superficie desarrollable la envolvente del espacio recorrido por un plano en virtud de una sola de las tres condiciones que la determinan, y por consiguiente de las tres constantes que entran en la ecuación del plano; y siendo dos de ellas funciones de la tercera, esta ecuación tendrá la forma $z = x\varphi\alpha + y\psi\alpha + \alpha$.

Resumiendo con objeto de distinguir los caracteres generales del método de Monge, indicaremos someramente que para hallar la ecuación de la superficie desarrollable que pasa simultáneamente por dos curvas de doble curvatura en el espacio, determina en la última ecuación las funciones φ y ψ mediante las ecuaciones de cada curva, aprovechando además las condiciones de pasar el plano móvil por los puntos de contacto de las dos curvas; y por eliminación se llega a la condición para que el plano pase por cada una de las tangentes.

Pero sobre todo reconocemos que la idea culminante del método de Monge es la de la *característica*, curva de que se hallan formadas todas las superficies sometidas a la misma generación.

Las ecuaciones de derivadas parciales son más generales que las ordinarias. Su propiedad consiste en expresar las generaciones de las superficies curvas independientemente de las curvas que conducen las generatrices; de modo que el lugar geométrico de una de estas ecuaciones es indiferentemente una cualquiera de una serie infinita de superficies todas engendradas por el mismo procedimiento, pero diferentes por las curvas que sirven para la generación.

Por ejemplo, la ecuación $py - qx = 0$, cuya integral es $z = \varphi(x^2 + y^2)$, pertenece, no sólo a las superficies de todas las esferas cuyo centro es el origen, cualquiera que sea el radio, y no solamente a todas aquéllas cuyo centro está en el eje de las z, cualquiera que sea el radio, sino además a todas las superficies de revolución alrededor de este eje, cualquiera que sea la curva generatriz.

«Las superficies a las que pertenece una misma ecuación de diferencias parciales, difieren entre sí por algo más considerable que en lo que difieren los lugares de una misma ecuación de diferencias ordinarias. Sin embargo, tienen esto de común, que pueden mirarse como el lugar de series infinitas de líneas curvas que tienen la misma ecuación de diferencias ordinarias y que, por consiguiente, sólo difieren entre sí por los parámetros, teniendo de particular estas superficies, que para cada una de ellas, la serie de estas mismas curvas es diferente. Por ejemplo, todas las superficies de revolución alrededor del eje de las z son los lugares de series de circunferencias, cuyos centros se hallan en el eje, cuyos planos son perpendiculares a este eje y que sólo difieren entre sí por el radio. Y cada una de estas superficies tienen de particular que, para ella, esta serie difiere de las de las otras» (Monge, *Applic. de l'Analyse a la méom.*, pág. 237).

Y a esta curva de que se hallan formadas todas las superficies sometidas a la misma generación, es a lo que llama Monge curva *característica*.

Para las ecuaciones de diferencias parciales de órdenes superiores, puede haber tantas características como cantidades

diferentes de las que se hallan compuestas las funciones arbitrarias.

Como ejercicio que puede servir de modelo para conocer los procedimientos empleados por Monge y útil para los alumnos què se dedican al profesorado, para quienes está escrito el actual folleto, citaremos el problema que resuelve con respecto a *la superficie curva cuyas normales son tangentes a una misma superficie cónica de base arbitraria.*

Empleando consideraciones puramente geométricas, considera la serie de normales de la superficie propuesta tangentes a la superficie cónica en los diferentes puntos de la generatriz, porque pasa el plano tangente, plano que será normal a la superficie propuesta en todos los puntos de intersección con ella, intersección que será una de las líneas de curvatura; y suponiendo que este plano efectúe un giro infinitamente pequeño alrededor de la recta de contacto con el cono, arrastrando consigo la curva, según la cual, cortaba a la superficie en la primera posición, todos los puntos de la curva, en este movimiento infinitamente pequeño se moverán perpendicularmente al plano, sin que la curva salga de la superficie; de modo que la zona comprendida entre dos planos consecutivos podrá considerarse como engendrada por el movimiento de una curva plana, constante de forma, alrededor de uno de los lados de la superficie cónica considerado como eje; de manera que la superficie propuesta se considerará como engendrada por el movimiento una curva cualquiera, plana y de forma, cuyo plano rueda alrededor de una superficie cónica de base cualquiera.

En esta generación, el camino de cada punto de la generatriz es normal al plano móvil, y por consiguiente perpendicular a la generatriz, cualquiera que sea la posición de ésta. Y puesto que la generatriz es una de las líneas de curvatura de la superficie engendrada, las curvas recorridas por los puntos de la generatriz serán las líneas de la otra curvatura. Y como durante el movimiento del plano, la distancia de cada punto de la generatriz al vértice del cono permanece constante, la curva por él descrita se hallará en la superficie de una esfera, cuyo

centro es el vértice del cono. Todas las líneas de una de las curvaturas se hallan en los planos tangentes a la superficie cónica y todas las de la otra se hallan sobre las esferas concéntricas, cuyo centro es el vértice del cono, y como la generatriz no se mueve en su plano, cuando éste gira alrededor de uno de los lados del cono para pasar al inmediato, se encuentra todavía sobre la curva que ha pasado también a su posición inmediata; y el lugar de todos estos puntos será una arista de retroceso de la superficie engendrada. Y, en fin, la superficie propuesta podrá también engendrarse por el movimiento de una curva plana cualquiera, cuya directriz recorre la superficie del cono de base cualquiera y cuyo plano es constantemente normal a la superficie cónica.

Para la resolución analítica, suponiendo el vértice del cono en el origen, representando por x, y, z las coordenadas de un punto de la superficie engendrada, y por x', y', z' las del pie de la perpendicular bajada a la superficie cónica, expresaremos el cuadrado de esta distancia como una función arbitraria de la distancia del punto al vértice del cono. Y siendo $\frac{y}{z} = \varphi\left(\frac{x}{z}\right)$ la ecuación de la superficie cónica, cuyo vértice se halla en el origen, queda $x = z\alpha$, $y = z\varphi\alpha$, que acentuadas expresarán la condición de hallarse el pie de la perpendicular en la superficie cónica. Y puesto que esta perpendicular es un *mínimo*, su magnitud no debe variar variando z' sola o variando α sola, por lo cual las derivadas de la expresión de esta distancia respecto a z' y α han de ser nulas lo que da dos ecuaciones. Y tendremos cuatro ecuaciones entre x', y', z'; y llamando, por brevedad,

$$\alpha x + y\varphi + z = M, \quad 1 + \alpha^2 + \varphi^2 = h^2$$

se tendrá

$$x'h^2 = Mz, \quad y'h^2 = M\varphi, \quad z'h^2 = M$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación de la superficie, se obtendrá otra ecuación en x y z con la arbitraria α y $\varphi\alpha$. Pero, no habiéndose empleado más que tres de las cuatro ecuaciones, sustituyendo el valor de z' en la cuarta se obtendrá otra ecuación también en x, y, z con α y $\varphi\alpha$, de manera que la

superficie engendrada es el resultado de eliminar α entre estas dos ecuaciones (Monge. *Appl.* p. 254).

Método formalista de Laplace y de Ampère

La tendencia formalista en la Ciencia matemática prevaleció exclusivamente hasta la época de Lagrange y de Laplace que aspiró, desde épocas remotas, a la resolución formal de las ecuaciones algebraicas y diferenciales por medio de fórmulas constituídas por un número limitado de símbolos de las operaciones y funciones conocidas.

En este momento bastará citar previamente, como ejemplo de tal modo de proceder, el método de Laplace expuesto en el tomo VI de la *Teoría de las ecuaciones diferenciales* para la integración de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables, por medio de integrales definidas. Y no insistiré en este punto que puede verse en dicho tomo que es el X de la *Nueva enciclopedia matemática* (págs. 280-296). Y aunque también se halla expuesto en el mismo tomo un resumen de la memoria de Laplace, *Recherches sur le calcul intégral aux différences partielles* (págs. 680-702), insistimos en este asunto que se relaciona con los puntos de vista que comprende el presente folleto.

Laplace considera como integrada una ecuación de diferencias parciales; cuando queda reducida la integración a la de otra de diferencias ordinarias, y se propone hallar un método para asegurarse de si una ecuación es susceptible de una integral completa, en el caso de ser lineales las ecuaciones de diferencias parciales, género de ecuaciones que se encuentra en la aplicación del Análisis a la Naturaleza, cuando se trata de determinar las oscilaciones infinitamente pequeñas de un número infinito de corpúsculos que se agitan los unos sobre los otros de un modo cualquiera y cuyo estado primitivo puede ser cualquiera.

Generalizando la ecuación que trató D'Alembert, presen-

tándola bajo la forma (I) (*T. E. D.*, p. 680) y considerando a z sucesivamente como función de x, y o de x, u, lo que le permite a su vez considerar a u como función de x e y, lo que conduce a la diferencial de u respecto a x e y que puede sustituir en la de dz respecto a x, y se obtiene por ajuste la expresión de los coeficientes diferenciales parciales respecto a x e y que sustituye en la ecuación (I), y dispone de la indeterminación de u para el ajuste que descompone la ecuación (I) así transformada en otras dos, una de las cuales es diferencial ordinaria (pág. 680), lo que permite, después de integrada, sustituir el valor de y en función de x, u, en la función V^1 que es función de x, y, z, hallándose reducida con esto la ecuación a $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^1 + V = 0$ reducible a una ecuación diferencial ordinaria. Y, mediante el factor de integración N, reduce u a ser función de θ, que en el caso de ser $u = \theta$ reduce a ser función de x, u. Y V se reducirá a V^1, función de x, z en la ecuación de diferencias ordinarias que, suponiendo u constante, dará la integral bajo la forma $S = C$, siendo S función de x, z, u, con C función cualquiera de u o de θ; de manera que $S = F(\theta)$ será la integral de la propuesta.

Además de este procedimiento de ajuste y de sustitución, Laplace emplea otro basado en la representación de z por series, suponiendo que al ser arbitraria la función de θ que entra en la expresión de z, puede designarse por $h(\theta)$, siendo h infinitamente pequeño.

Y, puesto que el lector puede enterarse de esta exposición en las obras citadas, bastará indicar cómo Laplace efectúa modificaciones útiles en las expresiones diferenciales e integrales, normalizando la expresión final de $z = N + N^1$ que satisface a la ecuación propuesta cuando θ es función determinada de x, y. Y análogas consideraciones haríamos en el caso de ser indeterminada, fundándonos en la transformación de x, y en $\omega + hF(\theta)$, para examinar los casos en que la integral completa es posible o imposible, llegando a la famosa serie llamada de Laplace por los autores modernos Darboux, Goursat, etc., que han tratado esta importante cuestión (*T. E. D.*, pág. 707).

Ampére.—En las dos célebres memorias de Ampère podemos estudiar todavía esta tendencia formalista de los métodos clásicos.

Observa que para ser general una integral, no deben resultar entre las variables consideradas y sus derivadas hasta el infinito, otras relaciones que las expresadas por la ecuación propuesta. Las integrales y las soluciones particulares, además de estas relaciones entre las variables y sus derivadas, establecen otras nuevas y por consiguiente sólo expresan casos particulares. Y si las integrales particulares pueden completarse de manera que lleguen a producir las integrales generales en las cuales se hallan comprendidas, no puede acontecer lo mismo con las soluciones particulares que expresan relaciones incompatibles con las que representan las integrales generales. Y, por tanto, para que las integrales puedan ser generales, es necesario que contengan cantidades arbitrarias, a fin de que, después de haberse eliminado entre la integral y sus derivadas al infinito, sólo queden las relaciones expresadas por la ecuación propuesta y por sus derivadas, es decir, depuradas de cuanto exista extraño a las mismas.

Y una de las primeras consideraciones conducentes a este fin, es el del aumento del número de arbitrarias con el de las diferenciales. Con este propósito, observa que, si a partir de la integral primitiva de una ecuación diferencial de orden m se diferencia un número n, mayor que m, de veces; y si se diferencia en seguida $m - n$ veces la ecuación diferencial de orden m, resultando h ecuaciones por la primera operación y h' por la segunda, es necesario, para que la diferencial de orden m tenga la misma generalidad que la integral dada, que las h ecuaciones obtenidas por la primera operación contengan $h - h'$ arbitrarias, a fin de que, eliminadas, no queden más de h' ecuaciones; puesto que h ecuaciones pueden reducirse a h' cuando hay $h - h'$ arbitrarias o más, pero nunca cuando hay menos. Habrá un ajuste o una superabundancia (*T. E. D.*, pág. 415).

El carácter formal del método de Ampère, como los de Lagrange, Laplace, y, en general, todos los matemáticos hasta

Cauchy y Abel, se nota con sólo recorrer la serie de arbitrarias que considera, así como la circunstancia de que entren o no entren integrales parciales en la composición de las funciones arbitrarias o integrales *sin cuadraturas parciales*, como las llamó Imschenestchy, y la reducción a una forma común de todas las integrales parciales.

Acerca del modo de introducirse nuevas arbitrarias, vemos que, partiendo de $k + 1$ ecuaciones principales y pasando a las derivadas de primer orden, se tendrá $2(k + 1)$ ecuaciones de este orden en las que, además de las cantidades contenidas en la integral se encuentran p, q con las $2k$ derivadas de α, β, ... respecto a x e y (α y β .... son las cantidades de que se componen las funciones arbitrarias, desprendidas de signos de integración parcial).

Y hemos de observar que Ampère considera al principio α como función de x e y, mas no como función de una sola de estas variables, lo que permite el tránsito de las unas a las otras; de manera que si tomamos x con α como variables independientes, y será, como las otras cantidades que entran en la integral primitiva, una función de x, α, siendo $k - 1$ el número de las otras cantidades β, γ, .. de que se componen las funciones arbitrarias; agregando z e y se tendrán $k + 1$ funciones de x, α; y como la integral tiene $k + 1$ y da diferenciando en esta hipótesis $2(k + 1)$ ecuaciones, se podrán sacar los valores de las derivadas primeras de y, z, β, γ, .. respecto a x, α, y, derivándolas, obtener los valores de $p, q, r, s, \ldots$ Y emplea la notación que seguimos en la exposición de este método (*T. E. D.*, páginas 410-40) para hacer visible la particularidad señalada, pues, en efecto, el Análisis ofrece dos formas de expresiones arbitrarias que satisfacen a la condición indicada en la p. 414 (*T. E. D.*), la primera perteneciente a funciones arbitrarias de argumentos expresados por funciones determinadas de las variables principales, respecto a las cuales se diferencia (α, β, ...), la segunda al caso en que los argumentos que entran bajo los signos de funciones arbitrarias en la integral general, se expresan por funciones *implícitas* de las variables principales, de modo que es-

tas expresiones varían al mismo tiempo que la *forma* de las funciones arbitrarias. Por ejemplo, la integral de $(z''-z'z_u)^2=z^2, z''z_u$ se expresa por

$$z=\frac{x\alpha^4-2\alpha^2y+4\alpha^3\varphi(\alpha)}{3}-4\int\alpha^2\varphi(\alpha)d\alpha+\psi(\beta),\ y=\alpha^2\left(x+\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}\right),$$

$$\beta=\frac{y}{\alpha}+\alpha x+\varphi(\alpha)\ \text{(Imschenetsky)},$$

hallándose los argumentos α y β de las funciones arbitrarias φ y ψ expresados bajo formas implícitas de x e y determinadas mediante las dos últimas ecuaciones de la integral. Y también tenemos otra forma analítica llamada *integral parcial* o de *cuadratura parcial* (*T. E. D.*, pág. 415).

Y como, en una integral parcial, todas las cantidades distintas de la variable de integración deben considerarse como constantes, se obtendrán, diferenciándolas respecto a estas constantes, otras integrales parciales distintas, en general, de la primera, que se hallan en las ecuaciones (I) (pág. 415) y deben ser eliminadas individualmente. Por ejemplo x, y son parámetros arbitrarios en la integral $z=\int_{\infty}^{+\infty}\varphi(x+2u\sqrt{y})\,e^{-u}du$ de $z''=z$; y estas integrales *sin cuadraturas parciales*, no dan más cantidades arbitrarias que las ya contenidas en la ecuación de la integral, cuyo carácter consiste en ser el número de las funciones independientes igual al orden de las ecuaciones diferenciales a que pertenecen estas integrales.

Y el ser de capital importancia en este método, el hecho de aparecer por vez primera una nueva función producida por las diferenciaciones sucesivas de la integral primitiva, demostrando el teorema: *Si aparece por vez primera una nueva arbitraria* (cualquier función arbitraria de α no contenida en las ecuaciones de la integral) *en la expresión de la derivada* $z_k^{(i)}$ *de orden* $n=i+k$, *esta cantidad debe presentarse también necesariamente en todas las derivadas parciales de* n^{simo} *orden de* z_u, podemos ya sintetizar brevemente los razonamientos de Ampère e Imschenetsky, so-

meramente expuestos en la *Teoría de las ecuaciones diferenciales* (págs. 414-40), pues todo estriba: 1.º, en considerar a x, y, α ligadas por una ecuación $\alpha = f(x, y)$ que sirve de enlace mutuo de estas tres cantidades; 2.º, en hacer ver que $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ no pueden ser o ni ∞ (pág. 419) consecuencia de ser f o α función de x e y. Y siendo x, α independientes en las $k + 1$ ecuaciones de la integral, las otras, en número de $k + 1$ serán $y, z, \beta, \gamma, \ldots$, funciones de las primeras.

Y en cuanto al teorema, para demostrar su validez se demuestra que si es cierto para una de las derivadas $z_k^{(i)}$ de orden $n = i + k$, lo es para las dos derivadas consecutivas a izquierda o a derecha (pág. 419) o sea respecto a $(i+1)$, $k-1$ ó respecto a $i-1$, $k+1$; y puesto que en las expresiones dadas en esta página, resultará que no puede ser cero ni infinito la nueva arbitraria que entra por hipótesis en $z_k^{(i)}$ y que entra en los segundos miembros donde se halla $\frac{\partial y}{\partial x}$ y que no entra ni en las ecuaciones de la integral, ni en las expresiones de las derivadas de z hasta el orden $n-1$, no puede entrar ni en la expresión de y sacada de las ecuaciones de la integral, ni en las expresiones que resultan de derivar respecto a x las derivadas de orden $n-1$, $z_{k-1}^{(i)}$, z_k^{i-1}, donde α es constante; dicha nueva función arbitraria entrará en los primeros miembros de dichas ecuaciones, es decir, en la derivada a la izquierda y en la derivada a la derecha de $z_k^{(i)}$, razonamiento que se podrá repetir para las situadas a la izquierda y a la derecha de éstas, lo que demuestra el teorema; y puesto que $\frac{\partial y}{\partial z}$ no puede ser cero ni infinito, las funciones consideradas de α solo entran en los segundos miembros de las últimas ecuaciones por el multiplicador $z_x^{(i)}$ de los segundos términos. Y, además, cuando esto se verifique para el orden n, se verificará para el orden $n+1$, $n+2$, ... pues la derivada respecto α de la derivada de orden

n arriba considerada, contiene α que no puede entrar en la derivada de y respecto de α, porque la función primitiva correspondiente no entraba en y. Por lo tanto, la función de α entra en $z^{(i)}_{k+1}$, etc.

Y conforme a estos resultados, podemos considerar como derivadas *homogéneas* a la integral las que sólo contienen las mismas funciones arbitrarias de α que las contenidas en las ecuaciones de la integral (sin que necesariamente hayan de contenerlas todas).

Y serán *heterogéneas* a la integral respecto α las derivadas que contengan funciones arbitrarias de α no contenidas en las ecuaciones de la integral.

Tendremos en seguida que si las derivadas primeras son heterogéneas, también lo serán las sucesivas; si la de orden n arriba considerada es homogénea, todas las del mismo orden y de órdenes inferiores serán homogéneas a la integral. Y existe siempre una derivada en la que comienza a aparecer una función arbitraria que no se encuentra en las ecuaciones que forman la integral ni en las de los órdenes precedentes, y en cada uno de los órdenes siguientes se producirán nuevas funciones arbitrarias no existentes, ni en la integral ni en las derivadas de órdenes inferiores.

Cuando la integral contiene funciones arbitrarias cuyos argumentos son funciones de y sola, suponiendo α función de y sola, resulta que de las dos derivadas de orden n, $z^{(i+1)}_{k-1}$ y $z^{(i)}_{k}$ la primera es homogénea y la segunda heterogénea respecto α a la derivada z^{i}_{k-1} de orden $n-1$. De modo que son heterogéneas entre sí.

Además, las derivadas z', z'', ..., $z^{(n)}$, ... respecto a x, sólo contienen funciones arbitrarias de α que se hallan en la expresión de z. Las derivadas $z_{,}$, $z_{,}'$, ... $z_{,}^{(n-1)}$, una vez, respecto de y contendrán una sola y misma función arbitraria de α diferente a las que entran en z, las $z_{,,}$, $z_{,,}'$, ... contendrán dos funciones arbitrarias distintas de las que entran en z, y así sucesivamen-

te. Luego las expresiones de las derivadas que provienen de diferenciaciones respecto a x solamente son homogéneas y las demás heterogéneas a la integral.

En cuanto al número de funciones arbitrarias que deben entrar en las integrales primitivas para que puedan ser generales, ya se dijo que al obtenerse h ecuaciones cuando se deriva n veces la integral y h' ecuaciones cuando deriva $n - m$ veces la propuesta de orden m, siendo n mayor que m, el número de arbitrarias puede ser mayor que $h - h'$, pero nunca menor, porque en este caso la eliminación de las arbitrarias dejaría más de h' ecuaciones, y así la integral primitiva no establecerá entre x, y, z, y las derivadas de z hasta un orden cualquiera n, más que las relaciones que expresan la ecuación propuesta y sus derivadas; y suponiendo que k sea el número de las cantidades realmente distintas entre sí, que entran en la composición de las funciones arbitrarias, tendremos: 1.º, las cantidades α, β, ... y sus derivadas; 2.º, las funciones arbitrarias y sus derivadas, cuyo número se determina en la memoria de Ampère (*Journ. Ecole. dix-septième cahier*, p. 584-86 y *T. E. D.*, páginas 427-28).

Finalmente, llegamos a las ecuaciones que expresan las condiciones, a las cuales deben satisfacer las cantidades constitutivas de las funciones arbitrarias, no comprendidas en las integrales bajo los signos de integraciones parciales.

Designando por p, q; r, s, t; ... ζ, ... ν; ξ, π, ... ω las derivadas respectivamente de orden primero, segundo, ... $n - 1$, y n; y basándose en la relación

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha (x} = \frac{\partial v}{\partial x (\alpha} \frac{\partial y}{\partial \alpha (x} - \frac{\partial v}{\partial \alpha (x} \frac{\partial y}{\partial x (\alpha}$$

entre las derivadas consecutivas de orden $n - 1$, tomadas dos a dos, se establece una serie de relaciones; y sustituyendo los valores sacados de estas fórmulas en las derivadas de orden superior, es decir, del orden de la ecuación, llega Ampère a una ecuación (*T. E. D.*, p. 430) según las potencias de $\frac{\partial v}{d\alpha (x} : \frac{\partial y}{\partial \alpha (x}$.

Y sólo hay que considerar dos casos. El primero, en que entre las derivadas que se hallan en la ecuación dada existan heterogéneas a la integral respecto a la función arbitraria de z, y el segundo caso en que todas sean homogéneas.

En el primer caso, las derivadas de orden más elevado que se encuentran en la ecuación dada, contendrán exclusivamente una función de α que no podrá encontrarse en ninguna de las derivadas de z de los ordenes precedentes, ni en las que deriven de las de orden inmediatamente inferior, considerando α como constante, lo que no puede introducir ninguna nueva función de α, resultando que los coeficientes P, Q, ... de la ecuación citada, tendrán que anularse separadamente por contener la derivada respecto a cuyas potencias se halla ordenada dicha ecuación una función de α que no se halla en P, Q, ... Y, al contrario, cuando todas las derivadas de z hasta el orden de la propuesta son homogéneas a la integral respecto a la función arbitraria de α, todas ellas, y por consiguiente ω, sólo contendrán las mismas funciones que se hallan en la integral y por consiguiente en P, Q, ... de modo que los valores de las derivadas de z podrán hacer idéntica a la transformada sin que se anulen separadamente P, Q, R, ...

Y de este modo podrá determinarse, cuando una ecuación dada es susceptible de una integral primitiva de cuadraturas parciales, el número de funciones arbitrarias que depende de x o de y solamente y las que varían a la vez con x e y.

Respecto a las ecuaciones de derivadas parciales de segundo orden, nos basta referirnos al extracto de las ideas de este matemático que hemos publicado en la *Teoría de las ecuaciones diferenciales de segundo orden* (páginas 718-44) que se refieren a la existencia o no existencia de las integrales intermediarias, el cambio de variables, las combinaciones integrables, reducciones especiales, tales por ejemplo que sólo contengan r, s, t elevadas a la primera potencia, etc.

Determinación y generación

DETERMINACIÓN.—La determinación es el grado inferior de las operaciones matemáticas. La determinación se efectúa en Aritmética y Algebra por el cálculo directo, en Algebra, por la resolución de las ecuaciones y en Geometría, por encadenamiento de figuras, triángulos, circunferencias y sus elementos adjuntos, medianas, simedianas, bisectrices, círculos inscritos y circunscritos, etc. También la diferenciación y la integración determinan unas funciones mediante otras por medio directo o inverso. La diferenciación restringe haciendo desaparecer términos constantes, la integración expansiona produciendo funciones varias correspondientes a una misma diferencial.

Pero existe un medio de más íntima e inmediata determinación elemental, fundada en la teoría de los contactos que permiten asimilar elemento por elemento, dos líneas o dos superficies mediante contactos de órdenes diferentes, y esto origina el tratar el círculo osculador, la esfera osculatriz, la superficie polar, la arista de retroceso, las líneas asintóticas; lo que lleva a las curvaturas que no sólo determinan elemento por elemento las líneas y las superficies, sino que se llega a la teoría sistemática de las superficies aplicables y de la curvatura de los espacios

Como caso concreto, citaremos el problema: *Hallar la ecuación de la curva que es tangente a una infinidad de otras de naturaleza dada y sujeta a sucederse según cierta ley* (Lacroix, t. I, página 432) en el caso actual en que los centros de las circunferencias se hallan en una curva *DZ*; en el que se considera la curva *tocante* formada por las intersecciones sucesivas de las curvas *tocadas*.

Pero, en general, la determinación matemática es mediata, en todas sus ramas, como vemos desde el análisis platónico en Geometría elemental, pues la característica de la matemática es resolver las cuestiones por otras cuestiones intermediarias, que llevan siempre a un encadenamiento, más o menos perfecto,

según haya sido más o menos feliz la idea que lo ha dirigido; y en esto se distinguen los diversos métodos que pueden variar al infinito.

Con objeto de que este trabajo sea útil a la enseñanza, recorramos los varios métodos de integración clásica y veremos que consisten, para las expresiones racionales, en la descomposición en fracciones simples, en sus diversos casos, para las funciones irracionales (*T. A. M.*, t. IV, págs. 9-20), en transformaciones que hagan desaparecer el radical de segundo grado (*T. A. M.*, t. IV, págs. 21-28); para las integrales hiperelípticas y elípticas, emplear las transformaciones que las reducen a los tres tipos (Idem, págs. 28-67) en las que se efectúa un ajuste, mediante cierta función que se agrega y que permite resolver una ecuación que conduce a la simplicación buscada y la ley de recurrencia que hace depender el problema de las integrales más simples.

Las diferenciales binomias son un manantial inagotable de integraciones de expresiones, incluídas en la expresión general (Idem, págs. 67-82). Y esto se repite para las integraciones de las funciones exponenciales logarítmicas y trigonométricas, comprendiendo este capítulo multitud de integrales especiales, huellas de los trabajos individualistas que sucesivamente han ido enriqueciendo la ciencia, debidos a iniciativas más o menos afortunadas y que no pueden englobarse en procedimientos generales, entre ellos, por ejemplo, los que dependen de diferenciación e integración bajo el signo integral en las integrales definidas (Idem, págs. 83-159) y ciertas particularidades, como son los números de Euler y Bernoulli, los polinomios de Bernoulli y las series de Euler (Idem, págs. 180-187), todo lo que conduce a interesantes desarrollos de varias funciones en series. Y llegados a este punto, hay que citar las importantes series de Lagrange, Laplace, Burmann y Herschel (Idem, t. IV, páginas 206-208, t. I, págs. 192-99) de superior generalidad que las de Taylor y Mac-Laurin, todo lo que conduce a la extensa teoría de la integración por series, en que intervienen los polinomios de Legendre (Idem, págs. 270-91) cuando nos dirigimos en el sentido de las funciones esféricas, cilíndricas de Bessel, y

especialmente llegamos, dentro de este orden de ideas a las integrales eulerianas que tan capital papel desempeñan en el dominio de la Matemática clásica (Idem, t. IV, págs. 292-337). Y como remate de estas consideraciones, pero ya en la región moderna del Análisis que inauguraron Abel y Jacobi con la ingeniosa idea de la *inversión* de las integrales elípticas, nos hallamos con el capital concepto de las *transcendentes engendradas por la integración de las ecuaciones diferenciales* que exigen los recursos del moderno Análisis, creado por Cauchy con su teoría de las funciones monógenas, monódronas, polítropas y sinécticas y desarrollada con nuevos puntos de vista por Riemann en su teoría de las funciones de variables complejas, fase de la ciencia que no entra en el desenvolvimiento de este folleto, reducido a constituir un programa razonado de mis cursos elementales.

En Geometría quedan determinadas por definición las entidades. Así tenemos las envolventes, las evolutas, superficie polar (*T. A. V.*, p. 96), las aristas de retroceso (intersecciones de los planos normales sucesivos) para cuya ecuación hay que añadir a las de un plano normal con la de su inmediatamente próximo, la diferencial de este último, de las que se deduce el radio de la esfera que pasa por cuatro puntos sucesivos (*T. A.*, t. V, p. 71), la primera y segunda curvatura o de torsión, la superficie polar, las evolutas, radios de curvatura principales, líneas de curvatura, asintóticas, geodésicas, isotermas, etc., que son determinaciones por generación susceptibles de una variedad indefinida que constituyen los problemas especiales de la Geometría.

Pero en cuanto a la representación que determina las expresiones analíticas, observaremos que la representación cartesiana hasta hoy todavía mantenida como medio cómodo de hacer gráficos los conceptos del Análisis y que se asimilan a la Geometría de Monge, se sustituye en la Geometría diferencial por otra más inmediata y general fundada en las coordenadas gaussianas y en la variación de los parámetros que lleva a la aplicabilidad de las superficies y a la representación conforme, lo que constituye una nueva fase del Análisis geométrico.

Considerando en la ecuación de un círculo la ordenada del centro como función de la abscisa, derivando con relación a ésta y eliminándola entre las dos ecuaciones, se obtendrá la relación que debe existir entre x e y, cualquiera que sea la posición del centro N en la curva DZ; y esta relación será la ecuación de la curva LX, tangente a todas las circunferencias, según las condiciones dadas.

Dada una ecuación $V = 0$ entre x, y con una constante arbitraria α, si se dan a esta constante arbitraria todos los valores posibles, resultará una infinidad de curvas que podremos considerar como cortándose dos a dos consecutivamente; y en el conjunto de estas curvas, la ordenada y variará de dos maneras, ya pasando de un punto a otro de la misma curva, ya pasando de una curva a otra, en la misma abscisa, y tendremos dos ecuaciones respecto a las diferenciales dx, dy o a las $d\alpha$, dy. Y cuando se considera un punto común de las dos curvas y es el mismo para la una y la otra, $\frac{dy}{d\alpha} = 0$ que reduce la segunda ecuación a $\frac{\partial V}{\partial \alpha} = 0$, que expresa la relación existente entre α, x, y en el punto común de dos curvas consecutivas. Combinándola con $V = 0$, resultará por la eliminación de α la ecuación de la curva tangente a todas las que pueden representarse por $V = 0$.

Generación.—Comprende todas las operaciones directas que son esencialmente expansivas. El grado de expansión distinge las unas de las otras. Así la multiplicación de enteros es menos expansiva que la potenciación. Las operaciones inversas son restrictivas. Pero la naturaleza de los elementos produce en ciertos casos nuevas expansiones: por ejemplo, el sistema de los números fraccionarios, el sistema de las irracionales, de las transcendentes que tienden a agotar el continuo fondo esencialmente inagotable.

Pero las ecuaciones comprenden cantidades implícitas o latentes, cuya exteriorización es generalmente imposible de un modo exacto. Esto ha conducido en último término a la teoría

de las series enteras, en las cuales la convergencia uniforme da medios para la representación de las funciones y, en último término, se han llegado a estudiar directamente las discontinuidades de toda especie y generalmente las singularidades, relegando la continuidad a una categoría inferior que comprende el orden regular de crecimiento, como auxiliar o andamiaje de lo irregular, sea discontinuo o singular, que se produce cuando se fijan leyes que no pueden satisfacerse en un medio continuo.

Las generaciones geométricas dan sistemas cuyos elementos corresponden inmediata y directamente a las condiciones fijadas. Citando solamente los sistemas tales como por ejemplo, los proyectivos, las homografías, las involuciones, los sistemas polares, las figuras polares recíprocas, los complejos, las congruencias, los conexos, etc., vemos que todos son sistemas expansivos directos que no ofrecen imposibilidades, porque sólo se someten a leyes dadas de generación. Pero no ocurre lo mismo cuando de un molde dado, que es la ecuación, han de surgir ciertos elementos (incógnitas o integrales) en él involucrados que del estado implícito ha de pasar a ser explícito o exteriorizado. En este caso, ciertas cantidades latentes son lazos o medios de adherencia entre los elementos que aparecen en cada cuestión. La integración, la diferenciación y la eliminación son las operaciones que producen generaciones ascendentes y descendentes en el dominio de los diversos algoritmos.

Los diferentes algoritmos constituyen también medios generadores de cantidades. Tales son por ejemplo, las series, las fracciones continuas, las diferencias, las derivadas, las transcendentes, las funciones eulerianas, etc.

Pero limitándome al objeto de mis cursos, para los que está destinado este trabajo, me ceñiré a algunas aplicaciones del cálculo infinitesimal.

Ya, en el orden de las representaciones, vemos surgir la Geometría infinitesimal o diferencial de las aplicaciones de los principios de este cálculo.

Determinados en un triángulo infinitesimal los grados de infinitud de sus diversos elementos (*T. A.*, t. I, pág. 15-19) y con

la representación de la dirección de la tangente por la derivada primera, así como la concavidad, convexidad, la inflexión por el modo de comportarse la segunda derivada; y así como se estudia el modo de ser de las diversas ramas de una curva en el entorno de un punto y cuando sus ramas son infinitas, correspondientes a la rapidez del crecimiento de unos u otros elementos infinitesimales, llegamos al estudio general de los órdenes de contactos, de la osculación, sobreosculación, la curvatura, etc., que originan ya algunas ecuaciones diferenciales ya su relación con las ecuaciones primitivas (*T. A.* t. III y V, pág. 115, 171).

Y en este orden de ideas citaremos el modo de generación de ecuaciones diferenciales emanado de cada ecuación, finita mediante la eliminación de las constantes arbitrarias tan magistralmente expuesto por Lacroix (t. I, págs. 230-237) que hace ver cómo de la eliminación de las dos variables independientes entre una ecuación de tres variables y sus dos derivadas parciales, se obtiene una relación independiente de las cantidades eliminadas, lo que conduce a un género de ecuaciones que expresa el carácter de todas las funciones de una misma cantidad, cualquiera que sea su forma.

Al tratar el problema de la generación de las superficies, se principia por considerar una superficie como intersección de una infinidad de otras de naturaleza dada, es decir, deducidas de una misma ecuación general que contiene una constante arbitraria que toma sucesivamente todos los valores posibles. Y resultando dos de estas superficies de valores del parámetro muy poco diferentes que estarán muy próximas la una de la otra, podrán cortarse según una línea; e imaginando una serie de superficies que se suceden así, según cierta ley, acercándose cada vez más, determinarán un espacio cuyo límite será la superficie buscada.

Tomando una serie de planos por superficies generatrices, puesto que la ecuación de un plano que pasa por un punto depende de dos parámetros $f(n)$ y n, por eliminación, dejando f indeterminada se llega, como se sabe (*T. A.* t. I, pág. 01-5), a la ecuación diferencial de las superficies cónicas. Esta generación

comprende todas las superficies cónicas y análogamente las cilíndricas, por ejemplo, bajo la condición de pasar por una curva dada, mediante las ecuaciones de las directrices que se fijan o, por ejemplo, bajo la condición de que el cono sea tangente a una superficie dada, etc. Y así tendremos cuantas determinaciones queramos en el campo indefinido que representan las ecuaciones de derivadas parciales que hemos considerado. Y la superficie límite será tangente a cada una de las superficies generatrices, según la línea expresada por las ecuaciones arriba indicadas.

El cono y el cilindro tocarán sus planos generadores en toda la extensión de una recta, como la superficie de revolución tocará a sus esferas generatrices según una circunferencia.

Las curvas, según las que se cortan dos superficies generatrices consecutivas, son llamadas por Monge *las características* de la superficie límite, por imprimir a esta superficie un carácter independiente de las condiciones a las que puedan hallarse sometidas.

Cada una de las superficies generatrices contiene dos características que podrán cortarse en general y su punto de intersección se hallará al mismo tiempo sobre tres superficies generatrices consecutivas, de modo que sus coordenadas permanecerán constantes aunque el parámetro haya variado dos veces, teniéndose para este punto: $V = 0$, $\frac{dV}{dm} = 0$, $\frac{d^2V}{dm^2} = 0$.

Si se elimina m, quedarán dos ecuaciones pertenecientes a la curva formada por el conjunto de los puntos de encuentro de las características, tomadas dos a dos consecutivamente. Y esta curva que tiene cada uno de sus pequeños lados sobre cada una de las características, será tangente a todas y será respecto a ellas, lo que la superficie límite respecto a las superficies generatrices (Lacroix, t. I, pág. 598, véase *T. A.*, t. V, pág. 36-39).

Y respecto a las superficies desarrollables, se sabe que, derivando con relación al parámetro y eliminando se llega a la ecuación $rt - s^2 = 0$ de las superficies desarrollables (*T. A.*, t. I, página 97).

Y puesto que las superficies desarrollables son tangentes al plano tangente, según una recta que es su característica, las dos ecuaciones arriba citadas, juntamente con la derivada de la segunda respecto al parámetro, darán las tres ecuaciones que determinan la *arista de retroceso*. (*T. A.*, t. V. pág. 39).

Como ejemplo de determinación es muy instructivo el citar algunos problemas enlazados que conducen a las curvaturas.

Hemos de considerar primeramente la superficie que envuelve el espacio recorrido por una superficie curva cualquiera, constante de figura, que sin girar, se mueve a lo largo de una curva cualquiera de doble curvatura. La condición del problema equivale a una traslación. Y la superficie que envolverá el espacio recorrido tendrá una propiedad independiente de la curva que dirige el movimiento de la envuelta. Si por ejemplo la curva que dirige el movimiento es plana, y consideramos la envuelta en su posición primitiva, con su plano tangente, éste llegará a superponerse con el de la envolvente al fin del movimiento, lo mismo que los puntos de contacto, traduciendo estos hechos por las ecuaciones de z y dz en la posición primitiva, siendo x', y', z' las coordenadas del punto de contacto de la envuelta y x, y, z los de la envolvente. Esto y el paralelismo de los planos dará las ecuaciones que expresan z, p, q para x', y', z', es decir, con $z = z'$ que expresa se hallan los puntos de contacto a la misma altura. Y puesto que las cuatro ecuaciones se verifican simultáneamente para todos los puntos de la envolvente, es decir, cualesquiera que sean los valores de x', y', z', se podrán eliminar éstos, quedando una ecuación entre z, p, q que será la de la envolvente pedida.

Y puede verse que, recíprocamente, toda ecuación de esta forma es la de la superficie que envuelve el espacio en las condiciones del enunciado. Consistiendo el objeto de este cálculo inverso en hallar la *forma* de la función F supuesta desconocida, según la de f supuesta dada, puesto que la ecuación de la envolvente, en cantidades finitas, es el resultado de eliminar α entre $z = F(z - \alpha,\ y - \varphi\alpha)$ y su diferencial respecto de α, siendo $y = x$ la ecuación de la curva que dirige el movimiento.

Y si se conoce la forma de f por la ecuación $f(z, p, q)=0$, de su ecuación diferencial en la que sólo varían p, q respecto al parámetro y la diferencial de $dz = pdx + qdy$ respecto también al parámetro, se obtiene la ecuación de la característica por eliminación de los coeficientes diferenciales.

Tratemos ahora de la generación de la superficie curva cuyas líneas de una de las curvaturas están en un plano paralelo a un plano dado.

Monge supone el plano perpendicular al plano de las xy, pues de éste se puede pasar a otro plano en posición cualquiera al que será aplicable el razonamiento. Si ahora consideramos un plano que pase por el origen al que todos los demás deben ser paralelos y cuya ecuación general será la del primero con un parámetro aditivo α, constante para cada plano y variable, cuando se pasa de uno a otro; para cada línea de curvatura, este parámetro será constante. Derivando y sustituyendo el valor del coeficiente diferencial en la ecuación de la proyección de las líneas de curvatura, se tendrá una ecuación que expresará la relación entre p, q, r, s, t para que las líneas de curvatura estén en planos paralelos al dado. (*T. E. D.*, pág. 659).

Para hallar las ecuaciones diferenciales de primer orden, se diferencia respecto a r, s, t, obteniéndose la ecuación de la característica que se descompone de dos factores; uno de ellos da la característica en cada uno de los planos paralelos, el otro es el de la superficie curva en que se halla. Y eliminando r, s, t con auxilio de las expresiones de dp y dq, se llega a las ecuaciones de la característica (Monge, *Application de l' Analyse a la Géométrie*, pág. 139-143).

$$y - ax = \alpha', \quad \frac{ap - q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \alpha$$

Y puesto que si α es constante, α' también lo es, y si la una es variable, la otra también lo es, tenemos la integral

$$y - ex = \varphi\left(\frac{ap - q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\right)$$

Respecto a la otra característica, si por medio de su primera ecuación $Mdy + Ndx = 0$ se elimina M y N de la ecuación (1) de la superficie $(r+as)M-(s+at)N=0$ y se eliminan r, s, t mediante las expresiones de dp, dq, $dp=rdx+sdy$, $dq=sdx+tdy$ se tendrá por segunda ecuación de esta curva $dp + adq = 0$, y sustituyendo los valores de M y N, teniendo presente la expresión de dz, las ecuaciones de la segunda característica serán

$$dx+dy+(p+aq)dr=0, \quad dq+adq=0,$$

$$\text{de donde} \left\{ \begin{array}{l} x+ay+(p+aq)=\beta' \\ p+aq=\beta \end{array} \right\} x+ay+\ldots=\psi(p+aq) \quad (b)$$

Para llegar a la integral finita, observaremos que, si se tuviese entre r, y, z, p, q una tercera ecuación perteneciente a la misma superficie, obtenida por otro medio, esta integral finita sería el resultado de eliminar p, q entre estas ecuaciones.

Pero tenemos la expresión de dz que define p, q; y bastará integrarla para obtener la tercera ecuación, pero en esta integral $z = px + qy + A$, es necesario que A sea función arbitraria de p, q, consideradas como constantes durante la integración y tal que las diferenciales de la integral respecto a p, q queden satisfechas. Tendremos

$$z=px+qy+\pi(p, q), \quad (c), \quad x+\pi'=0 \quad (b) \quad y+\pi''=0 \quad (c).$$

El que pertenezcan a las superficies consideradas exige la simultaneidad de las cinco ecuaciones (a), (b), (c), (d), (e), o que, eliminando x, y, z, las dos ecuaciones resultantes en p, q, π, π', π'' queden satisfechas. De estas dos ecuaciones resultantes se sacarán los valores de π', π'' en p, q; y sustituyendo en la expresión de $d\pi=\pi' dp+\pi'' dy$, se tendrá una ecuación diferencial ordinaria que equivale o sustituye a las dos ecuaciones resultantes y, por consiguiente, a dos cualesquiera de las cinco. Esta ecuación podrá hacerse integrable por un factor, puesto que (a) y (b) pertenecen a una misma superficie curva, lo que se verifica actualmente por ser (a) y (b) las integrales primeras de una misma ecuación de segundo orden. Y esta integral dará

la forma de la función π en p, q, que se sustituirá en tres cualesquiera de las ecuaciones (a), (b), (c), (d), (e).

Observaremos de paso, que así como una ecuación de derivadas parciales de primer orden es la expresión de la propiedad del plano tangente o de la normal de la superficie a que pertenece, una de segundo orden es la expresión de la propiedad de los radios o de las líneas de curvatura.

Y refiriéndonos a las propiedades de las líneas de curvatura en el problema que tratamos acerca de la *superficie cuyas normales son tangentes a una misma superficie cónica*, podremos considerar la ecuación de diferenciales parciales de segundo orden de sus líneas de curvatura y la ecuación diferencial de la línea esférica de curvatura (fórmulas (1) y (2), *Formulario*) y efectuar los cálculos y transformaciones indicadas. Y por pertenecer las dos ecuaciones a la misma curva, el valor de $\frac{dy}{dx}$ será el mismo para las dos, por lo que podrá eliminarse; lo que produce la ecuación diferencial de segundo orden; y por los cálculos indicados en el formulario se llega a la ecuación (4); y por hallarse la línea plana de curvatura en el plano trazado por la normal en el origen, tenemos el plano cuya ecuación en x', y', z' es la (5), su diferencial (6) o la (7), por ser las x', y', z' iguales a las x y z, cuando sólo se considera la línea de curvatura en el plano o la (8), después de sustituir por dz su valor. Y, eliminando mediante esta ecuación el coeficiente diferencial de primer orden, obtenemos la ecuación (9). Y sustituyendo en la ecuación de la característica (*T. E. D.*, pág. 656) los coeficientes de las diferenciales segundas, resulta la ecuación (10) y la (11), resultando que la superficie tiene dos características independientes; la primera sustituyendo los valores de α y β conduce a la integral (12) que pertenece a la superficie de la esfera, cuyo centro es el origen y cuyo radio es γ. Luego la primera característica es la intersección de la superficie con la de una esfera de radio arbitrario, cuyo centro se halla en el origen, no pudiendo producir la arista de retroceso, porque las esferas concéntricas no tienen ningún punto común. Y si de la ecua-

ción de la característica y la (5) se obtienen los valores de α y β, resulta $\alpha dz = dx$, $\beta dz = dy$; y sustituyendo en la ecuación diferencial de segundo orden, resulta la (14) para la ecuación general de las líneas de curvatura; de manera que la primera característica de la superficie es una de las líneas de curvatura.

Respecto a la segunda característica, cuya ecuación es la (9), que es la ecuación de un plano cuando α y β son constantes, se obtienen las ecuaciones (16) para dicha característica o despejando las diferenciales de α y β, las (17). Pero el segundo factor de los segundos miembros es nulo para todos los puntos de la segunda característica, lo que se ve por las ecuaciones (18), indicando la última de ellas que α y β son constantes en toda la extensión de la segunda característica, de modo que la segunda característica es plana, cuya integral se obtiene inmediatamente; y además se ve que la constante es cero, por lo que el plano de la curva pasa por el origen. Así pues, las características son las dos líneas de curvatura.

Se obtendrá una de las integrales primeras sustituyendo en la ecuación (4) los valores de r y t sacados de las diferenciales de p y q y se llegará a la fórmula (19).

Se obtendrá la integral de esta integral primera, recordando la expresión de la diferencial de la propuesta, considerando a p y q como únicas variables y haciendo, para abreviar $1+p^2+q^2=k^2$, se obtendrán las expresiones de P y Q que darán las fórmulas (20) y (21) después de haber eliminado ψ.

Terminaremos estas consideraciones respecto a la generación geométrica, refiriéndonos a las teorías de las superficies regladas alabeadas, envolventes de una familia de curvas en el espacio, superficies desarrollables, superficies envolventes tratadas en (*T. A.*, t. V).

Respecto a la Geometría analítica de Monge, basta concluir citando su modo de generación de las evolutas y envolventes en las superficies desarrollables, sus aristas de retroceso, etc.

Sistemas algorítmico y geométrico

ALGORITMIA.—*Cálculo numérico.*—Los sistemas de numeración de base cualquiera, son el fundamento primero del cálculo numérico que comprende enseguida los cálculos de los números fraccionarios e irracionales, exigiendo el de los números inconmensurables otros algoritmos especiales, como el de las series y de las fracciones continuas.

El binomio de Newton sirve de instrumento para toda clase de desarrollos de potencias de polinomios, y el método de coeficientes indeterminados es un instrumento esencial para dar formas regulares y recurrentes a las expresiones deducidas.

Cálculo numérico general.—Pero mayor importancia tiene el cálculo de los números expresados por símbolos literales, al que se llama cálculo algebraico y que comprende el grupo más elemental de las funciones. Pudiéndose citar como modelo de exposición de este cálculo la *Introduction* del *Traité différentiel et integral* de Lacroix (1810), que comprende los desarrollos de las funciones transcendentes: logarítmica, exponencial, circulares y sus relaciones (funciones de Euler), los desarrollos en series, la reversión de las series, los resultados que se originan en los trabajos de Newton acerca del desarrollo en serie de las raíces de una ecuación algebraica (*T. A. M.*, t. I, págs. 144-161).

Cálculo algebraico.—Es el cálculo, desde Diofanto y los árabes hasta Vieta y Newton en su *Arithmetica universalis.*

Algoritmos especiales.—Legendre en sus *Exercices de Calcul intégral,* comienza por el algoritmo que constituyen las funciones elípticas, exponiendo sus simplificaciones o normalizaciones, sus reducciones mutuas y dependencias recurrentes, su división en tres especies, las comparaciones de las de cada especie, sus enlaces, los métodos de aproximaciones y sus transformaciones.

Las integrales eulerianas expuestas a continuación de las funciones elípticas en dicho tratado, constituyen un tratado

sistemático basado en las relaciones y transformaciones del símbolo euleriano $\left(\frac{p}{q}\right)$ que facilitan el cálculo de las integrales por él representadas.

También citaremos los algoritmos de las factoriales de Kramp y de las facultades, expuestos en las obras de Oettingen y de Ohm y perfeccionados por Weierstrass y el de las funciones generatrices de Laplace.

Otros algoritmos que forman extenso campo de doctrina, son los cálculos de diferencias finitas y de variedades.

Algoritmo funcional.—1.º Los algoritmos directos comprenden el cálculo integral que se refiere a las funciones racionales, irracionales y transcendentes; su característica consiste en reducirse los más complicados a los más sencillos por medio de transformaciones o cambio de variables y por algunos métodos tales como la integración por partes, la diferenciación e integración bajo el signo integral, la reducción, por recurrencia, a integraciones cada vez más sencillas (*T. A.*, t. IV, *Cálculo integral*).

2.º Las teorías de ecuaciones algebraicas y diferenciales constituyen los algoritmos inversos que exigen varias teorías para su desarrollo.

a) La resolución de las ecuaciones algebraicas depende de la teoría de los grupos de sustituciones discontinuos, llegando en la Matemática moderna a las teorías de las funciones poliedrales y automorfas y funciones modulares elípticas. Esta teoría adquiere un carácter predominantemente combinatorio en el moderno algoritmo del Algebra de las formas homogéneas.

b) La resolución de las ecuaciones diferenciales, en el estado actual de la ciencia, ha llegado a referirse a la teoría de los grupos continuos y a un nuevo género de integración inmediata, en contraposición a la integración formal del período clásico, a que se refiere especialmente esta obra, en el período hasta Lagrange y Laplace.

La integración de las ecuaciones diferenciales es el cálculo de las funciones, según la expresión de Lagrange en su célebre obra que lleva este título. Y la cuestión se reduce a distinguir

y determinar las varias clases de integrales, generales, completas, particulares y singulares.

Esta variedad expresa cada modo de existencia en el campo funcional. La teoría del factor integrante que termina en la teoría normalizadora y reductora del último multiplicador (*T. E. D.*, p. 361), establece una regularidad en el campo funcional, consistente en establecer la correspondencia recíproca entre una diferencial y su integral, mediante dicho factor y las formas posibles de la infinidad de factores que hacen exacta una diferencial cualquiera.

Recorriendo la teoría de las ecuaciones diferenciales en el orden histórico, vemos cómo la integración se fué reduciendo a una serie de métodos particulares, tales como los consistentes en las ecuaciones de Bernoulli, de Riccati, de Clairaut, etc., ciertos cambios de variables que reducen sistemas de órdenes superiores a sistemas de ecuaciones de primer orden o a otras más sencillas.

La simplificación de la ecuación, como acontece con el método de la variación de la constante de Lagrange, la reducción de las ecuaciones lineales de orden cualquiera al caso de no tener segundo miembro y la especie de tanteo a que conduce el buscar una solución particular para resolver el problema, cuando existe un segundo miembro, las reducciones tales como la de una integral múltiple a sistemas de integrales simples; todo esto caracteriza lo precario de los métodos clásicos, basados siempre en alguna particularidad o hecho pasajero y no en principios generales.

Pero a la tendencia formalista e individualista que hemos tratado al ocuparnos de las teorías de Lagrange, Laplace y Ampère, sucede una teoría sistemática y combinatoria inaugurada por Jacobi, Mayer y Clebsch.

Ya tenemos, en primer término, los determinantes funcionales, especialmente el jacobiano, característica de existir relaciones entre las funciones consideradas, que dejan de ser independientes y el modo de amoldarse, en la forma del determinante, las funciones que intervienen en las ecuaciones de derivadas

parciales, hasta llegar al multiplicador de las ecuaciones de diferenciales parciales que conducen a un determinante funcional exacto (*T. E. D.*, págs. 334-51).

Además, en sustitución del factor integral que produce por amplificación ecuaciones diferenciales integrables de un modo indefinido, tenemos una distribución de las funciones en el campo integral que satisfacen a las condiciones de integrabilidad. Y otra distribución tenemos por una especie de desdoblamiento de las ecuaciones de diferenciales totales en sistemas de ecuaciones de diferenciales parciales, cuyo enlace es la propiedad de satisfacer cualquier integral de un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, reducido a su forma normal, a una ecuación de derivadas parciales (*T. A.*, t. IV, pág. 243); y de esto resulta una relación funcional entre varias integrales. Y citaremos especialmente la condición necesaria para que dos funciones V y v de x e y, sean función la una de la otra (*T. E. D.*, página 356), así como la extensión a un número cualquiera de variables del método fundado en el sistema de ecuaciones normales (*T. E. D.*, p. 358).

En cuanto al sistema de Lagrange-Charpit para la integración de las ecuaciones de diferenciales parciales no lineales, nos bastará indicar que para deducir la integral completa de una ecuación diferencial de la forma $F(x, y, z, p, q) = 0$, cuya relación primitiva implica el que la ecuación $dz = pdx + qdy$ satisfaga a la condición de integrabilidad, exige que p sea función de x, y, z y que q sea función de x, y, z, p, lo que permite, por identificación, llegar al sistema normal (*T. E. D.*, p. 380), lo que también se consigue formando una nueva función de las mismas letras, que juntamente con la propuesta, permita satisfacer a la ecuación de integrabilidad (Idem., p. 381). Y esto conduce a obtener por medio de la integral completa, por el método de la variación de las constantes, la solución más general (Idem, p. 394).

Y respecto a este mismo método generalizado que consiste en sustituir las expresiones de las derivadas parciales $p_1, \ldots, p_n$ de z en la ecuación de diferencial total que expresa el valor de

dz (Idem, págs. 410-413) tiene un carácter sistemático, basado en el empleo del símbolo $[F_i, F_k] = 0$ que conduce a establecer un sistema recurrente de relaciones, que permite determinar $n - 1$ funciones F_i. Y en este momento disponemos de los símbolos llamados paréntesis y corchetes de Poisson, con los teoremas de este matemático y de Donkin (Idem, págs. 471-86) que lleva a las constantes canónicas de Jacobi.

Como hemos dicho arriba, la teoría de los determinantes funcionales de Jacobi tienen un carácter sistemático que se afianza y complementa, partiendo de los sistemas completos de Clebsch y los jacobianos (Idem, págs. 369-78) que conduce a los métodos de Jacobi y de Mayer y a los sistemas en *involución*, según la denominación de Lie (Idem, págs. 497-513) que se continúa con el método de Hámilton para las ecuaciones de la dinámica (Idem, págs. 515-36).

Y como relaciones especiales normalizadoras y recurrentes, tenemos la que ofrece el problema de Pfaff (Idem, p. 571) y las que llevan a la integración de las ecuaciones de diferenciales totales (Idem, págs. 563-71).

La tendencia simbólica es una continuación o depuración de la tendencia formalista por la que realiza ésta de un modo absoluto el reducir a formas, sin objeto, las relaciones basadas en leyes las más generales y abstractas, tales como la iteración, la conmutabilidad y las leyes asociativa y distributiva, constituyendo una combinatoria abstracta. En la *Teoría de las ecuaciones diferenciales* (páginas 826-37) se exponen unas nociones de lo realizado en este sentido por Morgan y Boole.

Por último, tenemos como la mayor generalización posible en la Matemática, el cálculo combinatorio que todo lo domina como forma general e ineludible de todo cálculo matemático, pues las leyes combinatorias se imponen desde el binomio de Newton y las fórmulas de Taylor y de Maclaurin, de Moivre, de Cotes, triángulo aritmético de Pascal, etc., y se concretan en casos especiales tales como por ejemplo en las operaciones combinatorias de los sistemas completos y jacobianos y en las reglas que rigen a los paréntesis y corchetes de Poisson que diri-

gen también toda formación recurrente, que es predominantemente, una relación iterativa, como sucede en el empleo de la fórmula de Leibniz para la obtención de las derivadas de diversos órdenes (*T. A. M.*, t. I, págs. 69-74) que conducen a los números de Euler y de Bernoulli, a los desarrollos de las funciones esféricas, cilíndricas de Bessel, polinomios de Legendre, etc., (*T. A. M.*, t. I, p. 74 y t. IV, págs. 270-91). Y estas leyes combinatorias son adherentes al objeto mismo como propiedades íntimas e ineludibles, así como hay otras leyes abstractas que permanecen en nuestra inteligencia sin transcender a objeto alguno, como moldes vacíos de relaciones que fijan relaciones puramente lógicas, como el cálculo lógico y que pueden adaptarse a objetos o teorías especiales como los *cuaternios* de Hámilton y el *Cálculo de la extensión* de Grassmann (Galdeano, *Geometría general*) y a especiales órdenes de álgebras y de geometrías como expresa Clifford en *Mathematical Pappers* y como expusieron Weierstrass y Dedekind en su cálculo de n unidades complejas (*T. A. M.*, t. III, págs. 1-34), mientras que existen otras leyes más amplias y absorbentes: las que rigen en la teoría de los grupos que señalan el modo de hallarse los objetos íntegros, considerados en abstracto como entidades, cuyo único carácter es el de existir, leyes que rigen todas las teorías y ramas de la Matemática.

Geometría.—La Geometría ha progresado, como el Análisis, por etapas sucesivas. Primero se estacionó durante más de veinte siglos en los *Elementos* de Euclides, de los que se destacaban algunos teoremas para resolver problemas por el método analítico de Platon o de Pitágoras mediante encadenamientos de cuestiones que conducían del problema propuesto al problema equivalente resuelto. En esto existía la mayor irregularidad, pues las construcciones o problemas auxiliares se elegían allá donde se podían encontrar en el fondo inagotable de los objetos o entes geométricos.

Pero como los hilos tenues de los insectos tejedores, la primera finalidad matemática, consistente en la resolución de pro-

blemas, acicate perpetuo que ha estimulado los inventos de todos órdenes analíticos, geométricos o naturales, se ha ido afianzando en teorías especiales, ocasionalmente producidas por necesidades del momento. En torno de cada problema, como tela de araña, se ha ido construyendo alguna teoría. De manera que los orígenes de cada teoría se hallan siempre en la necesidad de resolver especiales problemas, hasta convertirse en las rocas graníticas que constituyen los cimientos del sólido edificio matemático.

Como dice Chasles en su *Aperçu historique*, la labor de Newton fué intensa desde la aplicación del método de Descartes a la resolución de los problemas de Geometría, expuestos en su *Arithmetica universalis* hasta multitud de cuestiones que se refieren a las cónicas, de los que citaremos su generación orgánica, reproducida en su *Enumeratio linearum tertii ordinis*.

La teoría de transversales en las que Maclaurin dió un avance con la consideración de las medias armónicas, los métodos de perspectiva de Desargues y de Pascal con las tentativas hacia la adivinación de los porismas de Euclides, conducían lenta y gradualmente a la edificación de la Geometría. Y sólo ya en el siglo XIX, bajo el esfuerzo de los Poncelet, Chasles y Steiner, adquiere un carácter sistemático basado en las teorías de las series homográficas, la involución, la dualidad, los haces de curvas, los proyectivos y las transformaciones de toda especie.

La Geometría ofrece otro carácter que el Análisis. Este tiene una extensión mayor, por efecto de su abstracción, relegada al número y a la función; pero por otro lado tiene menos recursos creadores en el orden objetivo. El Análisis se ciñe a las dos generaciones directa e inversa de las cantidades. Pero la Geometría, fundándose en cualquier propósito especialísimo, crea series inagotables de objetos.

Sólo en la región especial de la Geometría del triángulo, se ve qué variedad inagotable de objetos pueden construirse, llevando hasta donde se quiera el poder constructivo de la fantasía. Y todo lo que decimos consiste en que el triángulo, el círculo, las cónicas, los planos y figuras especiales de todos órdenes

y categorías pueden, combinándolos de varias maneras, centuplicar los objetos de estudios especiales. Y si de la geometría pasamos a la región del movimiento y de las energías o a la Matemática natural, entonces la riqueza se multiplica indefinidamente hasta el punto de relegar la Matemática a ser el molde intelectual que rige tan inacabable serie de objetos y de sistemas por ser el mundo de las leyes numéricamente inferior al de los hechos, y que sin ceder ante los progresos en el orden objetivo, se eleva correlativamente en el orden de las ideas para dominar siempre su objeto.

Y este dominio de lo ideal sobre lo concreto se realiza en primer lugar por una fusión de los dos órdenes analítico y geométrico.

Descartes fué el primero que intentó fusionar estos dos órdenes, y realizó su propósito estableciendo tan sólo una correlación externa, las fórmulas eran un índice o indicador de las figuras que se correspondían recíprocamente, elemento con elemento, un traslado, una traducción de un orden en otro orden distinto; y mucho más tarde, cuando ulteriores progresos amenazaban destruir o truncar esta correspondencia, la teoría acudía con abstracciones como las cónicas y cuerdas suplementarias de Poncelet, los focos de Plücker y las abstracciones de Laguerre.

Pues siendo la correspondencia de Descartes un problema inverso, tropezó con las mismas dificultades que el problema de la resolución algebraica de las ecuaciones. Y, para extenderlo a las curvas de tercer grado en adelante, fué preciso introducir entes ficticios o imaginarios que mantuvieran siempre invariablemente y sin excepciones esta correlación.

De índole inversa era la correspondencia que surgió en los nuevos algoritmos de Newton y de Leibniz. La creación de las fluxiones o fluentes o de las cantidades infinitesimales, es directa, y sus representaciones por líneas o por superficies, inmediata, de igual manera que los algoritmos directos representan números o cantidades.

Las representación del modo de crecimiento o decrecimiento

con los casos de máximos y mínimos y puntos de inflexión, así como las singularidades que ofrecen las ecuaciones diferenciales es directa, como procedente del cálculo diferencial que directamente puede prolongarse, sin fin, mediante derivaciones sucesivas y la traducción de las modulaciones de las figuras que contienen puntos múltiples aislados, de retroceso, etc., corresponden a modulaciones de los coeficientes diferenciales por igualdad, anulación, etc. de éstos. Y aun en la representación por medio del triángulo de De Gua hay una construcción directa fundada en la posibilidad de compararse o asimilarse dos cantidades infinitesimales o infinitas en la proximidad de un punto o las ramas infinitas que pueden amoldarse entre sí para poder formar la ecuación aproximada o referida a los dos términos principales.

Y aun en la representación de las integrales de las ecuaciones diferenciales por medio de curvas o de superficies, aunque éstas correspondan al cálculo inverso, también son directas, pues en este caso, la representación es simbólica; expresa una correspondencia, no una identificación, como en el caso anterior, entre el objeto y su representación.

La representación de las integrales de las ecuaciones no es un sistema superpuesto a otro sistema, sino un nuevo mundo correspondiente a otro mundo distinto y enlazados por vínculos algorítmicos y que pueden variar según que la ley de representación varíe. Esta representación es la intuición subrepticia de la idea algorítmica.

Pero todas las construcciones que se encuentran en las aplicaciones del cálculo infinitesimal a la Geometría, adolecen del defecto de ser indirectas y de faltas de unidad en los procedimientos, pues en cada caso, o la definición de cada entidad lleva al resultado, o un cambio conveniente en la posición de la figura. Esto sucede, por ejemplo, con la obtención de las ecuaciones de la tangente a una curva; y de ella se pasa a la de la normal basándose en la relación de perpendicularidad. Y la ecuación del plano osculador resulta de la traducción analítica de su definición auxiliada indirectamente por ciertas relaciones

analíticas que constituyen un conglomerado heterogéneo (*T. A.*, tomo V, págs. 4-12) de procedimientos.

Pero sobre este andamiaje de procedimientos que constituyen lo accesorio, se eleva el edificio suntuoso de las relaciones geométricas que se ofrece a nuestra intuición sensible como el edificado por el número y las relaciones funcionales se ofrece a nuestra razón.

Podemos recorrer esta serie de relaciones geométricas en el tomo V del *Tratado de Análisis matemático.*

Tras de las definiciones de la tangente, la normal y el plano osculador se exponen las principales propiedades descriptivas de las superficies, esto es, las que se refieren a la posición y no a relaciones numéricas, por más que los medios de establecerlas sean principalmente analíticos por el empleo de ecuaciones algebraicas o diferenciales.

La descripción de las superficies regladas, con su punto central y línea de estricción, el *parámetro de distribución* y el ángulo del plano tangente con el plano central, las superficies alabeadas y las desarrollables y como primer ejemplo, el cono, los conos y los cilindros circunscritos a una superficie dada, la envolvente de una familia de curvas en el espacio, principiando por establecer la condición de su existencia y la coincidencia del plano tangente a una superficie desarrollable con el plano osculador de la arista de retroceso, así como la condición de tangencia a lo largo de la característica de las superficies de una familia con su envolvente, la arista de retroceso que es el lugar de los puntos de intersección de dos características próximas y de las intersecciones sucesivas de tres superficies próximas de la familia y en el orden abstracto generalizador, las desarrollables isótropas, los focos y focales de las superficies y las rectas mínimas que completan, sin excepción alguna, el sistema de las relaciones efectivas, constituyen el objeto de los primeros capítulos, a los que sigue un capítulo dedicado a las propiedades métricas de las curvas alabeadas, tratándose de la primera curvatura, basada en la definición del ángulo de contingencia, de la normal principal, del círculo osculador, para definir y tratar

después de la *torsión* o *segunda curvatura*, mediante la consideración de los planos osculadores para llegar a la envolvente de los planos osculadores de una curva alabeada, cuyas características son las tangentes a la curva propuesta y la arista de retroceso de esta curva, lo mismo que a la envolvente de los planos normales de su arista de retroceso y de la arista de retroceso de los planos normales como lugar de los centros de las esferas osculatrices a una curva alabeada.

Los problemas sobre distancias y ángulos, tales como determinar la distancia mínima de un punto a una recta o de dos rectas o de un punto a un plano, el ángulo de dos tangentes, el de un plano con una tangente, distancia de un punto al plano osculador y la determinación del orden infinitesimal, así como los órdenes de contactos entre dos curvas, entre las curvas y las superficies, la osculación, la diferencia entre un arco y su cuerda son esencialmente determinativos de las relaciones necesarias existentes entre los varios elementos geométricos.

Y después de estos preliminares determinativos, procede el elevarse a consideraciones sistemáticas que establecen correspondencias entre varias superficies de que son antecedente necesario las fórmulas de Frenet o de Serret.

Desde luego vemos que el triedro móvil (t. V, p. 88) fija la relación existente entre la tangente, la normal principal y la binormal y a éstas se refieren dichas fórmulas, investigaciones que se facilitan con la representación esférica de Gauss (p. 90). Y como inmediata aplicación resulta: la envolvente de los planos osculadores, de manera que *la arista de retroceso de la superficie envolvente de los planos osculadores es esta misma curva*, llegándose a la *superficie polar*, que es la envolvente de los planos normales, siendo la arista de retroceso de esta superficie el lugar de los centros de las esferas osculatrices de la línea primitiva, pasando por cada punto de la superficie polar una evoluta primitiva, formando la serie de estas evolutas una serie de líneas geodésicas de la superficie polar, concluyéndose además que el plano normal a la arista de retroceso de la superficie polar es paralelo al plano osculador de la curva propuesta y

otras propiedades relativas a la tangente, normal principal, torsión, radio de la esfera osculatriz y centro de curvatura, cuyo lugar es una hélice. Y en cuanto al helicoide desarrollable, que es el lugar de las tangentes a la hélice, hallamos el modo de cortar las generatrices de aquél a la evolvente, traza con el plano de las x, y según un ángulo recto (*T. A.* t. V., p. 104).

Y en cuanto a las evolutas y evolventes, vemos que, como en la Geometría plana, a una evoluta corresponden infinidad de evolventes, que las evolutas son geodésicas de la superficie polar, y otras propiedades que pueden verse en dicho tomo V.

Respecto a la teoría de las líneas en las superficies, cuyo estudio comienza por tratar de la curvatura de una línea en una superficie, sólo diremos que adolece del carácter de particularidad de la época de Euler, a quien se deben los principales resultados que se establecen con auxilio de las fórmulas de la normal a la superficie y la normal principal y la expresión del ángulo que éstas dos forman, y la transformaciones analíticas que conducen a los teoremas de Euler acerca de las curvaturas en las secciones normales, todo lo cual vino a complementar Dupin con el examen de la indicatriz, fundado en la consideración de las tangentes conjugadas, lo que lleva al estudio de las líneas de curvatura, asintóticas y geodésicas.

Y al comenzar a ocuparnos del método de representación de Gauss por medio de las coordenadas curvilíneas, insistiremos en consignar cómo los métodos que condujeron a los resultados geométricos expuestos, la representación cartesiana adoptada por los analistas desde la creación del cálculo infinitesimal, ocultan en su fondo las particularidades inherentes al empleo de propiedades especiales envueltas en las fórmulas del Análisis, por cuya eficacia se enlazaban y resultaban consistentes por la potencia deductiva de la lógica, pero no por el encadenamiento natural de la afinidad de ideas.

El método de Gauss tiene un carácter esencialmente unificativo y directo. Comienza por la generación de una curva mediante las tres ecuaciones de cada coordenada expresada en función de un parámetro. De manera que, a cada valor del pa-

rámetro corresponderá un sistema de valores para x, y, z, el cual, variando con continuidad, hará variar dichas coordenadas que por la serie continua de variación de u producirá una línea. Y si las tres coordenadas están expresadas por dos parámetros u, v; a cada valor de v corresponderá la línea engendrada por u, y al conjunto de la serie continua de valores de v, corresponderá una superficie, que podrá reconstituirse por la eliminación de los dos parámetros entre las tres ecuaciones, en la cual se hallarán trazados los dos sistemas de curvas formados como arriba se indicó. Y dos de ellas servirán de sistemas de coordenadas, a los cuales se referirán las curvas paramétricas de la superficie $u = u_1$, $v = v_1$.

La consideración de dos puntos infinitamente próximos en la superficie, conduce a la primera fórmula fundamental que da la expresión del cuadrado del elemento lineal ds, que conduce a las expresiones de los arcos elementales de las líneas u, v, a las expresiones de sus cosenos directores, a la condición de ortogonalidad, al elemento de área, a la expresión del ángulo de una línea con las líneas coordenadas, a la ortogonalidad de dos líneas y a la segunda fórmula fundamental.

Luego vienen las normalizaciones que comienzan con la definición de los sistemas isotermos que dividen la superficie en cuadrados infinitesimales, llegándose a la representación conforme de una superficie sobre otra, establecida por Gauss, en que interviene la consideración de los sistemas isotermos, pudiéndose obtener la representación más general de dos superficies, igualando la variable compleja de la una a una función de la variable compleja de la otra. Y, en particular, *en toda superficie de revolución los meridianos y los paralelos forman un sistema ortogonal isotermo*. Y continuando en ulteriores desarrollos, llegamos a considerar el movimiento más general de la esfera compleja en sí misma, llegando, en los ejemplos de representación conforme, a las transformaciones del semiplano y al grupo modular que origina una sustitución lineal, grupos discontinuos que Poincaré llamó fuchsianos (t. V, p. 267).

Y para terminar, citaremos la *curvatura total* de Gauss que

permite el estudio de las superficies aplicables (t. V, p. 351) o *Geometría de la superficie*, de manera que *dos superficies con la misma curvatura son aplicables la una sobre la otra*, resultados que conducen a las teorías de superficies de curvatura constante positiva o negativa, a sus varios tipos, etc. (t. V, p. 357-374).

Resumen.—Hemos visto que en la determinación queda incluído todo género de cálculo, aritmético, algebraico, diferencial e integral, en el orden algorítmico; y el efecto de la generación ha sido extender el campo de la Ciencia con sistemas varios; de entre estos sistemas citaremos:

1.º Los *conjuntos* que crean realmente sistemas de números, cuyo fondo es el continuo. Y estos sistemas permiten considerar el infinito actual (*T. A.*, t. I, págs. 1-12).

2.º Los sistemas de números complejos de Weierstrass y Dedekind (*T. A.*, t. II, págs. 1-34).

Estos sistemas son abstractos y su generación pertenece al orden combinatorio.

3.º Los sistemas producidos por congruencia, cuerpos finitos, ideales, sistemas modulares (*Complemento de la teoría de los números*, págs. 82-140).

4.º Los sistemas de transcendentes engendradas por ecuaciones diferenciales (t. IV).

5.º Los sistemas de integrales de las ecuaciones diferenciales, cuyas teorías se fundan en el teorema de la existencia y en el ajuste de los n valores de las constantes arbitrarias con los valores arbitrarios dados de la función y sus $n-1$ primeras derivadas y las funciones correspondientes a un grupo (Picard, tomo III, págs. 492-508).

En el orden geométrico hemos considerado sistemas de figuras tales como las evolutas y evolventes, las envolventes y envueltas, y, en la superficie, los sistemas isotermos, ortogonales, los tipos de superficie de curvatura constante, las superficies aplicables, las cíclidas y otros que pudieran citarse; pero todos estos sistemas llevan el sello de particularismo caracterizado por las especiales propiedades que sirven para su generación.

Pero con un carácter más general tenemos sistemas, tales

como el complejo de rectas de Plücker y otra variedad de complejos de diferentes clases, congruencias, conexos, etc.

Y todos estos sistemas tienen también su expresión analítica, especialmente al representar las integrales de las ecuaciones diferenciales, representando, por ejemplo, las curvas que dependen de tres parámetros en la ecuación $F(x, y, z, p, q) = 0$ tratadas por Cauchy que forman un complejo de curvas (*Leçons sur l'intégration des équations aux derivées partielles*, p. 113).

SISTEMAS.—*a*) Tenemos, pues, los sistemas algorítmicos:

1.º De *números* que se tratan en la *Teoría de los números* que son las *congruencias*, los *cuerpos finitos de números* y los *ideales*.

2.º De funciones estudiadas en las teorías de las ecuaciones diferenciales ordinarias, de *derivadas parciales* y de *diferenciales totales*.

3.º Sistemas *covariantes* con sus variedades, que se refieren a relaciones proyectivas.

b) Tenemos los sistemas geométricos:

1.º Congruencias de rectas (Plücker) o en general de curvas. Una *triple* infinidad de rectas en el espacio se llama *complejo de rectas*, así como dos relaciones entre las coordenadas de rectas representan una doble infinidad de éstas y tres relaciones entre estas coordenadas representan una superficie reglada. Por último, cuatro relaciones representan un *número finito de rectas en el espacio*.

Si definimos un complejo como una variedad ∞^3 de rectas y un *complejo algebraico* como una variedad de ∞^3 rectas, cuyas coordenadas son funciones algebraicas de tres parámetros independientes, se tiene el teorema:

Todo complejo algebraico puede ser representado por una sola *relación algebraica entre las seis coordenadas de la recta.* O bien, en la representación por medio de puntos de una cuádrica en el espacio de cinco dimensiones, el teorema se reduce a:

Todo espacio algebraico de tres dimensiones contenido en una cuádrica fundamental, es siempre la intersección completa *de éste con otro espacio algebraico de cuatro dimensiones.*

Si la relación algebraica que representa un complejo algebraico es de orden p, el complejo se llama de grado n.

El grado del complejo es igual al orden del cono formado por todas las rectas pertenecientes al complejo y que pasan por un punto cualquiera del espacio (*cono del complejo*).

En un plano existen ∞^1 rectas del complejo que envuelven una curva (*curva del complejo*). *La clase de esta curva es también el grado del complejo*. Para un complejo, se confunden los conceptos de *orden* y de *clase*. Se tiene un sólo número característico, el *grado* que es el número de rectas del complejo que pasan por un punto y situadas en un plano. (Pascal, *Repertorio di Matematica*, t. II, págs. 533-35).

Dado un sistema de curvas $f(x, y, z, a, b) = 0$, $\varphi(x, y, z, a, b) = 0$ será una congruencia a semejanza del lenguaje de Plücker, el conjunto de las curvas correspondientes a todos los sistemas de valores de a y de b, pasando un número limitado de curvas de la congruencia por un punto cualquiera del espacio.

Por ejemplo, si se considera la congruencia formada por las rectas que encuentran cierta curva y son tangentes a una superficie, las rectas de la congruencia que pasan por un punto M del espacio, son en general, en número limitado; y son las aristas de intersección de dos conos de vértice M tales, que el uno está circunscrito a la superficie y el otro pasa por la curva. Pero si el punto está en la curva, pasará una infinidad de rectas de la congruencia que forman el cono circunscrito a la superficie, cuyo vértice es dicho punto.

Suponiendo $b = F(a)$, las curvas de la congruencia correspondientes a los valores de a y de b para los cuales se verifica esta relación, engendrarán una superficie resultante de eliminar a y b entre las dos ecuaciones, quedando definido el plano tangente en el punto (x, y, z) por

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz} = \frac{\frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial b}F'(a)}{\frac{\partial \varphi}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial b}F'(a)}$$

Llamemos *superficies de la congruencia* a las que acabamos de definir, engendradas por las curvas de la congruencia, elegidas de un modo arbitrario. Consideremos cuatro de estas superficies que pasen por una curva C de la congruencia y tomemos sus cuatro planos tangentes. La relación anarmónica de estos planos tangentes permanecerá constante cuando el punto correspondiente se mueva en la curva. Y cuando haya proporcionalidad entre las derivadas respecto de a y b, el plano tangente será independiente de $F'(a)$ y será el mismo para todas las superficies de la congruencia que contienen la curva C. Los puntos que admiten el mismo plano tangente se llaman *puntos focales*. Y eliminando a, b entre las dos ecuaciones del sistema de curvas y $\frac{\partial f}{\partial a} : \frac{\partial \varphi}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial b} : \frac{\partial \varphi}{\partial b}$, tendremos la superficie focal de la congruencia que indica la distribución de los puntos focales en el espacio.

Y es interesante el reunir curvas de la congruencia de modo que tengan una envolvente, es decir, que sean todas tangentes a una misma curva, que estará formada por puntos focales de estas curvas, y se hallarán situados en una de las hojas de la superficie focal.

Se puede ver cómo los dos puntos focales que existen generalmente en una recta, describen las dos hojas de la superficie focal, siendo las rectas de la congruencia, tangentes dobles a la superficie focal.

Para reunir las rectas de la congruencia, de manera que tengan una envolvente, es decir, que engendren una superficie desarrollable, las aristas de retroceso se hallarán en la una o en la otra hoja, formando dicha recta parte de dos desarrollables, cuya determinación exigirá la integración de dos ecuaciones diferenciales de primer orden y de segundo grado. Y se ve fácilmente que las curvas correspondientes a las dos series de desarrollables obtenidas, forman un sistema conjugado, siendo las unas las aristas de retroceso de una de las dos familias de desarrollables y las otras las curvas de contacto de las desarrolla-

bles de la otra serie, teniendo estas relaciones su correspondencia en la integración de una ecuación de Riccati.

Y el conocimiento de un sistema conjugado sobre una superficie, conduce a la obtención de una serie, en general, ilimitada de superficies, para las cuales se conozca un sistema conjugado.

Por una serie de construcciones sucesivas de dos series de curvas conjugadas (C) y (D) trazadas en la superficie (Σ), se obtienen (D_1), (C_1) de (Σ_1) y así sucesiva e indefinidamente, mientras no se llegue a una superficie que degenere en una curva o en una desarrollable.

Y siempre que se hayan integrado ecuaciones diferenciales que determinen las desarrollables formadas por rectas de la congruencia dada, este método dará una serie de nuevas congruencias, cuyas desarrollables se determinarán sin nueva integración (Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, páginas 1-17). Y esta teoría tiene su representación analítica por el método de Laplace y la serie de este insigne matemático (véase la obra citada de M. Darboux y *T. E. D.*, págs. 703-16)

$$\ldots (E_{-2}),\ (E_{-1}),\ (E),\ (E_1),\ (E_2),\ \ldots$$

cuyos invariantes se deducen unos de otros por unas fórmulas que establece M. Darboux en la obra citada, consistiendo el método de Laplace en reducir la integración de una ecuación lineal que no satisface a las condiciones de integrabilidad, por un cambio conveniente de variables, de una manera sucesiva, hasta llegar a una ecuación lineal que las satisfaga. Y Ampère estableció las condiciones necesarias y suficientes para que la ecuación $F(x, y, z, z', z_, z'_,) = 0$ pueda admitir una integral de primer orden con una sola función arbitraria de y o de x, condiciones que estableció también Euler en sus *Institutiones Calculo integralis* (t. III), debiéndose observar con este motivo la equivalencia de las condiciones

$$\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial F_1}{\partial z_,} - \frac{\partial F}{\partial z_,}\frac{\partial F_1}{\partial z} = 0$$

y $$G\left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial K}{\partial z}\right) + H\left(\frac{\partial K}{\partial z_,} - \frac{\partial G}{\partial x}\right) + K\left(\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial z_,}\right) = 0$$

según expresa Imschenetski (*E. sur les méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*).

c) Tenemos los sistemas generales aplicables a los órdenes algorítmico y geométrico que constituyen la teoría de los grupos continuos.

Desde luego la n ecuaciones que determinan una transformación de las x en x' con r parámetros a representa una familia de r parámetros con ∞^r transformaciones, y estas transformaciones deben ser *linealmente independientes* (*T. E. D.*, página 633). Y las ecuaciones

$$f'_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_r), \ldots, x'_n = f_n(x_1, \ldots x_n, a_1, \ldots, a_r)$$

definen un grupo de transformaciones de r parámetros, si por la mediación de una segunda transformación que permite pasar de las x' a las x'' con los parámetros b y una relación que liga los nuevos parámetros c con los a, b, se consigue ligar por las mismas funciones f las variables extremas x y x'.

Y hay que considerar la transformación *inversa* que permite una transformación de las x' en las x, debiendo existir en un grupo la transformación idéntica y las transformaciones infinitesimales del grupo de r parámetros y la condición de ser *esenciales* los parámetros, cuando representa ∞^r transformaciones distintas (Idem págs. 633-34). Y esta noción de grupo, por ejemplo, en el caso de un parámetro, conduce al sistema $\frac{dx'}{dt} = \xi(x', y')$, $\frac{dy'}{dt} = \eta(x', y')$ cuya solución (x', y'), que se reduce a (x, y) para cierto valor del parámetro t, ligado al a por la relación $t(a)da = dt$, conduce a las funciones $x = f(x, y, t)$, $y = \varphi(x, y, t)$ correspondientes al grupo buscado (Picard, *Traité d'Analyse*, t. III, página 496).

Y observando que el problema de la integración puede reducirse a: *Obtener un sistema en involución de* m + k *ecuaciones distintas que comprende las ecuaciones*

$$f_1 = 0, \ldots, f_m = 0, f_{m+1} = 0, \ldots, f_{m+k} = 0 \quad (m + k \leqslant n)$$

y obtener enseguida la integral general del sistema completo

$$(f_1, \Phi) = 0, \ \ldots \ (f_{m+k}, \Phi) = 0,$$

que se reduce al método de Cauchy si $k = 0$, y al de Jacobi si $k = n = m$ (Goursat, *Leçons sur les éq. diff. aux dériv. part. du premier ordre*, p. 305), veremos, indicando el razonamiento de M. Goursat: que, habiéndose obtenido varias integrales $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, distintas de $f_1, \ldots, f_m$ del sistema completo $f_1 = 0, \ldots, f_m = 0$, $(m < n)$; según el teorema de Poisson, todos los paréntesis (φ_i, φ_k) serán integrales del mismo sistema; y podemos suponer que $m + h$ funciones $f_1, \ldots, f_m, \varphi_1, \ldots, \varphi_h$ son distintas; pudiéndose expresar los paréntesis mediante estas mismas funciones.

Sin entrar en detalles que pueden verse en la obra citada, concluiremos que: toda función F de $u_1, \ldots u_r$ pertenece al grupo $(u_1, \ldots, u_r)$, que dadas $F(u_1, \ldots u_r)$, $\Phi(u_1, \ldots, u_r)$, pertenecientes al mismo grupo, lo mismo sucede a su paréntesis (F, φ); que si r funciones distintas, $v_1, \ldots, v_r$ pertenecen al grupo $(u_1, \ldots, u_r)$; estas funciones también forman un grupo, puesto que sus paréntesis (v_i, v_k) se expresan por medio de u, y por consiguiente por medio de $v_1, \ldots, v_r$. Y si las funciones $u_1, \ldots, u_h$ de un grupo de orden h pertenecen a un grupo de orden r, $(u_1, \ldots, u_h, u_{h+1} \ldots, u_r)$, el segundo grupo contiene al primero. Y tendremos una función v en involución con un grupo $(u_1, \ldots, u_r)$. Y si r funciones distintas u_i de $2n$ variables x_i, p_i determinan un grupo de orden r, las n ecuaciones lineales $(u_1, f) = 0, \ldots, (u_r, f) = 0$ forman un sistema completo. Estas ecuaciones admiten $2n - r$ integrales distintas v_i, expresándose cualquiera otra integral por medio de éstas, de manera que, según el teorema de Poisson, las expresiones (v_i, v_k) serán también integrales de la última ecuación que se expresarán mediante $2n - r$ funciones que formarán el grupo polar del primero. Y una función V perteneciente a un grupo se llamará *distinguida* de este grupo, cuando se halle en involución con todas las de este grupo, siendo las funciones distinguidas de un grupo las comunes a este grupo y a su grupo polar. De manera que dos grupos polares tienen las mismas funciones distinguidas, las comunes a estos dos grupos.

Tenemos además que considerar las relaciones existentes entre dos funciones distinguidas y lasc onsecuencias que llevan consigo respecto al grupo polar y con relación al grupo primitivo, y la *forma canónica*, a la que corresponden los valores más simples de los paréntesis (u_i, u_k), la descomposición de los grupos y los procedimientos de reducción, hasta llegar al grupo canónico de $2n$ términos (Idem, p. 318) y a la integración de un sistema en involución; llegándose a determinar las operaciones exigidas en los distintos métodos de integración de Cauchy, de Jacobi y de Mayer, y a la obtención de ciertas funciones $F_1, \ldots, F_r, U$ por medio de otras $f_1, \ldots, f_r$ de x_i, p_k dadas, llegándose a obtener el cuadro de operaciones necesarias en cada caso con relación al número existente de funciones distinguidas.

Nociones del cálculo de probabilidades

DEFINICIÓN.—Si concebimos una experiencia que comprenda n casos igualmente posibles y que en m de éstos tenga lugar el suceso S, a la razón $\frac{m}{n}$, que puede considerarse como la medida de su posibilidad, se llama probabilidad del suceso S.

En el caso de ser $m = n$ la posibilidad se convertirá en certeza, de modo que *la probabilidad igual a la unidad puede considerarse como el símbolo de la certeza.* Cuando todos los casos son desfavorables al suceso, $m = 0$. Y diremos que *la probabilidad cero es el símbolo de la imposibilidad.*

El cálculo de probabilidades tiene por objeto *la investigación de las probabilidades de los sucesos que aparecen sometidos al azar.*

PROBABILIDAD COMPUESTA.—1.º Supongamos que los sucesos sean independientes entre sí. La probabilidad P de un suceso S compuesto de otros varios $s, s', \ldots$, independientes entre

sí, es igual al producto de las probabilidades p, p', ... de los sucesos parciales.

Llamemos e, e', ... a las experiencias que pueden dar lugar a los sucesos s, s', ... descompuestos, cada uno en n casos igualmente posibles y m, m', ... los números que expresan los casos favorables de cada suceso. Tendremos

$$p=\frac{m}{n},\ p'=\frac{m'}{n'},\ \ldots\ P=\frac{m.\,m'.\,m''\ldots}{n.\,n'.\,n''\ldots}=\frac{m}{n}\,\frac{m'}{n'}\,\frac{m''}{n''};\ P=p.\,p'\,p''\ldots$$

Luego: *La probabilidad compuesta es el producto de las probabilidades simples.*

2.º Supongamos dependientes entre sí los sucesos. A la probabilidad de que uno de dos sucesos tenga lugar, suponiendo realizado el otro, se llama *probabilidad modificada del primer suceso*. Supongamos que el número de casos elementales que se puedan presentar, sean: a o b en que el suceso s o s' se presente aisladamente, c el caso en que se presenten los dos simultáneamente y d el en que no se presente ninguno.

El número total de casos elementales será $a+b+c+d$, así como c el de los favorables al suceso S compuesto de s y s'. La probabilidad será $P=\frac{c}{a+b+c+d}$. Las probabilidades absolutas de s y s' serán

$$p=\frac{a+c}{a+b+c+d}\qquad p'=\frac{b+c}{a+b+c+d}.$$

Sean p_1, p'_1 las probabilidades modificadas de s y s'. Se obtendrá p_1, dividiendo el número de casos favorables al suceso s por el total de los posibles; pero suponiéndose verificado el s'. El primero de estos números es c y $b+c$ el segundo, luego tendremos:

$$p_1=\frac{c}{b+c}\ \text{ y análogamente }\ p'_1=\frac{c}{a+c}.$$

Multiplicando los valores de p y p'_1 y los de p' y p_1, se tiene

$$p.\,p_1=p'.p_1=\frac{c}{a+b+c+d}\quad\text{y}\quad P=p.\,p'_1=p'.\,p_1.\qquad\text{Luego:}$$

La probabilidad P *de un suceso* S *compuesto del concurso de otros dos* s *y* s' *que tengan entre sí una conexión cualquiera, es igual al producto de la probabilidad absoluta de uno de estos sucesos por la modificada del otro.*

PROBABILIDAD TOTAL.—*La probabilidad de un suceso que puede atribuirse a varias causas* C_1, C_2, ... *que se excluyen entre sí, es igual a la suma de las probabilidades correspondientes a las combinaciones de este suceso con cada una de las causas.*

Sean n_1, n_2, ... los números de casos posibles en que actúe cada una de las causas C_1, C_2, ... y n' el de aquéllos en que no funcione ninguna de las causas. Puesto que el suceso S sólo puede producirse cuando actúen dichas causas, no podrá presentarse en los n' últimos casos.

Sean m_1, m_2, ... los números de casos favorables al suceso S en que actúan las causas C_1, C_2, ... y p_1, p_2, ... las probabilidades de dicho suceso en esta hipótesis. Se tendrá

$$p_1 = \frac{m_1}{n_1}, \quad p_2 = \frac{m_2}{n_2}, \ldots \quad \text{y} \quad N = n_1 + n_2 + \ldots + n'$$

Este último es el número de casos posibles, y el de casos favorables a S será $m_1 + m_2 + \ldots$; luego la probabilidad P será:

$$P = \frac{m_1 + m_2 + \ldots}{n_1 + n_2 + \ldots + n'} = \frac{m_1 + m_2 + \ldots}{N} \quad \text{o} \quad P = \frac{m_1}{n_1}\frac{n_1}{N} + \frac{m_2}{n_2}\frac{n_2}{N} + \ldots$$

El producto $\frac{m_i}{n_i}\frac{n_i}{N}$ representa la probabilidad de la combinación de las causas C y el suceso S, en virtud del segundo principio de la probabilidad compuesta, puesto que el primer factor es la probabilidad del suceso modificado por la causa C_i y el segundo la probabilidad de esta causa. Llamando probabilidades parciales a las de cada una de las combinaciones de S con las causas C_1, C_2, ... diremos que: *La probabilidad total es la suma de las probabilidades parciales.*

LEYES DE LA PROBABILIDAD EN LA REPETICIÓN DE LOS SUCESOS.—Indicaremos someramente, remitiendo al lector a cual-

quier tratado de probabilidades, que para obtener la ley que rige a las probabilidades de los sucesos con las correspondientes a su repetición en un número cualquiera de experiencias, considerando una experiencia que pueda originar los sucesos contrarios S y S', cuyas probabilidades respectivas son p y q, la fórmula que expresa la probabilidad P para que estos sucesos se repitan en s experiencias del mismo género en el orden siguiente: m_1 el suceso S, n_1 el S'; m_2 el S, n_2 el S', ... siendo $m_1+n_1+m_2+n_2+\ldots = S$.

Consideraremos este suceso como compuesto de los $S_1 S, \ldots m_1$, S', S', n_1 ... S, S, ... m_2, ... independientes entre sí. Y tendremos por el principio de la probabilidad compuesta

$$P = p^{m_1} q^{n_1} \ldots = p^{m_1+m_2+\ldots} \cdot q^{n_1+n_2+\ldots} \qquad (1)$$

El número total de veces que cada suceso se presenta, será el mismo en las s experiencias. La probabilidad P será constante. Considerando las diversas permutaciones que ofrecen, llegamos a la fórmula

$$P_m = \frac{1, 2 \ldots s}{m! \quad n!} p^m q^n = \frac{s!}{m! \; n!} p^m q^n \qquad (2)$$

Con objeto de hallar los valores de m y n para que la probabilidad P_m tenga un valor máximo, se cambia en (2) m en $m-1$ y después $m+1$ y se llega, después de un cálculo breve, a

$$(s+1)p > m > (s+1)(p-1.$$

Y cuando el número s de experiencias sea muy grande la razón de m a n o de $(s+1)p$ a $(s+1)q$ podrá reemplazarse por la de estos mismos productos y resultará $\frac{m}{n} = \frac{p}{q} = \ldots$

Aplicando a cada uno de los productos $s!$, $m!$, $n!$ la fórmula de Stirling, resultará

$$P_m = \frac{e^{-s} \cdot s^s \sqrt{2\pi s}\, p^m \cdot q^n}{e^{-m-n} m^m \, n^n \sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{2\pi m n}} = \frac{e^{-s} \cdot s^s \sqrt{s}\, p^m \cdot q^n}{e^{-s} \cdot m^m \cdot n^n \sqrt{2\pi m n}}$$

Y terminaremos describiendo la fórmula que indica la probabilidad para que el suceso S tenga lugar un número de veces comprendido entre $m_0 - k$ y $m_0 + k$ que se obtiene sumando los diferentes valores de P_m correspondientes a dichos extremos

$$P_{m_0-k} + P_{m_0+k} = \frac{2}{\sqrt{2\pi p.q.s}} e^{-\frac{k^2}{2.p.q.s}}$$

correspondientes a todos los de k comprendidos entre o y k, a saber:

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{k}{\sqrt{2p.q.s}}} e^{-t^2} dt.$$

Nociones acerca de la integral de superficie

Consideremos una porción de superficie S limitada por una o varias curvas, en la que se suponen dos lados distintos, de modo que no puede pasarse del uno al otro de un modo continuo sin atravesar las curvas límites. En un punto P del uno se fija sobre la normal una dirección determinada y la dirección opuesta en el punto correspondiente P' (que coincide geométricamente con P) del otro.

Por ejemplo, consideraremos una porción de superficie que encuentre tan sólo en un punto a toda paralela al eje Oz; y se podrá distinguir en ella dos lados, asociando a un punto P del uno la dirección de la normal que forma un ángulo agudo y al punto correspondiente P' del otro la dirección opuesta que forma un ángulo obtuso; y así estos dos ángulos variarán de una manera continua, quedando el uno siempre agudo y el otro obtuso.

Sean $C(x, y, z)$ una función de x, y, z y una superficie S, $z = \varphi(x, y)$, limitada por una curva L que se proyecta sobre xOy en una curva l; y formemos la integral doble $\iint C(x, y, z)dx\,dy$ extendida al área l, suponiendo que z se reemplace por su valor

en x, y. Además reemplazaremos $dx\,dy$ por $\cos\gamma d\sigma$, siendo $d\sigma$ el elemento de superficie.

La integral será $\iint C(x, y, z)\cos\gamma d\sigma$. Y análogamente tendremos las integrales $\iint A(x, y, z)\cos\alpha d\sigma$, $\iint B(x, y, z)\cos\beta d\sigma$, en que α, β expresan los ángulos formados por la dirección de la normal correspondiente al lado elegido, con los ejes de las x y de las y.

Sumando las tres integrales precedentes, se tiene todavía una *integral de superficie*

$$\iint (A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy), \tag{3}$$

que puede escribirse bajo la forma

$$\iint (A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma)\,d\sigma. \tag{4}$$

Es importante el tener la expresión de la integral (3) cuando se expresan x, y, z en función de dos parámetros u y v. Siendo los cosenos, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ proporcionales a los determinantes funcionales

$$\frac{D(y, z)}{D(u, v)'} \qquad \frac{D(z, x)}{D(u, v)'} \qquad \frac{D(x, y)}{D(u, v)'}$$

salvo el signo, que se tomarán, según el lado de la superficie que se considere, la expresión (3) será igual a

$$\iint\left[A\,\frac{D(y, z)}{D(u, v)} + B\,\frac{D(z, x)}{D(u, v)} + C\,\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right] du\,dv \tag{5}$$

1. Independencia de la integral respecto al contorno.—Vamos a obtener la condición para que sea independiente del contorno la integral

$$I = \iint A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy. \tag{1}$$

Supongamos que las coordenadas x, y, z estén expresadas en función de dos parámetros u y v, para una superficie S. Entonces tenemos la expresión (5) de dicha integral.

Consideremos ahora una familia de superficies que tengan el mismo límite y dependan del parámetro α. Cada valor de α

determina una parte de superficie correspondiente al área Σ en el plano (u, v); y se pueden elegir estas funciones de manera que la curva correspondiente al perímetro de Σ no dependa de α, y sea, por consiguiente, la misma para todas las superficies. Además, admitiremos que los límites entre los cuales varía α sean tales, que las funciones A, B, C y sus derivadas parciales de primer orden permanezcan continuas en todo el espacio recorrido por las superficies correspondientes, al elegir convenientemente los límites entre los cuales varía α.

Calculemos la variación de I, es decir, las diferenciales respecto a α. La variación de

$$\iint A\,dy\,dz \quad \text{ó} \quad \iint A\,\frac{D(y,\,z)}{D(u,\,v)}\,du\,dv$$

será igual a

$$\iint\left[\delta A\,\frac{D(y,\,z)}{D(u,\,v)} + A\delta\,\frac{D(y,\,z)}{(Du,\,v)}\right]du\,dv$$

o desarrollando, a

$$\left.\begin{aligned}&\iint\left[\frac{\partial A}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial A}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial A}{\partial z}\,\delta z\right]\frac{D(y,\,z)}{D(u,\,v)}\,du\,dv\\ &+\iint A\left[\frac{\partial\delta y}{\partial u}\,\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\,\frac{\partial\delta z}{\partial v} - \frac{\partial\delta y}{\partial v}\,\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial v}\,\frac{\partial\delta z}{\partial u}\right]du\,dv.\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

La segunda integral puede transformarse por medio de integraciones por partes. Así, se tiene

$$\iint A\,\frac{\partial z}{\partial v}\,\frac{\partial\delta y}{\partial u}\,du\,dv = -\iint\frac{\partial}{\partial u}\left(A\,\frac{\partial z}{\partial v}\right)\delta y\,du\,dv,$$

teniendo presente que la variación de δy es nula en el borde; y cada una de las integrales que forman el segundo término de (5) puede transformase de igual manera. Sustituyamos en seguida, desarrollando los cálculos

$$\frac{\partial A}{\partial u}\ \text{por}\ \frac{\partial A}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial A}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial A}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial u},$$

y procedamos análogamente con $\dfrac{\partial A}{\partial v}$. La expresión (2), se re-

ducirá a

$$\iint \frac{\partial A}{\partial x}\left[\frac{D(y,\ z)}{D(u,\ v)}\delta x + \frac{D(z,\ x)}{D(u,\ v)}\delta y + \frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}\ \delta z\right] du\, dv.$$

Y haciendo cálculos análogos en las otras integrales, se obtendrá

$$\delta I = \iint\left[\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right]\cdot$$

$$\left[\frac{D(y,\ z)}{D(u,\ v)}\delta x + \frac{D(z,\ x)}{D(u,\ v)}\delta y + \frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}\ \delta z\right] du\, dv.$$

Pero δI debe ser nula, y puesto que los signos de las variaciones δx, δy, δz son arbitrarios, debe resultar idénticamente la siguiente ecuación que expresa una condición necesaria y suficiente,

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0 \qquad (3)$$

Y esta ecuación que expresa la condición necesaria y suficiente para que la integral I, extendida a una superficie limitada por un contorno L, sólo dependa de éste, permite escribir la integral doble bajo la forma de una integral curvilínea, tomada a lo largo del contorno L.

Vamos a demostrar ahora que, dadas tres funciones que satisfacen a la identidad precedente, pueden obtenerse tres funciones α, β, γ de x, y, z tales, que se verifiquen las relaciones

$$\frac{\partial \beta}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial y} = A, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial z} = B, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial x} = C. \qquad (4)$$

Tomemos, por ejemplo, $\gamma = 0$. Satisfaremos a las dos primeras, haciendo

$$\alpha = -\int_{z_0}^{z} B(x, y, z)dz, \quad \beta = \int_{z_0}^{z} A(x, y, z)dz + \varphi(x, y),$$

expresando z_0 una constante numérica y φ una función arbitraria de x e y. Sustituyendo estos valores en la tercera ecuación, y teniendo en cuenta la ecuación (3), resultará

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + C(x, y, z) = 0;$$

y se podrá, mediante una integración, determinar una función $\varphi(x, y)$ que satisfaga a esta ecuación. Es evidente que si $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ expresan una solución particular de las ecuaciones (8), la solución más general estará dada por

$$\alpha = \alpha_1 + \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \beta = \beta_1 + \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \gamma = \gamma_1 + \frac{\partial F}{\partial z},$$

siendo F una función arbitraria de x, y, z.

Podríamos considerar ahora integrales de superficie de la forma

$$\iint \left(\frac{\partial \beta}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial y}\right) dy dz + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial z}\right) dz dx + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial x}\right) dx dy$$

que se encuentran en varias teorías de la Física matemática; pero remitimos a las obras de los Sres. Picard, Appell, Darboux y otros profesores, donde podrán estudiarlas quienes se dediquen a este género de investigaciones.

§ 1.º—FÓRMULA DE GREEN

1. Fórmula de Ostrogradsky.—Vamos a demostrar la fórmula

$$\left.\begin{aligned} &\iiint \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz \\ &= S(P \cos\alpha + Q \cos\beta + R \cos\gamma) d\sigma. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

La integral triple se extiende al volumen contenido en la superficie S y la integral doble a toda esta superficie; α, β, γ son los ángulos que forma respectivamente con Ox, Oy, Oz la seminormal exterior a la superficie S. Las funciones P, Q, R son funciones de x, y, z continuas en S; y son continuas, así como sus derivadas en todo el volumen de V.

Si consideramos la primera de las integrales triples con relación a x, desde x_1 hasta x_2, obtendremos la integral doble

$$\iint [\, P(x_2, y, z) - P(x_1, y, z) \,]\, dy\, dz \quad (2)$$

Procediéndose de igual manera con las otras dos integrales, y teniendo presente que $dydz = -d\sigma \cos\alpha$, etc., resulta demostrada la fórmula de Ostrogradsky.

M. Picard ha estudiado estas integrales estableciendo la condición $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$ para que sólo dependan del contorno C, según hemos visto (pág. 82), siendo

$$P = \frac{\partial \beta}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial y}, \quad Q = \frac{\partial \gamma}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial z}, \quad R = \frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial x}.$$

2. Fórmula de Green.—Haciendo en la fórmula de Ostrogradsky

$$P = U\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Q = U\frac{\partial V}{\partial y}, \quad R = U\frac{\partial V}{\partial z},$$

e introduciendo el parámetro diferencial de Lamé (t. I, página 84) $\Delta_2 V$, tendremos

$$\iiint U\,\Delta_2 V\,dx\,dy\,dz + \iiint \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$

$$= S\left(\frac{\partial V}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial V}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial V}{\partial z}\cos\gamma\right) d\sigma, \qquad (3)$$

expresando como arriba S la integral extendida a toda la superficie.

Podemos emplear otra notación, llamando derivada de la función V en el punto $M(x, y, z)$ en la dirección MN, al límite de la relación

$$\frac{V(x', y', z') - V(x, y, z)}{MM'},$$

en la que M y M' son dos puntos infinitamente próximos en MN, al lado positivo. Tomemos $MM' = dn$, y esta derivada se escribirá así: $\frac{dV}{dn}$. Pero se tiene evidentemente que

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dn} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{dn} = \frac{\partial V}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial V}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial V}{\partial z}\cos\gamma;$$

de manera que si MN es la dirección de la semi-normal exterior, la fórmula (3) se transforma en la siguiente:

$$\iiint\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$
$$+\iiint U\,\Delta_2 V\,dx\,dy\,dz=SU\,\frac{dV}{dn}\,d\sigma \qquad (4)$$

que es la *fórmula de Green*, la cual también resulta considerando la integral

$$I=\iiint\left(\frac{\partial U}{dx}\frac{dV}{dx}+\frac{dU}{dy}\frac{dV}{dy}+\frac{dU}{dz}\frac{dV}{dz}\right)dx\,dy\,dz$$

y las identidades

$$\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{dx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right)-U\frac{\partial^2 V}{\partial x^2},\quad \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{dy}=\ldots,\quad \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{dz}=\ldots$$

Si consideramos la semi-recta An, tendremos

$$\frac{dV}{dn}=\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dn}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dn}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{dn}=\frac{\partial V}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial V}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial V}{\partial z}\cos\gamma.$$

Introduzcamos en cada punto de la superficie S la derivada de V con relación a la normal exterior al volumen limitado por S; el valor de I se reduce a

$$I=\iint U\frac{dV}{dn}\,d\sigma-\iiint U\,\Delta V\,dx\,dy\,dz.$$

Permutando U con V y restando la ecuación obtenida de la anterior, resulta la nueva fórmula

$$\iint\left(U\frac{dV}{dn}-V\frac{dU}{dn}\right)d\sigma-\iiint(U\Delta V-V\Delta U)dx\,dy\,dz=0.$$

Si introducimos las derivadas en la dirección de la normal *interior* a la superficie, bastará cambiar el signo del primer término, y se tendrá la fórmula definitiva llamada también de Green,

$$\iint\left(U\frac{dV}{dn}-V\frac{dU}{dn}\right)d\sigma+\iiint(U\,\Delta\,V-V\Delta U)dx\,dy\,dz=0.$$

G. = 3323

G(arcía) de Galdeano, 2(ed.)

Anuario del curso de 1915 a 1916 — Razonamiento de mi Curso Elemental de Cálculo infinitesimal comprendiendo nociones de Matemática Físico-Química

por ———————

Zaragoza. — G. Casañal.

1915.

244 pág. + 11 lám. — 4º

Las lám. con el retrato del autor.

G. = 3323

Anuario del curso de 1915 a 1916 — Razonamiento de mi Curso Elemental de Cálculo infinitesimal comprendiendo nociones de Trigonométria Física-Química por D(oct) S(anchez) de Saldeano

Zaragoza. — G. Casanal.
1915.
244 pág + 11 lám. — 4°

La lám. con el retrato del autor.

Observación.—Para la aplicación de esta fórmula deben tomarse las derivadas $\frac{dU}{dn}$, $\frac{dV}{dn}$ en el sentido de la normal *interior al volumen que se considera.*

Así, por ejemplo, si se trata del volumen comprendido entre dos esferas concéntricas; para la esfera exterior se tomarán las derivadas en el sentido de la normal interior y para la esfera interior se tomarán las derivadas en el sentido de la normal exterior a esta esfera, que es el sentido de la normal interior al volumen comprendido entre las dos esferas.

§ 2.º—PRINCIPIO Y PROBLEMA DE DIRICHLET

3. Fórmula fundamental.—Vamos a demostrar la fórmula

$$V(a, b, c) = \frac{1}{4\pi}\int_S\int\left(V\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r}\frac{dV}{dn}\right)d\sigma \qquad (1)$$

que determina el valor de V en un punto cualquiera del interior de un volumen, en función de los valores de V y de $\frac{dV}{dn}$ en la superficie.

Para ello, designemos por U y V dos funciones continuas, así como sus derivadas parciales de los dos primeros órdenes, en un volumen limitado por una o varias superficies.

Si U y V satisfacen a la ecuación de Laplace, la fórmula de Green conduce a la siguiente:

$$\iint\left(U\frac{dV}{dn} - V\frac{dU}{dn}\right)d\sigma = 0\,; \qquad (2)$$

y esta integral podrá ser una suma de integrales tomadas, como se ha indicado, si el volumen se halla limitado por varias superficies.

Observaremos: 1.º Que para $U = 1$, se tiene $\iint\frac{dV}{dn}\,d\sigma = 0$.

De manera, que si una función V satisface a la ecuación $\Delta V = 0$, esta integral, tomada en toda la superficie, es nula.

2.º La ecuación de Laplace queda satisfecha por la solución particular

$$U = \frac{1}{r}, \qquad r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b^2 + (z-c)^2}$$

siendo a, b, c, constantes arbitrarias.

Expresando por Pn una recta trazada por el punto $P(x, y, z)$; y por A el punto (a, b, c); para hallar la derivada de $\frac{1}{r}$ en la dirección Pn, tendremos $\frac{d(1:r)}{dn} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dn}$;

pero $$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2;$$

luego $$r\frac{dr}{dn} = (x-a)\frac{dx}{dn} + (y-b)\frac{dy}{dn} + (z-c)\frac{dz}{dn};$$

luego $$\frac{dr}{dn} = -\cos(r, n).$$

Para deducir ahora la fórmula fundamental, consideremos una solución V de la ecuación $\Delta V = 0$, continua en un volumen limitado por una o varias superficies S, y sea además la función $U = \frac{1}{r}$, hallándose el punto A (a, b, c) en el interior del volumen.

La fórmula (2) no es aplicable a las dos funciones $\frac{1}{r}$ y V, porque la primera no es continua en el volumen que estudiamos. Pero describamos alrededor del punto A una esfera, y consideremos el volumen comprendido en el volumen inicial y exterior a esta esfera Σ.

Aplicaremos la fórmula (1) que escribiremos así:

$$\int_S\int\left(\frac{1}{r}\frac{dV}{dn} - V\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right)d\sigma + \int_\Sigma\int\left(\frac{1}{r}\frac{dV}{dn} - V\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right)d\sigma = 0.$$

La primera integral se extiende a las superficies S que limita el volumen y la segunda a la esfera Σ. Las derivadas que figuran en esta última se hallan tomadas en la dirección de la normal exterior a la esfera; y si las suponemos tomadas en la normal interior, cambiaremos el signo, obteniendo

$$\int_\Sigma\int\left(\frac{1}{r}\frac{dV}{dn}-V\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right)d\sigma=\int_S\int\left(\frac{1}{r}\frac{dV}{dn}-V\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right)d\sigma. \quad (3)$$

La primera integral no debe depender del radio de la esfera Σ; y tiene un valor sencillo que obtendremos fácilmente. Para ello observaremos que, siendo r constante en Σ, el primer término de esta integral es igual a

$$\frac{1}{r}\int_\Sigma\int\frac{dV}{dn}\,d\sigma,$$

y por consiguiente nulo, reduciéndose el primer miembro de (3) a

$$-\int_\Sigma\int V\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,d\sigma=-\frac{1}{r^2}\int_\Sigma\int V\cos(r,n)\,d\sigma=-\frac{1}{r^2}\int_\Sigma\int V\,d\sigma, \quad (4)$$

porque, en la esfera, $\cos(r, n)=1$.

Sean además, en la esfera Σ de radio r, M y m el máximo y el mínimo de la función; la integral doble $\iint V d\sigma$ estará comprendida entre $M\,.\,4\pi r^2$ y $m\,.\,4\pi r^2$. Por consiguiente, la integral (4) estará comprendida entre $-4\pi M$ y $-4\pi m$.

Pero el radio r es arbitrario y puede tender hacia cero. M y m difieren en tan poco como se quiera de $V(a, b, c)$, y el valor de la expresión (4), independiente del radio de la esfera Σ, es $-4\pi V(a, b, c)$, lo que conduce a la fórmula fundamental que nos proponíamos deducir.

Puede obtenerse una fórmula análoga para el caso en que la función V satisface a la ecuación de Laplace, fuera de la superficie S. Pero en este caso, es necesario hacer una hipótesis respecto al modo de hallarse V y sus derivadas en el infinito.

Supongamos que, para (x, y, z) muy grande, se tenga

$$|V|<\frac{M}{R}, \quad \left|\frac{\partial V}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial V}{\partial y}\right| \text{ y } \left|\frac{\partial V}{\partial z}\right|<\frac{M}{R^2}, \quad (x^2+y^2+z^2=R^2)$$

siendo M un número fijo. Y describamos, desde el origen como centro, una esfera Σ' de radio muy grande R. El punto A estará comprendido entre la superficie S y esta esfera (consideraremos la esfera Σ de radio r, cuyo centro es A). Aplicando la fórmula de Green al espacio limitado por S, Σ y Σ' y repitiendo el razonamiento anterior, tenemos

$$V_A = \frac{1}{4\pi}\int_S \int \left(V \frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r}\frac{dV}{dn} \right) d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma'} \int \left(V \frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r}\frac{dV}{dn} \right) d\sigma.$$

La segunda integral es igual a cero, puesto que puede escribirse, empleando en la esfera Σ' las coordenadas polares θ y ψ, bajo la forma

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \left[V \frac{\cos(r, n)}{r^2} - \frac{1}{r}\frac{dV}{dn} \right] R^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\psi.$$

Pero $\frac{R}{r}$ tiene un valor muy próximo a la unidad, V tiende a cero y $\frac{dV}{dn}$ a un valor absoluto menor que $\frac{3M}{R^2}$. Esta integral es pues, menor en valor absoluto que una cantidad dada cualquiera, cuando el radio R aumenta indefinidamente; y puesto que su valor es independiente de R, es nula. Tenemos, pues, la fórmula fundamental enunciada al principio de este número.

En el caso de reducirse la superficie S a la de una esfera cuyo centro es (a, b, c) y el radio R, tendremos

$$V(a, b, c) = \frac{1}{4\pi R^2}\int_{\Sigma} \int V d\sigma.$$

4. Teorema de Gauss.—*Una función* V(x, y, z) *continua en la proximidad de un punto* (a, b, c) *que satisface a la ecuación* $\Delta V = 0$, *no puede tener en el punto* (a, b, c) *ni máximo ni mínimo.*

En efecto, supongamos que V tenga un máximo en dicho punto. Si tomamos R bastante pequeño, se tendrá para todo punto de la esfera Σ,

$$V(x, y, z) < V(a, b, c),$$

excluyéndose la igualdad. Si ahora multiplicamos por $\frac{d\sigma}{4\pi R^2}$ e integramos, tendremos $\frac{1}{4\pi R^2}\int\int V d\sigma < V(a, b, c)$, desigualdad absurda, puesto que los dos miembros son iguales.

5. Principio de Dirichlet.—*No pueden existir dos funciones que satisfagan a la ecuación de Laplace, continuas, así como sus derivadas parciales de los dos primeros órdenes en el interior de una superficie, y que adquieran en ésta los mismos valores.*

En efecto, si existieren tales funciones, su diferencia W satisfaría a la ecuación $\Delta W = 0$ y se anularía en la superficie. Debería, pues, tener en el interior un máximo o un mínimo, lo que es contradictorio con el teorema de Gauss. W debe por lo tanto ser idénticamente nula, es decir, que las dos funciones consideradas son idénticas.

También podemos demostrar que no pueden existir dos funciones V continuas en el *exterior* de una superficie cerrada S que tiende hacia cero, cuando el punto (x, y, z) se aleja al infinito de una manera cualquiera, adquiriendo la misma sucesión de valores en la superficie S, puesto que anulándose su diferencia en la superficie y en el infinito, debería tener en alguna parte un máximo o un mínimo.

Vemos pues, que si se da en una superficie cerrada S una sucesión continua de valores asociados cada uno a punto de la superficie, sólo puede existir una función continua en el interior de S que satisfaga a la ecuación de Laplace y que adquiera en la superficie los valores dados. Pero es necesario demostrar que *esta solución existe y hallar el medio de determinarla*, en lo que consiste el *problema de Dirichlet*.

6. Problema de Dirichlet.—*Caso de una esfera.*—Cuando la superficie S se reduce a una esfera, podemos eliminar de la fórmula fundamental (1) la derivada $\frac{dV}{dn}$.

En efecto, si A es un punto interior de una esfera S de radio R y cuyo centro es O, el punto conjugado A_1 estará en el diámetro OA, y se tendrá: $OA \cdot OA_1 = R^2$.

La relación de las distancias de un punto cualquiera M de la esfera a los puntos A y A_1 es constante, y se tiene $\frac{MA}{MA_1} = \frac{OA}{R}$.

Si (a, b, c) y (a_1, b_1, c_1) expresan las coordenadas de A y A_1, se tendrá

$$r^2 = (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2, \quad r_1^2=(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2.$$

La fórmula (1) da

$$V(a, b, c)=\frac{1}{4\pi}\int_S\int V\frac{d\frac{1}{r}}{dn}-\frac{1}{r}\frac{dV}{dn}\Bigg) d\sigma.$$

Además, aplicando la fórmula de Green a las funciones V y $\frac{1}{r}$ continuas en S, porque el punto A_1 es exterior a la esfera, se tiene

$$0=\frac{1}{4\pi}\int_S\int\left(V\frac{d\frac{1}{r_1}}{dn}-\frac{1}{r_1}\frac{dV}{dn}\right) d\sigma.$$

Hagamos $OA = l$, $OA_1 = l_1$. Multipliquemos la última igualdad por $\frac{R}{l}$ y restemos la de la precedente. Puesto que $\frac{1}{r}=\frac{R}{l}\frac{1}{r_1}$ está en la esfera, será

$$V(a, b, c)=\frac{1}{4\pi}\int\int\left(V\frac{d\frac{1}{r}}{dn}-\frac{R}{l}\frac{d\frac{1}{r_1}}{dn}\right) d\sigma.$$

Este artificio permite eliminar $\frac{dV}{dn}$ y expresar V en un punto cualquiera del interior de la esfera, por medio de sus valores en la superficie.

Para efectuar el cálculo, escribamos la cantidad entre parén-

tesis bajo el signo integral, como sigue:

$$\frac{1}{r^2}\cos(r, n) - \frac{R}{l}\frac{1}{r_1^2}\cos(r_1, n).$$

Sea $\varphi = (r, n) = \angle OMA$, $\varphi_1 = (r_1, n) = \angle OMA_1$.

Pero en los dos triángulos OMA y OMA_1 se tiene

$$l^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\varphi, \qquad l_1^2 = R^2 + r_1^2 - 2Rr_1\cos\varphi_1.$$

y tendremos $$\frac{\cos\varphi}{r^2} - \frac{R}{l}\frac{\cos\varphi_1}{r_1^2} = \frac{R^2 - l^2}{Rr^3},$$

observando que $ll_1 = R^2$ y $\dfrac{r}{r_1} = \dfrac{l}{R}$.

La fórmula que se busca es

$$V(a, b, c) = \frac{1}{4\pi R}\iint \frac{(R^2 - l^2)V d\sigma}{r^3}, \tag{5}$$

que, llamando r al ángulo de OA y OM, se reduce a

$$V(a, b, c) = \frac{1}{4\pi R}\iint \frac{(R^2 - l^2)V d\sigma}{(R^2 - 2lR\cos\gamma + l^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{6}$$

Pasando a las coodernadas polares (l, ϑ_0, ψ_0) de A y (R, ϑ, ψ) de (x, y, z), se tendrá

$$\cos\gamma = \cos\vartheta\cos\vartheta_0 + \operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\vartheta_0\cos(\psi - \psi_0);$$

y tomando como variables ϑ y ψ, será $d\sigma = R^2\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\vartheta\, d\vartheta\, d\psi$, variando ϑ desde o hasta π y ψ desde o hasta 2π.

Recíprocamente.—*Si la función* V *bajo el signo* $\int$ *es una función continua* $V(\vartheta, \psi)$ *de los ángulos* ϑ y ψ *que fijan la posición de un punto en la esfera y las fórmulas* (5) y (6) *representan una función de las coordenadas* a, b, c *del punto* A, *también representan una función que satisface a la ecuación*

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial c^2} = 0$$

Esta y otras importantes consecuencias y desarrollos, pueden estudiarse en el *Traité d'Analyse* de M. Picard.

7. Fórmulas sobre el potencial. *Caso del punto exterior* (a, b, c) son las coordenadas del punto de la masa atrayente;

$$X=\iiint\frac{(a-x)\varrho dv}{r^3},\quad Y=\iiint\frac{(b-y)\varrho dv}{r^3},\quad Z=\iiint\frac{(c-z)\varrho dx}{r^3}\ (1)$$

$$r^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 \qquad dv=da\,db\,dc$$

son las derivadas parciales de $V(x, y, z)=\iiint\frac{\varrho dv}{r}$. (potencial) $V(xyz)$ y sus derivadas tienden a cero, cuando (x, y, z) se aleja al infinito de un modo cualquiera

$$V=\frac{1}{R}\iiint\frac{R}{r}\varrho\,da\,db\,dc \qquad (R^2=x^2+y^2+z^2)$$

$$\lim VR=\iiint\varrho\,da\,db\,dc=M \quad (M \text{ masa atrayente, } \lim\frac{R}{r}=1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}\iiint\frac{(a-x)\varrho da\,db\,dc}{r^3}=\frac{1}{R^2}\iiint\frac{a-x}{r}\left(\frac{R}{r}\right)^2\varrho\,da\,db\,dc$$

Cuando (x, y, z) se aleja al infinito en la dirección (α, β, γ)

$$\lim\left(R^2\frac{\partial V}{\partial x}\right)=-M\cos\alpha$$ y lo mismo para $\frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$.

$$\Delta V=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

$$\text{por ser } \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{\partial X}{\partial x}=\iiint\left[-\frac{1}{r^3}+\frac{3(a-x)^2}{r^5}\right]\varrho dv \text{ . etc.}$$

Caso del punto interior.—Concibamos alrededor del punto A un volumen muy pequeño. Las masas atrayentes se dividen en dos partes, la una interior *uno*, la otra *dos*, exterior a este volumen, cuyos potenciales designamos por V_1, V_2, de modo que $V=V_1+V_2$ y $X=X_1+X_2$, tomando en V_1 un segundo punto A' cuyas coordenadas son $(x+\Delta x, y, z)$ y siendo V', V'_1, V'_2 los valores del potencial relativo a A' para los tres volúmenes, tendremos

$$\frac{V'-V}{\Delta x}=\frac{V'_1-V_1}{\Delta x}+\frac{V'_2-V_2}{\Delta x};\qquad \lim\frac{V'_2-V_2}{\Delta x}=X_2, \text{ cuando } \Delta x$$

tiende a cero.

Designando por r y r' las distancias del punto variable del volumen V_1 a A y A', se tiene

$$\frac{V'_1 - V_1}{\Delta x} = \iiint \frac{\rho dv}{\Delta x}\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right)$$

$$\left|\frac{V'_1 - V_1}{\Delta x}\right| < \frac{1}{2}\iiint \frac{\rho dv}{r^2} + \frac{1}{2}\iiint \frac{\rho dv}{r'^2}$$

Pero $$\iiint \frac{\rho dv}{r^2} = \iiint \rho \operatorname{sen}\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\psi < 4\pi d\rho_1$$

(siendo $a = x + r \operatorname{sen}\vartheta \cos\psi$, etc.), ρ_1 lim. superior de la densidad alrededor de A y d la distancia máxima de A a la superficie que limita el volumen *uno*.

Luego $$\left|\frac{V_1' - V_1}{\Delta x}\right| < 4\pi\rho_1 D,$$

pudiéndose tomar el volumen *uno* bastante pequeño para que D sea menor que cualquier cantidad dada. Si este volumen es bastante pequeño, X_2 difiere de X tan poco como se quiera. Y el límite de $\frac{V' - V}{\Delta x}$ será X. Luego las relaciones $\frac{\partial V}{\partial x} = X$, etc., subsisten. Pero.

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \iiint \frac{a - x}{r^3}\rho\, da\, db\, dc = \iiint \rho \frac{\partial\left(-\frac{1}{r}\right)}{\partial a} da\, db\, dc.$$

Descompongamos el volumen de las masas atrayentes en dos partes: La una que contenga en su interior el punto (x, y, z), sin puntos de contacto con la superficie; la otra formada por el resto del volumen. V_2 y todas sus derivadas parciales serán funciones continuas de x, y, z. Trataremos sólo de V_1. Integrando por partes tendremos

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = \iint \frac{\rho}{r} \cos\alpha d\sigma + \iiint \frac{1}{r}\frac{\partial \rho}{\partial a} da\, db\, dc$$

(α ángulo de la normal interior con el eje de las x).

8. Fórmula de Poisson.—Cuando el punto es exterior, $\Delta V = 0$; cuando es interior, $\Delta V = -4\pi\varrho$ (ϱ densidad en (x, y, z)).

Esta es la fórmula de Poisson. Para establecerla, observaremos que $\Delta V = \Delta V_1$, porque, siendo (x, y, z) exterior, $\Delta V_2 = 0$.

Pero $$\frac{\partial V_1}{\partial x} = \iint \frac{\varrho}{r} \cos\alpha \, d\sigma + \iiint \frac{1}{r} \frac{\partial \varrho}{\partial a} \, da\, db\, dc.$$

Luego $$\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} = \iint \varrho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos\alpha \, d\sigma + \iiint \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial \varrho}{\partial a} \, da\, db\, dc.$$

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} = -\iint \varrho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} \cos\alpha \, \partial\sigma - \iiint \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} \frac{\partial \varrho}{\partial a} \, da\, db\, dc.$$

$$\Delta V_1 = -\iint \varrho \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma - \iiint \left(\frac{\partial \varrho}{\partial a} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} + \frac{\partial \varrho}{\partial b} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b} + \frac{\partial \varrho}{\partial c} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c} \right) da\, db\, dc$$

Aplicando las fórmulas de Green

$$\iiint \left(\frac{\partial \varrho}{\partial a} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} + \frac{\partial \varrho}{\partial b} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b} + \frac{\partial \varrho}{\partial c} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c} \right) da\, db\, dc = \int_\Sigma \int \varrho \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma - \iint \varrho \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma$$

puesto que $\frac{1}{r}$ satisface a la ecuación de Laplace.

La primera integral doble se extiende a la superficie Σ y la segunda a la esfera σ. En esta última, la dirección de la normal corresponde al interior de la esfera. Pero se tiene

$$\lim \int_\sigma \int \varrho \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma = -4\pi\varrho(x, y, z)$$

cuando el radio de la esfera σ tiende a cero. Además tenemos $\Delta V_1 = -4\pi\varrho$ y por consiguiente $\Delta V = -4\pi\varrho$, siendo ϱ la densidad en el punto (x, y, z) para el que se toma el potencial.

Del teorema precedente puede deducirse el valor hallado

por Gauss de la integral $\iint \frac{dV}{dn}\, d\sigma$, extendida a una superficie cerrada cualquiera Σ, tomándose la derivada $\frac{dV}{dn}$ hacia el interior de la superficie.

Siendo continuas las derivadas segundas, se puede aplicar la fórmula de Green que da

$$\iint \frac{dV}{dn}\, d\sigma = \iint \Delta V\, dx\, dy\, dz \quad \text{y} \quad \iint \frac{dV}{dn}\, d\sigma = -4\pi M,$$

siendo M la porción de las masas contenidas en el interior de Σ.

Series trigonométricas

Resumen histórico.—Vamos a tratar de una de las últimas generalizaciones que ha alcanzado el concepto de función durante el siglo XIX.

Euler consideró como una función *lo que tiene una expresión analítica determinada*, Lacroix la definió diciendo que es *toda cantidad cuyo valor depende de otra u otras, se ignore o no ignore por qué operaciones puede pasarse de éstas a aquéllas.*

Pero se presentó una cuestión de Física matemática, la investigación *sobre las vibraciones de una cuerda clástica tensa*, enunciada del modo siguiente: «Supongamos que la cuerda al moverse permanezca en un plano invariable, el de las (x, y) y se separa un poco de su posición de equilibrio, el eje de las x. Dicha cuerda está fija en dos puntos $x = 0$, $x = \lambda$ de este eje, y su posición inicial está definida por la relación $y = f(x)$.

Se demuestra que en el tiempo t, las coordenadas de sus puntos verifican sensiblemente una ecuación de la forma

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \mu^2 \frac{\partial y}{\partial x^2}$$

siendo φ independiente de t, y si la cuerda tiene un espesor uniforme independiente de x».

Este problema fué resuelto primero por d'Alembert, por la fórmula

$$y = f(x + \alpha t) + \varphi(x - \alpha t),$$

en la que f y φ son funciones arbitrarias, y Daniel Bernoulli demostró que esta ecuación queda satisfecha por productos del tipo

$$\cos \frac{n\pi\mu t}{\lambda} \operatorname{sen} \frac{n\pi\pi x}{\lambda}, \quad \operatorname{sen} \frac{n\pi\mu t}{\lambda} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\lambda},$$

y llegó a considerar como integral general la serie

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \left((a_a \cos \frac{n\pi\mu t}{\lambda} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi\mu t}{\lambda} \right) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\lambda}.$$

Para $t = 0$, esta fórmula debía dar la ecuación de la cuerda en su posición inicial.

Si consideramos la ecuación

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial y}$ haciendo $z = Ae^{my} \operatorname{sen} nx$, se reduce a $-n^2 = m$,

lo que da para la integral la expresión indefinida:

$$z = Ae^{-n^2 y} \operatorname{sen} nx + A_1 e^{-n_1^2 y} \operatorname{sen} n_1 x + \ldots .$$

De manera que si el valor de z debiera reducirse, cuando $y = 0$, a una función dada $f(x)$, esta condición exigiría una determinación de los coeficientes n y A tal, que

$$f(x) = A \operatorname{sen} nx + A_1 \operatorname{sen} n_1 x + A_2 \operatorname{sen} n_2 x + \ldots,$$

lo que se reduce a transformar la función $f(x)$ en una serie ordenada según los senos de los múltiplos del arco x.

La ecuación propuesta admite también el desarrollo indefinido

$$z = Ae^{-n^2 y} \cos nx + A_1 e^{-n_1^2 y} \cos n_1 x + \ldots,$$

es decir, la transformación de $f(x)$ en serie ordenada según los cosenos de los múltiplos del arco x.

Euler observó que

$$\frac{1}{2}x = \operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x - \ldots,$$

fórmula que se obtiene restando los desarrollos de $\log(1+u)$ y $\log(1+u^{-1})$. Así (Lacroix. *Traité du calcul différentiel*, etc., t. I, p. 94).

$$l(1+u) = \frac{u}{1} - \frac{u^2}{2} + \ldots, \; l(1+u^{-1}) = \frac{u^{-1}}{1} - \frac{u^{-2}}{2} + \ldots$$

$$l(1+u) - l(1+u^{-1}) = l\frac{1+u}{1+u^{-1}} = lu = \frac{u-u^{-1}}{1} + \frac{u^2-u^{-2}}{2} + \ldots$$

haciendo $u = e^{x\sqrt{-1}}$, $lu = x\sqrt{-1}$, $u^m - u^{-m} = e^{mx\sqrt{-1}} - e^{-mx\sqrt{-1}}$ $= 2\sqrt{-1}\operatorname{sen} mx$. Sustituyendo, $x = 2\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3}\right) - \ldots$

$$\frac{1}{2}x = \operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x - \ldots$$

Y en el caso particular de ser $f(x) = x$, resulta

$$x = 2\operatorname{sen} x - \frac{2}{2}\operatorname{sen} 2x + \frac{2}{3}\operatorname{sen} 3x \ldots = A\operatorname{sen} nx + A_1 \operatorname{sen} n_1 x + \ldots$$

$$n = 1,\; n_1 = 2,\; n_2 = 3,\; \ldots;\; A = \frac{2}{1},\; A_1 = \frac{2}{2},\; A_2 = \frac{2}{3},\; \ldots$$

$$x = 2\left(e^{-y^2}\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}e^{-4y^2}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3}e^{-9y^2}\operatorname{sen} 3x - \ldots\right),$$

solución de la ecuación propuesta.

También si hacemos

$$f(x) = a_1 \operatorname{sen} x + a_2 \operatorname{sen} 2x + a_3 \operatorname{sen} 3x + \ldots,$$

cambiando x en t, multiplicando por dt. sen nt y tomando las integrales desde $t = 0$, hasta $t = \pi$, se tendrá

$$\int f(t)\,dt \text{ sen } nt = a_1 \int dt \text{ sen } nt \text{ sen } nt + a_2 \int dt \text{ sen } 2t \text{ sen } nt + \ldots$$

Pero $\int dt \text{ sen } mt \text{ sen } nt = \frac{1}{2} \int dt \cos (m-n)t - \frac{1}{2} \int dt \cos (m+n)\,t$

$$= \frac{\text{sen } (m-n)\,t}{2\,(m-n)} - \frac{\text{sen } (m+n)\,t}{2\,(m+n)}.$$

Para cada valor de n desaparecen todos los términos de la serie precedente, excepto aquél para el cual el índice es igual a dicho valor, y el verdadero valor de la segunda parte $\frac{0}{0}$ es $\frac{t}{2}$, reduciéndose a $\frac{\pi}{2}$; luego

$$\int_0^{\pi} f(t)\,dt \text{ sen } mt = a_m \frac{\pi}{2}, \quad a_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t)\,dt \text{ sen } mt$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \left\{ \text{sen } x \int f(t)\,dt \text{ sen } t + \ldots + \text{sen } mx \int f(t)\,dt \text{ sen } mt + \ldots \right\} \quad (1)$$

y, cuando $f(x) = x$, resulta

$$\int f(t)\,dt \text{ sen } mt = \int t\,dt \text{ sen } mt = -\frac{t \cos mt}{m} + \frac{1}{m} \int dt \cos mt$$

$$= -\frac{t \cos mt}{m} + \frac{\text{sen } mt}{m^2}.$$

que entre los límites o y π, se reduce a

$$-\frac{\pi \cos m\pi}{m} = -\frac{\pi\,(-1)^m}{m}.$$

Dando a m la serie de valores 1, 2, 3, ... y suprimiendo π, se obtiene el desarrollo

$$x = 2\,(\text{sen } x - \frac{1}{2} \text{ sen } 2x + \frac{1}{3} \text{ sen } 3x - \ldots).$$

Si partimos de la fórmula

$$f(x) = a_0 \cos 0x + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots,$$

llegaremos, siguiendo igual procedimiento, a un desarrollo análogo, según los cosenos

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int f(t)\, dt + \frac{2}{\pi} [\cos x \int f(t)\, dt \cos t + \ldots],$$

fórmulas en las que las integraciones se efectúan entre o y π; expresando ambos desarrollos dos especies de funciones, par e impar.

Siguiendo la exposición histórica de la evolución que mediante los trabajos de Fourier experimentó la teoría de las funciones, debe observarse que hasta entonces se hallaban tan sólo definidas las funciones por arcos continuos de curvas; y si se consideraban algunas interrumpidas bruscamente, se las miraba como si representasen, no una función propiamente dicha, sino como partes de funciones distintas. Entonces no se podía imaginar que un desarrollo analítico único fuese capaz de representar lo que aparecía como el conjunto de funciones diferentes, que una serie trigonométrica, transcendente, periódica, sirviera para expresar una función no periódica.

Dirichlet observó que las series de la forma

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_1^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx\, dx \qquad (2)$$

no son siempre convergentes independientemente del orden de los términos; de manera que, para decidir su convergencia, no es necesario referirse a la manera de tender hacia cero estos términos, sino hallar el límite hacia el que converge la suma de los n ó $n + 1$ primeros de éstos, cuando n crece indefinidamente, y ver si este límite es o no determinado y finito. Y para demostrar que esta serie tiene por suma $f(x)$, es necesario hacer ver que dicho límite es $f(x)$.

Sustituyendo en la serie (1) los valores (2) y cambiando x en α fuera de las integrales, puede escribirse:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left[\frac{1}{2}+\sum_{1}^{n}\cos n\,(x-\alpha,\right]dx;$$

Pero la suma entre paréntesis es igual a

$$\frac{1}{2\,\operatorname{sen}\dfrac{\alpha-x}{2}}\left[\operatorname{sen}\frac{\alpha-x}{2}+\sum_{1}^{p}2\,\operatorname{sen}\frac{\alpha-x}{2}\cos n\,(\alpha-x)\right]$$

$$=\frac{1}{2\,\operatorname{sen}\dfrac{\alpha-x}{2}}\left[\operatorname{sen}\frac{\alpha-x}{2}+\sum_{1}^{p}\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}(\alpha-x)\right.$$

$$\left.-\operatorname{sen}\frac{2n-1}{2}(\alpha-x)\right]=\frac{\operatorname{sen}\dfrac{2p+1}{2}(\alpha-x)}{2\,\operatorname{sen}\dfrac{\alpha-x}{2}}-$$

$$\text{luego } S_p=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\frac{\operatorname{sen}\dfrac{2p+1}{2}(\alpha-x)}{2\,\operatorname{sen}\dfrac{\alpha-x}{2}}\,dx.$$

El problema se reducía pues a obtener el límite de esta integral para $n=\infty$.

Dirichlet al obtener este límite, demostró que una función $f(x)$ de x, dada arbitrariamente entre $-\pi$ y π ,y que en este intervalo no tiene un número infinito de máximos y de mínimos, para todos los valores de x comprendidos entre los mismos límites para los cuales es continua, puede representarse por medio de la serie (1), y que para valores de x incluídos en dicho intervalo, para los cuales la función es discontinua (debiendo ser la discontinuidad ordinaria), la serie (1) da el valor medio entre los dos hacia el que tiende la función, cuando se aproxima indefinidamente a los valores de x a cada lado de los mismos. Es decir, que si a es un punto interior al intervalo $(-\pi, \pi)$ en el que la función es continua o discontinua, la suma de la serie para $x=a$ puede siempre representarse por

$$\frac{1}{2}\left\{f(a+,0)+f(a-0)\right\},$$

mientras que para los puntos extremos $\neq \pi$, dicha suma es

$$\frac{1}{2}\{f(\pi + 0) + f(\pi - 0)\}.$$

Finalmente Riemann, Lipschitz, Du Bois Reymond y otros matemáticos, han extendido el teorema de Direchlet a otras clases extensas de funciones continuas y discontinuas con un número infinito de máximos y de mínimos.

Ahora bien; $\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx\, dx = 0 \quad (m \neq n)$,

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \operatorname{sen} mx\, dx = 0 \quad (m = n),$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx = 0 \quad (m \neq n),$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 mx\, dx = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 mx\, dx = \pi \quad \text{y} \quad \int_0^{2\pi} dx = 2\pi,$$

pues $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\cos(m+n)x + \frac{1}{2}\cos(m-n)x$

$$\int_\alpha^{\alpha+2\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}(m+n)(\alpha+2\pi) - \operatorname{sen}(m+n)\alpha}{m+n} +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}(m-n)(\alpha+2\pi) - \operatorname{sen}(m-n)\alpha}{m-n} =$$

$$= \frac{\cos(m+n)(\alpha+\pi)\operatorname{sen}(m+n)\pi}{m+n} +$$

$$+ \frac{\cos(m-n)(\alpha+\pi)\operatorname{sen}(m-n)\pi}{m-n}.$$

Cuando m y n son enteros, se tiene $\int_\alpha^{\alpha+2\pi} \cos mx \cos nx\, dx = 0$,

$$\int_\alpha^{\alpha+2\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx = 0, \int_\alpha^{\alpha+2\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx = 0,$$

Cuando $m = n$, $\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \cos^2 mx\,dx = \int \frac{1}{2}(1+\cos 2mx)\,dx =$

$$= \left[\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2mx}{m}\right]_{\alpha}^{\alpha+2\pi} = \pi, \quad \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \operatorname{sen}^2 mx\,dx = \pi$$

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \operatorname{sen} mx \cos mx\,dx = 0.$$

Siendo $\cos^m x = \frac{1}{2^{m-1}}\left[\cos mx + \frac{m}{1}\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x + \ldots\right]$

resulta $\int_{\alpha}^{2\pi} \cos^m x \cos mx\,dx = \frac{\pi}{2^{m-1}}$,

$$\int_{0}^{2\pi} \cos^m x \cos(m-2)x\,dx = \frac{m\pi}{2^{m-1}}, \ldots;$$ y siendo

(1) $f(x) = a_0 + \sum_{m=1}^{m=\infty}(a_m \cos mx + b_n \operatorname{sen} mx)$ (m entero positivo),

multiplicaremos esta fórmula (1) por $\cos m\alpha\,d\alpha$, reemplazando x por α, e integraremos los dos miembros de (1) entre 0 y 2π, obteniéndose

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos m\alpha\,d\alpha \quad \text{y} \quad b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha \operatorname{sen} m\alpha\,d\alpha.$$

Para $m = 0$, se tiene $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)d\alpha$.

La suma S_m de los $m+1$ primeros términos de la serie, puede escribirse

$$S_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2} + \cos(\alpha - x) + \ldots + \cos m(\alpha - x)\right] f(\alpha)\,d\alpha$$

pues el término general es

$$\frac{1}{2}\cos(\alpha+x)+\ldots+\cos m(\alpha-x) \text{ que es} = \frac{\operatorname{sen}\left[(2m+1)\frac{\alpha-x}{2}\right]}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha-x}{2}}$$

El término general de la serie será

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)(\cos p\alpha\cos p\alpha+\operatorname{sen} p\alpha\operatorname{sen} p\alpha)\,d\alpha =$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos p(\alpha-x)\,f(\alpha)\,d\alpha.$$

La serie $\frac{1}{2}+\cos(\alpha-x)+\ldots+\cos m(\alpha-x)$ es fácil sumar.

Su suma es igual a

$$\frac{\operatorname{sen}\left[(2m+1)\frac{\alpha-x}{2}\right]}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha-x}{2}}$$

En efecto: Multiplicando por $2\cos\theta$ la igualdad

$S=\cos\theta+\ldots+\cos n\theta$, resulta $2S\cos\theta=2\cos^2\theta+\ldots+2\cos\theta\cos n\theta$

$$=1+\cos\theta+\ldots+\cos(n-1)\theta+\cos 2\theta+\ldots+\cos(n+1)\theta$$

$$=2S+1+\cos(n+1)\theta-\cos\theta-\cos n\theta;$$

$$S=-\frac{1}{2}+\frac{\cos n\theta-\cos(n+1)\theta}{2(1-\cos\theta)}$$

Tenemos pues

$$S_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\operatorname{sen}\left[(2m+1)\frac{\alpha-x}{2}\right]}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha-x}{2}}f(\alpha)\,d\alpha. \quad \text{Haciendo } \frac{\alpha-x}{2}=\gamma$$

$$S_m=\int_{-\frac{x}{2}}^{\pi-\frac{x}{2}}\frac{\operatorname{sen}(2m+1)\gamma}{\operatorname{sen}\gamma}f(x+2\gamma)\,d\gamma.$$

Vamos a ver si S_m *tiene límite.*

La integral se reduce a una integral de la forma

$J=\int_c^h \frac{\operatorname{sen} kx}{\operatorname{sen} x}\,\varphi(x)\,dx;\ \frac{\pi}{2}\geqslant h>0$, siendo h constante y k entero impar $2n+1$, creciente.

Pero de

$$\frac{\operatorname{sen}(2n+1)x}{\operatorname{sen} x}=2\left(\frac{1}{2}+\cos 2x+\ldots+\cos 2nx\right)$$

resulta

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}(2n+1)x}{\operatorname{sen} x}\,dx=\frac{\pi}{2}$$

Supongamos a $\varphi(x)$ continua y positiva entre o y h sin crecer jamás. Tendremos la suma

$$\int_0^{\frac{\pi}{k}} \frac{\operatorname{sen} kx}{\operatorname{sen} x}\,\varphi(x)\,dx+\ldots+\int_{\frac{m\pi}{k}}^{\frac{m+1\pi}{k}} \frac{\operatorname{sen} kx}{\operatorname{sen} x}\,\varphi(x)\,dx+\ldots+$$

$$+\int_{\frac{r\pi}{k}}^{h} \frac{\operatorname{sen} kx}{\operatorname{sen} x}\,\varphi(x)\,dx.$$

Pero se demuestra fácilmente que dos integrales consecutivas de la serie tienen signo contrario y van decreciendo siempre sus valores, lo mismo que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} k\pi}{\operatorname{sen} x}\,dx$ que escribiremos respectivamente

$J=u_0-u_1+u_2-\ldots$, $\frac{\pi}{2}=\rho_0-\rho_1+\rho_2-\ldots$ concluyendo que

$$u_0-u_1+\ldots-u_{2m-1}<J<u_0-u_1-\ldots+u_{2m}.$$

$$\rho_0-\rho_1+\ldots-\rho_{2m-1}<\frac{\pi}{2}<\rho_0-\rho_1+\ldots+\rho_{2m}.$$

Y si reemplazamos en el término general $\varphi(x)$ sucesivamente por su límite superior e inferior, tendremos

$$J > \varphi\left(\frac{\pi}{k}\right)\rho_0 - \varphi\left(\frac{\pi}{k}\right)\rho_1 + \cdots + \varphi\left[\frac{(2m-1)\pi}{k}\right]\rho_{2m-1} - \cdots,$$

$$J < \varphi(0)\,\rho_0 - \varphi\left(\frac{2\pi}{k}\right)\rho_1 + \cdots + \varphi\left(\frac{2m\pi}{k}\right)\rho_{2m-1} - \varphi\left(\frac{2m\pi}{k}\right)\rho_{2m}.$$

Y se obtendrá

$$\left(\frac{2m\pi}{k}\right)\frac{\pi}{2} - \varphi\left(\frac{2m\pi}{k}\right)\rho_{2m} < J < \left[\varphi(0) - \varphi\left(\frac{2m\pi}{k}\right)\right]\rho_0 + \\ + \varphi\left(\frac{2m\pi}{k}\right)\frac{\pi}{2} + \varphi\left(\frac{2m\pi}{k}\right)\rho_{2m}$$

y obteniéndose que el límite de ρ_m es cero, haciendo crecer k indefinidamente, así como m, de manera que $\lim \frac{m}{k} = 0$ se se obtiene que $\lim_{k=\infty} J = \frac{\pi}{2}\varphi(0)$. Y análogamente se obtiene este límite en el caso de hallarse h comprendido entre $\frac{\pi}{2}$ y π, llegándose a la fórmula

$$\lim_{k=\infty} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} k\pi}{\operatorname{sen} x}\,\varphi(x)dx = \frac{\pi}{2}\left[\varphi(+\varepsilon) + \varphi(\pi - \varepsilon)\right]$$

como puede verse con detalle en el *Traité d'Analyse* de M. Picard (t. I, págs. 215-227).

Para calcular $\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}\,(2m+1)x}{\operatorname{sen} x}\,dx$, observaremos que se tiene

$$\frac{\operatorname{sen}\,(2m+1)x}{\operatorname{sen} x} = 2\left(\frac{1}{2} + 2\cos 2x + \ldots + \cos 2mx\right)$$

De esto resulta $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}\,(2m+1)x}{\operatorname{sen} x}\,dx = \frac{\pi}{2}$: Pero $\varphi(x)$ es conti-

nua y positiva entre o y h, no creciendo nunca. Dividamos el campo de integración de intervalos $o, \frac{\pi}{k}, \ldots \frac{m\pi}{k} \ldots \frac{r\pi}{k}, h$ Y tendremos la suma

$$\int_0^{\frac{\pi}{k}} \frac{\operatorname{sen} kx}{\operatorname{sen} x} \varphi(x)\, dx + \ldots$$

$$+ \int_{\frac{m\pi}{k}}^{\frac{(m+1)\pi}{k}} \frac{\operatorname{sen} kx}{\operatorname{sen} x} dx + \ldots + \int_{\frac{\pi r}{k}}^{h} \frac{\operatorname{sen} kx}{\operatorname{sen} x} \varphi(x)\, dx.$$

Hemos visto que

$$S_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{x}{2}}^{\pi - \frac{x}{2}} \frac{\operatorname{sen} (2m+1)\gamma}{\operatorname{sen} \gamma} f(x+2\gamma)\, d\gamma.$$

Vamos a obtener el límite de S_m para $m = \infty$, suponiendo que la función $f(x)$ satisface, entre o y 2π, a las condiciones de Dirichlet.

Supongamos desde luego que x, que va a permanecer comprendida entre o y 2π, no sea igual a ninguno de estos límites, ni a un valor de x, para el cual $f(x)$ se haga infinita. Escribiremos

$$S_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{x}{2}}^{0} \frac{\operatorname{sen} (2m+1)\gamma}{\operatorname{sen} \gamma} f(x+2\gamma)\, d\gamma$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi - \frac{x}{2}} \frac{\operatorname{sen} (2m+1)\gamma}{\operatorname{sen} \gamma} f(x+2\gamma)\, d\gamma.$$

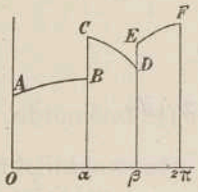
La segunda integral es de la forma de las estudiadas en el párrafo anterior. Su límite es, por lo tanto, $\frac{1}{2} f(x+\varepsilon)$, que será $\frac{1}{2} f(x)$, si x no corresponde a ninguna discontinuidad de la función. En cuanto a la primera integral, basta cambiar γ en

$-\gamma$, y se reduce al tipo estudiado. El límite, para $m = \infty$, será $\frac{1}{2} f(x - \varepsilon)$.

Así pues, para el valor considerado de x, la serie de Fourier converge, y su límite es

$$\frac{1}{2}[f(x+\varepsilon) + f(x-\varepsilon]).$$

Este límite será $f(x)$, si x no es uno de los valores, en número limitado por hipótesis, para los cuales la función es discontinua.



Si tenemos, por ejemplo, una función $f(x)$ representada por la figura, la curva $y = f(x)$ corresponde al arco continuo AB, hallándose x entre 0 y α, después al arco CD, cuando x varía entre α y β; en fin, al arco EF entre β y 2π.

Para cualquier otro valor de x distinto de 0, α, β, 2π, la serie trigonométrica representará la ordenada correspondiente de la curva. Para $x = \alpha$, la serie trigonométrica representará la semisuma de αB y αC, porque se tiene

$$f(\alpha - \varepsilon) = \alpha B, \quad f(\alpha + \varepsilon) = \alpha C.$$

Supongamos $x = 0$ ó 2π, lo que debe dar el mismo resultado. Se tendrá

$$S_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(2m+1)\gamma}{\operatorname{sen}\gamma} f(2\gamma)\, d\gamma.$$

Tendremos, pues, por límite

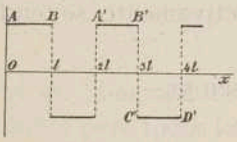
$$\frac{1}{2}[f(0) + f(2\pi)].$$

Este caso se debe considerar como un caso de discontinuidad, pues si se arrolla la figura en un cilindro, reduciéndose la longitud $(0, 2\pi)$ a una circunferencia, nada distingue el paso brusco de A a F de las demás discontinuidades de la función.

Observación.—Aunque el nombre de series de Fourier se

conserva en honor a este matemático, dichas funciones, en virtud de lo dicho, se conocen también con el nombre de *funciones cilíndricas.*

Ejemplos.—1.º Propongámonos desarrollar en serie trigonométrica una función que sea igual a una constante entre o y l y a la misma constante con signo contrario entre o y $-l$, cuya representación está dada por dos rectas AB y CD paralelas al eje de las x y distantes de éste en h.



Suponiendo para más sencillez $h=1$; el caso de ser $f(x)=-f(x)$ aplicaremos la fórmula (3), suponiendo $f(x)=1$, $f(\alpha)=1$, y será

$$f(x)=\pm 1=\frac{2}{l}\sum_{1}^{\infty}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\int_0^l \operatorname{sen}\frac{m\pi\alpha}{l}\,d\alpha$$

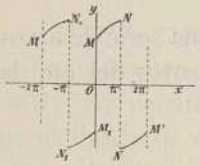
$$=\frac{2}{l}\sum_{1}^{\infty}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\cdot-\frac{l}{\pi m}\left(-\frac{l}{m}\cos\frac{m\pi\alpha}{l}\right)_0^l;$$

$$f(x)=\pm 1=\frac{2}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\left(\frac{1-\cos m\pi}{m}\right)$$

Si m es par, será $1-\cos m\pi=0$, desapareciendo todos los términos de orden par. Y si m es impar, será $1-\cos m\pi=2$; luego

$$\varphi(x)=\pm 1=\frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l}+\frac{1}{3}\operatorname{sen}3\frac{\pi x}{l}+\ldots..\right)$$

2.º Entre o y π la función



$$(a)\quad f(x)=\frac{2}{\pi}\Sigma\operatorname{sen}kx\int_0^{\pi}\operatorname{sen}k\alpha f(\alpha)\,d\alpha$$

conduce a los siguientes desarrollos

$$\frac{1}{2}x=\operatorname{sen}x-\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x+\frac{1}{3}\operatorname{sen}3x+\frac{1}{4}\operatorname{sen}4x+\ldots\quad(a)$$

$$\cos x=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}\right)\operatorname{sen}2x+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\operatorname{sen}4x+\ldots\qquad(1)$$

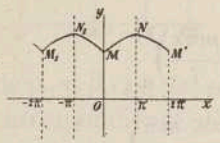
Y si $f(x)$ es igual a x entre o y $\frac{\pi}{2}$, e igual a $\pi - x$ entre $\frac{\pi}{2}$ y π, de manera que represente la ordenada de un triángulo isósceles cuya base y altura son π y $\frac{\pi}{2}$ respectivamente, se tendrá

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen} x - \frac{1}{3^2}\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{5^2}\operatorname{sen} 5x - \ldots\right)$$

3.º Entre o y π la fórmula

$$(b) \quad f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\alpha)\, d\alpha + \frac{2}{\pi}\Sigma \cos kx \int_0^{\pi} \cos k\alpha\, f(\alpha)\, d\alpha$$

que representa una línea simétrica respecto al eje oy, y conduce a numerosos desarrollos, por ejemplo.



$$\operatorname{sen} x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos 2x}{1.3} + \frac{\cos 4x}{3.5} + \frac{\cos 6x}{5.7} + \ldots\right]$$

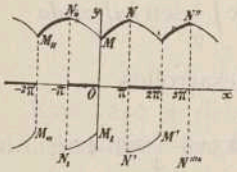
$$\frac{\pi}{4} = \cos x - \frac{1}{3}\cos 3x - \frac{1}{5}\cos 5x + \ldots$$

Multiplicando ésta por dx e integrando entre o y x, resulta

$$\frac{x}{2} = \frac{2}{\pi}\left[\operatorname{sen} x - \frac{1}{3^2}\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{5^2}\operatorname{sen} 5x - \ldots\right]$$

Hallando la semisuma de (a) y (b), tendremos

$$y = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f\alpha d\alpha + \frac{1}{\pi}\Sigma . \int_0^{\pi} \cos k\,(x - \alpha)\,.\, f\,(\alpha)\, d\alpha.$$



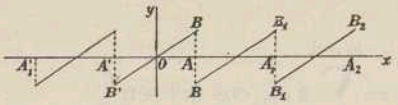
El lugar geométrico es una serie de arcos separados, así como segmentos del eje de las x.

Construyamos la curva

$$y = \varphi(x) = \operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + \ldots$$

Se tiene $\varphi(x + 2\pi) = \varphi(x)$, $\varphi(x - 2\pi) = \varphi(x)$.

Señalemos los puntos A, A_1, ... de abscisas π, 3π, ... y sus si-



métricas. Si se conoce la curva entre las ordenadas de A' y A, se conoce para todos los valores de x por ser $\varphi(x \pm 2\pi) = \varphi(x)$.

Entre $-\pi$ y π la suma de la serie es $\frac{x}{2}$ y la ordenada y de la curva es idéntica con la ordenada $y = \frac{x}{2}$.

Desarrollo de $\frac{x^2}{4}$. Se tiene $\frac{x}{2} = \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x + \ldots$ e integrando

$$\frac{x^2}{4} = a_0 - \cos x + \frac{1}{2^2} \cos 2x - \frac{1}{3^2} \cos 3x + \ldots$$



Integrando desde $-\pi$ hasta $+\pi$, resulta $\frac{\pi^3}{6} = 2\pi a_0$, $a_0 = \frac{\pi^2}{12}$,

$$\frac{x^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} - \cos x + \frac{1}{2^2} \cos 2x - \frac{1}{3^2} \cos 3x + \ldots$$

La curva $y = \frac{\pi^2}{12} \cos x + \ldots$ coincide con el arco de parábola $B'OB$.

Convergencia de la serie de Fourier.—Hemos visto que la serie de Fourier es de la forma

$$A = a_0 + a_1 \cos \theta + a_2 \cos 2\theta + \ldots + a_n \cos n\theta + \ldots,$$

siendo todos los términos del mismo signo o alternativamente positivos y negativos. Vamos a demostrar su convergencia, y que el límite de a_n es cero, cuando los coeficientes decrecen en valor absoluto. Supongamos desde luego que todos los coeficientes son positivos, y hagamos

$$A_n = a_0 + a_1 \cos \theta + a_2 \cos 2\theta + \ldots + a_n \cos n\theta.$$

Multiplicando los dos miembros de esta igualdad por $2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$, que es diferante de cero, si θ no es un múltiplo de 2π, obtendremos

$$2A_n \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} = \sum_{m=o}^{m=n} 2\, a_m \cos m\theta \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$$

$$= \sum_{m=o}^{m=n} a_m \left(\operatorname{sen} \frac{2m+1}{2}\theta - \operatorname{sen} \frac{2m-1}{2}\theta \right);$$

y, ordenando con relación a los senos,

$$2A_n \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} = a_0 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} + (a_0 - a_1) \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} + \ldots\ldots$$

$$+ (a_{n-1} - a_n) \operatorname{sen} \frac{2n-1}{2}\theta + a_n \operatorname{sen} \frac{2n+1}{2}\theta .$$

Prescindiendo del primer término y del último cuyo límite es cero, observaremos que la serie de términos positivos

$$S = (a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + \ldots + (a_{n-1} - a_n) + \ldots$$

es convergente y a_0 es su suma, porque $S_n = a_0 - a_n$, siendo cero el límite a_n. Esta serie será también convergente si se multiplican respectivamente sus diferentes términos por $\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$, $\operatorname{sen} \frac{3\theta}{2}, \ldots, \operatorname{sen} \frac{2n-1}{2}\theta$, que son inferiores a 1 en valor absoluto; luego la serie $A \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$ es convergente, y por lo tanto la serie A, excepto para $\theta = 2k\pi$.

Si los términos de la serie A fuesen alternativamente positivos o negativos, bastaría cambiar θ en $\pi - \theta$ para pasar al caso anterior. Y de igual manera se procedería para demostrar la convergencia de la serie

$$B = b_1 + b_1 \operatorname{sen} \theta + b_2 \operatorname{sen} 2\theta + \ldots + b_n \operatorname{sen} n\theta.$$

Y para más detalles pueden consultarse la obra citada de M. Picard y las de los señores Dini, Echegaray, etc.

Nociones de Matemática físico-química

PREFACIO

El hecho de haberse establecido la sección de Ciencias Físicas en algunas Universidades y especialmente en la de Zaragoza, me impulsa a relacionar estos nuevos estudios con los concernientes a la sección de Ciencias exactas.

La empresa es difícil, porque no es posible el acertar entre el vario y múltiple caudal de teorías que emanan de la experimentación y las modificaciones que en breve lapso de tiempo sufren las teorías y los principios, que suelen derogarse o supeditarse a otros nuevos, por esto que podríamos llamar caprichos de la experimentación.

Pero creemos que, en medio de esta confusión y variabilidad o incertidumbre, es provechoso a la juventud el tener nociones de cuanto de mayor importancia se ha investigado y colocarla en el surco de las ideas con más o menos fundamento aceptadas, con la esperanza de afianzarlas o desecharlas mediante el estudio de obras extensas publicadas por las más prestigiosas autoridades científicas.

Ya se sabe que los progresos de las ciencias se realizan por trayectos de luz y oscuridad, por correcciones parciales de tal o cual extremo que luego es sustituído por otro más feliz o adecuado al resto constituído en el campo científico.

Ya hemos visto todos cómo en cada época ha existido un

predominio de tal o cual tendencia. Y los varios peldaños de las conquistas de la experimentación supeditada a las leyes matemáticas en que se funden, se encuentran señalados en obras como *Mécanique*, de Mach, especie de génesis de la Mecánica.

Hasta mediados del siglo XIX vemos un predominio decisivo de la tendencia matemática. Desde que Newton fundó su *Philosophia Naturalis*, principalmente en su cálculo de las fluxiones, la matemática era el molde obligado de las leyes de la Naturaleza. Y sus sucesores afianzaron este modo de proceder estableciendo una especie de Algebra y de Geometría naturales.

Gauss, Lagrange, Laplace, Monge, Poisson y después Cauchy, creador de la Física matemática, y Bertrand, Briot, Lamé, Navier, hasta finalmente el insigne Poincaré que abarcó la Física y la Mecánica celeste con inmenso caudal de nuevos principios y teorías matemáticas, tales como por ejemplo, los invariantes integrales y sus nuevos métodos, contribuyeron principalmente a edificar un mundo matemático-físico, el de las velocidades virtuales o el de la menor acción, o el problema de los tres cuerpos, etc., que luego aspiraba a ser contrastado por la experiencia.

Pero más tarde el prodigioso impulso de los innumerables experimentadores en todas las ramas de las ciencias de observación auxiliadas por poderosos medios de investigación en laboratorios surtidos espléndidamente de aparatos e instrumentos cada vez más perfeccionados, establecieron una contracorriente a los estudios teóricos. Y del choque de estas dos tendencias opuestas brotó la luz brillantísima de la ciencia moderna, en la que la Matemática, sin ceder sus derechos al ennoblecimiento de los estudios experimentales por sus leyes representativas y depuradoras, ha continuado iluminando los resultados de los experimentados, ya con los clásicos procedimientos como lo han hecho Maxwell, Thomson (Lord Kelvin), Lorentz, ya con el nuevo recurso de las ecuaciones integrales y de las funciones de líneas de los Fredholm, Hilbert, Volterra y otros divulgadores de estas modernas teorías, pudiéndose agregar a todo esto, los caudales matemáticos que encierran las obras de

los químicos y físicos, tales como Gibbs, creador de la Mecánica estadística, Van der Waals, Van-t-Hoff, Boltzmann, Brillouin, etcétera, que pueden considerarse como los fundamentos de la Química matemática. Tal es el material ofrecido a la ciencia moderna por los maestros más insignes.

Hemos expuesto un resumen de los métodos de Lagrange, Laplace, Monge y Ampère para comenzar por este orden natural de la Ciencia humana, que comienza por desarrollos puramente intelectuales, que constituyen los primeros organismos de las ideas, la Ciencia ideal; y vemos que en las construcciones de la Ciencia ideal, hemos llegado con Lagrange a un mundo funcional que brota de las ecuaciones diferenciales y cuyo primer contacto con la realidad estaba constituído por la Mecánica analítica de este insigne matemático. Pero luego Cauchy extiende este contacto por la creación de la Física matemática que importa nuevos elementos, concretando y dando mayor complejidad a los cálculos por esta multiplicación del objeto. Y dentro de este nuevo desarrollo, se inicia el de la Mecánica física que se emancipa de la rigidez de la Mecánica racional, mediante los tres elementos propuestos por Reech, la fuerza, la masa y las ligaduras (*) sin necesidad de acudir al principio de inercia, fundando la llamada escuela del *hilo* o de las *ligaduras;* así por otra parte el concepto de potencial extendido al dominio de los mundos atómicos, basado en los nuevos principios de la Termodinámica.

Ya Riemann, en su teoría de las funciones de variables complejas asimila el modo de ser de éstas a corrientes eléctricas que cierran sus ciclos y Herr Klein en su *Theorie des Kreisels* da representación cumplida a multitud de fenómenos cósmicos que enlazan la pura teoría con la realidad externa. Y, por último, por esa concomitancia existente entre lo ideal y lo fenomenal, a medida que las ciencias experimentales progresan, surgen las nuevas teorías que aspiran a la sistematización de los nuevos campos ofrecidos por los descubrimientos sucesivos.

(*) Estas constituyen el alma de la Mecánica de Lagrange para representar el universo físico como la fusión de los mismos. (Andrade, *Leçons de Mécanique Physique*, p. 56).

Citaremos con este motivo, la evolución, que a partir de los trabajos de los astrónomos, especialmente referidos al reloj absoluto, llega a consecuencias como la de la orientación del espacio absoluto, deducida de los movimientos relativos de un sistema aislado, para seguir la moderna teoría de los cuerpos deformables, tan importante en el desenvolvimiento de la nueva Mecánica que nos lleva a citar, en primer término, a Stokes y Helmholtz que parte de las *líneas turbillonarias*, del *flujo* relativo a una línea, de las *superficies turbillonarias* y sus relaciones con las superficies físicas. Y terminaremos estas indicaciones, citando la *Théorie des corps déformables* de M. Cosserat y la *Mécanique physique* por Jules Andrade.

Y si ciertamente el ordenar o sintetizar metódicamente tanta variedad de hechos, leyes y descubrimientos es empresa sólo realizable por inteligencias superiores, y en tal sentido se han publicado obras de divulgación por los sabios: Le Bon, Ostwald, Picard, etc., a manera de modesto primer ensayo, presentamos el siguiente conjunto de materias:

I *Correlaciones matemático-físicas.*

II *La posibilidad.*

III *Leyes orgánicas.*

IV *La constitución individual de las realidades físicas y químicas.*

V *La relación de posición. (Geometría físico-química).*

VI *Correlaciones numéricas. (Aritmética físico-química).*

VII *Las transformaciones transcendentales. (Dinámica de la Naturaleza).*

VIII *Las representaciones.*

Estas circunstancias constituyen todas las teorías de la Física matemática. Esta ciencia procede por definiciones teóricas que traducen de un modo abstracto los hechos observados y permiten aplicar el cálculo como una aproximación de la realidad dentro de cierta región, en la cual concuerdan la experiencia y las relaciones abstractas.

La Física matemática es una extensión de la Mecánica, como la Mecánica es una extensión de la Geometría con el aditamento de las nociones de velocidad, aceleración, fuerzas, pares de fuerzas, vectores, etc. La Mecánica clásica, por su rigor es un Algebra y una Geometría las más asimilables, por la sencillez de los hechos a que se refieren, al mundo de los hechos a que se refiere y cuyo prototipo es la Mecánica celeste, que sólo a expensas de algunas correcciones seculares se mantiene en concordancia con los hechos observados, como demuestra de un modo irrefragable la predicción por Le Verrier del planeta Neptuno.

Otro ha sido el destino de la Física matemática. Se creó sobre conocimientos rudimentarios de la Naturaleza que abarcó en sus líneas generales. Las obras de Cauchy, Lamé, Poisson, Fourier, Navier, etc., y procedimientos ingeniosos de los grandes matemáticos, tales como la integración de las ecuaciones diferenciales de las cuerdas vibrantes, las series de Fourier, etc., continuaban la época gloriosa de la Matemática en sus relaciones externas y no sólo como organismo teórico, que siempre prestó servicios irreemplazables desde Tolomeo, Galileo y Copérnico hasta la época presente.

Sería tarea interminable el citar las obras de Física mate-

mática desde Cauchy, Lamé, Poisson y Bertrand hasta Mathieu, Resal y Poincaré, que entran principalmente en el dominio teórico, y además esto no constituye el objeto del actual Tratado.

En este sentido, sólo será conveniente el citar algunas ecuaciones célebres que se toman como base de los desarrollos teóricos que tienden a inmediatas aplicaciones prácticas.

Comenzando por las ecuaciones de la Matemática de Hámilton nos internaremos en la Física con las ecuaciones de Maxwell, de Helmholtz y de Hertz, cuya exposición detallada se encuentra en las obras de Poincaré, *Théorie des tourbillons, Les oscillations électriques, Electricité et Optique.*

Pero llegó a mediados del siglo XIX y aun, con más precisión, en su segundo tercio, la época de los descubrimientos experimentales. Y pareció, por un momento, que la ciencia teórica iba a desmoronarse bajo la acción disgregadora de hechos al parecer incompatibles con las relaciones o modos de ser impuestos al explicar su modo de ser o su naturaleza intrínseca.

A los descubrimientos de Faraday y Ampère, sucedió el descubrimiento por Mayer del equivalente mecánico del calor sobre el que Clausius fundó la Termodinámica. El potencial que sólo regía en el mundo de los astros se trasladó al mundo de los átomos, y de esta inopinada extensión surgió una primera dislocación, la más viable de las que habían de verificarse en el orden teórico.

Pero esto, en vez de embarazar el curso de la Ciencia, lo afianzó con el recurso del cálculo infinitesimal, adaptable a las relaciones de los mundos atómicos y a la definición de las nuevas funciones que aparecieron, no sólo en el edificio de la Física, sino en el reciente de la Química que se edificaba sucesivamente con éxitos parciales y resultados efímeros algunas veces; pero para elevarse de nuevo sobre los restos de los edificios arruinados por el descubrimiento de nuevos hechos. Las leyes de las proporciones múltiples, el concepto de polaridad de Berzelius y otros muchos que se sucedieron para explicar los hechos, fueron corrigiéndose, afianzándose o derogando, quedan-

do algunos permanentes como la ley de Avogadro, algunas determinaciones prácticas de Regnault, tal como la del cero absoluto. Pero siempre la Matemática regía con sus fórmulas todos aquellos descubrimientos, porque sin ésta no sería posible la enumeración de ley alguna ni de relaciones fenomenales.

Y un nuevo mundo surgió de tales hechos, el potencial de la Mecánica clásica se amplificó con el potencial de los sistemas moleculares y hasta con el potencial termodinámico. La entropia ideada por Clausius es una relación funcional que rige constantemente la realización de todos los fenómenos físicos y químicos y otras muchas relaciones de que trataremos sucesivamente, expresan las correlaciones íntimas de estos dos mundos coexistentes, siempre aspirando a una acomodación la más justa posible que unifique los hechos con la teoría que los enlaza y que aspira a guiarlos en sus transformaciones, bajo la rigidez de las leyes que siempre han de amoldarse con aditamentos o modificaciones complementarias o las que exige la consideración de nuevas entidades no apreciadas en una primera fase del análisis de los hechos y que producen siempre algunas perturbaciones en algún orden establecido, análogas a las perturbaciones que llevaron a Le Verrier a adivinar el planeta Neptuno.

En la actualidad y bajo diversos puntos de vista, se publican obras que tienden a mantener esta armonía matemático-físico-química

Pero debemos observar que, en la evolución científica, los progresos matemáticos van unidos a los progresos experimentales. Los nombres de Newton, Galileo, Pascal, Torricelli, etc., revelan esa simultaneidad mediante la cual, cada hecho de la Naturaleza hace su ingreso en la ciencia al expresarse en una fórmula matemática, al mismo tiempo que el cómo de modelarse la Matemática a los caprichos de la experimentación por medio de sus definiciones y ecuaciones, estableciéndose cierta pugna incesante, que termina siempre armónicamente, entre la ciencia ideal y la ciencia real que aspiran, con tenaz perseverancia, a compenetrarse después de un desvío momentáneo.

En cada etapa de esta evolución, los nombres se renuevan presentándose como esquemas de los nuevos progresos. A aquellos nombres ilustres arriba citados, se unen más tarde los de Euler, Gauss, Ampère, Laplace, Lagrange, Poisson, Fourier, etcétera, en la época de la Mecánica analítica.

Más tarde, el descubrimiento del equivalente mecánico del calor y el nuevo principio de la transformación de las energías señalan otra etapa; y los matemáticos acuden a la liza para establecer el orden ideal que predomine el nuevo orden de la realidad presente. Y un nuevo arsenal se crea de fórmulas sobre las que creó la Mecánica clásica.

Citaremos de paso la correlación estrecha que liga las relaciones de reversibilidad e irreversibilidad de los estados físicos y químicos de los cuerpos con la de que una integral curvilínea tomada entre dos puntos fijos del plano de Cauchy, sea independiente o no del camino recorrido que corresponde al caso de monogeneidad o no monogeneidad de una función y a los casos de no existir o de existir un potencial, y la importancia de la fórmula de Green en estas circunstancias.

Y llegamos a las expresiones que determinan el estado de una substancia o *función de estado*, siendo x e y dos magnitudes independientes que definen tal estado, que llevan según la elección de la variable independiente, en los casos de tratarse de

$$v,\ p \text{ ó } t, \text{ a } v = f(p, t),\ p = f(v, t),\ t = f(v, p) \text{ ó } F(v, p, t) = 0,$$

y a la significación física de las diversas derivadas, expresiones que permiten expresar el estado de un sistema de cuerpos, por vario modo de considerar los parámetros independientes. Y tenemos calcándose sobre las teorías matemáticas, las transformaciones isotérmicas, adiabáticas, isométricas, isodinámicas con sus sistemas de curvas representativas. Y siendo

$$dQ = Xdx + Ydy$$

en la que X, Y son *funciones de estado*, tenemos varias fórmulas, según se trate de la temperatura, del calor latente, de la capacidad calorífica y su noción generalizada, del calor latente de

variación de presión, tenemos multitud de fórmulas que pueden estudiarse, entre otros tratados, en el *Traité de Physique* de O. D. Schwolson (t. III, págs. 440-70) y *Cours de Thermodynamique*, por H. Bouasse, que contiene multitud de fórmulas de toda especie, y citaremos finalmente las numerosas fórmulas expuestas también en el *Cours de Physique* acerca del segundo principio de la termodinámica, observando cómo, en esta Algebra de la Naturaleza, según la expresión de Clausius: *la entropia del Universo tiende hacia un máximo.*

Pero según se indicó, la Matemática y las ciencias experimentales Física y Química progresan como de común acuerdo, y a las últimas evoluciones de éstas la Matemática les prepara un marco digno de su grandeza y esplendor con las nuevas teorías de las ecuaciones integrales, las funciones de líneas y el principio de relatividad, para dejar afianzado el que aquéllas jamás podrán emanciparse de los principios teóricos correlativos, en virtud de los cuales conservan su jerarquía científica.

Citaremos también las obras de M. Hadamard, *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'Hydrodynamique* y el primer tomo de las *Leçons sur le calcul des variations*. Entre las muchas cuestiones que trata la primera, de orden puramente matemático, distinguiremos las pertinentes al objeto de este capítulo, a saber: el movimiento rectilíneo de los gases, el fenómeno de Riemann-Hugoniot, los movimientos en el espacio, ondas de choque, aplicación a la teoría de la elasticidad, la teoría general de las características con aplicaciones a problemas de las ondas. Respecto a la segunda obra, su primer tomo, como dice el autor, es un precedente para el cálculo funcional que se desenvolverá en el segundo.

Estos trabajos tienden a los modernos desarrollos físico-matemáticos con otros tales, como las diversas obras publicadas en época reciente sobre las ecuaciones integrales de Fredholm Hilbert, Lalesko, Volterra, cuyos trabajos sobre las ecuaciones diferenciales son también muy ingeniosos y originales que sigue su importante labor con sus tratados y también muy recientes sobre las ecuaciones integrales y las funciones de líneas.

Pero el objetivo final de los actuales trabajos matemáticos convergen hacia la nueva teoría de la relatividad, uno de cuyos iniciadores fué el ilustre Minkowski y en la que colaboran Lorentz, Einstein, Planck y a la que dedica algunos párrafos M. Borel en su *Introduccion géométrique á quelques théories physiques*. Y aparte de las memorias publicadas por dichos matemáticos, podemos citar las obras especiales *Das Relativitats prinzip*, de Herr M. Laue y las *Lectures en Clark University* del profesor Vito Volterra.

Ante todo recordaremos en esta teoría, afine con el cálculo funcional, que en Física como en Matemática, para el estudio correlativo de los fenómenos, se ha de considerar los grados de libertad que especialmente se consideran en la equipartición de la energía o en Mecánica estadística.

Y en la consideración de los sistemas funcionales, tiene gran importancia el teorema de Liouville, basado en la concepción de las moléculas como sistemas mecánicos, caracterizados por coordenadas generalizadas. Así, la constitución de sistema mecánico puede determinarse mediante μ variables independientes $p_1, \ldots, p_\mu$ que se llaman *coordenadas generalizadas* (Boltzmann, *Leçons sur la théorie des Gaz*, t. II, p. 61). Y siendo L la fuerza viva del sistema en cuestión, que es función de las velocidades, tendremos para cada valor de i, $q_i = \dfrac{\partial L(\dot{p}_1 p)}{\partial \dot{p}_i}$.

Considerando la función de fuerza V, los valores iniciales de las coordenadas y de las cantidades de movimiento, debiéndose considerar los valores $p_1, \ldots, p_\mu, q_1, \ldots, q_\mu$ de estas cantidades en el tiempo t, como funciones de sus valores iniciales y del tiempo transcurrido t, y puesto que L y V son funciones de las p y de las q, tendremos la integral $W = \int_0^t (L - V)\, dt$.

Esto sentado, si consideramos un sistema mecánico determinado por las cantidades de movimiento dadas, cuyo movimiento depende de los 2μ parámetros P, Q (valores iniciales de las p y q), se puede trazar una curva un número infinito de

veces, haciendo variar la magnitud de su parámetro. Y en este número infinito de sistemas, los hay cuyos valores iniciales de coordenadas y de cantidades de movimiento, están comprendidos entre límites determinados e infinitamente próximos, tales como

$$P_1 \text{ y } P_1 + dP_1, \ldots, P_\mu \text{ y } P_\mu + dP_\mu, Q_1 \text{ y } Q_1 + dQ_1, \ldots,$$
$$Q_\mu \text{ y } Q_\mu + dQ_\mu.$$

Y por cálculos que pueden verse en la obra citada, se llega a la relación

$$dp_1 \ldots, dp\, dq_1 \ldots, dq_\mu = dP_1 \ldots, dP_\mu dQ_1 \ldots, dQ_1 \text{ ó } dp_{\mu 1} \ldots,$$
$$dq_\mu = \Delta dp_1, \ldots, dp_\mu,$$

expresando Δ el determinante funcional de las Q, expresión que puede normalizarse por un cambio de variables (páginas 67-71), sustituyendo el primer campo G por otro campo

$$g = \int dp_1 \ldots, dq_\mu,$$

equivalente al primero. Y así se puede llegar: 1.º, a constituir un sistema integral, empleando el teorema del último multiplicador de Jacobi (Idem, págs. 79-82); 2.º, a realizar cierta distribución, para lo cual principiaremos por introducir la energía diferencial, suponiendo que los sistemas sean conservativos, es decir, que la energía E mantenga un valor constante, mientras dura el movimiento (así excluimos toda causa de disipación, frotamiento, resistencia del medio); y consideramos todos los sistemas que parten de valores iniciales, comprendidos en un campo G infinitamente pequeño de orden 2μ que contenga los valores iniciales $P_1, \ldots, P_\mu, Q_1, \ldots, Q_\mu$, a que corresponden los valores $p_1 \ldots, q_\mu$ que adquieren en el tiempo t las cantidades de movimiento del sistema, designando por $\int dP_1 \ldots, dQ_\mu$ la integral extendida al campo G del producto de las diferenciales de las coordenadas y de las cantidades de movimiento, y por $\int dp_1 \ldots, dq_\mu$ la misma integral, extendida al campo g. Y reem-

plazando la diferencial de la energía por otra de las diferenciales se llega, por ejemplo, a

$$\frac{1}{\dot{p}_1}\int dp_1 \ldots, dp_\mu dq_2 \ldots dq_\mu dE = \frac{1}{\dot{P}_i}\int d P_1 \ldots dP_\mu dQ_2 \ldots, dQ_\mu dE$$

($\dot{p}$, $\dot{P}$ corresponden al tiempo cero),
ecuación válida; extendiéndose las integraciones respectivamente a dos campos infinitamente pequeños de orden 2μ, siempre que los campos g y G se correspondan. De modo que podremos elegir G tal, que para todos los valores de las demás variables, la energía esté comprendida entre los mismos límites E y $E + dE$, mientras que éstos, es decir, las coordenadas $p_1, \ldots, p_\mu$ y las cantidades de movimiento $q_1, \ldots, q_\mu$ se hallen en un campo arbitrario G_1 infinitamente pequeño de orden $2\mu - 1$, pero comprendiendo los valores $P_1, \ldots, P_\mu, Q_2, \ldots, Q_\mu$, dejando aparte la cantidad de movimiento Q_1 que está determinada por los valores de las últimas variables y de la energía. Y para todos los sistemas G_1 de orden $2\mu - 1$, la cantidad de movimiento q_1 estará determinada por el valor elegido para E, y así definiremos el campo g_1 correspondiente al campo G_1.

Por último, si consideramos un número excesivamente grande de sistemas mecánicos de igual constitución que los indicados, teniendo la energía E el mismo valor para todos, pero suponiendo que en el tiempo cero, las coordenadas y las cantidades de movimiento tengan valores diferentes para sistemas distintos y suponemos que sea

$$f(p, \ldots, p_\mu, q_2, \ldots, q_\mu, t)\, dp_1 \ldots, dp_\mu dq_2 \ldots, dq_\mu$$

el número de los sistemas para los cuales, en el tiempo t, las variables $p_1, \ldots, p_\mu, q_2, \ldots, q_\mu$ se hallan comprendidas en los límites

$$p_1 \text{ y } p_1 + dp_1, \ldots, p_\mu, p_\mu + dp_\mu, q_2 \text{ y } q_2 + dq_2, \ldots, q_\eta \text{ y } q_\mu + dq_\mu,$$

el número de los sistemas para los cuales los valores de dichas variables forman, en el tiempo t un campo g_1 infinitamente pequeño de orden $2\mu - 1$, comprendiendo los valores $p_1, \ldots, p_\mu, q_2, \ldots,$

q_μ y es por consiguiente,

$$f(p_1, \ldots, q_\mu, t)\ dp_1 \ldots, dp_\mu, dq_2, \ldots, dq_\mu,$$

extendiendose la integración al campo g_1. Dichos sistemas tienen la fase pq. Llamaremos campo G_1 al que contiene en el tiempo cero, los valores de dichas variables para todos los sistemas que tienen, en el tiempo t la fase pq. Tendremos la misma fórmula para las P y Q, de modo que

$$f(P_1, \ldots, Q_2, \ldots, Q_\mu, o)\ \int dP_1, \ldots, dQ_\mu$$

será el número de sistemas al principio del tiempo. Y omitiendo consideraciones que pueden leerse en la obra citada del profesor Boltzmann, concluiremos diciendo que

$$\frac{C}{\dot{p}_1} \int dp_1, \ldots, dq_2, \ldots, dq_\mu$$

es el número de sistemas para los cuales las variables consideradas están en el campo g_1, al que debe extenderse la integración, designando con el calificativo *ergódico* la repartición de estados entre un número infinito de sistemas expresados por esta fórmula.

Y a estos sistemas que Gibbs llama *microcanónicos* los sustituye por otro más vasto que comprende todos los estados compatibles con un valor dado de la energía total.

Y en los sistemas *canónicos* inventados por Gibbs, se admite para la energía todos los valores imaginables, pero distribuidos de modo que la energía pueda considerarse como de la misma magnitud.

Dejando a un lado estas cuestiones referentes al cálculo de probabilidades, añadiremos que, designando por q_1, q_2, ... las coordenadas que determinan la posición y la configuración de un sistema, por $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, ... las velocidades, por p_1, p_2, ... los momentos correspondientes y por E la energía total, cada sistema podrá representarse por un punto en un espacio polidimensional, en el cual q_1, q_2, ..., p_1, p_2, ... sean las coordenadas; y diremos que el sistema se encuentra en el punto (q_1, q_2, ..., p_1, p_2, ...) de

este espacio. Y es de notar la importancia de las ecuaciones de Hámilton, a cuya forma se reducen las que explican los fenómenos electromagnéticos.

Estas ligeras consideraciones permiten concluir cómo el cálculo funcional es en la actualidad el último grado de generalidad matemática que corresponde al amplio desarrollo alcanzado por las teorías físico-químicas.

LA POSIBILIDAD

La Matemática tiene un poder previsor por el que se adelanta siempre al mundo de los hechos. Las cónicas que descubrió Aponio eran las órbitas que muchos siglos más tarde descubrió Copérnico como las trayectorias de los planetas.

De igual manera, la teoría de las probabilidades hoy es la base de la Mecánica estadística que explica las relaciones que se conciben en el mundo de los átomos. Las primeras aplicaciones se deben a Gauss en el cálculo de los errores de observación que le condujeron a su método de los menores cuadrados.

Clausius y Maxwell calcularon la longitud media de las trayectorias de las moléculas, y entre otros, citaremos a Lorentz y Van der Waals que en su obra *La continuité des états gazeux et liquides*, trata de la influencia en la molécula del lugar que ocupa en ella un átomo para producir diferentes agrupaciones isomeras, por lo cual debe determinarse este lugar. Y procede calcular las acciones intermoleculares, atendiendo a la masa de los átomos.

Estas y otras cuestiones son análogas en el estudio de la ley de repartición de las velocidades y la frecuencia de los choques de las moléculas de los gases que Maxwell demostró el primero.

Para esta demostración hay que considerar las moléculas comprendidas en dos paralelepípedos $d\omega$, $d\omega_1$; y definiendo el *punto de velocidad* de cada uno por el extremo de su vector que parte del origen, paralelo e igual a la velocidad de la molécula

y dos paralelepípedos correspondientes, cuyas aristas son $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ y $d\xi_1$, $d\eta_1$, $d\zeta_1$ y formar las expresiones

$$f(\xi, \eta, \zeta, t)d\xi\, d\eta\, d\zeta = fd\omega \text{ y } F(\xi_1, \ldots, t)d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1 = F_1 d\omega_1$$

de los números de moléculas comprendidas en el tiempo t, en el interior de dichos paralelepípedos que llamaremos condiciones (1) y (2) a que satisface un número m de moléculas; de manera que $\Phi f d\omega$ y $\Phi F_1 d\omega_1$ será el número de moléculas contenidas en un volumen Φ, quedando modificada la repartición de las velocidades por sus mutuos choques y no por las velocidades de translación. Y se tendrán moléculas de la *especie definida* m ó m_1 representando estas letras todas las moléculas de cada especie.

Ahora bien, si en una esfera de radio 1 y centro en el origen se considera un elemento de superficie $d\lambda$, la recta que une los centros de cada dos moléculas m y m_1 será paralela a una recta que una el centro de coordenadas a un punto del cono $d\lambda$ que llamaremos el cono $d\lambda$, hallándose la dirección mm_1 en el interior de éste. Y llamaremos *choques de la especie definida* a todas las moléculas que satisfacen a esta condición a las dos arriba indicadas respecto a los dos paralelepípedos elementales.

Podemos considerar también la velocidad g relativa de la molécula m (cualquiera de las m) respecto a la m_1 (cualquiera de las m_1), suponiendo las m en reposo y las m en movimiento, uniendo a cada una de éstas una esfera de radio σ cuyo centro coincide con el de la molécula, radio igual a la suma de los radios de las dos moléculas m y m_1; de manera que cada vez que la superficie de una de estas esferas alcance el centro de una molécula m_1 habrá choque entre una molécula m y otra m_1.

Y si por el centro de cada esfera σ trazamos un cono semejante al $d\lambda$ y semejantemente dispuesto, cortará a ésta en un elemento superficial $\sigma^2 d\lambda$; y todos estos elementos de superficie durante el tiempo dt recorren un camino gdt relativamente a las moléculas m_1 de la especie definida. De manera que un choque de la especie definida se produce cada vez que un elemento $\sigma^2 d\lambda$ encuentra el centro de una molécula m_1 de la especie definida.

Cada elemento de superficie recorre en su movimiento relativo respecto a la molécula m un cilindro oblicuo de base $\sigma^2 d\lambda$ y altura $g \cos \Im dt$ (siendo $\Im$ el ángulo agudo que forma la recta que une los puntos de velocidad Cl_1 de m y m_1 con la paralela trazada por el origen de la recta que une los centros de m y m_1). Y puesto que en la unidad de volumen existen $f d\omega$ moléculas m de la especie definida, todos los cilindros oblicuos engendrados por los elementos $\sigma^2 d\lambda$ tienen un volumen total

$$\Phi = f d\omega \sigma^2 g \cos \Im d\lambda dt.$$

Todos los centros de las moléculas m de la especie definida que se encuentran en el interior del volumen Φ se habrán encontrado, durante el tiempo dt, por uno de los elementos de superficie $\sigma^2 d\lambda$; y el número $d\nu$ de choques de la especie definida que se producirán en la unidad de volumen durante dt, es igual al número Z_Φ de los centros de las moléculas m_1 de la especie definida que se hallan al principio de dt en el volumen Φ. Y tendremos $Z_\Phi = \Phi F_1 d\omega_1$ (3)

Desde este punto de vista, toda disposición de las moléculas en el vaso es naturalmente posible. Podemos hacer varias hipótesis, de modo que exista una organización de conjunto. Por el contrario, las fórmulas $\Phi f d\omega$, $\Phi F_1 d\omega_1$, corresponden a una disposición sin organización de conjunto o de un conjunto desorganizado. Y cuando se puede disponer cierta regularidad en grupos definidos de dos moléculas, diremos que tal disposición tiene una organización molecular, como cuando cada molécula se dirige siempre hacia el centro de la molécula más próxima. El caso de la fórmula (3) y sus análogas para los choques entre las moléculas m o entre las moléculas m_1, corresponde a la no existencia de organización molecular. Y un sistema con organización molecular, pero sin organización de conjunto, puede probablemente transformarse, en poco tiempo, en otro sistema sin ninguna traza de organización, ni de conjunto, ni molecular.

Y es necesario, para la exactitud de las demostraciones la hipótesis de una disposición desprovista de organización mo-

lecular, que se establece en el cálculo de los frotamientos, en la transmisión del calor; y sin ella no se podría demostrar la ley de repartición de las velocidades de Maxwell, es decir, que si esta repartición se ha establecido una vez, subsiste indefinidamente, porque es imposible demostrar que la repartición quedará siempre desprovista de organización molecular.

Supongamos que el movimiento carece de toda organización, sea de conjunto, sea molecular y que permanezca así indefinidamente. Tenemos que el número de choques de la especie definida en la unidad de volumen durante dt, está expresado por

$$d\nu = Z_{\Phi} = \Phi F_1 d\omega_1 = f d\omega F_1 d\omega_1 \sigma^2 g \cos \Im d\lambda dt. \qquad (4)$$

Cada choque cambiará en una cantidad finita, al menos, una componente de velocidad, de manera que disminuirá en una unidad el número $fd\omega$ y el $F_1 d\omega_1$ comprendidas en la unidad de volumen. Y para obtener la disminución total $fd\nu$ que el número $fd\omega$ sufre durante dt por los choques de la moléculas m con las m_1, consideraremos ξ, η, ζ, $d\omega$ y dt como constantes e integraremos respecto a $d\omega_1$ y $d\lambda$ para todos los valores posibles, es decir, relativamente a $d\omega_1$ para todos los elementos de volumen del espacio, relativamente a $d\lambda$ para todos los elementos de superficie en que el ángulo $\Im$ es agudo. Y para el caso de verificarse el choque entre moléculas m tendremos

$$d\mu = ff d\omega d\omega_1 s^2 g \cos \Im d\lambda dt,$$

de modo que la disminución total será $fd\nu + fd\mu$.

Pero en el caso de un gas estacionario, el número debe ser igual al de moléculas m por unidad de volumen, que no satisfacen a la condición (1), pero que, a consecuencia de los choques llega a satisfacerla; lo que constituye un aumento, para cuyo cálculo se expresan las componentes de velocidad ξ, ..., ξ_1', ... después del choque en función de ξ_1 ..., ξ_1, ..., $\Im$, ε, (designando ε el ángulo que forma el plano de la línea de los centros de m y m_1 y la de la velocidad relativa de m respecto m_1 con el plano de las dos velocidades antes del choque).

Y por consideraciones geométricas que pueden verse en la

obra *Leçons sur la théorie des Gaz* de L. Boltkmann, primera parte, págs. 24-25, se llega a la expresión de $d\xi' \ldots d\zeta_1'$ mediante $d\xi \ldots d\zeta_1$, obteniéndose $d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1 = \left(\frac{m+m_1}{m_1}\right)^3 dv\, du\, dw$, $d\xi \ldots d\zeta_1 = \left(\frac{m+m_1}{m_1}\right)^3 d\xi \ldots d\omega$ etc., que conducen a $d\omega\, d\omega_1 = d\omega' d\omega'_1$ y a la expresión $dv' = \int F' d\omega'\, d\omega'_1\, \sigma^2\, g \cos \Im\, d\lambda\, dt$ del número de choques de *especie contraria* que dan una marcha opuesta a los de *especie definida*, es decir, que corresponden al caso de satisfacer a las condiciones (1) y (2) *después* del choque, como las otras satisfacían *antes* del mismo, lo que da
$dv' = f' F'_1\, d\omega\, d\omega_1\, \sigma^2 g \cos \Im\, d\lambda dt$ (en virtud de $d\omega' d\omega'_1 = d\omega\, d\omega_1$).

Para los choques de las moléculas m entre sí tendremos:

$$d\mu' = f' f'_1\, d\omega\, d\omega_1\, s^2 g \cos \Im\, d\lambda\, dt.$$

Restando del incremento total $f d\omega$ su disminución total, se tiene $\frac{\partial f}{\partial t}\, d\omega\, dt$, variación que sufre $f d\omega$ durante dt; de modo que

$$\frac{\partial f}{\partial t}\, d\omega\, dt = \int dv' - \int dv + \int d\mu' - \int d\mu \quad \text{que conducen a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \int (f' F'_1 - f F_1) \sigma^2 g \cos \Im\, d\omega_1 d\lambda + \int (f' f'_1 - f f_1)\, s^2 g \cos \Im d\omega_1 d\lambda$$

o integrando, para todos los valores posibles de $d\omega_1$ y $d\lambda$,

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = \int (f' F'_1 - f F_1) \sigma^2 g \cos \Im\, d\omega d\lambda + \int (F' F'_1 - F F_1) s_1^2 g \cos \Im\, d\omega\, d\lambda$$

designando s el diámetro de una molécula m_1. Y debiendo ser el estado estacionario, los primeros miembros se anulan; y para todos los choques posibles entre las moléculas m, ó m ó entre las m y m_1, conducen a

$$f f_1 = f' f'_1, \quad F F_1 = F' F'_1, \quad f F_1 = f' F'_1, \qquad (5)$$

fórmulas que conducen a la ley de repartición de las velocidades de Maxwell.

Indicaremos tan sólo que se calculan las funciones logarítmicas de f y F, y que Boltzmann ha calculado la suma H de to-

dos los valores de las funciones logarítmicas correspondientes, en un momento dado, a todas las moléculas m y m_1 contenidas en la unidad de volumen, cuyo significado se refiere al cálculo de probabilidades; pues si se tuviese en una urna un gran número de bolas blancas, negras, azules, etc., la probabilidad de sacar a bolas blancas, b bolas negras, etc., está expresada por

$$\frac{(a+b+c+\ldots)!}{a!\ b!\ c!\ldots}$$

Análogamente, si dividimos todo el espacio en un gran número (ζ) de elementos de volumen iguales, ω (células), habrá tantas probabilidades para que el punto de velocidad de una molécula se halle en uno de estos elementos de volumen, como se tenía de sacar una bola blanca o negra, etc. Y si en vez de a bolas blancas, etc., hemos de poner el número $n_1\omega$ de las moléculas cuyos puntos se hallan en nuestro primer elemento de volumen, tendremos $Z = \frac{n!}{(n_2\omega)!\ (n\omega)!\ldots}$ probabilidad relativa para que el punto de velocidad de $n_1\omega$ moléculas se halle en el primer elemento de volumen, el de $n_2\omega$ moléculas en el segundo, etc ($n = (n_1 + n_2 + \ldots)\omega$. Y utilizando la fórmula de aproximación

$$p! = \sqrt{2p\pi}\left(\frac{p}{e}\right)^p$$

$$l\,[\,(n_1\omega)!\,] = \left(n_1\omega + \frac{1}{2}\right) ln_1 + n_1\omega\ (l\omega - 1) + \frac{1}{2}\,(l\omega + l\ 2\pi).$$

Y despreciando $\frac{1}{2}$ ante $n_1\omega$ que es un número muy grande, y formando las expresiones análogas para $(n_2\omega)!\ldots$, se tendrá

$$lZ = -\omega(n_1\, ln_1 + n_2\, ln_2 + \ldots) + C$$

$$\text{donde } C = l(n!) - n(l\omega - 1) - \frac{\zeta}{2}\,(l\omega + l2\pi)$$

Pero la repartición más verosímil de los puntos de velocidad

de las moléculas en las células será aquélla en que lZ pase por un máximo y por consiguiente en que $\omega[n_1 ln_1 + n_2 ln + ...]$ pase por un mínimo, expresión idéntica a la que se reduce H por la fórmula $H = \int f l f d\omega + \int F_1 l F_1 \, d\omega_1$ (Boltzmann, obra citada, pág. 32). Y el teorema según el cual H decrece a consecuencia de los choques, significa que la repartición de las velocidades de las moléculas se aproxima cada vez más, bajo la influencia de los choques, a la repartición más probable, bajo la condición de que el sistema se halla en el estado de desorganización, desde el punto de vista molecular, para que pueda intervenir el cálculo de probabilidades.

Fundado en estas consideraciones consigue Herr Boltzmann demostrar la ley de Avogadro, resolviendo las ecuaciones (5), llegando a definir la cantidad $= H$ por la entropia total de todos lugares, etc.

Estas indicaciones bastan para dar una idea de cómo el mundo de lo posible adquiere cuerpo en la realidad, mediante los principios combinatorios.

LEYES ORGÁNICAS

Cuando consideramos las fuerzas que se presentan, se ve que con frecuencia existe entre sus componentes una relación particular que consiste en poderse representar por tres coeficientes diferenciales de una misma función de las coordenadas. Y para que esta relación se efectúe se han de verificar las identidades conocidas entre las tres derivadas combinadas dos a dos. Y tendremos, no sólo la expresión de la fuerza total por la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de sus derivadas parciales, sino que considerando la fuerza según una dirección dada s y designando por φ el ángulo que su dirección forma con la de la fuerza, se tendrá $S = P \cos \varphi$ y $S = P(a\alpha + b\beta + c\gamma)$ (α, β, γ, ángulos de s con los ejes).

Además si $U = A$, diferenciando, llegamos a la ecuación

$$\frac{dU}{dx}\frac{dx}{P}\frac{dx}{ds} + \frac{dU}{dy}\frac{dy}{P}\frac{dy}{ds} + \frac{dU}{dz}\frac{dz}{P}\frac{dz}{ds} = 0$$

que expresa la relación de perpendicularidad de la dirección de la fuerza con la del corrimiento *ds* que define la *superficie de nivel*, que nos conduce a un sistema de tales superficies y a la consideración de la derivada, en dirección de la normal y la de *función de fuerza*, cuyo caso más importante es el en que puede descomponerse en fuerzas centrales lo que lleva a las relaciones expresadas en las página 87 que se refieren al caso especial en que las fuerzas estén en razón inversa del cuadrado de las distancias.

Esto conduce a la consideración de lo que Clausius denomina *agentes* en que comprende las masas ponderables, la electricidad, el magnetismo, etc.

Desde luego tenemos como primeros conceptos los de trabajo realizado por las acciones exteriores a un sistema y la particularidad de no reducirse en general a cero, cuando éste recorre un ciclo cerrado, y la circunstancia en que el trabajo de las fuerzas sólo depende del estado inicial y el final del sistema, en cuyo caso el ciclo cerrado corresponde a un trabajo nulo.

Y elegido uno de dos estados *e* de un sistema, el valor del trabajo sólo dependerá de la elección del otro estado *x*, representando el trabajo correspondiente por P_x. De manera que, si el sistema pasa del estado o al estado 1 y después al estado *e*, realizando en la primera parte el trabajo T y en la segunda el trabajo P_1, es decir, en total $T + P_1$. Pero en la primera modificación o tránsito directo del estado o, el trabajo es P_0; de modo que $T + P_1 = P_0$ ó $T = P_0 - P_1$. Así pues, el *trabajo efectuado en el curso de cierta modificación es igual al exceso del valor inicial* P *sobre el valor final de esta magnitud*, cuando el trabajo de las fuerzas aplicado a un sistema está completamente determinado por el estado inicial y el final, tenemos la cantidad P a la que se llama *potencial* de las fuerzas que actúan sobre

el sistema. Diciéndose en el caso considerado, que las fuerzas *admiten un potencial.*

Tenemos además de la expresión del incremento de la fuerza viva en un lapso de tiempo, por el trabajo que ha efectuado, el principio del *corrimiento virtual* y de la *conservación de la fuerza viva.* De manera que, *cuando un sistema sometido a fuerzas que dependen de un potencial, el incremento de la fuerza viva, durante cierto tiempo, es igual a la disminución del potencial durante el mismo tiempo.*

Pero el trabajo T, efectuado por las fuerzas que solicitan un sistema durante un lapso de tiempo, excede al incremento de la fuerza viva, en un sistema en movimiento formado por cuerpos mantenidos en un estado y a una temperatura invariables, lo que ya modifica las conclusiones de la Mecánica clásica, así como el que: La cantidad de calor desprendida por el sistema durante el mismo lapso de tiempo es positiva.

Tenemos además un número fijo y positivo que se llama *equivalente mecánico del calor* y una relación entre el *trabajo externo* las fuerzas vivas, la cantidad de calor desprendida y el equivalente mecánico del calor que constituye el *principio de la equivalencia entre el calor y el trabajo mecánico.*

Además a cada estado de un sistema corresponde una magnitud definida como *energía interna* del sistema en dicho estado, distinguiéndose la energía potencial de la energía actual que permiten definir la *energía total* del sistema en el estado e y expresar el principio de la conservación de la energía en un sistema aislado.

Tenemos también que *el potencial interno de una mezcla de gases perfectos es constantemente igual a la suma de los potenciales internos que convendría atribuir a cada uno de los gases mezclados si ocupase él solo, a la misma temperatura, el volumen íngro de la mezcla.*

La cantidad de calor desprendida por un sistema que experimenta una modificación, no depende tan sólo del estado inicial y del estado final, sino de todas las particularidades de la modificación (Duhem, *Thermodynamique*, 40).

Para que la cantidad de calor desprendida por un sistema que se modifica dependa tan sólo del estado inicial y final, es necesario y suficiente que las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema, admitan un potencial (Duhem, 44)

$T_e = \Omega_0 - \Omega_1$ La igualdad (1) (pág. 39) $Q = U_0 - U_1 + \frac{T_e}{E}$

se reduce a $$Q = U_0 - \frac{\Omega_0}{E} - U_1 - \frac{\Omega_1}{E}. \qquad (2)$$

Vemos, por lo expuesto, que el potencial en el mundo real es como las funciones integrables en el mundo ideal de la Matemática pura. Indica una correlación.

El concepto de entropia es más universal, es en la Naturaleza como el concepto de función en la Matemática pura. La entropia a todo se extiende, acompaña constantemente a cualquier realidad de un sistema natural, caracterizado por su entropia, es el modo permanente de continuarse en la vida del Universo la realización de todos sus fenómenos o actos, es como el desgaste de esta vida como complemento necesario de la realización de la misma, la reacción perpetuamente unida a todo hecho o modificación natural. La entropia es una función necesaria, constante actual en cada estado de la Naturaleza.

El primer principio de la termodinámica es el de la equivalencia del calor y del trabajo que es un principio de armonía universal por complementarse en todos los órdenes de las energías, en virtud de la mutua transformación que éstas realizan en la Aritmética del Universo que establece el sistema de unidades de diversas especies y las reducciones de las unas a las otras.

Pero así como en la Matemática pura el cálculo directo extiende el número de las cantidades generalizadas por cada ley algorítmica, sin excepción alguna, mientras que el cálculo inverso, ya sea el de las ecuaciones algebraicas o el de las diferenciales, está sometido a dificultades o restricciones, la entropia responde al problema natural de la transformación inversa, puesto que la transformación de calor en trabajo no es general.

Como dice M. Duhem (*Thérmodynamique*, pág. 79): «Combi-

nando el principio de la equivalencia entre el calor y el trabajo, con un postulado análogo a la imposibilidad del movimiento perpetuo, se podría obtener el teorema de Carnot, lo que realizó Clausius, conciliando el teorema de Carnot con el principio de la equivalencia.»

Y definido el valor de transformación por $\varepsilon = \frac{Q}{T}$ de una modificación y por

$$\varepsilon = \lim \left(\frac{Q_0}{T_0} + \frac{Q_1}{T_1} + \ldots + \frac{Q_{n-1}}{T_{n-1}} \right)$$

el valor de transformación de la modificación total, el principio de *Carnot-Clausius* manifiesta que ε es nulo en las modificaciones reversibles que constituyen un ciclo y $\varepsilon > 0$, cuando todas las modificaciones son reales, o algunas reales y las demás reversibles, correspondiendo el primer caso a los sistemas sin frotamiento ni resistencia pasiva que estudia la Mecánica racional o a la suposición de astros ficticios que al volver todos después de describir un ciclo cerrado volvieran a sus posiciones primitivas, haciendo abstracción de las mutaciones físicas o químicas realizadas en cada uno de ellos y el segundo al en que se tuvieran en consideración estas mutaciones. Y tendremos que *cuando un sistema recorre un ciclo isotérmico real, desprende más calor que absorbe* deduciéndose en este caso de la fórmula $T_e - W_1 + W_0 = LQ$ que $T_e > W_1 - W_0$ y que en el caso de suponerse que no existe acción exterior en un sistema a temperatura invariable; al llegar después de una modificación, al estado inicial, vuelve con una pérdida de fuerza viva, lo que no sucede en el caso de la Mecánica racional, cuando el sistema se halla sin resistencia pasiva. Y si una máquina en régimen permanente que pasa periódicamente por un mismo estado, adquiriendo periódicamente la misma velocidad, lo que restituye la fuerza viva, conservando una temperatura invariable, constituyendo cada período un ciclo isotérmico, al que corresponderá $W_1 = W_0$, será $T_e > 0$; de manera que, para mantener en régimen permanente una máquina de temperatura invariable, es necesario que

las fuerzas exteriores aplicadas a esta máquina efectúen en cada período un trabajo positivo.

Observaremos, finalmente, que por consideraciones análogas a las que conducen a establecer la noción de potencial, llegamos a la noción de la entropia, debida a Clausius, diciendo que: *A cada estado* x *de un sistema puede hacerse corresponder una magnitud* S_x *tal, que para toda modificación reversible que hace pasar el sistema del estado* o *al* 1 *esté dado el valor de transformación por la igualdad* $\varepsilon = S_0 - S_1$, deduciéndose que: *El valor de transformación de una modificación reversible cualquiera es igual a la disminución que sufre la entropia del sistema por efecto de esta modificación*, y además un nuevo elemento introducido por Clausius, *la transformación no compensada, que conduce a las nociones de calor y trabajo compensado y no compensado, relativas a una modificación realizable que es siempre primitiva* englobada en la expresión $\varepsilon = S_0 - S_1 + P$ que, para una modificación real de un sistema aislado, conduce a $S_1 - S_0 = P, S_1 > S_0$; de manera que resultan las dos proposiciones fundamentales de Clausius: *La energía total del Universo es constante. La entropia del Universo tiende a un máximo*, lo que sirve de principio a la estática química. Y citaremos también el concepto de la *degradación de la energía total de un sistema aislado.*

Otra ley orgánica del mundo físico está dada por la *función característica* de un sistema, de manera que no es preciso para formar la expresión del trabajo no compensado el calcular separadamente la variación sufrida por cierta cantidad, completamente determinada, cuando se conoce el estado del sistema $F = E(U - TS)$, cantidad fundamental en la Termodinámica. Y cuando se conoce su valor en cada estado del sistema, pueden calcularse por operaciones matemáticas regulares, en cada estado, de la energía interna y de la entropia del sistema, las fuerzas exteriores necesarias que deben aplicarse para mantenerlo en equilibrio en este estado y la cantidad de calor que se le debe comunicar para elevar su temperatura o producir cualquier modificación; es decir, todas las propiedades mecánicas y térmicas del sistema.

Por otra parte, la expresión del trabajo no compensado y de la función característica, conducen a la de ésta como energía utilizable $W_1 - W_0 - T_e = F_0 - F_1 - \tau$, siendo el efecto útil de las modificaciones isotérmicas sufridas por el sistema al pasar del estado o al 1 inferior a la disminución $F_0 - F_1$. Y citaremos el potencial termodinámico total, suma del potencial termodinámico interno y el de las fuerzas exteriores $\Phi = F + \text{IIV}$ a presión constante y el potencial termodinámico total $\Phi - F$ bajo volumen constante.

Si consideramos ahora el potencial interno en cierto número de fases homogéneas, su forma será

$$F = M_1 F_1 + \ldots M_\varphi F_\varphi + AS + A'S' + \ldots$$

siendo F_1, F'_2, ... cantidades dependientes de la temperatura, la naturaleza y el estado del cuerpo y A, A', ... cantidades que dependen de la naturaleza, el estado y la densidad del cuerpo que limita la superficie S o de los cuerpos que separa.

Pero la fórmula que expresa el potencial termodinámico de un sistema formado por φ fases, se expresa tan sólo por la primera serie de términos, lo que hace que en muchos casos las leyes deducidas de la fórmula simplificada sean inexactas, como por ejemplo, si una pequeña burbuja de vapor se hallase rodeada de líquido, pudiéndose afirmar que cuando cierto cuerpo *a* se origina a expensas de otro cuerpo *b*, las condiciones que permitirán prever si la transformación de un líquido en vapor tendrá lugar o no, serán diferentes según que una masa de extensión considerable se halle previamente en contacto con el cuerpo *b*, o bien si el cuepro *b* existe sólo al principio de la modificación. Y citaremos tan sólo algunos fenómenos a que se aplican estas consideraciones tales como retardos en la ebullición, en la condensación, sobresaturación de las disoluciones gaseosas, sobrefusión de un líquido, sobresaturación de una disolución salina, retardo de transformación de una forma cristalina en otra, fenómenos que representan falsos equilibrios aparentes.

Pero así como las leyes de los verdaderos equilibrios se expresan por una igualdad, las de los falsos equilibros se expresan

por desigualdades, distinguiéndose, en primer término, la *región* de los falsos equilibros y su *línea límite* que la separa de la *región de combinación* o también las regiones de los falsos equilibrios de la descomposición y de la combinación, cuyos numerosos gráficos se exponen en las obras de *Mecánica química*; y terminaremos diciendo que la *existencia de los falsos equilibrios no es excepcional sino regular*, pues todo sistema químico es susceptible de presentar tales estados de equilibrio. Y las dos curvas que limitan la región de los falsos equilibrios permanecen distintas, a toda temperatura, así como de la línea de los verdaderos equilibrios, idea muy distinta de la que consideraba el equilibrio químico como la frontera común entre dos estados en sentido opuesto que se expresaba diciendo que: *Una serie continua de estados de equilibrios, es una modificación reversible*, lo que da tan sólo las leyes de un caso *ideal*. Pero los sistemas mecánicos que se nos presentan comunmente, se hacen extremadamente complejos por la presencia continua del frotamiento.

Citaremos el estado vítreo, la fusión pastosa, la cristalización de los vidrios que originan las regiones de falsos equilibrios de cristalización y de fusión, las mezclas viscosas, la reproducción de los feldespatos, de las rocas ígneas, la catalisis por disolución, las reacciones isotermas como reacciones moderadas, las adiabáticas o rápidas; y así puede suceder que la aceleración, necesariamente negativa en una reacción isoterma sea positiva en una adiabática, la condición para que una reacción adiabática sea explosiva, la relación entre las reacciones adiabáticas y la estabilidad o instabilidad de los falsos equilibrios límites, entre los falsos equilibrios límites inestables y las reacciones explosivas, etc.

Resumiendo lo expuesto, vemos cómo la Ciencia avanza desde el potencial newtoniano hasta los dos principios de la Termodinámica, el de la conservación de la energía y el de la entropia. Respecto al primero, diremos de paso, que es punto de partida de una nueva evolución que se ramifica en los diversos modos de la energía que parten de la obtención del equivalente mecánico del calor, evolución a que contribuyeron en las rami-

ficaciones eléctrica, magnética y lumínica, con sus especiales puntos de vista los Faraday, Ampère, Helmholtz, Maxwell, Kirchhoff, etc.

Desde luego, ciñéndonos por ahora a la energía calorífica, entramos en la consideración de la energía libre que condujo a la creación de nuevas funciones concretadas a la energía calorífica, como son las *funciones características* de Massieu

$$H = TS - U, \; H_1 = TS - U - Apv,$$

el potencial termodinámico de Duhem $F = U - TS$, la función de estado de Planck,

$$\psi = S - \frac{U + Apv}{T} \quad \text{y la de Gibbs} \quad X = U + Apv.$$

Y omitimos multitud de transformaciones que pueden verse en la obra citada de Schwolson (t. II).

Sólo indicaremos que el trabajo exterior realizado por un sistema, se efectúa a expensas de la energía libre y que es máximo, cuando la modificación del sistema es reversible. En este caso se emplea en su totalidad y a cada incremento de temperatura, una parte de SdT se emplea en el incremento de la provisión de energía ligada; y llegamos al *trabajo máximo* realizado en las transformaciones isotérmicas, cuando estas transformaciones se verifican de modo reversible y a las propiedades termodinámicas de un sistema determinado por n coordenadas y por la temperatura absoluta, que conduce a la expresión de la energía libre de Helmholtz y a los potenciales termodinámicos relativos a un cuerpo deformable.

Estos conceptos teóricos se han aplicado en muy varias direcciones.

Citaremos los equilibrios químicos de Gibbs y Le Chatelier, las aplicaciones a los gases perfectos, a los fenómenos capilares, a las capacidades caloríficas, a la disociación de los gases, a su difusión, a la presión de la energía radiante, al cambio de estado, etc., todo lo que puede verse con detalle en la obra citada.

LA CONSTITUCIÓN INDIVIDUAL DE LAS REALIDADES FÍSICAS Y QUÍMICAS

Hay muchas maneras de elegir las magnitudes que determinan el estado de un sistema. Podemos indicar los valores del volumen y de la presión, el volumen y la temperatura obtenida.

Puede suceder que entre las magnitudes físicas elegidas para definir el estado del sistema no figure la temperatura, como cuando se define el estado de una masa gaseosa mediante el volumen y la presión. Y en este caso la temperatura puede calcularse mediante ciertas magnitudes cuyo valor se da directamente. Así, por ejemplo, la temperatura podrá calcularse por medio de la ley de compresibilidad y de dilatación del gas considerado.

Podemos considerar que permanezca la temperatura con su valor inicial, mientras que pasen del valor inicial al final las magnitudes que definen el estado del sistema, abstracción hecha de la temperatura y en seguida, dejando estas magnitudes en su estado final, se hace pasar la temperatura desde el estado inicial al final. Así la modificación, desde el estado inicial (P_0, T_0) al final (P_1, T_1) que experimenta una masa de gas, puede descomponerse en una que comprima la masa de gas a la temperatura T_0, de manera que la presión pase de P_0 a P_1 y después que esta masa se caliente bajo presión constante P_1, de modo que la temperatura pase del valor T_0 al T_1.

Cuando se efectúa una modificación de una masa gaseosa a volumen constante, la presión uniforme, pero variable, que comprime el gas durante esta modificación, realiza un trabajo nulo.

Pero cuando el estado de la masa gaseosa se halla definido por las magnitudes P y T, un cambio de temperatura sin cambio de estado es una modificación en la cual la temperatura

pasa de T_0 a T_1, mientras que la presión conserva el valor constante P. Y si V_0 es el volumen que la masa gaseosa ocupa a la temperatura T_0 a la presión P y α es el coeficiente de dilatación del gas, bajo la presión constante P, entre las temperaturas absolutas T_0 y T_1, bajo la presión P y a la temperatura 1 la masa gaseosa ocupa el volumen $V_1 = V_0 [1 + \alpha (T_1 - T_0)]$.

En la modificación considerada, la presión constante P ha realizado un trabajo que no es nulo

$$P(V_0 - V_1) - PV_0\alpha (T_1 - T_0)$$

lo que conduce al concepto de estados *normalmente* definidos de un sistema que no lleva consigo *ningún trabajo de fuerzas exteriores*, un cambio de temperatura sin cambio de estado.

Y la fórmula $\gamma = \frac{Q}{T_0 - T_1}$ expresa el valor medio de la *capacidad calorífica* normal de un sistema entre las temperaturas T_0 y T_1, siendo Q la cantidad de calor desprendido.

Pero llevar la temperatura absoluta de la masa gaseosa de T_0 a T_1 sin cambio de estados, es producir este cambio de temperatura sin variación de volumen y el valor de la cantidad de calor desprendido en esta modificación es $Q = Mc(T_0 - T_1)$, siendo M la masa del gas y c el calor específico bajo volumen constante, llegándose a $\gamma - Mc$, es decir, que *la capacidad normal del gas considerado es igual al producto de su masa por el calor específico bajo volumen constante.*

En cuanto a constitución química, diremos que a cada *especie* química, considerada como existente, debe corresponder una especie química definible pero no siempre aislable, pues a veces un cuerpo no puede ser separado en el estado puro de los cuerpos que lo disuelven.

Los átomos difieren entre sí por su valor de combinación o de sustitución, por su *valencia* y las moléculas por su estado de condensación y su capacidad de saturación, las reacciones por su complejidad mayor o menor. Y tenemos que el hidrógeno, el oxígeno, el nitrógeno, son respectivamente monovalente, bivalente, trivalente y tetravalente; y, según estas valencias

se forman las cadenas abiertas o cerradas o fórmulas de constitución.

Citaremos de paso que a una composición atómica semejante corresponde el mismo calor específico; y así los progresos de la Química se han realizado siempre a través de equivalencias de tal o cual orden, descubiertas y sustituibles entre sí, en las varias reacciones a imitación de las sustituciones matemáticas por las fórmulas de transformaciones diversas éstas, realizadas por hipótesis teóricas aquéllas, comprobadas por la experiencia y a lo sumo corregidas por otras experiencias ulteriores que abarcan cada vez más extensión en la complejidad de los fenómenos.

Respecto a la electricidad, recordaremos que Maxwell llegó a precisar la noción de los campos eléctrico y magnético que se producen en todos los puntos del espacio y que están íntimamente relacionados, puesto que la variación del uno origina inmediata y necesariamente la aparición del otro.

Tenemos la línea de fuerza, concepción de Faraday, trayectoria de un cuerpo electrizado, cuya dirección coincide en un punto cualquiera con la resultante de las fuerzas que actúan sobre este punto y emanan siempre de las superficies electrizadas positivamente, terminándose sobre las superficies electrizadas negativamente; y Maxwell concibió los *tubos-unidad de inducción*.

Análogamente a los diversos estados que ofrecen los conjuntos como *perfectos, densos*, etc., los estados físicos se ofrecen en formas variadísimas, teniendo en cuenta los grados de libertad según los cuales se obtienen expresiones matemáticas de la energía. Aquí, por ejemplo, se trata de los estados elementales en que pueden descomponerse todos los campos magnéticos posibles, que son sistemas de ondas estacionarias, con frecuencias determinadas correspondientes a un grado de libertad, llegándose a la expresión de la energía total para cada grado de libertad y la de la energía de irradiación para una longitud elemental de onda.

Podemos citar también, por ejemplo, la distribución ergó-

dica de Boltzmann, de que tratamos en el capítulo referente a la probabilidad.

Y bastan estos ejemplos citados, respecto a la constitución individual que puede ser objeto de muchos volúmenes, puesto que abarca el contenido total de la Ciencia en lo concerniente al modo de existir cada objeto, para apreciar el modo de definirse unos y otros por medio de condiciones restrictivas que fijan su existencia dentro del orden teórico de la realidad, de igual manera que la conceptualidad fija la realidad de las ideas en el orden intelectual.

LA RELACIÓN DE POSICIÓN (ESTÁTICA)
GEOMETRÍA FÍSICO-QUÍMICA

En las relaciones de posición hay que comprender en primer término los sistemas cristalinos.

Las cáusticas, por reflexión y refracción son figuras dependientes del poder refringente.

La difracción, las interferencias y la polarización, entran de lleno en la Geometría natural, así como el estudio de la luz en los medios anisótropos.

El equilibrio químico ofrece semejanza con las teorías matemáticas de máximos y mínimos y de los límites. Hay reacciones químicas que se detienen cuando sería absurdo que se continuasen.

Por otra parte, tenemos la *reacción limitada* por la saponificación del éter benzoico a 200°. Pero inversa de esta reacción es la eterificación, consistente en una formación de éter benzoico y de agua, mediante el ácido benzoico y el alcohol. Cada una de estas reacciones es limitada. Y tenemos *un estado de equilibrio químico como límite de dos reacciones inversas, la eterificación y la saponificación.*

Se observan también dos reacciones inversas en la descom-

posición del vapor de agua y en la formación de vapor de agua, que se detienen cuando el sistema ha llegado a un estado de equilibrio.

Si consideramos un matraz a la temperatura en que la tensión del vapor saturado es $4^{mm}, 6$, y se calienta a la temperatura de 200° un tubo de porcelana mantenido a temperatura fija que contiene hierro y óxido magnético, al que puede hacerse llegar hidrógeno y también vapor de agua del matraz lleno de agua fría, mientras la presión del hidrógeno es inferior a $95^{mm}, 7$, el vapor de agua ataca al hierro, reacción que tiende a aumentar la presión del hidrógeno. Y cuando, al contrario, esta presión excede a $95^{mm}, 7$, esta presión disminuye, porque una parte del hidrógeno se emplea en reducir el óxido de hierro. Y cuando la temperatura es de 200° y la tensión del vapor de agua es de $4^{mm}, 7$, el sistema presenta un estado de equilibrio que corresponde a $95^{mm}, 7$ para la presión del hidrógeno; y cuando se separa de este estado el sistema, sea en un sentido o en otro, éste experimenta una reacción química que lo lleva a dicho estado de equilibrio, que es estable.

Podremos considerar también la curva de las tensiones de vapor saturado. Cada punto situado debajo de la curva representa un estado en que el líquido se vaporiza, y cada punto de la región superior representa un estado del sistema en que el vapor se condensa.

Y M. Debray probó que estas leyes de vaporización pueden aplicarse a la descomposición química de ciertos cuerpos, pudiéndose construir una *curva de tensiones de disociación*.

Esto conduce a la noción de modificaciones *reversibles* y a considerar en este estudio una serie de *estados de equilibrio* de un sistema sometido a ciertas fuerzas, que no es recorrido en ninguna modificación real, frontera común de las modificaciones que conducen el sistema del estado 1 al 2 y del 2 al 1.

Y citaremos como modificaciones reversibles, la vaporización de un líquido, la disociación del vapor de agua, la disociación del carbonato de calcio, del óxido de cobre, etc.

La electricidad es la propiedad más general de la materia,

hasta el punto de que todos los fenómenos de la naturaleza se someten a esto que puede considerarse como una ley universal.

Pero esta propiedad exige ser concretada para que veamos realizarse sus efectos y esta concretación la tenemos en la fuerza elástica. La tendencia de las moléculas a ocupar su posición primitiva, cuando se han desviado de ella por alguna causa, es la elasticidad.

Un cuerpo puede considerarse como el lugar geométrico de un número infinito de puntos materiales que se distingue del resto del espacio por varias propiedades mecánicas. Cuando (teóricamente) se halla en estado de reposo relativo, los puntos materiales que lo forman se hallan solicitados por fuerzas o nulas o que se equilibran. Pero cuando se ejerce un esfuerzo en la superficie, ésta entra en movimiento, y la perturbación se comunica a las moléculas interiores; el sólido se deforma ligeramente y constituye bien pronto un nuevo estado de equilibrio. Esta definición de Lamé (*Leçons sur la théor. math. de l'elasticité*), puede servir de esquema o imagen a lo que sucede efectivamente en el mundo real, donde las mutaciones son continuas e independientes de las relaciones que idealmente les imponemos para someterlas a la exposición científica. Y la elasticidad permite la realización de todos los fenómenos químicos y físicos: presiones, condensaciones, dilataciones, cambios de posición, de estado, etc.

Pero especificando más estas consideraciones, nos hallamos en el caso de hacer algunas indicaciones sobre el rozamiento, la viscosidad, las acciones capilares, etc., que contribuyen, con las deformaciones correspondientes, a constituir una Geometría natural análoga a la teoría de las superficies matemáticas basadas en las transformaciones de los grupos continuos. Con este fin sería muy útil al lector, el leer el *Résumé des leçons sur l'Application de la Mécanique* de Navier, donde se encuentra una interesante relación histórica de lo realizado en este sentido desde Newton, Galileo, Bernoulli, Mariotte, Leibniz, Varignon hasta Poisson, Cauchy y Lamé respecto a la resistencia y elasticidad de los cuerpos sólidos, la clásica experiencia de Coulomb

sobre la medida de la adherencia de un líquido a un sólido, su viscosidad o frotamiento interno que llamaba *coherencia* y sus experimentos destinados a determinar la coherencia de los fluidos y las leyes de su resistencia en los movimientos muy lentos.

Baste indicar que todos estos fenómenos conducen al estudio de deformaciones de toda especie de las superficies o medios que se estudian. Y todo ello nos hace penetrar en los dominios de la Mecánica, del Cálculo integral y de la Teoría de las ecuaciones diferenciales, que pueden estudiarse en la obra de M. Brillouin, *Leçons sur la viscosité des liquides et des gaz*. Y en el orden teórico, puede estudiarse, entre otros, el tratado de Poincaré *Capillarité*.

Las curvaturas de los líquidos en contacto con los sólidos, son base de estudio geométrico y analítico importantes.

En este orden de ideas, basta citar la óptica geométrica (*Leçons d'optique géométrique* par E. Wallon, *Eléments d'optique géométrique* par le P. Delsaux). Y es todavía interesante el *Traité d'optique physique* par M. F. Billet, del que citaremos el capítulo destinado a la superficie de onda y las curvas isocromáticas y las producidas en la polarización rotatoria. Y no hay para qué citar la cristalización en sus diversos modos que ocupan también un lugar importante en el orden teórico, y que en la práctica son objeto muy variado y rico en resultados en el desarrollo de las acciones químicas.

En el orden de estas acciones moleculares, entra el nuevo fenómeno conocido con el nombre de movimiento browniano que es una especie de agitación molecular.

De la agitación molecular se estudia la velocidad, la distribución de las velocidades en los gases cuyo estudio lleva a la Mecánica estadística, cuya ley primordial es la de la repartición de Maxwell, que se puede presentar como consecuencia de la hipótesis de Avogadro. Y citaremos de paso la energía media de rotación de las moléculas poliatómicas, determinadas por Boltzmann y la posibilidad de separarse un átomo en todos sentidos de cierta posición de equilibrio. Y las leyes de elasticidad de

los sólidos (reacción proporcional a la deformación) conducen a suponer que la fuerza que reduce un átomo hacia su posición de equilibrio es proporcional a la separación, de lo que resultan para el átomo, vibraciones pendulares, en las que la energía potencial es por término medio igual a la energía de movimiento, y especialmente, en los gases, citaremos el coeficiente de la viscosidad producida por la mutua acción de las moléculas en su agitación o bombardeo. Tenemos, además, la relación entre el número de Avogadro y la esfera de choque y las magnitudes de las moléculas.

La regla de las fases tiene a la par un carácter funcional y geométrico; ocupa en la Matemática natural el lugar que la Geometría analítica en la Matemática pura.

Comienza por estudiar el número de componentes independientes en un sistema químico dado, de modo que dos números caracterizan un sistema químico. El número de los componentes independientes que lo formen y el número de las fases en que se divide.

Hallándose compuesto un sistema químico de varios cuerpos simples, se define este sistema por una serie de condiciones impuestas al mismo que fijan la *especie*, no pudiéndose tomar arbitrariamente las masas de estos diversos elementos. Por ejemplo, para un sistema que contiene carbonato de calcio, cal y gas carbónico que está formado por calcium, carbono y oxígeno, al proponernos que estos elementos se agrupen formando carbonato cálcico, cal y anhidro carbónico, imponemos cierta condición, pudiendo elegir arbitrariamente dos de estas masas, y la tercera quedará determinada sin ambigüedad.

De ciertas particularidades que no caben en los límites de este trabajo, diremos que en muchos casos es posible elegir de varias maneras diferentes los compuestos independientes de los sistemas de una especie dada.

Acerca del número de fases en que se divide un sistema, diremos tan sólo que una mezcla homogénea contiene una sola fase, que un sistema formado por agua líquida y vapor de agua se divide en dos fases: el líquido y el vapor, y que un sistema

formado por carbonato cálcico, cal y ácido carbónico se halla dividido en tres fases: el carbonato de calcio sólido, la cal sólida y el gas carbónico.

Y la hipótesis fundamental está expresada por la siguiente fórmula: $F = M_1 F_1 + \ldots + M_\varphi F_\varphi$.

Y hallándose caracterizado un sistema por el número c de componentes independientes que lo forman y el número φ de las fases, se puede decir que *la forma de la ley de equilibrio de un sistema químico depende exclusivamente del número*

$$V = c + 2 - \varphi$$

que se llama VARIANCIA *del sistema.*

Por último, diremos que hay sistemas invariantes, univariantes, bivariantes, etc., y que se determinan las *superficies de solubilidad* que, con sus líneas de intersección, constituyen una geometría interesante, referente a las superficies poliedrales que se forman.

Esta región de la química que constituyó Gibbs, así como la Física química de Van-t-Hoff, pueden considerarse como una Geometría analítica polidimensional, porque en ella las coordenadas son entidades concretas que sustituyen a las coodernadas abstractas x, y, z susceptibles de una diversidad indefinida.

En la Matemática, la ecuación sea algebraica o diferencial, es el molde general en que encajan las cantidades, sean números o funciones, en cada momento de su existencia mutua o simultánea; en Química, el estado de equilibrio es un molde en que también encajan las múltiples entidades que entran en cada coexistencia de entidades materiales, relacionadas con igual rigidez que las cantidades amoldadas en las ecuaciones. Aquí, a lo sumo, tenemos entidades aritméticas, algebraicas y transcenedentes de especies varias que la inteligencia crea para realizar los ajustes en los sistemas algorítmicos o geométricos En la Química, la temperatura, la presión con sus variedades, contracción y expansión, el volumen, los estados especiales de los cuerpos o de los sistemas, propiedades como la solubilidad contribuyen a multitud de ajustes generalmente sensibilizados

por representaciones gráficas tan varias como exigen las especies de los objetos, los ejes de temperaturas de presiones, de volúmenes, de concentración, de una disolución.

Dentro de la vasta complejidad concreta, tenemos singularidades como el punto de transformación, el punto triple, punto de transición, punto indiferente, el punto de eutexia, entidades distinguidas como, por ejemplo, la curva de las tensiones de solubilidad, de transformación en la proximidad del punto triple, cuádruplos y quíntuplos. Y todos estos elementos permiten hacer visibles por representaciones gráficas, los modos de realizarse los precipitados, las disoluciones, las cristalizaciones, etcétera, e intervienen en estas representaciones los puntos de eutexia y de transición, como en Geometría los puntos singulares.

Y estas representaciones aumentan en riqueza y variedad en el estudio de los cristales mixtos, al estudiarse las diversas especies de éstos producidos por las sales isomorfas, con las curiosas representaciones por medio de los antípodas ópticos y la propiedad de superposición de un cristal alabeado con su imagen. Y el caso de la congelación de una mezcla de dos sales al formar cristales mixtos, que se continúa con las aleaciones metálicas y con las representaciones de los estados críticos.

Los equilibrios químicos comprenden un capítulo en la estática de la Naturaleza y constituyen una especie de Geometría material. Tenemos que la acción de los alcoholes sobre los ácidos y la reacción inversa del agua sobre los éteres son limitadas, es decir, que establecido el equilibrio, se parte de uno u otro de los dos sistemas opuestos, es decir, que el límite común de dos reacciones opuestas es el mismo. Y Sainte-Claire Deville adivinó la generalidad universal de este orden de hechos, afirmando que los fenómenos de equilibrio, lejos de ser la excepción, eran la regla.

Todos los cuerpos, aun los más estables, pueden en condiciones convenientes, experimentar una descomposición limitada, una *disociación*. Y esta fluctuación de los fenómenos en la varia complejidad de todos ellos entra en el vasto dominio que

llamamos dinámica de la Naturaleza que considera la varia acción de las fuerzas en las mutaciones de toda especie.

Aunque de índole muy distinta, hemos presentado algunos ejemplos en los cuales domina el aspecto geométrico de los fenómenos.

CORRELACIONES NUMÉRICAS TRANSCENDENTES
ARITMÉTICA FÍSICO-QUÍMICA

La cantidad de calor es una magnitud homogénea a la magnitud que se llame *energía interna* y siendo magnitudes de la misma especie, se miden por la misma unidad (Duhem *Thérmodynamique*, p. 42).

Que una magnitud sea homogénea a la energía interna es necesario, pero no suficiente para que pueda llamarse *forma de energía.*

Una de las primeras unidades aritméticas que debemos considerar es la que constituye la ley de Dulong y Petit: *En el estado sólido es necesario próximamente la misma cantidad de calor, sea 6 calorías para elevar un grado la temperatura de un átomogramo cualquiera.* Y se enuncia que: La molécula gramo de un cuerpo es la masa de este cuerpo que en el estado gaseoso diluído ocupa el mismo volumen que 32 gramos de oxígeno a la misma temperatura y bajo la misma presión.

La Aritmética de la Naturaleza difícilmente puede sintetizarse en una obra, porque forma parte de todas las teorías de la Física y de la Química, de la Mecánica racional y de la Mecánica celeste, y los tratados de las diversas unidades se hallan diseminados en todas ellas, ya en síntesis parciales, ya con motivo de la definición de cada entidad o agente.

Entre las diversas obras publicadas, citaremos, por orden cronológico *Units and Physical constantes* by J. D. Everett (1886). Trata de cómo varían las unidades derivadas, cuando

varían las unidades fundamentales, velocidad, aceleración, fuerza, velocidad angular, aceleración angular, momento de inercia, de la elección de unidades fundamentales, longitud, masa, tiempo, energía, densidad, de la necesidad de una escala común, de las unidades mecánicas, valor de *g*, la aceleración cociente de la fuerza por la masa, del trabajo cuya unidad en el sistema C. G. S. es el *erg*, fuerza centrífuga, presión atmosférica, altura de la atmósfera homogénea, medidas concernientes a la Tierra, velocidad del sonido, velocidad de la luz, índice de refracción, rotación del plano de polarización, capacidad calorífica, calor específico, capacidades térmicas de los gases y vapores, máximas presiones de los vapores acuosos, conductibilidad, coeficiente de difusión, conductibilidad de los líquidos, equivalente mecánico del calor, la unidad del polo magnético, el potencial magnético, intensidad del campo magnético, momento magnético en unidades C. G. S. Las unidades electroestáticas y electromagnéticas, la capacidad inductiva específica, los ohms, amperios, coulombios, faradays, capacidad específica inductiva, resistencias específicas en medidas electromagnéticas, etc., todo lo que constituye un manual o *vade-mecum* muy útil, que no hace referencia más que a la Física y Astronomía y que deja por consiguiente incompleta la Aritmética de la Naturaleza por lo concerniente al también extenso campo de las cantidades y unidades de la Química.

Análogamente vemos en la monumental física de O. D. Chwolson, en diversos tratados, exposiciones detalladas de las diversas unidades físicas, sus correspondencias y mutuas reducciones, y también podemos citar la obra *Unités électriques absolues*, par M. G. Lippmann (1899), que trata de las medidas absolutas del sistema electroestático, del potencial, de las capacidades, fuerzas electromotrices, lo referente a la energía eléctrica, el sistema electromagnético, cantidades de magnetismo, momento magnético de un imán, acción de un campo sobre un imán, etc., medida de las corrientes y de la cantidad de electricidad y fuerzas electromotrices en el sistema electromagnético absoluto, la teoría electromagnética de la luz y el principio

de conservación de la electricidad, terminando con el galvanómetro y electrodinamómetro de Lippmann.

Dedicándose este trabajo a la ilustración de los alumnos de mis cursos, bastará añadir a estas indicaciones bibliográficas cuatro palabras acerca del procedimiento empleado por W. Thomson (lord Kelvin) para determinar la magnitud de los átomos (*Conférences scientifiques*) 1893), entre cuyas consideraciones la diferencia de refrangibilidad de los diversos colores del espectro luminoso, tiene una capital importancia en la resolución de este problema.

En estas investigaciones se obtiene la velocidad de propagación de la luz, según el número de partículas comprendidas en la longitud de onda, induciéndose el número de moléculas comprendidas en la longitud de onda, efectuando evaluaciones basadas en los fenómenos de la electricidad de contacto, la atracción capilar, los fenómenos de las burbujas de jabón, el espesor de los metales sólidos, cuando es inferior a una longitud de onda, etc.

Estas indicaciones, encaminadas a expresar la solidaridad de las leyes de la Naturaleza se afianzaría, si nos detuviéramos en recorrer los diversos sistemas de medidas que en todos los órdenes se han realizado, especialmente por la Asociación Británica, lo que no cabe en la extensión ni objeto de este trabajo.

En electricidad, dice lord Kelvin, la teoría matemática y las medidas de Cavendisch, y, en magnetismo, las medidas de Coulomb dieron hace cien años la base exigida para un sistema de medidas, y hace cincuenta años, Ampère hizo otro tanto para el electromagnetismo (*Conférences scientifiques*, 1893).

Pero la Asociación Británica aspiraba a un sistema absoluto, que abarcara todas las correlaciones posibles.

Gauss había empleado un método astronómico para las medidas absolutas, respecto al magnetismo y la electricidad.

La unidad de masa, en el sistema de la gravitación universal, es una cantidad de materia tal, que si dos cantidades iguales de aquéllas se alejan entre sí una longitud igual a la unidad, la fuerza que se ejerce entre ellas es igual a la unidad. Y existe

una evaluación de las fuerzas fundada sobre la gravitación terrestre. Por *unidad de fuerza en el sistema de gravitación local*, entiende lord Kelvin el peso de un gramo en Londres, en el Ecuador, en cualquier sitio. Pero el peso de un gramo es distinto en cada lugar.

El sistema de Gauss, para la medida absoluta de la fuerza, consiste en definir la unidad de fuerza como la fuerza que actuando sobre la unidad de masa en la unidad de tiempo, engendra una velocidad igual a la unidad de velocidad y permite elegir arbitrariamente la unidad de masa, de longitud y de tiempo, el gramo-masa, el centímetro, el segundo de tiempo solar medio, por ejemplo, como en el sistema C. G. S., hoy generalmente adoptado. Pero el sistema de gravitación universal, usado en Mecánica celeste, define la unidad de masa en función de la unidad de longitud y de fuerza.

Diremos, sin entrar en detalles, que el método de valuación de las fuerzas en el sistema de gravitación universal, consiste en medirlas por la cuarta potencia de una velocidad lineal. Y para ello se acude a calcular el semiperíodo de revolución de un satélite infinitamente pequeño que gira alrededor de la Tierra en la proximidad de su superficie, que es igual al semiperíodo de oscilación completa de un péndulo simple de longitud igual a la del radio de la Tierra.

Al tratar de las dos unidades de que depende el sistema de medidas de la gravitación universal, unidad de longitud y unidad de tiempo, lord Kelvin imagina un viajero científico errante en el universo, llevando consigo la regla de medida, de modo que no tenga que preocuparse de la Tierra en lo concerniente a la extensión. Y en cuanto al tiempo, si toma un cronómetro cuya marcha haya determinado antes de dejar la tierra, este instrumento responderá a sus necesidades. Y aun para conservar durante millones de años su unidad de tiempo, un diapasón de acero que pueda eliminar la influencia muy débil de la gravitación terrestre, y tendrá un patrón de duración que le dará el segundo de tiempo solar medio.

Omitimos detalles que pueden verse en la Conferencia de

Thomson acerca de cómo el viajero cósmico obtiene su centímetro y su metro. Y son interesantes las operaciones electroestáticas y electromagnéticas que expone este ilustre físico para obtener la interesante cantidad v con la esperanza de que no tarde el conocer v en centímetros por segundo de tiempo solar medio con la aproximación de 1 : 1.000.

Añadiremos, para terminar, que el ohm, el voltio, el amperio, el watio, se han adoptado como unidades prácticas y que desde el punto de vista de las medidas, es una evaluación exacta de v la relación entre las unidades electroestáticas y electromagnéticas.

Esta correlación existente entre las entidades físicas y podemos añadir químicas, establece, en la Naturaleza, un dominio funcional análogo al constituído por los matemáticos en el dominio de las ecuaciones diferenciales. Así como en la integración se determinan las constantes arbitrarias, o se parte en un sistema de valores iniciales de una función y sus derivadas de cierto orden, de igual manera, determinando constantes físicas o químicas se pueden recorrer en la Naturaleza sistemas de realidades físicas, químicas o cósmicas de especies determinadas en cada caso y constituir ciclos abiertos o cerrados de fenómenos.

No hay necesidad de multiplicar los ejemplos de las equivalencias de la Naturaleza que constituyen una verdadera Aritmética que permite calcular los valores numéricos correspondientes a cada unidad, mediante los valores de otras cualesquiera o sea de sus medidas.

LAS CORRELACIONES INMANENTES. ÁLGEBRA FÍSICO-QUÍMICA

Se puede imponer a las modificaciones del sistema considerado, restricciones tales que admitan las fuerzas exteriores (Duhem, *Thérmodynamique*, 44), su potencial.

1.º *Presión exterior invariable.*—El potencial será $\Omega = PV$. La igualdad (2)

$$Q = U_0 + \frac{\Omega_0}{E} - U_1 - \frac{\Omega_1}{E} \text{ se reduce } Q = U_0 + \frac{PV_0}{E} - U_1 - \frac{PV_1}{E}.$$

2.º *El volumen ocupado por el sistema conserva un valor invariable.*—La presión exterior admite por potencial $\Omega = 0$. La igualdad (2) se reduce a $Q = U_0 - U_1$.

Estos casos corresponden a un calorímetro abierto (presión atmosférica constante) o a un recinto cerrado.

Consideremos una modificación m que conduce de o a 1 y desprende una cantidad q de calor; una cantidad Q de calor en el curso de otra modificación que la conduce del estado 1 al 2; y

3.º Una cantidad de calor Q_1 en el curso de una modificación que conduce el sistema del estado o al 2.

La serie de modificaciones m y M y la M' que conducen cada una de o a 2, conduce a la ecuación $q + Q = Q'$.

Las mediciones de Favre y Silbermann condujeron a que *la descomposición del óxido nitroso en nitrógeno y oxígeno desprende calor* (antes se creía que toda *descomposición* química *absorbía* calor).

Con la bomba calorimétrica, Berthelot obtuvo:

1.º Modificación	M'	$CO + Az^2O = CO^2 + +2Az$	$Q^1 = 88800$	calorías
2.º »	M	$CO + O + Az = CO^2 + 2Az$	$Q = 68200$	»
3.º »	m	$CO + Az^2O = CO + 2Az + O$	$q = 20600$	»

La descomposición bajo volumen constante de 44 gramos de óxido nitroso *desprende* 20.600 calorías.

Los ejemplos de descomposiciones químicas que desprenden calor se han multiplicado.

Cuando un cuerpo se *forma* con *absorción* de calor o se descompone con desprendimiento de calor, se llama endotérmico.

De manera que: *Si un compuesto* C *es exotérmico en condiciones dadas, su calor de formación en estas condiciones, es positivo y éste será negativo si el compuesto es endotérmico,* debiéndose considerar el calor de formación a presión o volumen *constante* a la temperatura t. Y cuando la combinación se efectúe sin con-

densación ni dilatación, los dos calores de formación son iguales entre sí.

Además de las igualdades

$$L = U_0 - U_1 + \frac{P}{E}(V_0 - V_1), \quad \lambda = U_0 - u_1$$

resulta

$$L - \lambda = u_1 - U_1 + \frac{P}{E}(V_0 - V_1)$$

expresión de la diferencia existente entre el calor de formación bajo presión y volumen constantes de un compuesto (Duhem, *Thérm.* p. 51).

Al principio del trabajo máximo: *Todo cambio de estado isotérmico de una gran vivacidad se halla acompañado de desprendimiento de calor* que conduce a ecuaciones tales como

$$Ag + Cl = Ag\,Cl + 29000 \text{ calorías,}$$

$$Ag\,Br + Cl = Ag\,Cl + Br + 29000 - 27000 \text{ ó } 1900 \text{ calorías.}$$

En la teoría de las fases tenemos

$$n_1 \omega_1 + \ldots + N_1 \Pi_1 + \ldots = n_1' \omega_1' + \ldots N_1' \Pi_1' + \ldots = P$$

Y para la ley de equilibrio de un sistema a la temperatura absoluta T en un recipiente donde se encuentre, sea sólo, sea en presencia de gases perfectos que no toman parte en la reacción, la condición de equilibrio

$$V_1 \log p_1 + V_2 \log p_2 + \ldots - V_1' \log p_1' + V_2' \log p_2' + \ldots = \\ = \frac{M}{T} + N \log T + Z$$

$$PL = \frac{\Pi_0 \Sigma}{T_0 E}(NT - 0{,}4301\ M)$$

$$P\lambda = \frac{\Pi_0 \Sigma}{T_0 E}[(N + V_1' + \ldots - V_1 - V_2 - \ldots)T - 0{,}4301\ M]$$

$$PL = NT - 0{,}4301\ M.$$

$$P\lambda = N + V_1' + \ldots - V_1 - \ldots - 04301\ M.$$

Uno de los muchos experimentos que realizan prácticamente las ecuaciones que el Algebra satisface por medio de números, es el siguiente: Si se considerase como probable que el hidrógeno del metano puede ser reemplazado por cuartos, se puede inferir que la molécula de metano contiene probablemente 4 átomos de hidrógeno. Ahora bien, esta molécula como todas las masas de metano (según el análisis en peso), pesa 4 veces tanto como el hidrógeno que contiene; luego la molécula de metano pesa 16 veces tanto como la molécula de hidrógeno.

Este ajuste ecuacional se relaciona con la identidad de estructura molecular. Así, cuando decimos que el metano CH_4 y el cloruro de metilo CH_3Cl tienen la misma estructura molecular, suponemos que la agrupación CH_3 no se ha modificado por la cloruración y que está ligado al átomo Cl como lo estaba al átomo H.

Se dirá, por ejemplo, que la agrupación CH_3 del cloruro de metilo existe en la molécula CH_3OH de alcohol metílico que se escribirá CH_3OH; porque la acción del ácido clorhídrico HCl sobre este alcohol da (con el agua HOH) este cloruro de metilo CH_3Cl, lo que constituye una dislocación de moléculas, como en la ecuación algebraica se efectúa con números.

Teoría de la luz.—El prisma es un instrumento determinativo de la luz descompuesta en los siete colores que entre los muchos fenómenos de toda especie, relacionados con las otras formas de la energía y de la materia, llega hasta la determinación de la velocidad y de la longitud de onda y, especialmente, combinada con las corrientes eléctricas llega, al estudio de los rayos catódicos, de Lenard, etc., y al de las substancias radioactivas y especialmente al espectro invisible con sus regiones ultravioleta e infrarrojo (Thompson, *Radiations visibles et invisibles*).

Acerca de los rayos X que atraviesan los cuerpos opacos a la luz ordinaria, se propagan rigurosamente en línea recta, atraviesan sin refracción ni reflexión todos los cuerpos y no se polarizan. Y respecto a los rayos de Lenard, la trasparencia de los gases disminuye con la densidad de éstos; de manera que

los gases se comportan respecto a los rayos catódicos como *medios turbios*, tanto más, cuanto exista más presión, lo que ha conducido a atribuir este hecho a que el movimiento de las moléculas constitutivas es desordenado y se hallan en choques continuos; de manera que para hacer un gas apto para la propagación de los rayos catódicos, debe establecerse el orden en el movimiento desordenado de las moléculas que lo constituyen y existe, para cada uno, una diferencia de potencial más allá de la cual desaparece su poder dieléctrico, sucediendo al movimiento desordenado de las moléculas que lo constituyen un movimiento ordenado bajo la forma de corriente eléctrica. Y se admite que los rayos catódicos son las trayectorias de los iones en movimiento, llevando cargas eléctricas negativas (O. Manville, *Les découvertes modernes en Physique*), constituyendo los gases, como se ha dicho, obstáculos a su propagación, haciéndose el aire, atravesado por los rayos catódicos, conductor de la electricidad, y esta conductibilidad se debe a la presencia de los rayos X producidos, como lo mostró Roentgen por la absorción de los rayos catódicos en el medio en que se propagan.

Y J. J. Thomson supone que: *El tránsito de los rayos X a través de un cuerpo parece acompañado de una descomposición de las moléculas de éste, la cual permitiría a la electricidad moverse por un mecanismo análogo al del paso de la corriente en un electrolito.*

También es pertinente, a este punto que tratamos, citar la influencia de los rayos ultravioleta, bajo cuya influencia los gases adquieren cierta conductibilidad electrolítica y un modo de explicar el mecanismo del transporte de la electricidad bajo la acción de la luz ultravioleta.

Las experiencias, según las cuales se descubrieron la materia radiante Crookes y los rayos X con sus congéneres, los de Lenard y después los de Becquerel y los cuerpos radioactivos, equivalen a las ecuaciones lineales puestas en el Algebra o las diferenciales, parecidas al caso en que por la extrema rarefacción del gas los movimientos de las moléculas no pueden ser

entorpecidos o alterados en su dirección, siendo sus movimientos rectilíneos, gracias al estado *ultra-gaseoso* que existe en el tubo de Crookes, lo que fué precedente natural del descubrimiento, no sólo de los rayos catódicos, sino de otros que se originan de ellos como son los rayos X y los de Lenard, de igual modo que, manteniendo la comparación con las ecuaciones diferenciales lineales, sin segundo miembro, la integral de una de éstas origina infinidad de otras integrales de la misma afectada de segundos miembros de diversa naturaleza, consistiendo la nueva dificultad analítica en obtener una integral particular de dicho segundo miembro.

Y además de los rayos X se han descubierto los rayos negros por M. Le Bon, los rayos de Becquerel y otros varios producidos por reacciones varias, entre los que citaremos especialmente, la del sulfato doble de uranio y de potasio de Becquerel.

Observaremos de paso, que las reacciones químicas hoy se consideran como reacciones entre iones. La atomicidad o la valencia, es decir, la aptitud de los átomos para unirse a un número más o menos grande de otros átomos depende, según este punto de vista, de su capacidad de saturación eléctrica. Y según las ideas de Helmholtz y Lorentz, se explican las composiciones y descomposiciones químicas por la aptitud de los átomos a adquirir o perder electrones (iones electrizados) o átomos de electricidad pura, con cuya definición aspiran algunos físicos, a unir los rayos catódicos, los X, la luz, el calor tendiendo a la unidad de los fenómenos físicos. El grado de valencia de los átomos dependería del número de electrones que pueden perder o adquirir. Se ha admitido que las partículas electrizadas provinentes de los gases o de los cuerpos simples disociados resultan de su ionización. Y entre la serie de teorías que aspiran a la explicación de los fenómenos físico-químicos, una de ellas es la que pretende sostener la transformación de la materia en electricidad. Y según las ideas y experiencias de Helmholtz y Wilson, respecto a la influencia de la electricidad en la condensación del vapor de agua, resulta que se produce alrededor de cada ion un conjunto de moléculas de agua que constituye un germen

capaz de provocar la formación de una gota, llegándose según los procedimientos ópticos de sir G. Stokes y M. Lemme a un efecto máximo de veinte millones de iones por centímetro cúbico (L. Poincaré, *La Physique moderne*, p. 223).

A los rayos catódicos, considerados como constituídos por electrones desprendidos de elementos materiales, que dan conductibilidad eléctrica al aire y se transforman en rayos X, cuando tropiezan con un obstáculo, y además de los rayos de Lenard, ya citados, se ofrece al estudio un cúmulo de nuevos fenómenos y la producción de multitud de nuevos sabios que edifican la teoría de la radioactividad.

Hay que considerar en la *luz negra* de M. Le Bon, multitud de acciones químicas. Y citaremos especialmente la propiedad radiante descubierta por M. Becquerel de las sales de uranio, que le condujeron a exponer las propiedades de los rayos que llevan su nombre, llegando M. Rutherford a evidenciar que los compuestos radioactivos de torio se componen de rayos α, mucho más penetrantes que los del uranio, de radios β y de una *emanación* constituída por partículas materiales extremadamente tenues. Y al estudiar M y Mme. Curie la radioactividad de todas las substancias conocidas, además de mediciones eléctricas de las mismas, llegaron al descubrimiento del polonio y el radio, así como M. Debierne el actinio, habiéndose extraído de diferentes minerales multitud de substancias radioactivas.

Y a semejanza de los fenómenos simplemente eléctricos y magnéticos se descubrió en los cuerpos radioactivos la propiedad de descargar cuerpos electrizados, iluminar pantallas fluorescentes, etc., lo que constituye la *radioactividad inducida*.

Todos estos fenómenos, producidos por las experiencias de los laboratorios, son análogos a la constitución de ecuaciones en el Algebra pues aquellas hacen surgir dichos fenómenos, que se sujetan a un molde análogo al de las ecuaciones, cuando las energías naturales se someten a acciones provocadas por las condiciones en que se realizan las experiencias.

La ionización se produce por los rayos X, los rayos catódicos, las radiaciones emitidas por los cuerpos radioactivos, por los rayos ultravioletas, por el calentamiento a muy elevadas temperaturas, por ciertas acciones químicas y por el choque de los iones, ya existentes, contra las moléculas neutras.

Los átomos metálicos, como las moléculas salinas de una disolución, pueden disociarse parcialmente, y los electrones, mucho más pequeños que los átomos, podrán moverse a través del edificio atómico. Se les puede comparar con las moléculas de un gas encerrado en un cuerpo poroso.

Como ejemplo de esta Algebra de la Naturaleza, que establece sus ecuaciones mediante el equilibrio de los agentes que cada teoría establece, citaremos las corrientes cerradas de Maxwell en su teoría eléctrica; pues si consideramos la corriente que se origina cuando se ponen en comunicación los polos de una pila con dos conductores aislados, el conductor que se carga positivamente debe tomar en la teoría de Maxwell una cantidad de flúido mayor que la que posee en el estado neutro, y en el otro conductor debe disminuir. Pero siendo, en esta teoría incompresible el flúido eléctrico, su densidad debe permanecer constante, no pudiéndose concebir que haya condensación de este flúido en un punto y rarefacción en otro, de modo que, para conciliar esta consecuencia de la incompresibilidad del flúido con el hecho experimental de existir la corriente, Maxwell hace intervenir el flúido inductor, flúido elástico hipotético que ocupa la materia de los dieléctricos a la manera del éter, que aisla los conductores. Y al salir el flúido eléctrico de uno de los conductores simples al flúido inductor del dieléctrico, hace entrar en el otro conductor una cantidad de flúido inductor igual a la cantidad de flúido eléctrico, salida del primero. De manera que se cierra la corriente a través del dieléctrico, moviéndose las moléculas del flúido inductor, según las líneas de fuerza, del dieléctrico.

Es útil añadir que en la Mecánica ordinaria se considera el estado de movimiento infinitamente próximo al de reposo, considerando como definitivo lo que es aproximado. Y así po-

dremos, por ejemplo, citar la ecuación de Van der Waals

$$pv = RT - \frac{a}{v} + \left(\frac{ab}{v^2} + bp\right)$$

que expresa aproximadamente los resultados de la experiencia. Cuando p crece, el volumen v disminuye; el segundo miembro llega a un mínimo para el valor de $\frac{a}{v}$ igual al paréntesis, y en seguida crece, pues para el caso ideal de los gases perfectos, se tiene la ecuación de Clapeyron $vp = RT$, en esta hipótesis.

Un ejemplo clarísimo del Algebra de la Naturaleza nos ofrece la consideración de los fenómenos reversibles o irreversibles. Cuando una transformación es reversible, todos los estados intermediarios se presentan en los dos sentidos inversos.

Del estado A al B se pasa por los mismos estados intermediarios que de B a A. Y dos transformaciones de esta clase *no producen ningún cambio en el mundo exterior*. Pero por ejemplo, si se trata de la dilatación brusca de un gas en un espacio vacío, el fenómeno es irreversible, y para que volviera a su estado primitivo, sería necesaria la intervención de otros cuerpos que comprimieran el gas hasta su volumen inicial y le devolvieran el calor desprendido en esta compresión. Y si en la Mecánica racional los fenómenos son reversibles, los fenómenos físicos son irreversibles.

Observaremos, por tanto, que una de las particularidades del segundo principio de la Termodinámica es la de determinar el *sentido* del fenómeno considerado, pudiéndose citar previamente el principio de Le Chatelier Braun, iniciado parcialmente por Van-t'-Hoff en sus *Etudes de Dynamique chimique*. Este principio supone siempre *una relación determinada entre los sentidos respectivos de dos transformaciones* que pueden tener lugar en el cuerpo o en el sistema. Si una de las transformaciones es conocida, el principio indica *la necesidad de la segunda y el sentido según el que se produce*. El principio de Le Chatelier-Braun, puede considerarse como una extensión a la substancia inanimada de la *facultad de acomodación* (que poseen los anima-

les y las plantas) (Schwolson, *Traite de Physique*, t. III, p. 477).

Y todos los ejemplos que pueden citarse en los sistemas físicos y químicos expresan una neutralización de acciones opuestas que constituyen ecuaciones físico-químicas.

Y el principio de Le Chatelier puede enunciarse así: *Toda transformación infinitamente pequeña de un sistema en equilibrio químico, que se produce por uno solo de los factores del equilibrio, se efectúa en un sentido tal, que tienda a producir una variación en sentido inverso del factor considerado*, siendo los factores externos, la temperatura, la presión, la fuerza electromotriz y los internos: condensación y estado de cada uno de los cuerpos.

Y observaremos de paso que, al no poderse producir una transformación realmente por vía rigurosamente reversible, ésta es el *límite de dos series de transformaciones realizables, efectuadas en sentido inverso.*

Tenemos, pues, que según el principio de Carnot-Clausius, *existe una función* $T = f(t)$ *de la temperatura termométrica* (temperatura absoluta) *tal que para toda transformación por vía reversible infinitamente pequeña* $\frac{dQ}{T} = S$, *es una diferencial exacta*, siendo Q la cantidad de calor absorbida por el cuerpo que se transforma y $\frac{1}{T}$ el factor integrante, lo que se reduce a decir que cada cuerpo está caracterizado por cierta propiedad S que se llama su entropia, función perfectamente determinada de las variables independientes a, b, c, ... que fijan el estado del cuerpo, expresándose la cantidad de calor que el cuerpo puede absorber en una transformación reversible infinitamente pequeña por $dQ = TdS$ o para toda transformación finita $\int_1^2 dQ = S_2 - S_1$, siendo S_2 y S_1 los valores de la entropia correspondientes al estado inicial y al final. Y para el caso de ser la transformación irreversible $\frac{dQ}{T} < dS$, o $\int_1^2 \frac{dQ}{T} < S_2 - S_1$.

Y así como en el Algebra ordinaria, las ecuaciones no son más que momentos de equilibrio a que se reduce el sistema de cantidades que expresan una función, o sea el caso de anularse

o de reducirse a algún valor fijo, de igual modo, dicha propiedad característica que fija el estado de un cuerpo, establece un equilibrio o ecuación que expresa los estados particulares de una función física o química, cuyo sentido de variación, en la realidad, se expresa por el sistema de la ecuación e inecuación arriba expresadas.

LAS TRANSFORMACIONES O CORRELACIONES TRANSCENDENTALES (DINÁMICA DE LA NATURALEZA)

En este capítulo titulado *Las transformaciones o correlaciones trancendentales o Dinámica de la Naturaleza* se halla en rigor comprendida toda la Matemática físico-química, pues fuerza y movimiento son los dos factores que, bajo infinidad de formas, contribuyen a constituir el orden fenomenal objetivo.

Pero la idea culminante de este trabajo es dividir el estudio físico-químico que, como se ve, no puede emanciparse del orden matemático que sirve para formular o expresar cualquier fenómeno; y aunque en cualquiera de los demás capítulos de la obra intervienen estos dos factores ineludibles, es interesante el hacerse destacar de este fondo común algún carácter general, en torno del cual pueden agruparse multitud de fenómenos, subordinados a un punto de vista especial.

Principiaremos por distinguir los dos grupos generales de fenómenos, a saber: los que se refieren a totalidad de sistemas, como son los que establecen las relaciones mutuas entre los cuerpos celestes o el *macrocosmo*, en los que sólo interviene la gravitación universal, y los que se refieren a los sistemas moleculares (*microcosmos*) bajo la acción de los agentes o energías, o mejor, las varias especies de energía que se desarrollan en el globo terráqueo.

Desde luego, observaremos que en el estudio de la Natura-

leza, tenemos un orden artificial, propiamente de laboratorio o de gabinete, por el que se establecen, según las necesidades de las investigaciones, ecuaciones correspondientes a moldes naturales en hipótesis especiales, tales como la constancia del volumen, la presión, la temperatura, etc.; y así obtenemos relaciones entre cantidades conocidas y desconocidas que luego pueden comprobarse por la experiencia, o a la inversa, ecuaciones representativas de experiencias. Y si se trata de la Física matemática, ecuaciones que se fundan en deficiones que permiten la aplicación inmediata del cálculo.

Y estos resultados obtenidos con la Naturaleza encadenada, sirven para las industrias o beneficios materiales de toda especie.

Pero existe en la Naturaleza una ecuación universal en la que se halla comprendida toda la complejidad de entes materiales y de energías, de tal modo, que cuantas ecuaciones diferenciales que podamos proponer para las finalidades prácticas, se hallan como casos particulares de esta ecuación, especificada para valores considerados en aquellos parámetros que intervienen en cada problema. Y esta ecuación, como se ha dicho, es utilizable en casos particulares, como por ejemplo, se aprovecha un salto de agua.

La creencia de que pudiera el Universo llegar a una situación idénticamente igual a otra situación ya realizada, es utópica, desde el momento que, según las teorías admitidas, la disipación de la energía o el crecimiento de la entropia se opone a la reversión de los fenómenos cósmicos, pareciendo como si el Universo se filtrara en el tiempo (*), adoptando sucesivamente distintos modos de ser en sus elementos materiales y energéticos.

Como un caso fragmentario, podemos considerar al sol irradiando su luz y su calor para producir en la Tierra fenómenos

(*) Una idea muy original del deplorado Minkowski es la de un *punto del mundo* individualizado por el conjunto de valores x, y, z, t, designando t el tiempo que ofrece una representación cómoda del *Universo*, como dice M. Borel en su *Introduction géométrique à quelques théories phsiques* (p. 42), de manera que el *Universo*, según Minkowski, puede considerarse como el conjunto de los sucesos que se verifican en el espacio y en el tiempo.

de toda especie, aparte de su fuerza potencial que se relaciona con las de los demás astros para producir lo que nos revelan los estudios geológicos, juntamente con la acción superficial que cuotidianamente ejerce, y la Tierra con sus polos magnéticos, su electricidad atmosférica, su rozamiento con la atmósfera, las brisas, las corrientes asmosféricas de toda especie y las oceánicas que forman parte de la ecuación universal. Y una de las obras que pueden consultarse en este sentido, es *Lehrbuch der Kosmischen Physik*, von Wilhelm Trabert, que trata de la figura de la Tierra, y su posición en el Universo, correspondiendo lo relativo a las medidas cósmicas, etc., de los movimientos de los cuerpos celestes, de la gravitación universal, de las radiaciones y su influencia en la atmósfera, comprendiendo los fenómenos luminosos, el análisis espectral, los cambios de la energía en relación con los movimientos de la atmósfera, los climas, las mareas, etc., el cambio de la energía mecánica en calor y varias particularidades del sistema solar.

De carácter más teórico es la obra *The Dynamics of particles and of rigid, elastic and fluid bodies*, por Arthur, Gordon, Webster.

Y la Ciencia, al pretender conocer todo esto, sigue su método de observación y va creando sus teorías para inferir cómo las energías actúan, cómo se transforman y cómo producen sus fenómenos correspondientes.

Ya se sabe que estas teorías han sufrido transformaciones varias exigidas por el conocimiento cada vez más completo de la complejidad de los fenómenos; y ya hemos dicho que, en la Dinámica de la Naturaleza, entran todos los fenómenos que se refieren a las fuerzas y al movimiento. Pero habiendo dejado para otros capítulos muchos de éstos por tener cierto carácter especial, según los cuales han sido agrupados, actualmente sólo citaremos los que se refieren a las varias formas de la energía, a manera de índice de materias que pueden utilizarse en los cursos matemático-físicos.

Citaremos, en primer término, la teoría cinética de los gases que comprende el estudio de sus presiones, su vaporización, ab-

sorción, la ley de distribución de sus partículas, su energía molecular y atómica, su viscosidad, su difusión, su conductibilidad, sus leyes de constitución molecular, y, respecto a su conductibilidad, su poder conductivo de la electricidad cuando contiene iones, su ionización, las descargas eléctricas, las acciones de los rayos X de Lenard, los rayos catódicos, de Roentgen, de Becquerel, etc., que conducen a la teoría electrónica de la materia (la radioactividad), a los medios gaseosos no ionizados, materias que pueden estudiarse en las obras: *The Kinetic Theory of the Gases*, by Dr. Oskar Emil Meyer, *Conduction of Electricity through Gases*, by J. J. Thomson, *Les découvertes modernes en Physique*, par O. Manville.

En cuanto a la entropia con relación al calor, podremos decir que: En virtud del postulado de Helmholtz, cuando el calor pasa de un cuerpo a otro, postulamos que el calor pasa constantemente del cuerpo, cuya temperatura es más elevada a aquél cuya temperatura es más baja o a postular que la entropia total del sistema aumenta.

Además, la entropia aumenta en toda modificación sufrida por un sistema aislado, cuya temperatura varía de una manera continua de un punto a otro, si se admite que se verifica el postulado de Helmholtz y que las variaciones experimentadas por la temperatura de un instante a otro, se hallan regidas por las fórmulas que da la teoría de la conductibilidad del calor.

Citaremos, en breves palabras, la tendencia a una distribución uniforme de la temperatura, cuando crece más allá de todo límite. Y añadiremos que: *el principio del crecimiento de la entropia o la degradación de la energía consistente en admitir que, en un sistema aislado, la distribución de la temperatura tiende a la uniformidad*, o que *de cualquier modo que se propague el calor en un sistema aislado se postula que toda modificación real hace crecer la entropia.*

El corrimiento del equilibrio puede efectuarse variando la presión o la temperatura.

Cuando en un sistema en equilibrio, establece a una tempe-

ratura y bajo una presión dada, sin cambiar la temperatura, crece la presión en una cantidad pequeña, quedará roto el equilibrio y el sistema será el sitio de una pequeña reacción que llevará a un nuevo estado de equilibrio. Y si se produce la misma reacción, a partir del estado de equilibrio primitivo sin cambio de temperatura ni de presión, se hallará acompañada de una *disminución* de volumen del sistema. Pero si se turbase el equilibrio primitivo, *disminuyendo* ligeramente la presión, se provocaría una pequeña reacción verificada a partir del estado de equilibrio primitivo, sin cambio de temperatura ni de presión, acompañada de un *aumento de volumen* del sistema.

Y ahora es oportuno citar los momentos estático y dinámico que en las mezclas físicas y químicas estudia la Química física.

En el primer momento, correspondiente a la estática química, hay que considerar: la ley de constancia de la composición, la ley de las proporciones múltiples, la de los números proporcionales que Herr Van-t-Hoff reduce al estudio del peso molecular y a la polimería de la estructura molecular y la isomería, de la agrupación molecular y la polimorfia (*Leçons de Chimie Physique deuxieme partie.*, par J. H. Van-t-Hoff).

Pero considerando estos momentos como puntos de partida, pasamos al examen del fenómeno en sus fases de existencia o movimiento y entramos en el dominio de la Dinámica.

Así, considerando el equilibrio químico en sus manifestaciones externas, principiando, por ejemplo, por cambios de un cuerpo que sólo experimenta modificaciones físicas, Van-t-Hoff, refiriéndose a experiencias de Ramsay y Fischer, determina la curva que expresa la relación entre las presiones y las temperaturas como ejes de ordenadas y de abscisas, así como las tensiones del benzeno en el estado sólido y en el estado líquido, y especialmente el punto de fusión y las regiones correspondientes a los estados sólido, líquido y de vapor, tratando de los equilibrios estables; y, representando la línea común de cada dos estados, llega a la ecuación que da una idea de las curvas de tensiones; y aun examina las modificaciones químicas que conducen a formas isómeras y polímeras y considera equilibrios entre va-

rias substancias, llegando a las dos categorías en el orden químico, comparables con la vaporización o la fusión.

Y hay que observar que, mientras las modificaciones químicas se distinguen en que son posibles numerosos cambios de estado, las transformaciones físicas se reducen a los tres estados de agregación. Y es importante la propiedad de poder experimentar transformaciones reversibles llamada *enantiotropia* por Lehmann.

Después de considerar la energía calorífica, refiriéndose a los movimientos moleculares o transformación de calor en trabajo, debe considerarse las deformaciones del éter como origen de los fenómenos ópticos y eléctricos que se dividen en modificaciones *estáticas* o mutaciones internas del éter, deformaciones análogas a las deformaciones elásticas de los cuerpos sólidos y modificaciones *dinámicas* análogas, en que han intervenido entre otros, Maxwell, Helmholtz y Thomson, tratando *todo movimiento en el éter como una manifestación de la energía bajo forma particular*, ya libre, ya modificada en el interior de cada especie de medio, y cuyas deformaciones corresponden a un aprovisionamiento de energía, produciéndose vibraciones longitudinales o transversales, y distinguiéndose las tres especies de rayos, caloríficos, luminosos y químicos, suponiéndose que, al ser la luz un caso particular de las perturbaciones en el éter, no puede diferir de los fenómenos eléctricos y magnéticos, por lo que Maxwell estableció su *teoría electromagnética de la luz*, y Hertz sus *rayos eléctricos*.

En cuanto a la constitución química, citaremos las difusiones que revelan agitación molecular. Una disolución recíproca se opera por la difusión de las dos substancias a través la una de la otra, uniformizando el líquido. Por ejemplo, si se superpone una capa de alcohol a otra de agua, las moléculas de uno y otro cuerpo han estado animadas de movimiento al menos, mientras ha durado la disolución. Y con más rapidez se efectúa la uniformización de las mezclas gaseosas. De manera que toda superficie, trazada en un flúido, se halla atravesada incesantemente por moléculas que pasan de uno a otro lado, estando en

continuo movimiento. Cada elemento de volumen, en cada instante, gana tantas moléculas como pierde, conservando el mismo estado medio de movimiento desordenado. Y por esto hemos visto la importancia que tienen en Física las nociones de estadística y de probabilidad. Y esta agitación molecular explica la expansibilidad de los flúidos, y hace comprender porqué ejercen una presión sobre las paredes de los recipientes que los contienen, debido a los choques incesantes contra las paredes de las moléculas del flúido, admitiéndose que las moléculas son asimilables a bolas elásticas, cuyo volumen total es muy pequeño respecto al volumen que atraviesan, y que se hallan tan lejanas unas de otras, que cada una se mueve en línea recta en la mayor parte de su recorrido, hasta que el choque con otra molécula cambia su dirección. Y la agitación molecular aumenta con la temperatura.

En la solubilidad recíproca, la composición de cada una de las capas líquidas es independiente de las cantidades de los dos líquidos puestos en contacto mutuo. Cuando existen en presencia dos capas líquidas y de vapor, el vapor se halla en equilibrio con las dos capas líquidas.

Y nos bastará citar, en este orden de fenómenos, la variación brusca de la tensión máxima, la fusión de las sales hidratadas, las soluciones sobresaturadas, la fusión completa de un hidrato, especialmente, el modo de comportarse una cantidad dada de cloro a temperatura y presión determinadas, en presencia de una cantidad dada de iodo, los equilibrios físicos de tres y de cuatro cuerpos en presencia, que originan desarrollos análogos a los seguidos por los geómetras en las discusiones de las curvas, que sólo difieren en el origen fenomenal o racional de las unas o las otras. Y es especialmente interesante el estudio teórico del equilibrio en los gases, con sus ciclos reversibles, los equilibrios en las soluciones no electrolitas, semi-electrolitas y electrolitas, la disociación electrolítica del agua y la electrolisis, etc.

Esta clase de fenómenos puede seguirse con facilidad en la obra de M. Le Chatelier, *Recherches experimentales et théoriques*

sur les équilibres chimiques que Sainte-Claire Deville llamó *disociaciones*, cuya analogía señaló con los fenómenos físicos de fusión y de vaporización, es decir, de los fenómenos físicos con los químicos. Y aun Le Chatelier extendió la identidad de las leyes de equilibrio de los fenómenos físicos y químicos a los mecánicos.

Respecto al calor y a la luz radiante, indicaremos las siguientes consideraciones:

La acción de la luz sobre las partes verdes de los vegetales provocan acciones químicas que son a su vez origen de nuevas transformaciones, continuando un ciclo indefinido de otras transformaciones y son parecidas a la generación indefinida de las cantidades por el cálculo directo, sistemas de numeración, conjuntos, funciones eulerarianas, transcendentes varias que se transforman en ecuaciones cuando se identifican, lo que equivale a la operación de laboratorio.

Y estas operaciones generadoras de la Naturaleza se diversifican por la transformación de unas energías en otras, regidas por un cálculo aritmético que expresa sus equivalencias en cualquier transformación. Y así tenemos a la Naturaleza como a la Matemática en torno de los dos procesos reciprocos de los cálculos directos e inversos. La cantidad y las operaciones se corresponden a la materia y a la energía en sus diversas formas. Las hipótesis físico-químicas sustituyen a los cambios de variables que busca el matemático para normalizar, simplificar o reducir sus cálculos a otros más eficaces para los fines que se propone. Si bien es cierto que las hipótesis físico-químicas son mucho más numerosas que las matemáticas por efecto de la mayor complejidad de los fenómenos.

A Faraday y a Maxwell se debe la idea de que los fenómenos eléctricos y magnéticos se reducen a deformaciones y perturbaciones en el éter que se presenta como el soporte de la luz. Y, siendo la luz un caso particular de las perturbaciones en el éter, no debe diferir esencialmente de los fenómenos eléctricos y magnéticos; lo que permitió a Maxwell fundar en este concepto su teoría electromagnética de la luz. Y además podemos con-

siderar la perturbación especial que constituye la teoría de los rayos eléctricos de Hertz.

La energía cinética se encuentra en la Naturaleza bajo diversas formas, por ejemplo, como energía de movimiento de rotación y traslación y rotación de los cuerpos, como energía de los movimientos moleculares, llamada *calor* y como energía de los movimientos del éter, *energía radiante*, existiendo infinidad de energías radiantes que difieren entre sí por la longitud de su periodo T y por la longitud λ de la onda. El calor, la luz y la energía química se consideran como tres propiedades distintas de una misma irradiación.

La energía radiante no sólo se propaga en el espacio lleno de éter, sino en ciertos cuerpos sólidos, líquidos o gaseosos que son transparentes para aquélla y puede atravesarlos sin absorción o transformación en otra forma de energía.

Cuando un flujo de energía radiante llega a la superficie de un cuerpo, una parte del mismo se refleja, la otra penetra en el interior del cuerpo y es absorbida, transformándose en otras formas de energía. Todos los dieléctricos son transparentes para los rayos eléctricos, así como los conductores son opacos; de manera que los cuerpos no conductores de la electricidad son conductores de la energía eléctrica radiante e inversamente. El color de los cuerpos es una consecuencia de la absorción de algunos rayos determinados, y existe cierta relación entre el poder emisivo y el absorbente de un cuerpo.

La energía radiante se descompone en: 1.º *Rayos eléctricos* (de Hertz), para los cuales λ toma todos los valores mayores que $\lambda = 3$ y $N = 10^{11}$. 2.º *Intervalo desconocido* desde $\lambda = 3^{m,m}$ hasta $\lambda = 0,^{mm}06$ y N desde $N = 10^{11}$ hasta $N = 5 . 10^{12}$ próximamente. 3.º *Rayos infrarrojos invisibles u oscuros* desde $\lambda = 60\ \mu$ hasta $\lambda = 0,76\ \mu$ y desde $N = 5 . 10^{12}$ hasta $N = 4 . 10^{14}$. 4.º *Rayos visibles o luminosos* desde $\lambda = 0,76\ \mu$ hasta $\lambda = 0,4\ \mu$ y desde $N = 4 . 10^{11}$ hasta $N = 7,5 . 10^{14}$. 5.º *Rayos ultravioletas oscuros o invisibles*, desde $\lambda = 0,4\ \mu$ hasta $\lambda = 0,1\ \mu$ y desde $N = 7,5 . 10^{14}$ hasta $N = 3 . 10^{15}$.

Vemos que la energía calorífica se transforma en energía ra-

diante e inversamente, que existe una relación entre el poder emisivo y absorbente de los cuerpos, cuya ley estableció Kirchhoff, que se aplica a los flujos de energía compuestos y que llega a relacionarse con la irradiación de los cuerpos negros. La influencia del medio ambiente complica el modo de transformación de las energías en el cálculo funcional de la Naturaleza, influyendo, por ejemplo, el movimiento del medio en la propagación de la energía radiante. Y entre millares de fenómenos se efectúan, la reflexión, la aberración, la difusión, la refracción, la dispersión de la luz en la Naturaleza o con el artificio del prisma y tenemos las múltiples relaciones tales como el índice de refracción con la longitud de la onda que se extienden a las inacabables relaciones que determina la espectroscopia sobre las diversas substancias a las que corresponde una constitución especial del espectro en cada caso, fijando infinidad de correlaciones de la Matemática fenomenal que se corresponden en los diferentes mundos.

Por otra parte, la inducción eléctrica, la desaparición del estado eléctrico correlativamente con la aparición de energía calorífica, luminosa, sonora, etc., la producción de los campos eléctrico y magnético, los fenómenos de la electrolisis o reacciones químicas que acompañan al tránsito de corriente eléctrica a través de los electrolitos, la coexistencia de las corrientes eléctricas con la provisión de energía calorífica, eléctrica o química, la radioactividad, los flujos de inducción, las propiedades eléctricas de los iones que realizan los fenómenos químicos correspondientes a la diversidad de las valencias de los grupos atómicos y la dependencia de los corrimientos de los iones con el movimiento eléctrico, los manantiales de electricidad que provienen del contacto físico o químico de los cuerpos y otros innumerables hechos que pudieran citarse, dan una idea al menos teórica, pero próxima a la realidad, por el contraste de las experimentaciones, de la Matemática natural como expresión funcional o numérica que constituye la Dinámica de la Naturaleza.

Respecto a la explicación mecánica de los hechos, diremos

con Poincaré que todo fenómeno físico tiene cierto número de parámetros $q_1, \ldots q_n$ que la experiencia obtiene directamente y permite, medir dándonos a conocer sus leyes de variación respecto a la materia. Se considerarán las masas de las moléculas y sus coordenadas y la función U de fuerzas, estableciéndose las ecuaciones diferenciales del movimiento y la energía potencial, así como la expresión del trabajo, expresándose las leyes del movimiento por las ecuaciones de Lagrange. De manera que la explicación del fenómeno depende de la obtención de las funciones U y T. Y para la explicación completa se obtendrán p constantes $m_1, \ldots, m_p$ y $3p$ funciones de las q. *Y si un fenómeno lleva en sí una explicación mecánica completa, llevará una infinidad de otras que darán también cuenta de todas las particularidades reveladas por la experiencia* (*Electricité et optique*, XIV).

En electrostática se define el potencial, el flujo de fuerza, sirviendo de auxiliares los teoremas de Gauss y de Poisson, y se provoca el fenómeno eléctrico por medio del flúido inductor que es como si planteáramos un problema por medio de una ecuación, produciéndose corrientes varias y la distribución de la electricidad, y en este planteo intervienen hipótesis varias; y un fenómeno determinativo de correlación es la polarización de los dieléctricos, y una circunstancia modificada es el corrimiento de los conductores bajo la acción eléctrica. Y a ello se une la acción de los imanes, su constitución, su potencial, el artificio de la hoja magnética y la correspondencia establecida por la inducción magnética, llegándose a las relaciones estudiadas en el electromagnetismo y a su expresión matemática, especialmente por las ecuaciones de Maxwell.

Nuevas relaciones se provocan mediante los solenoides y se llega a introducir el nuevo elemento llamado momento electromagnético y las fuerzas electromotrices de inducción para reducir la teoría a un estudio matemático. Y llegamos a la existencia de los campos eléctrico y magnético, el campo electromagnético, formado por el excitador de Hertz, como en Algebra se define el cuerpo o campo de Galois, de Abel, etc.

La consideración de la luz introduce un nuevo factor en esta teoría que lleva a la teoría electromagnética de la luz, a su polarización rotatoria magnética, la acción de las corrientes, la inducción magnética, etc.

La luz, el magnetismo, la electricidad y el calor radiante constituyen sistemas en movimiento en el medio elástico que llena el Universo, según la teoría dominante, bajo el nombre de éter, que con la materia forma el dualismo físico-químico, a pesar de las tendencias modernas de la desmaterialización, sostenidas por algunos físicos, como M. Le Bon.

En electricidad y magnetismo, predominan las ideas de Faraday y Maxwell con la reciente evolución provocada por Hertz con su movimiento turbillonario y sus célebres oscilaciones eléctricas, tratadas por varios físicos y especialmente por el ilustre matemático E. Poincaré.

La serie de fenómenos que intervinieron en el enfriamiento del globo produjeron las substancias en el estado en que hoy se hallan, formando sistemas en cierto modo de equilibrio, debido a la acumulación de agentes externos, por ejemplo, una roca o un producto volcánico cualquiera. Y en los laboratorios, por medios varios, se modifica dicho estado. Estas operaciones se parecen a los cálculos algebraicos, lo mismo todas cuantas provoque la producción de los campos eléctrico y magnético, las corrientes de inducción, el excitador de Hertz, etc.

Y ciertamente que las consideraciones que exponemos en este capítulo acerca de la Dinámica de la Naturaleza, se hallan incluídas en la moderna teoría, *Principio de relatividad.*

En efecto, vemos en ella una sucesiva generalización de las transformaciones, a partir de la ecuación de la Mecánica clásica, $\frac{d}{dt}(mq) = k$, cuyo dominio, no sólo se refiere a ésta, con inclusión de la teoría de la elasticidad, sino que también se enclava en la Termodinámica de la materia, en estrecha relación con el modo de interpretar el calor. Y hemos de considerar un sistema conveniente de coordenadas que deje invariable dicha ecuación fundamental, teniendo en cuenta la isotropia del espacio, por

lo que podemos pasar de una a otra, de dos ecuaciones cualesquiera, pudiéndonos concretar a la Tierra en relación con las estrellas fijas, y partir del sistema de Galileo, en el cual el centro de gravedad de nuestro sistema solar se halla fijo, en nuestra aspiración a amoldar la teoría a la experiencia, considerando la influencia de la acción de las estrellas fijas y la velocidad $1,.10^6$ cm. seg^{-1} del sistema solar hacia la constelación Hércules, para preguntarnos si existe un único sistema para la Mecánica, y llegamos a la transformación de Galileo consistente en las cuatro ecuaciones $x' = x - vt$, $y' = y$, $z' = z$, y al teorema de la adición de las velocidades, de manera que si existe un sistema de referencia conveniente como fundamento de la Mecánica, subsiste para todas las que se derivan por una transformación de Galileo, teorema fundamental en el principio de relatividad concerniente a la Mecánica, y análogamente a como en la Mecánica son válidas las relaciones de la Electrodinámica. Y la teoría de Maxwell da las ecuaciones vectoriales fundamentales, en las cuales los coeficientes diferenciales del campo vectorial derivan de las coordenadas y del tiempo, de modo que no altera su forma por un corrimiento del punto origen, llegando a la disyuntiva de si existe un sistema especial de coordenadas al que deban referirse las ecuaciones de Maxwell o si hay varios de ellos, cuales son las ecuaciones de transformación, para pasar de los unos a los otros, que desempeñarían igual papel en la Electrodinámica que la transformación de Galileo en la Mecánica clásica.

En el primer caso, tiene un sentido el hablar del movimiento absoluto en el segundo, no, pues los fenómenos se verifican de distinto modo en el caso de reposo que en el de movimiento, careciendo de sentido el hablar de la velocidad como de algo absoluto, llamándose principio de relatividad todo el que establece esto último. Si por ejemplo la hipótesis de Faraday-Maxwell del traslado del campo electromagnético de una base material al espacio vacío, será un sistema de coordenadas señalado, cuando el éter se halla en reposo.

Y respecto a los fundamentos empíricos de la Electrodiná-

mica, diremos que desde que la luz se consideró como fenómeno electromagnético, entre los fenómenos electromagnéticos, se pueden incluir los ópticos, siendo los experimentos más conocidos de esta especie, los relativos a la inducción de las corrientes eléctricas cerradas, en movimiento respecto a los electroimanes u otras corrientes, y citaremos la experiencia de Wilson sobre la influencia de un dieléctrico móvil.

No siendo posible, dentro de la extensión y finalidad de esta obra, tratar de este principio en los fenómenos de aberración, doble refracción, del influjo del movimiento de la Tierra, de la dinámica de los electrones con la distinción de la masa longitudinal y transversal, rayos catódicos, etc., que nos lleva a todas las teorías físicas tales como las de Hertz, Lorentz, Michelson, etcétera, nos fijaremos especialmente en la transformación de Lorentz, cuyas ecuaciones que, conforme al principio de relatividad, derivando de un legítimo sistema, no sólo tienen igual derecho para la transmisión de las fuerzas electromagnéticas en el vacío, sino para todos los hechos físicos, es decir, que todos los sistemas resultantes de tal transformación, son equivalentes; la cinemática de Einstein, fundada en la consideración análoga a la ya indicada en este trabajo por lord Kelvin, de un viajero provisto de un reloj, estableciendo la relación de las velocidades entre los relojes fijo y móvil, en relación con la hipótesis de la contracción de Michelson, que conduce al teorema de la adición de las velocidades que aplica, no sólo a la velocidad de la luz, sino a las acciones físicas de toda especie. Y especialmente insistiremos en la genial concepción del *mundo punto* de Mikowski que permite la representación simbólica de relaciones analíticas entre cuatro variables, resultando como consecuencia para cada punto en función del tiempo, una curva en el mundo, el *mundo línea*, resultando una interesante representación cuadridimensional de la transformación de Lorentz, a saber, que en vez de las hipérbolas representativas en el plano xu, se consideran el espacio hiperbólico de dos hojas $x^2 + y^2 + z^2 - u^2 = -1$ y de una hoja $x^2 + y^2 + z^2 - u^2 = +1$, asintóticos al espacio cónico $x^2 + y^2 + z^2 - u^2 = 0$. Y por construcción del espacio

diametral conjugado a una recta trazada por un punto del espacio hiperbólico de dos hojas, que corta al espacio hiperbólico de una hoja en un elipsoide, se completa la representación geométrica de la transformación de Lorentz, cortando el espacio cónico al mundo en tres partes.

Y como muestra de estas representaciones analíticas que dan una generalidad absoluta a toda clase de relaciones, citaremos la transformación de Lorentz como un giro imaginario, de modo que, por la relación $l - iu = ict$, la expresión

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x^1 + y^2 + z^2 + l^2$$

caracteriza la invariación de la misma.

Una generalización de los vectores y tensores tridimensionales tenemos con los cuadridimensionales, que conduce a un cálculo vectorial (Véase M. Laue, *Das Relativitatsprinzip, Anchang*) con sus cuadrivectores, cuadricorrientes, convection conducción y cuadripotencial. De manera que tenemos el cuadrivector $P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_y^2 + P_t^2}$, donde P_x, P_y, P_z son las componentes reales y P_t la imaginaria, pudiendo ser un vector de la especie espacio o tiempo (*raumartig* o *zeitartig*) a que se aplican las operaciones vectoriales algebraicas y diferenciales; y siendo, en un caso especial, el mundo línea una hipérbola equilátera, este movimiento hiperbólico (*Kyperbelbewegun*, según Born) tiene un especial interés, porque en general es una línea de triple curvatura, la hipérbola curvada (*Krummungshyperbel*) de Minkowski que conduce a un plano osculador (de orden superior al tridimensional), siendo las coordenadas de los extremos de los ejes de la hipérbola $x^2 - u^2 = \xi^2$, $y = \eta$, $z = \zeta$, invariantes en la transformación de Lorentz. Y un cuerpo se mueve como un cuerpo rígido en cada sistema considerado, y se deduce la transformación de Lorentz de la hipótesis de la invariabilidad de la ecuación de la onda.

Y como el principio de relatividad afirma que todas las leyes de la Naturaleza conservan su forma, tenemos que la cuadricorriente coincide con la dirección de la línea-mundo (*Weltlinie*) con la carga eléctrica de un electron, siendo de la especie tiempo

(*zeitartig*), llegándose a la invariancia de las ecuaciones del campo respecto a la transformación de Lorentz (Laue, *Das princ.*, página 78) e igualmente, considerando la densidad de la fuerza ponderomotriz, en todos los sistemas, ésta se conserva en una transformación de Lorentz, y análogamente queda satisfecho el principio de la conservación de la energía, cuando se conserva el significado del vector de Pointing como densidad de la corriente de la energía (*Energie stromung*) y se conserva el impulso de giro electromagnético.

En suma, este estudio sintético de Física comparada que entra de un modo concreto en la teoría de los grupos, tiende a establecer la conformidad de la teoría con la realidad. Y citaremos especialmente el grupo de Lorentz que, haciéndose

$$x' = kl\,(x + \varepsilon t), \quad y' = ly, \quad z' = lz, \quad t' = kl\,(t + \varepsilon x)$$

$$x'' = k'l'\,(x' + \varepsilon' t'), \quad y'' = l'y', \quad z'' = l'z', \quad t'' = k'l'(t' + \varepsilon' x,)$$

$$\text{con } k^{-2} = 1 - 5^2, \quad k'^{-2} = 1 - 5'^2,$$

llega a $\partial x = \varepsilon t$, $\partial y = \partial z = 0$, $\partial t = \varepsilon x$, transformación infinitesimal generatriz del grupo, con lo que Poincaré (*Rendiconti cir. mat. Palermo*, t. XXI, p. 146) llega a obtener las transformaciones infinitesimales del grupo:

1.º Transformación T_0; 2.º, las tres transformaciones T_1, T_2, T_3; 3.º, las tres rotaciones $[T_1, T_2]$, $[T_2, T_1]$, $[T_3, T_1]$, habiéndose hecho, según las rotaciones de Lie, $T_1 = t\frac{d\varphi}{dx} + x\frac{d\varphi}{dt}$, etc.

Así, añadiremos para terminar que, en la Dinámica de los electrones, la teoría de la relatividad se halla conforme con la experiencia, que la entropia, tendiendo siempre a aumentar, el principio de relatividad es válido para todos los sistemas en legítima correspondencia, etc.

Mediante estas indicaciones, vemos cómo los físicos han pretendido constantemente subordinar y armonizar la experiencia con fórmulas comprensivas de todos ellos, buscando siempre la perfecta concordancia de estos dos órdenes, ideal y real. Todo lo cual constituye la materia de una vasta literatura,

cuyo índice se encuentra en la obra citada en este resumen del Dr. M. Laue, *Das relativitasprinzip*. Pero, en dirección opuesta, los matemáticos han buscado esta correspondencia armónica, empleando los nuevos recursos de las recientes teorías constitutivas del moderno cálculo funcional, cuyo núcleo se halla en las ecuaciones integrales, cuyo *sustratum* o fondo se halla en el cálculo funcional, generalización de la teoría de variaciones de Lagrange. Y la Matemática, con los amplios recursos de los hiperespacios y de las funciones de líneas, que permiten el empleo de funciones dependientes de infinidad de parámetros y de sistemas de ecuaciones en número infinito, hace frente victoriosamente, con estas fecundas ideas, a la variedad también infinita de la Naturaleza que dispone a su vez de infinidad de parámetros, como agentes ocultos, burladores constantes de las leyes teóricas por su omisión unas veces y otras por su complejidad. Y la labor del matemático, constantemente tiende a hacer explícitos estos detalles objetivos, para incluirlos nuevamente en sus leyes teóricas por nuevas expansiones de las ideas que correspondan a la riqueza exuberante de la realidad.

REPRESENTACIONES

Las representaciones son o imágenes como la superficie de Riemann, la representación conforme, esférica, etc., o consisten en transformaciones de un objeto o sistema por otro que, en su mayor generalidad, es la de una teoría o ciencia por el orden objetivo de los fenómenos.

La estereoquímica da representaciones en el espacio de la constitución molecular. Conocida ésta en cuanto se refiere a los enlaces entre los átomos, se ha tratado de obtener la configuración que producen éstos, como si la molécula fuese un edificio próximamente rígido de forma definible, esto es, se ha tratado

de dibujar un modelo de tres dimensiones, indicando la posición de los átomos en la molécula.

Poincaré, en su obra *Electricité et optique*, materializa por una imagen hidrostática los corrimientos del flúido eléctrico y del flúido inductor en una corriente instantánea, así como el efecto de la elasticidad del flúido inductor.

Tenemos otras representaciones, mediante la consideración de las geometrías no euclídeas o los hiperespacios, extensión inmediata de las representaciones geométricas de las relaciones analíticas. Por esta razón, la Matemática se prepara con el fin de obtener con estas representaciones un amplio fondo, comenzando por la Geometría euclídea de cuatro dimensiones que ya es la representación del concepto del *mundo entero* de Minkowski, basado en el *punto del mundo*.

Con tal objeto, M. Borel desarrolla una Geometría hiperbólica de tres dimensiones en su obra *Introduction géométrique a quelques théories physiques*, en la que los puntos en el infinito de los ejes *Ox*, *Oy* juegan el papel de los puntos cíclicos *I*, *J* de la Geometría ordinaria, lo que permite el movimiento hiperbólico o resbalamiento de las cónicas sobre sí mismas, que aplica a la teoría física de la relatividad, considerando, según la idea de Minkowski, un fenómeno dependiente de los dos números x, t, constituído por la presencia, en el instante t, de un punto móvil M de una recta fija (Δ), cuyo origen y sentido de recorrido se ha elegido de manera que constituya un suceso de la historia de la recta (Δ), idea también expuesta por el Sr. Volterra en su tercera lección de *Lectures of Clark University* (1912) al distinguir las mecánicas de la *heredabilidad* y de la *no heredabilidad* (*hérédité el non hérédité*), de modo que la Mecánica de la heredabilidad es aquélla en la cual cada acción deja una herencia en el sistema, dependiendo el estado actual de toda la historia precedente, mientras que en el otro caso sólo depende del estado actual y del infinitamente próximo que precede, de lo cual trataron también los Sres. Picard y Painlevé (*Rivista de Scienza*, vol. 1 y *De la méthode dans les Sciences*), determinándose los coeficientes de heredabilidad por la comparación de las fórmu-

las generales con los resultados de la observación, siendo la concepción de las funciones que dependen de todos los valores de otras funciones, de utilidad fundamental en los métodos empleados para las ecuaciones integrales e integro-diferenciales.

Respecto a las relaciones o representaciones teóricas de los hechos, citaremos, en primer término, la ley de Hooke (1678), *ut tensio sic vis* que explicó los movimientos vibratorios de los cuerpos por la proporcionalidad de las dilataciones o contracciones a los esfuerzos, que conduce a ecuaciones diferenciales lineales, porque establece una relación lineal entre el *strain* y el *stress*.

Como ejemplo de las representaciones de que tratamos, observaremos que, para abarcar el mundo de Minkowski, hay que considerar el espacio de cuatro dimensiones, y esta dificultad se salva considerando con Helmholtz y Clifford un ser infinitamente aplanado que habita un espacio de dos dimensiones, para el cual el mundo de Minkowski sería de tres y para un ser de una sola dimensión, el mundo de Minkowski sería de dos. Y el modo de complicarse el fenómeno de la propagación de las ondas por la supresión de una de las dimensiones del espacio, se halla explicada en la primera conferencia del Sr. Volterra, mediante el cono, superficie característica de la ecuación diferencial que tan importante papel desempeña en la teoría de la relatividad y especialmente en la propagación de las discontinuidades.

Uno de los ejemplos, muy útiles de estas transformaciones, consiste, en reemplazar masas reales por masas situadas en puntos imaginarios y la aplicación del método de las imágenes de Laplace a las ecuaciones del tipo hiperbólico, de modo que, reemplazando la métrica individualizada por el elemento lineal $dx^2 + dy^2 + dz^2$ en la métrica individualizada por el elemento lineal $dt^2 - dx^2 - dy^2$, las imágenes relativas a esferas, se reducen a imágenes respecto a hiperboloides equiláteros que da una base para una teoría con relación a las ondas (Volterra, obra citada, p. 22).

Un orden de representaciones muy generalizado y útil, en

las teorías físico-químicas, es el de las analogías como se observa entre la primera hidrostática de Maxwell y la teoría de la conductibilidad del calor, reemplazando el flujo del calor por el flujo eléctrico, existiendo una analogía analítica entre ciertos problemas relativos a la conductibilidad del calor y ciertos problemas de electrostática (P. Duhem, *Les théories électriques de J. Clerk Maxwell*, p. 49), así como la teoría de los medios dieléctricos, construída por analogía con la teoría de la conducción del calor. Y Maxwell, en su *Traité élémentaire d' Electricité*, página 64, insiste en la analogía de las ecuaciones de su electrostática con las de la teoría de la conductibilidad del calor. Citaremos además, la analogía hidrodinámica que había facilitado a Fourier el sistema de símbolos matemáticos, por el cual había representado el calor por conductibilidad. Y en cuanto a las transformaciones de Lorentz, consistentes en poderse imprimir a todo un sistema una traslación común, lo que equivale a que las ecuaciones de un medio electromagnético no se alteran por dichas transformaciones, permite considerar dos sistemas, el uno inmóvil y el otro en traslación, imágenes el uno del otro.

Otra analogía señalaremos, observando que la teoría electromagnética de la luz exige igualdad de leyes de la propagación en un dieléctrico no conductor y en un sólido elástico no compresible. Y Maxwell, en su tercera teoría electrostática, al concluir que: en un medio continuo, las componentes del flujo total verifican la misma relación que las componentes del flujo en un líquido incompresible y aun en la superficie de separación de dos medios diferentes, el flujo total no experimenta ningún cambio brusco ni en magnitud ni en dirección, la halló favorable a sus ideas sobre la teoría electromagnética de la luz, llegando a que *los movimientos de la electricidad son semejantes a los de un flúido incompresible*, así como Kirchhoff, al obtener la velocidad de propagación de una onda eléctrica, muy próxima a la de la luz en el vacío, reveló una analogía íntima entre las dos teorías. Y el Sr. Volterra, en sus *Lectures* (p. 4), al traducir la variación de una integral triple por la suma de tres términos respectivamente dependientes de la variación de la función V,

de la de un trabajo empleado en el corrimiento y rotación de las partículas del medio, en otro trabajo empleado en la deformación del medio, llega a incluir en ella la teoría de Maxwell como caso particular. Este ilustre profesor trata varias de estas analogías en dichas lecciones, refiriéndose a las ecuaciones dependientes del cálculo de variaciones que corresponden al teorema de Green y a las interpretaciones físicas de los resultados analíticos; y, por efecto de la infinidad de correlaciones mediante las cuales pueden sustituirse unos sistemas por otros; en virtud de la coexistencia de complejidades mayores o menores que pueda abarcar nuestra inteligencia, es cierto que, según Poincaré, cuando existe una explicación mecánica de un fenómeno, existe una infinidad, según recuerda el Sr. Volterra al referirse a sus propias interpretaciones que constituyen su admirable labor; y porque según hemos manifestado en muchas ocasiones, no sólo el mundo de la matemática pura, sino el de sus irradiaciones hacia el mundo externo, cuyo modo de ser siempre queda envuelto en las formas matemáticas que lo expresan, conforme a tal o cual punto de vista constitutivo de cada teoría, no es más que un abundante conjunto de correlaciones armoniosas. Así, por ejemplo, la doble ecuación de Laplace juega un papel importante en la teoría de la elasticidad, y con la representación conforme de tan universal aplicación a la Física matemática, y fijándonos en la discusión de Poincaré (*Rendiconti del Circolo matematico de Palermo*, t. XXI, págs. 151-158) establece el acuerdo de la hipótesis de Abraham y de Lorentz (*) (en las transformaciones de Lorentz el electron real en movimiento es reemplazado por un electron real en movimiento y en la de Abraham los electrones son esféricos e indeformables) estableciendo la condición de *añadir un potencial suplementario proporcional al volumen del electron* (Idem, pág. 158). Y también, al admitir que la propagación de la gravitación, función del éter, se verifica con la velocidad de la luz, hay que referir estas funciones a otras funciones del flúido y tendríamos en la

(*) Poincaré demuestra que la hipótesis de Lorentz (postulado de la relatividad) es la única compatible con la imposibilidad de hacer evidente el movimiento absoluto.

ley de la gravitación y en las leyes electromotrices un número común que sería la velocidad de la luz, análogamente a lo que ocurre, comparando el sistema de Tolomeo que admite para todos los planetas recorridos al mismo tiempo, uno de los dos círculos, epiciclo o deferente y el de Copérnico que, al cambiar los ejes de coordenadas mirados como fijos, anula el *lazo misterioso* de los planetas, de modo que cada planeta describe un sólo círculo, quedando independientes entre sí las duraciones de sus revoluciones (Idem. p. 131). Y, análogamente, gracias a la transformación de Lorentz, al suponerse un electron animado de una traslación rectilínea y uniforme, se podría reducir el estudio del campo determinado por este electron, al caso en que se hallaría inmóvil.

Citaremos, por último, las tres representaciones o imágenes que presenta Schwolson (*Traité de Physique*, t. IV, págs. 6-14), la *A*, correspondiente a la consideración de dos electricidades, o dos substancias que actúan a distancia, la *B* (1870-1900) que explica los fenómenos eléctricos y magnéticos de las propiedades del éter, iniciada por Faraday y continuada por Maxwell, y la imagen *C*, llamada teoría de los electrones, que permiten, según las circunstancias, facilitar la explicación de los fenómenos, observando además que en sus primeros capítulos, en los cuales se consideran los fenómenos eléctricos más sencillos, emplea simultáneamente las imágenes *A* y *B*, con objeto de auxiliar al lector, acostumbrado a la imagen *A*; porque éste necesita que se le explique la imagen *B* y sus ventajas sobre la *A*, añadiendo que vivimos en un período de transición y de reconstitución, pues *el antiguo edificio se ha desmoronado y se trabaja en el nuevo*, presentando la parte teórica del estudio de los fenómenos, frente algo de inacabado, vacilante y alterable.

FORMULARIO

Lagrange (p. 152-54).—*Eliminación de constantes.*

1.° $\left.\begin{matrix} y+ax+b=0 \\ y'+a=0 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} y-xy'+b=0 \\ y+ax+b=0 \end{matrix} \left\{\begin{matrix} \text{si } b=a^2 \\ y+ax+a^2=0 \end{matrix}\right.$

$$\left\{\begin{matrix} y-xy'+y'^2=0 & (\alpha) \text{ derivada.} \\ y+ax+a^2=0 & (\beta) \text{ primitiva.} \end{matrix}\right.$$

2.° $x^2-2ay-a^2-b=0 \left\{ a=\dfrac{x}{y'} \text{ Sustituyendo,} \right.$

(derivada) $x-ay'=0 \left\{ x^2-\dfrac{2xy'}{y'}-\dfrac{x^2}{y'^2}-b=0 \right.$

$$\left\{\begin{matrix} (x^2-b)\,y'^2-2xyy'-x^2=0 \\ y'\sqrt{x^2+y^2-b}-yy'-x=0 \end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix} y'^2\,(x^2+y^2-b)=(yy'+x)^2 \\ x^2-2ay-a^2-b=0 \text{ prim.ª} \end{matrix}\right.$$

$$(1)\quad \left.\begin{matrix} x-ay'=0 \\ 1-ay''=0 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} x-\dfrac{y'}{y''}=0,\ x\eta''-\eta'=0 \\ a=\dfrac{1}{y''} \end{matrix} \quad \left\{ x^2-2ay-a^2-b=0 \right.$$

También $\left\{\begin{matrix} y'\sqrt{x^2+y^2-b}-yy'-x=0 & (2) \\ y''\sqrt{\qquad}+\dfrac{y'\,(x+yy')}{\sqrt{\qquad}}-yy''-y'^2-1=0 \end{matrix}\right.$

$$\left\{\begin{matrix} \dfrac{y''\,(yy'+x)}{y'}+\dfrac{y'\,(x+yy')}{\sqrt{x^2+y^2-b}}-yy''-y'^2-1=0 \\ \dfrac{y''\,(yy'+x)}{y'}+y'^2-yy''-y'^2-1=0 \end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix} \dfrac{y''x}{y'}-1=0 \\ y''x-y'=0 \end{matrix}\right.$$

Esta ecuación tiene por primitivas de primer orden la (1) y la (2). Resuelta la (β) respecto a, da

$$(3)\quad 2a = -x + \sqrt{x^2 - 4y} \left\{ -1 + \frac{x - 2y'}{\sqrt{x^2 - 4y}} = 0 \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 2y' - \sqrt{x^2 - 4y} = 0 \\ \text{que coincide con (3)} \end{array} \right.$$

3.° $x^2 - 2ay - a^2 - b = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} x - ay' = 0 \\ a = \dfrac{x}{y'} \end{array} \right.$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{derivando} \\ \dfrac{1}{y'} - \dfrac{xy''}{y'^2} \end{array} \right\} y' - xy'' = 0$

eliminando b

Principiando por eliminar a $\left\{ \begin{array}{l} x^2 - \dfrac{2xy}{y'} - \dfrac{x^2}{y'^2} - b = 0 \\ x - \dfrac{y}{y'} - x + \dfrac{xyy''}{y'^2} - \dfrac{x}{y'^2} + \dfrac{x^2 y''}{y'^3} = 0 \end{array} \right.$

que se reduce a $\left(\dfrac{xy''}{y'} - 1 \right) \left(\dfrac{y}{y'} + \dfrac{x}{y'^2} \right) = 0$

$\left\{ \begin{array}{l} xy'' - y' = 0 \\ y + \dfrac{x}{y'} = 0 \end{array} \right.$ $\left\{ \begin{array}{l} y' = -x : y \\ x^2 - b + 2y^2 - y^2 = 0 \end{array} \right.$ $\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 - b = 0 \\ \text{ec prim.ª singular.} \end{array} \right.$

Ecuaciones derivadas, funciones arbitrarias.

$$f(x+h) = fh + if\,h + \ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} y = fx \\ h = -x \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} fx = y \\ f'x = y' \end{array} \right., \ldots \quad y^0 = y - xy' + \frac{x^2}{2} y'' - \ldots$$

$$fx = y, f'x = y', \ldots \quad \left\{ y^{0'} = y' - xy'' + \frac{x^2}{2} y''' - \ldots ; \right.$$

$$y^{0''} = y'' - xy''' + \frac{x}{2.3} y^{v} + \ldots$$

$$y^0 = y - xy' + \frac{x^2}{2} y'' - \ldots \quad y^{0'} = y' - xy'' + \frac{x^2}{2} y''' - \ldots$$

$\left\{ \right.$ dos ecuaciones en x, y, y' con constantes arbitrarias $y^0, y^{0'}$.

$$4.^{\circ} \quad y - xy' + \frac{x^2}{2} y'' - (y' - xy'')^2 - y''^2 = 0;$$

La primitiva es $y - \frac{a}{2} x^2 - bx - a^2 - b^2 = 0$

$$y + \left(\frac{a}{2} - a^2\right) x^2 - (1 - 2a)\, xy' - a^2 - y^2 = 0$$

$$y - \frac{(b + y')x}{2} - \frac{(b - y')^2}{x^2} - b^2 = 0.$$

Derivando la primera

$$\left(\frac{1}{2} - 2a\right) x^2 + 2xy' - 2a = 0, \quad a = \frac{x^2 + 4xy'}{4(1 + x^2)}$$

$$y - xy' - y'^2 + \frac{(4xy' + x^2)^2}{16(1 + x^2} = 0.$$

La 2.ª ec. $da \frac{x}{2} + \frac{2(b - y')}{x^2} + 2b = 0$

$$a = \frac{4y^2 - x^3}{4(1 + x^2)}, \quad y - \frac{xy'}{2} - \frac{y'^2}{x^2} + \frac{(4y' - x^3)^2}{16x^2(1 + x^2)} = 0.$$

Las dos ecuaciones se reducen a

$$(1 + x^2)\, y = \left(x + \frac{x^3}{2}\right) y' \qquad y'^2 + \frac{x^4}{16} = 0.$$

Lacroix t. I. 231.—Sea $z = f(ax + by)$ (f función desconocida). Hagamos $z = f(t)$, resulta

$$dz = f'(t)\, dt \quad \begin{cases} \frac{dz}{dx} = f'(t) \frac{dt}{dx} & \left| \frac{dz}{dx} = f'(t)\, a \right. \\ \frac{dz}{dy} = f'(t) \frac{dt}{dy} & \left| \frac{dz}{dy} = f'(t)\, b \right. \end{cases}$$

$$\text{Eliminando } f'(t), \quad b \frac{dz}{dx} - a \frac{dz}{dy} = 0, \qquad (1)$$

ecuación que se verifica para todos los valores de z que nacen de las diversas formas de f. Por ejemplo:

$$z = (ax + by)^n, \quad z = e^{ax + by}, \quad z = \text{sen } (ax + by), \text{ etc.}$$

Dicha ecuación contiene el carácter propio para reconocer si una expresión propuesta es una función de $ax + by$ o no, es decir, si esta expresión, que comprende a la vez xy, puede o no, convertirse en otra que solo contenga la variable t, cuando se hace $ax + by = t$.

Ejemplo: $a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2$; sustituyendo las derivadas parciales en (1) se tiene $a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 = (ay + by)^2$.

Cuando se trata de ecuaciones de derivadas parciales, aumenta el número de indeterminadas.

Sea $z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)$ $\left\{ \frac{y}{x} = u,\ d\varphi u = \varphi'(u)du, d\psi(u) = \psi'(u)du \right.$

$$p = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{-y}{x^2} + \psi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{-y}{x^2},$$

$$q = x\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x} + \psi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x} \quad \text{que se reducen a}$$

$$p = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^2}\psi'\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$q = \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x}\psi'\left(\frac{y}{x}\right) \left\{ px + py = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \right. \qquad (1)$$

$$p + xr + ys = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{-y}{x^2},$$

$$xs + q + yt = x\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x} \left\{ px + qy + x^2r + 2xys + y^2t = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \right.$$

que la ecuación (1) reduce a

$$x^2r + 2xys + y^2t = 0 \quad \text{ó} \quad x^2\frac{d^2z}{dx^2} + 2xy\frac{d^2z}{dxdy} + y^2\frac{d^2z}{dy^2} = 0$$

Sea $z = \varphi(x+y) + xy\psi(x+y)$ $\left\{ d\varphi(u) = \varphi'(u)\,du, \right.$

$$d\varphi'(u) = \varphi''(u)\,du, \quad d\psi(v) = \psi'(v)\,dv, \ \ldots$$

$$z = \varphi + xy\psi, \quad p = \varphi' + xy\psi' + y\psi, \quad q = \varphi' - xy\psi' + x\psi,$$

$$r = \varphi'' + xy\psi'' + 2y\psi', \quad s = \varphi'' - xy\psi'' + (x-y)\psi' + \psi,$$

$$t = \varphi'' + xy\psi'' - 2x\psi' \quad \left| p - q = 2xy\psi' + (y-x)\psi \right. \qquad (1)$$

$$r - t = 2(y+x)\psi', \ (2) \quad r - 2s + t = 4xy\psi'' + 4(y-x)\psi' - 2\psi'' \ (3)$$

Falta eliminar ψ, ψ' ψ'' entre las ecuaciones (1), (2), (3).

Número de ecuaciones y orden.—Una ecuación de tres variables, de dos, ecuaciones de primer orden, tres de segundo y de orden

$$n \mid 1 + 2... + n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Pero cada diferenciación introduce una nueva función arbitraria, aumentando así el número de incógnitas. Este número será $m(n+1)$ en el n^{simo} orden para que la eliminación sea posible será necesario que $m(n+1)\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]$, $2m\,[n+2, n]\,2m-2$.

Será necesario derivar hasta el orden $2m-1$, quedarán

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - m(n-1) \text{ ecuaciones.}$$

Si solo hay una variable independiente después de derivar la integral n veces tendremos $h = n+1$ ecuaciones y derivando $n-m$ veces la ecuación derivada de orden m el número de ecuaciones será $h' = n-m+1$ lo que da $h-h' = m$. Será necesario, pues, un número m y por consiguiente constante de cantidades arbitrarias en la ecuación primitiva; y solo se tendrá que eliminar estas m constantes entre la integral y sus derivadas, porque las derivaciones solo pueden anular las que no están multiplicadas por ninguna variable y nunca introducir otras nuevas. Pero cuando se trata de ecuaciones de derivadas parciales, $h-h'$ va aumentando y su expresión está dada por $m(n+1) - \frac{m(m-1)}{2}$ que crece al infinito con n. (T. E. D. pág. 415).

Monge. $Pdp + Qdq = 0$, $P\left(\frac{dp}{d\alpha}\right) + Q\left(\frac{dq}{d\alpha}\right) = 0$,

$$dz = pdx + qdy \quad \left\{ \frac{dp}{d\alpha}dx + \frac{dq}{d\alpha}dy = 0 \right.$$

y eliminando $\frac{dp}{d\alpha}$, $\frac{dq}{d\alpha}$, se obtiene la ecuación de la característica

$$Pdy - Qdx = 0$$

$y = ax + \alpha$ (ecuación planos paralelos);

$\frac{dy}{dx} = a$, sustituído en $\frac{dy^2}{dx^2}[(1 + q^2)\, s - pqt] + \ldots = 0$

da $a^2, (1 + q^2)\, s - [pq_1] + \frac{dx}{dx}[(1 + q^2)\, r - (1 + p^2)t] - = 0$

ordenando $(r + as)\,[a\,(1 + q^2) + pq] = (s + at)\,[1 + p^2 + apq]$

ó $(r + as)\, M - (s + at)\, N = 0$ (1)

Diferenciando respecto r, s, t, y llamando R, S, T los coeficientes respectivos de las diferenciales de estas tres cantidades, obtenemos

$$R = M, \quad S = aM - N, \quad T = -aN$$

$$Mdy^2 - (aM - N)\, dxdy - aNdx^2 = 0$$

ó $(dy - adx)\,(Mdy + Ndx) = 0$ ec. de la caract.

$dy - adx = 0$, $Mdy + Ndy = 0$

$[a\,(1 + q^2) + pq]\, dp - (1 + p^2 + apq)\, dq = 0$

ó $(1 + p^2 + q^2)\,(adp - dq) - (ap - q) \times (pdp + qdq) = 0$. Las integrales de la característica, son

$$y - ax = \varphi\left(\frac{ap - q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\right) \quad (a)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{ap - q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \alpha \\ y - ax = \alpha' \end{array}\right\}$$

Las fórmulas suplidas en la página 33 son

$$x^2 + y^2 + z - \frac{M^2}{h^2} = \psi^2\,(x^2 + y^2 + z^2), \qquad M = h\psi\,(x^2 + y^2 + z^2)$$

ó $$\alpha x + y\varphi + z = \sqrt{1 + \alpha^2 + \varphi^2}\,\psi\,(x^2 + y^2 + z^2) \qquad (1)$$

$$x + y\varphi = \frac{M(a + \varphi\varphi')}{1 + \alpha^2 + \varphi^2}, \quad x + y\varphi' = \frac{(\alpha + \varphi\varphi')\,\psi\,(x^2 + y^2 + z^2)}{\sqrt{1 + \alpha^2 + \varphi^2}} \quad (2)$$

La superficie es el resultado de eliminar α entre (1) y (2).

Factor integrante. $u = y - cx = 0$, $du = dy - cdx = 0$ } no integrable. $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{y}{x} = c \\ \dfrac{xdy - ydx}{x^2} = 0 \end{array}\right.$

$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{1}{x^2} = \frac{\partial N}{\partial y}$ se ha restituido el factor $\frac{1}{x^2}$

Ejemplo. (1) $dy + Pydx = Qdx$ $\left\{ \begin{array}{l} M = Py - Q \\ N = 1 \end{array} \right.$

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \text{ de donde } z = e^{\int P dx}$$

Multiplicando (1) por $e^{\int P dx}$

obtenemos $e^{\int p dx}\, dy + (Py - Q)\, e^{\int P dx}\, dx = 0$

e integrando $e^{\int p dx}\, dy$ respecto de y,

$$u = ye^{\int P dx} + X \quad \left\{ \frac{d.\, ye^{\int P dx}}{dx} + \frac{\partial X}{\partial x} = (Py - Q)\, e^{\int P dx} \right.$$

resultando: $\dfrac{\partial X}{\partial x} = -e^{\int P dx} Q, \qquad X = -e^{\int P dx} Qdx$

luego $ye^{\int P dx} - \int e^{\int P dx} Qdx = C$ ó $y = e^{-\int P dx}\left(\int e^{\int P dx} Qdx + C\right)$

Ejemplo. $\alpha ydx + \beta xdy = x^m y^n (\gamma ydx + \delta xdy)$

multiplicando el 1.er miembro por $\dfrac{1}{xy}$ $\left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\alpha ydx}{xy} + \dfrac{\beta xdy}{xy} \\ u = \alpha lx + \beta ly = l(x^\alpha y^\beta) \end{array} \right\} \quad z\varphi(u) = \dfrac{1}{xy}\, \varphi(x^\alpha y^\beta)$

muliiplicando el 2.º miembro por $1 : x^{m+1} y^{n+1}$, se tiene

$$\frac{x^m y^n}{u^{m+1} y^{n+1}} (\gamma ydx + \delta xdy) \quad \left\{ \begin{array}{l} z_1 = \dfrac{1}{x^{m+1} y^{n+1}} \\ z_1 \varphi_1(u_1) = \dfrac{1}{x^{m+1} y^{n+1}}\, \varphi_1(x^\gamma y^\delta) \end{array} \right.$$

Para hacer idénticas $z\varphi(u)$, $z_1 \varphi_1(u)$, será $\left\{ \begin{array}{l} \varphi(x^\alpha y^\beta) = x^{k\alpha} y^{k\beta} \\ \varphi_1(x^\gamma y^\delta) = x^{k'\gamma} y^{k'\delta} \end{array} \right\}$ e identificado, resulta

$$x^{k\alpha - 1} y^{k\beta - 1} = x^{k' - m - 1} y^{k'\delta - n - 1} \left\{ \begin{array}{l} k\alpha - 1 = k'\gamma - m - 1 \\ k\beta - 1 = k'\delta - n - 1 \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} k = \frac{\gamma n - \delta m}{\alpha\delta - \beta\gamma}, \qquad k' = \frac{\alpha n - \alpha m}{\alpha\delta - \beta\gamma}$$

El factor integrante será $x^{\frac{(\gamma n-\delta m)\alpha}{\alpha\delta-\beta\gamma}-1}\ y^{\frac{(\gamma n-\delta m)\beta}{\alpha\delta-\beta\gamma}-1}$

Multiplicando el primer miembro de la propuesta por $x^{k\alpha-1}\ y^{k\beta-1}$ y el segundo por $x^{k'\gamma-m-1}\ y^{k'\delta-n-1}$, se cambia en

$$x^{k\alpha-1}\ y^{k\beta-1}(\alpha y dx+\beta x dy)=x^{k'\gamma-1}\ y^{k'\delta-1}(\gamma y dx+\delta x dy)$$

cuya integral es

$$\frac{1}{k}x^{k\alpha}\ y^{k\beta}=\frac{1}{k'}x^{k'\gamma}\ y^{k'\delta}+C.\quad \text{Si } k=0;\ l(x^{\alpha}\ y^{\beta})=\frac{1}{k'}x^{k'\gamma}\ y^{k'\delta}+C$$

Ecuaciones primitivas singulares.

1.° Sea $y-\frac{a}{2}x^2-bx-a^2-b^2=0\quad y'-ax-b=0$

y su derivada $y'-ax-b=0$.

Eliminando sucesivamente a y b, resulta

$$y+\left(\frac{a}{2}-a^2\right)x^2-(1-2a)\,xy'-a^2-y'^2=0$$

$$y-\frac{(b+y')x}{2}-\frac{(b-y')^2}{x^2}-b^2=0$$

Derivando la primera respecto de a, se tiene

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{2}-2a\right)x^2+2xy'-2a=0\\ a=\dfrac{x^2+4xy'}{4(1+x^2)}\end{cases}$$

Derivando la segunda ecuación respecto a b, se tiene

$$\frac{x}{2}+\frac{2(b-y')}{x^2}+2b=0,\qquad b=\frac{4y'-x^3}{4(1+x^2)}$$

Y sustituyendo los valores de a y b;

$$\begin{cases}y-xy'-y'^2+\dfrac{(4xy'+x^2)^2}{16(1+x^2)}=0\\ y-\dfrac{xy'}{2}-\dfrac{y'^2}{x^2}+\dfrac{(4y'-x^3)^2}{16x^2(1+x^2)}=0\end{cases}$$

que se reducen a

$$(1+x^2)y-\left(x+\frac{x^3}{2}\right)y'-y'^2+\frac{x^4}{16}=0 \text{ (prim.ª sing.)}$$

También, eliminando a, b, b' entre

$$\begin{cases} y-\frac{a}{2}x^2-bx-a^2-b^2=0, & y'-ax-b=0 \\ \frac{x^2}{2}-2a+(x-2b)b'=0, & x+b=0 \end{cases}$$

se tiene: $\frac{x^2}{2}-2a-(x-2b)x=0$

$$a=\frac{x^2+4xy'}{4(1+x^2)},\ b=\frac{4y'-x^3}{4(1+x^2)} \Bigg\} y(1+x^2)+\frac{x^4}{16}-\left(\frac{x^3}{2}+x\right)y'-y'^2=0$$

2.° $x^2-2ay-a^2-b=0$, $x-ay'=0$, eliminando a, derivando, transformando y volviendo a derivar, se tiene

$$x^2-\frac{2xy}{y'}-\frac{x^2}{y'^2}-b=0;\ x-\frac{y}{y'}-x+\frac{xyy''}{y'^2}-\frac{x}{y'^2}+\frac{x^2y''}{y'^3}=0;$$

$$\left(\frac{y}{y'}+\frac{x}{y'^2}\right)\left(\frac{xy''}{y'}-1\right)=0 \qquad \left(\frac{1}{y'}-\frac{xy''}{y'^2}\right)\left(y+\frac{x}{y'}\right)=0$$

el factor $y+\frac{x}{y'}=0$ da $y'=-\frac{x}{y}$, y sustituyendo en la ecuación de primer orden, da

$$x^2+2y^2-y^2-b=0 \quad \text{o} \quad x^2+y^2-b=0$$

Pero $0=\frac{1}{y'}-\frac{xy''}{y'^2}=\left(\frac{x}{y'}\right)'$ da $\begin{cases} \frac{x}{y'}=a \\ \end{cases}$ $\begin{cases} x^2=2ay+c \\ y=\frac{x^2-c}{2a} \end{cases}$

Tenemos $\begin{cases} x^2-\frac{2xy}{y'}-\frac{x^2}{y'^2}-b=0 \\ x^2-b-x^2+c-a^2=0 \end{cases}$ $\begin{cases} c=a^2+b & (\alpha) \\ x^2=2ay+a^2+b & (\beta) \end{cases}$

Y siendo la propuesta de primer orden, solo puede tener una constante arbitraria. Debe existir pues, una relación entre las dos arbitrarias que se obtienen, sustituyendo en la propuesta los valores de y e y' sacados de las ecuaciones primitivas obtenidas. Estos va-

lores son $\frac{x^2 - c}{2a}$ y $\frac{x}{a}$; y se tendrán las ecuaciones (α) y (β), de modo que la ecuación primitiva será la (β).

3.º Sea $y''^2 - \frac{2y'y''}{x} + 1 = 0$ (1) cuya primitiva de primer orden es $x^2 - 2ay' + a^2 = 0$

Tenemos $-y' + a = 0$; $a = y'$ $\begin{cases} x^2 - 2ay' + a^2 = 0 \\ x^2 - 2y'^2 + y'^2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - y'^2 = 0 \\ y' = \pm x \end{cases}$

solución singular.

Además, la derivada de (1) es $2\left(y'' - \frac{y'}{x}\right)y''' - \frac{2y''^2}{x} + \frac{2y'y''}{x^2} = 0$,

que puede escribirse: $2\left(y'' - \frac{y'}{x}\right)\left(y''' - \frac{y''}{x}\right) = 0$

$$y'' - \frac{y'}{x} = 0; \quad y'' = \frac{y'}{x}.$$

Sustituyendo en (1): $-\frac{y'^2}{x^2} + 1 = 0 \qquad x^2 - y'^2 = 0;$

El otro factor dará la ecuación de tercer orden

$y''' - \frac{y''}{a} = 0$ o $\frac{y''}{x} = \frac{1}{a}$, $y'' = \frac{x}{a}$. Y sustituyendo en la propuesta: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{2y'}{a} + 1 = 0$ o $x^2 - 2ay' + a^2 = 0$ (*ec* prim.ª)

Observaciones generales.—Ampère.—Si se tiene el sistema

$$\left.\begin{cases} z = \alpha\sqrt{x^2 - b^2} + (2\varphi\alpha - \alpha\varphi'\alpha)\,x \\ y = \dfrac{\sqrt{x^2 - b^2} + x\varphi'\alpha}{\alpha} \end{cases}\right\} \text{ se obtendrá}$$

$$p = \frac{ax}{\sqrt{x^2 - b^2}} + 2\varphi\alpha - \alpha\varphi'\alpha + \left[\sqrt{x^2 - b^2} + (\varphi'\alpha - \alpha\varphi''\alpha)x\right]\frac{d\alpha}{dx}$$

$$q = \left[\sqrt{x^2 - b^2} + (\varphi'\alpha - \alpha\varphi''x)\right]\frac{dy}{d\alpha}$$

$$o = \frac{x}{\alpha\sqrt{x^2 - b^2}} + \frac{\varphi'\alpha}{\alpha} + \frac{\alpha x\,\varphi''\alpha - \sqrt{x^2 - b^2} - x\varphi'\alpha}{\alpha^2}\frac{d\alpha}{dx}$$

$$1 = \frac{\alpha x \varphi''\alpha - \sqrt{x^2 - b^2} - x\varphi'\alpha}{\alpha^2} \frac{d\alpha}{dy} \qquad \text{Así:}$$

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{\dfrac{\alpha x}{\sqrt{x^2 - b^2}} + \alpha\varphi'\alpha}{\sqrt{x^2 - b^2} + x\,(\varphi'\alpha - \alpha\varphi''\alpha)},$$

$$\frac{d\alpha}{dy} = -\frac{\alpha^2}{\sqrt{x^2 - b^2} + x(\varphi'\alpha - \alpha\varphi''\alpha)}$$

$p = \dfrac{2\alpha x}{\sqrt{x^2 - b^2}} + 2\varphi\alpha, \quad q = -\alpha^2$ (p y q no contienen ninguna nueva función arbitraria.

Ampère - Imschenetski. — Sea $z_{\prime\prime} - mz'' = 0$ (1). Su integral general puede representarse por

(2) $\quad z = \varphi(\alpha) + \psi(\beta), \qquad \alpha = x + y\sqrt{m}, \qquad \beta = x - y\sqrt{m};$

eliminando, se tiene: (3) $\quad z = \varphi(x + y\sqrt{m}) + \psi(x - y\sqrt{m}).$

El valor de z satisface a (1) y a todas las ecuaciones de la forma

$$z^{(i)}_{k+2} - mz^{(i+2)}_{k} = 0 \qquad (4)$$

La ecuación (3) no da relaciones distintas de las que da la (4). Representa pues es la integral general de la (1).

La ecuación $z = a + bx + cy + hx^2 + gxy + mhy^2$ satisface a (1) y a todas sus consecuencias (4); pero satisface además a otras relaciones, pues todas sus derivadas, a partir del tercer orden son iguales entre sí por reducirse a cero. Esta ecuación es por tanto una integral particular de la (1).

Monge.—Diferenciales parciales de segundo orden.—En la ecuación de las líneas de curvatura

$$dy^2[(1 + q^2)(s - pqt) + dx\,dy]\,(1 + q^2)\,r - (1 + p^2)\,t - \ldots = 0, \quad (1)$$

Para la línea esférica de curvatura, se tiene

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0 \qquad \text{ó} \quad (x + pz)\,dx + (y + qz) = 0 \qquad (2)$$

haciendo $\frac{y+qz}{qx-py}=-\alpha, \quad \frac{x+pz}{qx-py}=\beta;$ resulta

$$\alpha x+\beta y+z=0, \quad \alpha p+\beta q-1=0 \tag{3}$$

siendo el resultado de la eliminación de $\frac{dy}{dx}$,

$$[\alpha r+\beta s](\beta+q)=(\alpha+p)[\alpha s+\beta t] \tag{4}$$

La ecuación del plano trazado por la normal y el origen en el que se halla la línea de curvatura, es

$$-x'(y+qz)+y'(x+pz)+z'(qx-py)=0 \tag{5}$$

su dif. $$-dx'(y+qz)+dy'(x+pz)+dz'(qx-py)=0 \tag{6}$$

Para toda la línea de curvatura

$$-dx(y+qz)+dy(x+pz)+dz(qx-py)=0 \tag{7}$$

Sustituyendo la expresión de dz: $(\alpha+p)\,dx+(\beta+q)\,dy=0$; (8)
y si la ecuación de la superficie es $Rdr+Sds+Tdt=0$
siendo la de las características $Rdy^2-Sdxdy+Tdx^2-0$, y

$$R=\alpha(\beta+q) \qquad S=\beta(\beta+q)-\alpha(\alpha+p), \qquad T=-\beta(\alpha+p),$$

$$\alpha(\beta+q)\,dy^2-[\beta(\beta+q)-\alpha(\alpha+p)]\,dxdy-\beta(\alpha+p)\,dx^2=0 \tag{9}$$

será la ecuación de la característica (Monge, p. 263)

ó $(\alpha dy-\beta dx)[(\beta+q)\,dy+(\alpha+p)\,dx]=0$ que da (10)

$$\left.\begin{array}{l}\alpha dy-\beta dx=0\\(\beta+q)\,dy+(\alpha+p)\,dx=0\end{array}\right\} \text{ características independ.s} \tag{11}$$

Y, sustituyendo por α y β sus valores:

$$(z+pz)\,dx+(y+qz)\,dy=0, \quad xdx+ydy+zdz=0,$$

cuya integral es $$x^2+y^2+z^2=\gamma^2 \tag{12}$$

La ecuación de las líneas de curvatura es

$$(rdx+sdy)(dy+qdz)=(dx+pdz)(sdx+tdy),$$

o bien $$dp\,(dy+qdz)=(dx+pdz)\,dq \tag{13}$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha x+\beta y+z=0\\\alpha p+\beta q-1=0\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}xd\alpha+yd\beta+\alpha dx+\beta dy+dz=0\\pd\alpha+qd\beta+\alpha dp+\beta dq\qquad=0\end{array}\right\} \tag{14}$$

diferenciando las ecs (3) $\left\{\begin{array}{l} xd\alpha + yd\beta = 0 \\ pd\alpha + qd\beta + \alpha dp + \beta dq = 0 \end{array}\right.$ y despejando los valores de $d\alpha, d\beta$: (15)

$$d\alpha(qx - pq) = y(\alpha dp + \beta dq),\quad d\beta(qx - py) = -x(\alpha dp + \beta dq) \quad (16)$$

Luego $d\alpha$, $d\beta$ son nulos y α, β constantes, cuando se tenga $\alpha dp + \beta dq = 0$, ecuación que se verifica para la segunda característica, cuya ecuación es $\alpha dx + \beta dy + z = 0$, llegando a

$$\alpha(ydx - xdy) = ydz - zdy,\quad \beta(ydx - xdy) = xdz - zdx$$

Y sustituyendo los valores de α y β en la ecuación de derivadas parciales:

$$-dp(y + qz) = dq(x + pz) = 0 \quad \text{ó} \quad \alpha dp + \beta dq = 0; \quad (17)$$

luego α y β son constantes, como demuestra Monge.

Funciones elípticas. $R^2 = (1 \pm p^2x^2)(1 \pm q^2x^2)$

Pongamos $R^2 = (m + nx^2)(m' + n'x^2)$ Si se hace

$$t = \frac{xR}{m(m' + n'x^2)} = \frac{x}{m}\frac{\sqrt{(m+nx^2)(m'+n'x^2)}}{m' + n'x^2} = \frac{x}{m}\sqrt{\frac{m + nx^2}{m' + n'x^2}}$$

De esto resulta $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{tdx}{R} = \dfrac{xdx}{tm(m' + n'x^2)}; \end{array}\right.$

$$t = \frac{x}{m}\sqrt{\frac{m + nx^2}{m' + n'x^2}};\quad \frac{t^2m^2}{x^2} = \frac{m + nx}{m' + n'x};$$

$$t^2m^2m' + t^2m^2n'x^2 = mx^2 + nx^4;\quad nx^4 + (m - t^2m^2m')x^2 = t^2m^2m'$$

$$x^2 = \frac{n'm^2t^2 - m \pm \sqrt{m^2 - 2m^3t^2n' + t^4m^4n'^2 + 4m^2m'nt^2}}{2n} =$$

$$= \frac{n'm^2t^2 - m \pm m\sqrt{1 + 2mt^2n' + m^2n'^2t^4 + 4m'nt^2}}{2n}$$

$$x^2 = \frac{n'm^2t^2 - m \pm m\sqrt{1 + 2(2m'n - mn')t^2 + m^2n'^2t^4}}{2n}$$

$$m + 2nx^2 - n'm^2t^2 = \pm m\sqrt{1 + (2m'n - mn')t^2 + m^2n'^2t^4}$$

$$\frac{m \,.\, dt}{m + 2nx^2 - n'm^2t^2} = \frac{1 \,.\, dt}{\sqrt{1 + (2m'n - mn')t^2 + m^2n'^2t^4}}$$

Además $mt = x\sqrt{\frac{m+nx^2}{m'+n'x^2}}$ $\qquad mdt = dx\sqrt{\frac{m+nx^2}{m'+n'x^2}} + x$

$$x\left[\frac{\sqrt{m'+n'x^2}}{\sqrt{mx+nx^2}}(2nx(m'+n'x) - 2n'x(m+nx^2)dx\right]$$

$$mdt = dx\,\frac{\sqrt{m+nx^2}}{\sqrt{m'+n'x^2}} + 2x^2\left[\frac{\sqrt{m'+n'x^2}}{\sqrt{m+nx^2}}(nm' - n'm)\right]dx =$$

$$= dx\,\frac{(m+nx^2) + 2x^2(m+n'x^2)\,(nm' - n'm)}{\sqrt{(m+nx^2)\,(m'+n'x^2}} =$$

$$= \frac{dx}{R}\left[m + (n+2m')x^2 + (2nn'm' - n'2m)x^4\right]$$

$$\frac{mdt}{m+(n+2m)x^2+(2nn'm' - n'^2m)x^4} = \frac{dx}{R}$$

$$p^2 + q^2 = \pm\,2(2m'n - mn')\,,\; p^2q^2 = m^2n'^2$$

$$\left.\begin{array}{l} p^2 = \pm\,(2m'n - mn') + 2\sqrt{m'n(m'n - mn')} \\ q^2 = \pm\,2m'n - mn') - 2\sqrt{m'n(m'n - mn')} \end{array}\right.$$

$$\text{o} \left\{\begin{array}{l} p = \sqrt{\pm\,m'n} + \sqrt{\pm\,(m'n - mn')} \\ q = \sqrt{\pm\,m'n} - \sqrt{\pm\,m'n - mn')} \end{array}\right.$$

$\sqrt{\pm\,m'n}$ hacer real $\left\{\left(\frac{m'}{n'}\right)^2 > \left(\frac{m}{n}\right)^2\right.$ El 2.° será real

$$\frac{dx}{R} = \frac{xdx}{mt(m'+n'x^2)} = \frac{mdt}{m+2nx^2 - n'm^2t^2} =$$

$$\pm\,\frac{dt}{\sqrt{1+2(2m'n - mn')t^2 + n'm^2t^2}}$$

$$x^2 = \frac{n'm^2t^2 - m \pm m\sqrt{(1\pm p^2t^2)\,(1\pm q^2t^2)}}{2n}\,;\; \frac{dx}{R} = \pm\,\frac{dt}{\sqrt{(1\pm p^2t^2)\,(1\pm q^2t^2)}}$$

Si se sustituye en $\frac{F(x^2)dx}{R}$, se tendrá $\frac{F_1(t^2)dt}{\sqrt{(1\pm p^2t^2)\,(1\pm q^2t^2)}}$

Cournot, t. II, p. 19. — Haciendo

$$R^2 = (1 \pm p^2x^2)\,(1 \pm q^2x^2) = 1 + rx^2 + sx^4$$

se tiene $\dfrac{dRx^{2i-3}}{dx} = (2i-3)\,Cx^{2i-4} + \dfrac{(r+2sx^2)\,x^{2i-2}}{R} =$

$$= \frac{1}{R}[(2i-3)\,R^2\,x^{2i-4} + (r+2sx^2)\,x^{2i-2}] =$$

$$= \frac{1}{R}[(2i-3)\,x^{2i-4}\,(1 + rx^2 + sx^4) + (r+2sx^2)\,x^{2i-2}] =$$

$$= \frac{1}{R}\left[(2i-3)\,x^{2i-4} + \binom{2i-3+1}{0\ 2i-2} rx^{2i-2} + \binom{2i-3+2}{0\ 2i-1} sx^{2i}\right]$$

luego $Rx^{2i-3} + \text{const} = (2i-2)\displaystyle\int \frac{x^{2i-4}\,dx}{R} +$

$$+ (2i-2)\,r\int \frac{x^{2i-2}dx}{R} + (2i-t)\,s\int \frac{x^{2i}dx}{R}$$

Se continúa rebajando el grado, y se llega a

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1\pm p^2x^2)\,(1\pm qx^2)}}, \quad \int \frac{x^2dx}{\sqrt{(1\pm p^2x^2)\,(1\pm q^2x^2)}}$$

Si (Fx) es fracción, se saca la parte entera y se obtiene una suma de integrales de la forma

$$A_t\int \frac{dx}{(x^2+a)^i\,R}$$

que derivando y descomponiendo en fracciones simples, conduce a una fórmula recurrente cuya última integral es de la forma

$$\frac{dx}{(x^2+a)\,\sqrt{(1\pm p^2x^2)\,(1\pm q^2x^2)}}.$$

Legendre.—Siendo $P = A + Bx + \ldots + Kx^k$

y $R = \sqrt{\alpha + \beta x + \ldots + \varepsilon x^4}$, haciendo $\displaystyle\int \frac{x^m}{R}\,dx = \Pi^m$;

será $\displaystyle\int \frac{Pdx}{R} = A\Pi^0 + B\Pi^1 + C\Pi^2 + \ldots\ldots + K\Pi^k$;

Diferenciando $x^{m-3}R$, y volviendo a integrar, se tendrá

$$(m-3)x^{m-4}R+\frac{1}{2}\frac{6+2\gamma x+3\delta x^2+4\varepsilon x^3}{R}x^{m-3};$$

$$(m-3)x^{m-4}R+\frac{1}{2}6\frac{x^{m-3}}{R}+\frac{2}{2}\gamma\frac{x^{m-2}}{R}+\frac{3}{2}\delta\frac{x^{m-1}}{R}+\frac{4}{2}\varepsilon\frac{x^m}{R}$$

$$(m-3)x^{m-4}R+\frac{1}{2}6\Pi^{m-3}+\frac{2}{2}\gamma\Pi^{m-2}+\frac{3}{2}\delta\Pi^{m-3}+\frac{4}{2}\varepsilon\Pi^m;$$

$$\frac{(m-3)x^{m-4}}{R}(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4)+\frac{1}{2}6\Pi^{m-3}+\frac{2}{2}\gamma\Pi^{m-2}$$

$$+\frac{3}{2}\delta\Pi^{m-1}+\frac{4}{2}\varepsilon\Pi^m$$

$$=\alpha(m-3)\Pi^{m-4}+\left(m-3+\frac{1}{2}\right)6\Pi^{m-3}+$$

$$\left(m-3+\frac{2}{2}\right)\gamma\Pi^{m-2}+\left(m-3-\frac{3}{2}\right)\delta\Pi^{m-1}+\left(m-3-\frac{4}{2}\right)\varepsilon\Pi^m$$

$$=(m-3)\alpha\Pi^{m-4}+\left(m-\frac{5}{2}\right)6\Pi^{m-3}+(m-2)\gamma\Pi^{m-2}+$$

$$\left(m-\frac{3}{2}\right)\delta\Pi^{m-1}+(m-1)\varepsilon\Pi^m$$

Las II pueden rebajarse hasta $m=3$ luego $\int\frac{Pdx}{R}$ será = cantidad algebraica + transcendente $\int(A+Bx+Cx^2)\frac{dx}{R}$

Siendo P racional cualquiera, se descompondrán en fracciones racionales los términos de la integral bajo la forma

$$N\int\frac{dx}{(1+nx)^kR}$$

Estos términos se podrían reducir al caso $k=1$. Si se tuviese $\int\frac{dx}{x^kR}$, se podrían determinar por $\int\left(\frac{A}{1+nx}+B+Cx+Dx^2\right)\frac{dx}{R}$

Para esto basta dar a $m - 4$ valores negativos. Sea

$\int \frac{dx}{(1+nx)^k R} = \Gamma^k$. Si se hace $1 + nx = \omega$ y se toman α' β'...,

de modo que

$$\alpha + \beta\left(\frac{\omega - 1}{n}\right) + \gamma\left(\frac{\omega - 1}{n}\right)^2 + \delta\left(\frac{\omega - 1}{n}\right)^3 + \varepsilon\left(\frac{\omega - 1}{n}\right)^4 =$$

$\alpha' + \beta'\omega + \gamma'\omega^2 + \delta'\omega^3 + \varepsilon'\omega^4$ se obtendrá, derivando $\omega^{-k+1}R$, se obtendrá esta fórmula

$$\frac{-R}{n(1+nx)^{k-1}} = (k-1)\,\alpha'\Gamma^k + \left(k - \frac{3}{2}\right)\beta'\Gamma^{k-1} +$$

$$(k-2)\,\gamma'\Gamma^{k-2} + \left(k - \frac{5}{2}\right)\delta'\Gamma^{k-3} + (k-3)\,\varepsilon'^{k-4}$$

En efecto

$$(-k+1)\,\omega^{-k}R + \omega^{-k+1}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\beta + 2\gamma x + 3\delta x^2 + 4\varepsilon x^3}{R}\right) =$$

$$\frac{(-k+1)\,\omega^{-k}R^2}{R} + \frac{1}{2}\frac{\omega^{-k+1}(\beta + 2\gamma x + 3\delta x^2 + 4\varepsilon x^3)}{R} =$$

$$= \frac{(-k+1)\,\omega^{-k}(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3\,\varepsilon x^4)}{R} + \frac{1}{2}$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{(\beta + 2\gamma x + 3\delta x^2 + 4\varepsilon x_\varepsilon}{R}$$

$$= \frac{1}{(k-1)(1+nx)}\,k\int\frac{\alpha dx}{R} + \int\frac{\beta x dx}{R} + \int\frac{\gamma x^2 dx}{R} + \int\frac{\delta x^3 dx}{R} +$$

$$\int\frac{\varepsilon x^4 dx}{R} + \frac{1}{2}\,\frac{1^{(k-1)}}{(1+nx)^{k-1}}\int\frac{\beta dx}{R} + \int\frac{2\gamma x dx}{R} + \int\frac{3\delta x^2 dx}{R} + \int\frac{4\varepsilon x^3 dx}{R}$$

Derivando $(1+nx)^{-k+1}R$, se tiene: $n(1-k)(1+n)^{-k}R +$

$$+\frac{1}{2}(1+nx)^{-k+1}\frac{1}{R}(\beta + 2\gamma + 3\delta^2 + 4\varepsilon^3) =$$

$$= \frac{2n(1-k)\,(1+nx)^{-k}(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4)+(1+nx)^{-k+1}\times}{2R}$$
$$\times(\beta+2\gamma+3\delta^2+4\varepsilon^3)$$

$$= \frac{2n(1-k)(1+nx)^{-k+1}(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4)+(1+nx)^{-k+1}.}{2R}$$
$$.(\beta+2\gamma+3\delta^2+4\varepsilon^3)$$

$$= \frac{2n(1-k)(1+nx)^{-k+1}(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4)+nx(\alpha+\beta x+\ldots)}{2R}$$
$$+(\beta+2\gamma+3\delta^2+4\varepsilon^3)$$

$$= 2n(1-k)\,(1+nx)^{-k+1}\left(\alpha+\beta\frac{\omega-1}{n}\right)+\gamma\left(\frac{\omega-1}{n}\right)^2+$$

$$+\delta\left(\frac{\omega-1}{n}\right)^3+\varepsilon\left(\frac{\omega-1}{n}\right)^4+n\left(\frac{\omega-1}{n}\right)(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3)+$$

$$+(\beta+2\gamma+3\delta^2+4\varepsilon^3)=\alpha'+\beta'\omega+\gamma\omega'^2+\delta\omega'^3+\varepsilon\omega'^4, \text{ etc.}$$

ERRATAS

PAGINA	DICE	DEBE DECIR
10	estética	estática
114	experimentado	experimentadores
118	Matemáticas	Mecánica
122	Liuville	Liouville
128	con uno	por uno
192	a^2, $[pqz]$;	$a^2[, pqy]$;
192	$(pdp$	$(adp$

Añádase, pág. 192, línea 6: Haciendo $a(1+q^2)+ap=M$, $1+p^2+apq=N$ $:(r+as)\,M-(s+ac)\,N=0$

Nota acerca de la Enseñanza Matemática

Causará asombro y extrañeza el que dedique a la enseñanza en mis cursos elemental y complemento de Cálculo infinitesimal tan amplia variedad de doctrinas, que pueden ser objeto de muchos volúmenes, de igual manera que mis numerosos trabajos de propaganda matemática que abarcan las más varias doctrinas, que han sido objeto de enseñanza o de exposición magistral en revistas y memorias, fuera de España, y que todavía no han traspasado los Pirineos, a pesar de que me he esforzado durante más de cuarenta años en hallar entre mis colegas o compatriotas el auxilio de colaboración o medios para divulgar mi empresa y que encarnara en los procedimientos seguidos para la educación y la enseñanza nacionales.

Pero mis esfuerzos han resultado estériles y aun contraproducentes.

Algunas censuras, aunque débiles, he lanzado en varios de mis trabajos, especialmente en el *Sumario de mis cursos*, etc. (1912-1914), sin extremar mis ataques que siempre habrían resultado sobradamente justificados, pues cuando no se ha dejado mi labor en el más absoluto aislamiento, se ha omitido el dar cuenta de ella, como se puede ver en el *Rapport* que dirigió la delegación española al Congreso de Cambridge, cuando yo me ví obligado, por preterición enojosa, a presentar mi dimisión de delegado, que pretexté, a pesar de todo, ante el Comité central de la *Association*, en la necesidad de unir la delegación a la *Sociedad Matemática Española* y recomendando como mi sucesor a D. Cecilio Jiménez Rueda, y así se hizo ante mi terminante y razonada decisión.

Mi labor ha sido siempre de propaganda o divulgación, pues no de otra índole había de ser en un país *atrasadísimo* en cuestiones matemáticas, porque todavía, en los momentos actuales perdura en nuestros libros de texto la influencia de los autores *divulgadores* en los dos primeros tercios del siglo XIX, con algu-

nos ligeros aditamentos respecto a los determinantes, a la Geometría de la posición, etc., sin pasar de la Geometría cuadrática, como mi amigo, discípulo e ilustre colega Julio Rey, con singular acierto ha calificado nuestra Geometría, que no ha llegado a las alturas a que los Steiner, Clebsch y Cayley las llevaron en otras naciones.

Pero dejando a un lado la cuestión de novedad e intensión científica; en el orden pedagógico nos hallamos en un estado, si cabe, todavía más deplorable; porque ya no se trata de que no lleguemos a las alturas en que se agita la Ciencia, fuera de nuestro país, sino que con los defectuosos planes y procedimientos, se anulan las capacidades intelectuales de nuestra juventud; y si no llega al *embrutecimiento*, es porque nuestra potencialidad intelectual, aun en las peores condiciones, no lo consiente, habiéndose llegado al menos a un estado de absoluta indiferencia, por cuanto sea entrar en el palenque señalado, a grandes rasgos, en esta mi última obra.

En ésta he comenzado por exponer cuatro modelos en la ciencia de pensar, representados por los nombres ilustres de Lagrange, Laplace, Monge y Ampère. Después he diseñado las teorías fundamentales en los estudios de la Física y Química, tales como las de probabilidades, el potencial y las series de Fourier, sin las cuales no se puede penetrar en estas ciencias por la íntima correlación que tienen con el pensamiento matemático; puesto que los matemáticos, desde Galileo y Newton, han intervenido constantemente en los progresos de las leyes experimentales, fijando sus leyes y organizando su conjunto, como se ve en la exposición de toda la obra, hasta llegar al actual momento en que se completan aquéllos por la exposición de los Maxwell, Helmholtz, Kirchhoff Lorentz, etc., por los Borel, Hadamard, Klein, Volterra, etc., y multitud de físicos y químicos matemáticos como Boltzmann, Planck, Van-der-Waals, etc.

Este último trabajo será calificado por estas rémoras humanas que tanto abundan entre nosotros, como indigesto para los estómagos de los alumnos y mirado de pronto ciertamente lo es.

Entre nosotros se confunde el libro impreso o ciencia crista-

lizada muchas veces por la enseñanza, con la palabra y los medios prácticos que constituyen la ciencia viva que comunica el verdadero profesor o pedagogo, hasta el punto que un libro mediano puede ser instrumento precioso en manos de quien puede hacer brotar, de un material deficiente, la luz que falta; porque los libros pueden ser malos o deficientes como anticuados o faltos de vida y expresión; pero generalmente son *copias* o *traducciones* de obras originales de otros autores buenos, que en su época influyeron para dejar sitio a otros autores los cuales reforman sus procedimientos, según las necesidades de la actualidad en que viven, para pasar después a la historia, en esta renovación y desarrollo sucesivo de la Ciencia.

España es seguramente la nación que produce más libros de texto, y a simple vista parece que poseemos una riquísima literatura matemática; pero si los analizamos detenidamente, todos ellos pueden considerarse como uno solo que ha cambiado por el nombre del autor; y así nos encontramos con que a partir, por ejemplo, de Vallejo, todos ellos tratan las mismas materias y el mismo plan, sin que se vea ninguna iniciativa individual apreciable, como no sea la mezquina de alterar el orden de sucesión de tal o cual capítulo; pero nada que afecte a lo substancial de la ciencia, la educación, ni la enseñanza; lo que constituye un machaqueo continuo que produce el natural tedio y antipatía por los estudios científicos predominantes entre nosotros, prevaleciendo la memoria, ya que nada estimula para despertar las aptitudes reflexivas y el espíritu de investigación.

Tenemos el defecto de diluir en el máximo espacio un mínimo de ideas, como aquel opositor a cátedras que, habiéndole salido por suerte la lección *suma de quebrados*, estuvo entreteniendo al tribunal una hora, resolviendo uno tras otros multitud de problemas de esta *sabrosa* teoría; o también acudimos a las divisiones o subdivisiones indefinidas de una misma cuestión, como cierto autor que alcanzó fama casi universal entre nosotros, que exponía concienzudamente los casos de sumar un entero con un quebrado, un quebrado con un entero, un mixto con un quebrado, etc., etc., a la manera de aquellos publicistas

antiguos que dividían los números en *pariter par, pariter impar, impariter par* e *impariter impar*, abundantes, perfectos, etc., todo lo cual no conduce a nada intelectual.

Pero, dejando estos enojosos detalles que podrían multiplicarse, nos fijaremos en el prurito inveterado de consolarnos con ficciones halagadoras, en vez de hincar el hombro como vulgarmente se dice, para remover obstáculos, viviendo en un mundo de ilusiones. Y más nos hubiera valido que esto, el sufrir verdades amargas que nos hubieran llevado a tiempo a conocer la triste realidad, echando una llave a nuestra leyenda de la ciencia, como otros, con gran acierto, la echaron a la leyenda del Cid.

Y respecto a este punto, digno de elogio fué el arranque patriótico de mi deplorado amigo D. Acisclo Fernández Vallín, al entonar, en un voluminoso discurso, un himno a la Matemática española del siglo XVI, pues digno de loa era aquél nuestro estado en la edad de oro de la cultura española a que contribuyeron los intelectuales de todos los órdenes; y en rigor, *proporcionalmente* al estado de la cultura matemática general de aquellos tiempos, nos hallábamos a mayor altura que la actual, pues desde entonces, si nosotros hemos avanzado por milímetros, los demás han avanzado por kilómetros, desde los gloriosos tiempos de Galileo y Newton, hasta la época no menos gloriosa de los Poincaré y brillante pléyade de los matemáticos actuales; pero desgraciadamente para nosotros, los matemáticos españoles del siglo XVI eran más que otra cosa, meros divulgadores más o menos dignos de alabanza; y algunas de sus obras se hallan citadas en *Rara Arithmetica*, de Mr. Smith; pero ninguno de ellos llegó a las augustas alturas de la inventiva, apreciable para dejar un rastro, aunque fuera de luz tenue, en la historia de la Matemática, pues ninguno llegó a la altura de un Vieta, un Harriot, un Guldin, un Tartaglia, etc., matemáticos que podemos poner como límite superior de nuestra matemática del siglo XVI y aun acaso, sin temor de equivocarnos, de la presente. Y aun este prurito de disfrazar nuestra triste realidad con ilusiones halagadoras y engañosas, se continúa en los tiempos presentes;

pues los elogios que se les prodigan desaparecen ante una crítica un poco rígida y desapasionada.

Mucho mejor hubiera sido que, en vez de entretenernos en contiendas o discusiones baldías, como las de los iconoclastas, cuando los turcos sitiaban a Constantinopla, haber hundido los acicates en el campo de la investigación, para elevarnos por el trabajo propio y no por los elogios ajenos, el cambiar nuestros éxtasis en un estado dinámico. En vez de fingir historias y de catalogar, el actuar; porque la Ciencia sólo se ha laborado mediante esfuerzos por penetrar en lo desconocido, en vez de detenernos en la contemplación pasiva, como los botánicos o entomólogos se entretienen en enriquecer sus catálogos, sin penetrar a veces en el fondo de la biología.

Pero en contraposición a esa manía fofa de sacar las cosas de su justo límite, existe entre nosotros otra manía opuesta que deprime los ánimos y los lleva a un quietismo obligado por falta de estímulo y que nos priva hasta de la respiración en el orden científico; y deplorando esto, por aquéllos a quienes ha tocado este triste destino, me limitaré a mi propia labor que he continuado, sin interrupción, desde 1874 en que publiqué mi primer folleto *Observaciones útiles en el estudio de las matemáticas*, hasta el momento actual; porque creo que de mis indicaciones resultará algo de útil para apreciar la realidad de los hechos.

Sólo se podía en España salvar ese enorme desequilibrio en que se hallaban sus conocimientos matemáticos, con el medio artificial de la Pedagogía, auxiliada con los conocimientos bibliográficos que constituyen una especie de historia contemporánea, que ni da siquiera tiempo para detenerse en la verdadera historia del pasado.

Esto explica la sucesiva aparición de mis diversas obras de carácter preeminentemente crítico y pedagógico; porque urgía una síntesis rápida de los conocimientos aglomerados durante el brillante siglo XIX, por tantos y tantos ilustres matemáticos; mientras que nosotros nos limitábamos a reptar por los libros que aun no habían penetrado en los brillantes surcos de la Ciencia moderna. Y, para llevar adelante esta obra apremiante de

divulgación, fundé *El Progreso matemático*, que sostuve durante siete años, a pesar del escaso número de lectores (el máximo 92), pues el público ni estaba preparado ni se mostraba propicio a favorecer la revista.

No es necesario insistir en que mi labor ha sido modestísima, mundialmente considerada, aunque de importancia, si la juzgamos entre *nosotros* que estamos casi a cero *relativamente* considerados. Y de ningún modo podía ser otra cosa, en un país donde en la época a que me refiero, sólo influían en nuestro desenvolvimiento matemático los Cortazar, Moya, Vallin, Cardin, Elizalde con las obras extranjeras de los Lacroix, Le Febure de Fourcy, Bourdon, Vincent, Sonnet y Frontera, Leroy, Olivier y, hacia 1870 aún, si bien superficial y casi como un relámpago, el Algebra de Sálmon que no encarnó en nuestros cursos y una efímera aparición del tratado elemental de Baltzer.

Pero yo me persuadí de que en un campo estéril, pues así podía llamarse el nuestro, cuando ya Chasles, desde 1846 había comenzado sus cursos de Geometría superior y los discípulos de Moebius, de Steiner y de Riemann publicaban obras para la enseñanza de la Geometría proyectiva y de las funciones; y los cursos universitarios eran dirigidos en Francia por los Briot y Hermite que continuaban la obra de Cauchy, en Alemania los Dedekind, Kronecker, Riemann, Weierstrass, fundadores de una nueva ciencia, que Hoüel en Francia y Cassorati en Italia divulgaban, así como Serret, en Francia, publicaba, en su tratado de Algebra, la teoría de los grupos y las de las funciones modulares que parten de los trabajos de Cauchy, de Abel y de Galois.

En vez de descubrir mediterráneos, como casi todos han hecho entre nosotros, que no han pasado de algún teorema de la trigonometría o algunas utopias que entran en los dominios de los cuadradores del círculo, creí que urgía robustecer los espíritus, primero, informándolos de lo que *existe*, empresa que acometí desde *El Progreso matemático;* pues hasta entonces, salvo algún que otro tenue chispazo que he señalado ya en alguna de mis obras, estábamos separados de la Europa científica por una muralla de la China, lo cual es duro decir; pero es des-

graciadamente lo cierto. Hay que comenzar alguna vez por ser sincero para evitar males mayores.

Y para que no se me salga al paso diciendo que la importación de la geometría de Staudt fué un progreso para la matemática española, replicaré que esta geometría es la *menos* difusiva y transcendental de todas las geometrías, pues no tiene más que un aspecto esencialmente lógico; y la lógica demuestra, pero no crea, ya que la Ciencia sólo progresa por la *invención* que extiende sus ramas; y la *demostración* tan solo las afianza, las fija o las hace permanentes y es, por tanto, la *menos educativa*, es decir, la más perjudicial para nuestras más apremiantes necesidades; porque nos urge salir del círculo de hierro de la lógica, para desarrollar las facultades inventivas; pues, cuando se ha llegado a un invento admisible, siempre la lógica llegará a fijarlo dentro de sus férreos eslabones. ¡Y cuántos prodigiosos descubrimientos han guiado a la Ciencia hacia sus ulteriores progresos antes de haber quedado rigurosamente demostrados, como lo han hecho ver Poincaré, Picard y otros ilustres matemáticos, al consignar cómo el genio de los grandes matemáticos, desde el siglo XVII, adivinó más bien que fijó la serie de verdades más fundamentales y fecundas de la Ciencia!

Y por otra parte, si se compara este progreso que con tal geometría se ha alcanzado, tan sólo con el conjunto de teorías esbozadas en nuestro actual trabajo, donde se ve tanto derroche de genio, ofrecido por insignes matemáticos, físicos y químicos, con nuestras formas de *primera*, *segunda* y *tercera categoría* con que sujetamos, con cierto rigor e intransigencia, a nuestros alumnos en un potro, como antiguamente los sujetaban al potro del tormento de la memoria, que también fija la doctrina del maestro con el *magister dixit* ¿no resultará esta comparación ridícula? *risum teneatis*!

Y no se me replique que en este breve trabajo he acumulado excesiva materia; porque también saldré al paso a todos diciéndoles que es sumamente importante ofrecer a la juventud en las universidades abundante material e ideales varios para que adquieran amor a la Ciencia y no despego, cuando se les ofrece

raquíticos y menguados materiales; pues el trabajo del verdadero pedagogo o maestro, consiste en la habilidad que no todos poseen, por ser muchos los llamados (*o que se llaman*), pero pocos los escogidos, para ofrecer con rapidez y acierto, lo fundamental, libre de hojarascas perjudiciales, impedimentas que arrojan sobre los alumnos los maestros poco expertos en este arte o ciencia de la educación, muy distinto del machaqueo y repetición de lo que puede estudiarse en el libro (lo que nos ha llevado al peligro de la libertad de enseñanza tal como aquí la entendemos) muy distinto del intérprete, que es el verdadero maestro que debe vivificar aquellos caracteres impresos, por las ideas que los completan y fecundan.

Y acerca de este punto, me fijaré en el *Cuestionario sobre la enseñanza matemática secundaria* que publicó la Sociedad Matemática Española.

Principio por rendir un tributo de respeto y consideración a los sabios ingenieros y catedráticos que han redactado dicho Cuestionario; y ciertamente que no podían menos de preguntar lo que han preguntado, pues de otro modo no existiría el Cuestionario. Y hay que atemperarse algo al medio ambiente.

Pero se me ocurre preguntar a mi vez: ¿Servirá para algún fin útil y práctico tal programa? Creo que con él resultará una especie de torre de Babel o un cero a la izquierda. Daremos unas vueltas más a la eterna noria, o en nuestro movimiento pendular.

Cierto es que en el tal Cuestionario existen preguntas interesantes, acordes con algunas de las preguntas ya contestadas en el último Congreso celebrado en París, del que me ocupé en mi último folleto, que en él resultan contestadas, con mi adhesión completa, y expresando mi deseo de que en España sigan tan beneficiosas conclusiones, como lo hice al tratar de ello en mi últimos folletos y conferencias.

Y comenzando por orden, diré que en mi folleto *Ciencia, educación y enseñanza* (1899), expresé la idea (defendiendo la enseñanza cíclica) de extender estos ciclos a la enseñanza de la Física y aun algo de la Química (al final), que es un absurdo se deje para el último año del bachillerato, por ser eminentemente

educativo el acostumbrar a los niños a percibir los fenómenos naturales, libres de fórmulas matemáticas o al menos las referentes a la proporcionalidad, mediante experimentos sencillos, pues así adquiere tempranamente el hábito de tener dominado el modo de producirse ciertos fenómenos, contracción, dilatación, velocidad, etc., y sus relaciones mutuas. Adquirir el hábito de pensar en el mundo de la Naturaleza, precedente empírico o experimental de las teorías o ideas abstractas, ayudándose el cálculo con la experimentación, en el grado que permite cada edad, al cargo de la habilidad del maestro; pues, como se ve en la obra actual, estos órdenes de conocimientos se hallan íntimamente compenetrados. Esto se refiere a las preguntas 4 y 5.

Ya, en dicho folleto y en artículos publicados en *El Progreso matemático*, contesté a las preguntas 6 y 24, pues en dicho folleto digo: Simultáneamente con las nociones de Aritmética deben irse inculcando al niño las de la Geometría; que conviene vayan adelantando a las de aquélla, por corresponder a un orden más concreto... (pág. 10). El cálculo puede servir de auxilio a la Geometría; pero conviene limitarlo mucho en la instrucción primaria, pues las primeras relaciones geométricas son las de igualdad o equivalencia, que pueden adquirirse hasta por medio de juegos o combinaciones bien elegidas de objetos; y parece conveniente que, desde luego, se enseñe la Geometría del espacio; pues un error de la enseñanza actual es el pretender que, por las figuras dibujadas en la pizarra, el alumno pase a la consideración de las figuras naturales; cuando el procedimiento lógico es el inverso... Poseyéndose una colección de figuras de Geometría del espacio, construídas con maderas, alambres, hilos de seda, etc., el niño se fija, sin ningún trabajo, en las relaciones de perpendicularidad, paralelismo, igualdades de diedros y en las propiedades fundamentales de los sólidos... (Idem, pág. 11).

A los estudios de Psicología, Lógica y Matemáticas deben preceder los de Física experimental, Historia Natural y Agricultura. El pretender que estos estudios sean los últimos de la segunda enseñanza, por las razones secundarias de que en tal o cual teoría se necesitan algunos conocimientos matemáticos,

es querer subordinar a un simple detalle todo un sistema (Idem, página 12)... Toda la dificultad del problema se reduce a la selección de materias que deban constituir sistemas de conocimientos de ciencias experimentales, adecuadas a la capacidad intelectual de los alumnos de segunda enseñanza, aptos como nunca para grabar en su inteligencia lo fenomenal, lo real y lo intuitivo (Idem, pág. 13)... A las nociones adquiridas de una manera intuitiva, por medio de ejercicios prácticos, o las lecciones llamadas de objetos o a la vista, en la primera enseñanza, deben, pues, seguir en la segunda, cursos puramente experimentales de Física, Química, Historia Natural y Agricultura, que tendrían su colocación natural en los dos primeros años del bachillerato. Así el alumno principiaría a conocer la naturaleza exterior, adquiriendo cierta vocación por la vida del campo... (Idem, pág. 13)... Además, el empleo de los primeros años de la segunda enseñanza en los estudios experimentales, da tiempo a que se despierten lenta y gradualmente las facultades superiores del espíritu (Idem, pág. 14)... Con esta preparación es evidente que, en el último año, el estudio abstracto del Algebra, al que podrían agregarse aplicaciones de las matemáticas elementales a la Mecánica y a la Física, no se haría repulsivo a las inteligencias; y éstas acogerían con suma facilidad las nociones de Psicología, la Lógica y la Etica, pues harían despertar las facultades intelectuales, incluso la razón... (Idem, página 15)... Este abuso de los libros de excesiva extensión, hace desarrollarse el horror al estudio, el que se considere éste como una serie de repetidas torturas, cuando al contrario, la enseñanza debe proporcionar el placer que ocasiona la adquisición de la verdad, si ésta se ha logrado por medios naturales como ejercicio cómodo y fácil (Idem, págs. 18 y 19)... La verdad sencilla educa, el discurso artificioso engríe... (Idem, pág. 20)... Entre las ciencias exactas, físicas, químicas y naturales, la más espiritual es la Matemática que exige más directamente que ninguna otra, la influencia de la Pedagogía... (Idem, pág. 24) (publicado en el *Diario de Avisos*)... En España se priva a los físicos y químicos de los estudios matemáticos, incapacitándo-

los para estudiar las obras superiores de su profesión. ¿Qué físico o qué químico de los nuestros puede leer las obras de Lamé, Mathieu, Mascart, Maxwell, Poincaré, Duhem y otros autores análogos? (Idem, pág. 34 y *Madrid científico*, 1899).

Y volviendo al Cuestionario, insistiendo en el número 24, añadiré que mis trabajos en sentido de la fusión de las geometrías plana y del espacio, mereció que el Sr. Lazzeri, director del *Periodico di Matematica*, me honrara con el título de campeón en España de la fusión de las geometrías plana y del espacio.

Respecto a la cuestión 25, para mí carece de importancia, pues en mi *Geometría elemental* (1881 y 1888) hago derivar la semejanza como un hecho natural, porque todo se reduce a una variedad de posición en el plano, que entra en mis consideraciones sobre la traslación y rotación de las figuras, para transformarlas las unas en las otras, que apliqué también a la Trigonometría, considerada como un simple capítulo de la Geometría, por lo que me honró el Sr. Gino Loria colocándome, aunque mis merecimientos son muy escasos, entre los ilustres geómetras Schlomilsch y Rausenberg en su obra *Nicola Fergola*, por coincidencias de apreciación, lo que corresponde a las cuestiones 48 y 49.

Respecto a la cuestión 8, parece que se halla resuelta en nuestros planes por la creación de cursos de ejercicios prácticos. Pero todo ello debería estar incluido en un curso de Pedagogía matemática que permitiese despertar la capacidad de investigación, por medio de problemas convenientemente elegidos para los fines educativos.

Las demás cuestiones, como he indicado, conducirán al mismo resultado que una olla de grillos, pues cada cual tendría su opinión particular, porque hay quien cree muy provechoso, por ejemplo, el molestar a los alumnos con ejercicios repetidos en los varios sistemas de numeración, lo que embrutece más bien que educa, lo mismo que los partidarios de buscar muchos logaritmos en las tablas, como si no fuese suficiente el saber cómo se manejan; pues a quien las necesite a diario, con una preparación de una hora y el ejercicio mismo, le basta. Y si se han de

estudiarse las progresiones o los logaritmos, la extensión de la divisibilidad, máximo común divisor. Todo esto no son más que problemas que pueden proponerse discrecionalmente, y sólo dependen del acierto y buen criterio del profesor que puede alterar voluntariamente, emancipándose de esa pauta fija que confunde una ciencia con una maquinaria.

Hay que huir de la ciencia encasillada, en la que nos hemos pasado durante algunos siglos; y esto sólo se obtiene por la educación de los maestros y discípulos, despertando en unos y otros las aspiraciones de la Pedagogía, que es tan desconocida entre nosotros, como para cierto individuo que en un Congreso científico presentó nada menos que el lema: ¡¡Pedagogía de los poliedros!! *Risum teneatis*!

Y dejando estas cuestiones de orden pedagógico, cuyo descuido tanto nos ha perjudicado, vamos a otras cuestiones de orden moral que también nos perjudican, como nos perjudica el crear reputaciones ficticias por medio del elogio excesivo que falsea los juicios y que sólo nos sirve de consuelo para cubrir con capas de cal y canto nuestras flaquezas o nuestro escaso valer relativo; pues todo es *según el color del cristal con que se mira*. Y quién, que en un villorrio puede parecer una eminencia, en una ciudad no lo es, y menos en el mundo; de manera que el mérito se agranda o decrece, según la amplitud de la esfera, dentro de la cual se considera. Correlación que debe tenerse siempre en cuenta para que sea común la unidad de medida, sin lo cual podría resultar grande lo que es pequeño y pequeño lo que es grande, falseando los juicios resultantes. Y vamos a completar algunas indicaciones anteriormente hechas respecto a que debemos echar una llave a la leyenda del Cid en la Ciencia.

Nadie dudará de que mi labor de cuarenta años nada vale ni supone en el *mundo científico*, donde solo soy un vulgar, aunque *tenaz obrero*; pero no así en un villorrio, donde puedo permitirme algún lujo. Cierto es que no he sido más que un divulgador de la ciencia universal que va tardando en penetrar entre nosotros, pues ¡cuidado con lo que tarda, no en aclimatarse, sino en hacernos una visita aunque sólo sea de cumplido! la teo-

ría de los grupos que es hoy la médula de todas las teorías matemáticas; y, prueba de ello, son los numerosos folletos y obras a este fin por mí en vano publicados. Por esta razón, siempre he tratado de mí con obligada modestia; porque nada es más fuerte que la fuerza de los hechos. Pero la modestia o inmodestia es también una virtud o un vicio relativos.

Con este motivo, recordaremos un pobre a quien el rey David le arrebató una pequeña propiedad que constituía toda su fortuna; y aunque no son reyes los que me arrebatan la mía, bueno es consignar que algunos colegas no se presentan muy pródigos conmigo, ni dispuestos a dar al César lo que es del César o a cada cual lo suyo, contrario a mi proceder, consistente en citar concienzudamente las fuentes de que me surto en mi asidua propaganda científica; pues sólo así puede seguirse la ilación de los progresos, haciendo bibliografía o historia sin ocultaciones justamente criticables.

Ya en el *Sumario de mis cursos* (1913) traté de cómo hizo referencia a mis trabajos el Sr. Mur en su discurso u obra (pues consta de 137 páginas, bien es cierto, a expensas del Estado y con más extensión de lo fijado por la legislación vigente, para evitar abusos; pues cada cual debe llevar a cabo sus publicaciones a su cuenta y riesgo, como a mi me sucede), escrita para la inauguración del curso de la Universidad de Oviedo, con el título *Los Maestros y la Pedagogía matemática*.

Util es, como dije, el dar a conocer, siquiera de nombre, ya que otra cosa no quepa en los límites de un discurso, de lo que el Sr. Mur llama *maestros*, que en cierto modo lo son, porque los sabios enseñan siempre, aunque no sea más que exponiendo sus descubrimientos. Pero maestro, en un trabajo de *Pedagogía* de cualquier especie que sea es, por excelencia, el educador; porque éste es casi el exclusivo fin de la pedagogía, facilitar (en el orden intelectual, abarcando también los órdenes moral y estético). Y así pues, el exponer la evolución de las ideas matemáticas, creo que desde Pitágoras o Newton (pues no tengo a la vista el trabajo) hasta Abel y al final citar a los Kroneker, Weierstrass, etc., es un mero trabajo *histórico*, muy lejano de

la Pedagogía; pues precisamente, los matemáticos de la edad antigua, de la edad media y presente hasta Abel, lo que no fueron exclusiamente es pedagogos propiamente dichos. Eran grandes creadores, genios inventores, que enseñaban sus doctrinas aun con el sólo hecho de publicarlas; pero *no eran educadores*.

Poseían sus métodos propios como los Descartes, Pascal, Fermat, Roberval, Newton y Leibniz que ocultaban a sus competidores en sus palenques científicos y generalmente velaban en el simbolismo de un anagrama, lo cual es diametralmente opuesto a la ciencia de la educación. Y así la ciencia progresaba *per saltum* y de ninguna manera por la cómoda continuidad a a que tiende la Pedagogía en sus procedimientos, encaminados al *desarrollo* de las facultades por ejercicios adecuados a despertar las energías en germen o en estado letárgico o de entumecimiento.

Los genios inventores están fuera de las reglas de la Pedagogía, como lo estuvieron los genios poéticos de las reglas de la Retórica; porque ellos mismos eran los legisladores, los que dictaban a ésta sus reglas, mediante sus geniales creaciones. Por esta razón casi todo el trabajo histórico del Sr. Mur no es pertinente y pugna con la segunda parte que se refiere a la Pedagogía.

Pero yo, que no soy ni he sido nunca genio, he dedicado toda mi vida a esta segunda parte del trabajo del Sr. Mur; porque comprendí desde mi más temprana juventud, lo necesario que era a nuestro inveterado atraso, la necesidad de educarnos por la Pedagogía, de mejorar artificiosamente nuestra debilidad, auxiliando además las inteligencias con noticias bibliográficas y comprensivas de las materias que constituyen los extensos y múltiples dominios matemáticos que, entre nosotros, se han reducido, hasta poco ha, en que nos permitimos algún lujo en la Geometría y el Algebra cuadráticas, como he dicho las denomina muy acertadamente el ya ilustre catedrático Julio Rey. Y la Matemática que necesitan los ingenieros para sus aplicaciones, es muy distinta de las lucubraciones de la Matemática pura y aun de la Matemática físico-química, cuyas líneas generales he trazado en la presente obra.

Pues, si como es de creer, el Sr. Mur, al abordar un trabajo *pedagógico* debió haberse propuesto, no el fin que pudiéramos llamar efectista de citar teorías creadas, naturalmente en el extranjero, en vez de pretender elevar la cultura nacional con medios adecuados, propios para despertar y desenvolver las aptitudes inventivas, las favorables a la investigación propia y el poder de asimilación científica. Y puesto que, según mi leal saber, no ha existido en España quien, como yo, *exclusivamente*, ha estado laborando en pro de estas finalidades; hubiera sido, creo muy oportuno, haberse propuesto *colaborar* conmigo en esta obra que estoy jalonando desde 1874 en multitud de trabajos que exceden del número de sesenta.

En este caso más le hubiera agradecido su colaboración; pues al fin, ya habríamos *sido dos* que aspirábamos al progreso educativo, que el haberse limitado a condensar mi labor de cuarenta años y recompensarla, siquiera platónicamente, con el siguiente párrafo:

«*Sería injusticia notoria no mentar, tratando de cuestiones de pedagogía matemática, al incansable profesor de la Universidad de Zaragoza, D. Zoel García de Galdeano, que en uno de sus folletos, titulado* Ciencia, educación y enseñanza, *defiende ideas análogas a las anteriormente enunciadas.*» Yo me habría permitido invertir la frase, diciendo: *las ideas anteriormente enunciason análogas a las del* INCANSABLE *Sr. Galdeano, que es incansable, porque hasta la fecha no se ha cansado* (y resistencia tiene para rato).

Siquiera muchísimo más generoso ha sido el profesor Max Simon que en su obra *Uber die Entwicklung der Elementar-Geometrie im* XIX *Jahrhundert* (1906), en la página 47, además de haber citado todas las obras en que trato de Geometría elemental, dice: «*Die erste Nummer des Enseignement* LAISANT'*s vom* 15 *Jan*, 1899 *enthalt von der berufensten Hand von* Z. G. DE GALDEANO (*Saragossa*) *einen Bericht uber das Aufblühen der Mathematik in Spanien etwa die Bedeutung, die Teixeira für Portugal hat*; es decir, que me honra, comparando mi labor en España con la del ilustre G. Teixeira en Portugal.

Y ya que estamos en la región de las comparaciones, en las cuales he de confesar, ingenuamente, yo soy el beneficiado, citaré los siguientes párrafos de M. C. A. Laisant, que se publicaron en *El Progreso matemático*, con motivo del homenaje hecho en Francia a la memoria del ilustre Gerono, fundador de los *Annales de Mathématiques*:

«*Je crois avoir signalé aussi le grand service rendu par Gerono par la création en* 1842 *des Nouvelles Annales de mathématiques, qui ont été si précieuses pour l'enseignement et pour la science. Me permettrez vous d'insister sur ce point, alors que je m'adresse au fondateur du* Progreso Matemático, *c'est à dire, a celui qui entreprend faire pour l'Espagne ce que mon véneré maître a fait pour la France?... C'est donc encore une manière de rendre justice à la mémoire de Gerono et á son oeuvre, que de souhaiter á votre oeuvre tout le succès qu'elle mérite et que vous méritez; et c'est ce que je fais de grand coeur, Monsieur et cher Directeur, en vous envoyant l'assurance nouvelle de mes sentiments les plus sympatiques.*— A. Laisant.»

Y para terminar estas citas, añadiré que el último de mis trabajos a que se refiere Herr Max Simon, es *Les mathématiques en Espagne*, que por honor más bien debido a benevolencia que a mis merecimientos, fué el artículo *inaugural* de la hoy célebre y universal revista *L'enseignement mathématique* (1 Année, 1899, págs. 6-21), así como también fué elegido *espontáneamente*, por quien así me honró, como artículo *inaugural* del *Madrid Científico*, mi memoria *La Enseñanza matemática en las Universidades y en las Escuelas técnicas*. Y no sé la suerte loca que he tenido en eso de las referencias; pero siempre, en más o menos remotas tierras, hasta el punto de que aun en *Verhandlungen des ersten internationalen Mathematiker-Kongresses* in Zurich, vom 9 bis, 11 August 1897, se me honra con las siguientes frases: «*Ausser diesen Vorträgen waren in dem Programme noch eine Vortrag von Herrn A. Markoff*: «Sur certaines questions de maxima et minima» *und ein Vortrag von Herrn Z. de Galdeano* «L'unification des concepts dans la science mathématique» *angekündigt Beide Herren waren, Herr de Galdeano durch Gesun-*

dheitsrucksichten verhindert, nach Zurich zu kommem.» Y tal vez, si se me hubiera auxiliado para acudir a ese Congreso, (como se ha ido auxiliando a otros muchos individuos) al que acudí tan sólo con mi memoria en dicho tomo publicada, el estado de mi salud no hubiera sido una absoluta impedimenta para sufrir las molestias de un viaje.

Y esta memoria y otras que presenté a los Congresos de París, a los que concurrí, así como al Congreso de Roma, en el que hice una breve disertación, publicada en el tomo correspondiente, fueron motivo para que se me honrara, nombrándome delegado de España, mediante mensaje dirigido al Gobierno de Su Majestad por el *Comité Central de matemáticos* y para que se considerara a España como país participante, es decir, en el mismo grupo que Alemania, Francia, Inglaterra, Italia, etc., cargo honorífico que me ví obligado a renunciar al cuarto año de desempeñarlo, por haberme creido, en el momento crítico de preparar trabajos para el Congreso de Cambridge (que quedaron inéditos), víctima de una súbita postergación que no juzgué merecida; por lo que, desde entonces, sólo me dedico a mejorar mis cursos universitarios con *anuarios* de los que van publicados tres hasta la fecha.

Y puesto que se trata del Congreso de Cambridge, para el que preparaba una memoria acerca de la enseñanza de la Matemática que no terminé de escribir, pues creí asunto de dignidad el dimitir dicho cargo, oportuno es decir, según mi leal saber y entender, el juicio que me merece el tomo que bajo el título *L'Enseignement des Mathématiques en Espagne*, presentó mi sucesor M. C. J. R. (tal cual está escrito) o *Mémoires présentés au Congrés de Cambridge* (1912).

Comenzaré por la que más directamente me interesa, a saber: *L'Enseignement du Calcul infinitesimal aux Facultés des Sciences espagnoles*, par Patricio Peñalver, professeur á l'Université de Seville.

Como precedente necesario, debo decir que, desde 1902 hasta 1906, publiqué para mi enseñanza en la Universidad de Zaragoza, los seis tomos: *Cálculo diferencial, Principios generales de la*

teoría de funciones, Aplicación del cálculo infinitesimal al estudio de las figuras planas, Cálculo integral, Aplicación del cálculo infinitesimal al estudio de las figuras en el espacio y *Teoría de las ecuaciones diferenciales*, de la que sólo publiqué un abultado volumen (840 páginas), destinado a la integración clásica, por más que en él trato de los sistemas de Clebsch y jacobianos, de los grupos de Lie, de varios desarrollos debidos a MM. Darboux y Goursat, etc.; si bien mi pensamiento era dedicar un segundo volumen a exponer las teorías de Fuchs, de Poincaré, Painlevé, etc., acerca de la integración moderna, que sólo por sus líneas generales van tratadas en éste y en los tomos anteriores con referencias a autores como Borel, Darboux, Hadamard, Lebesgue, Picard, Weierstrass, etc. Y además he publicado sucesivamente mis programas para los cursos en: *Los programas de mis cursos de Cálculo infinitesimal, lo que son y lo que debieran ser* (1910); este anterior al Congreso de Cambridge, y otros con extenso razonamiento de los mismos en el *Sumario de mis cursos* (1912-14).

Este abundante material parecería a muchos imponente para un par de cursos universitarios (*Elementos y Complemento*). Pero aunque la Ciencia debe adquirirse por el lado de la Lógica, debiendo ser impecable el encadenamiento de las verdades, que deje completamente satisfecha a la razón, también debe dejarse libre el campo a cierta *fantasía científica* en que se agitan los espíritus inventivos, que del campo caótico de las ideas vagas hacen surgir verdades y teorías nuevas. Esencial es reptar por los cursos de la deducción lógica, que afianza la verdad demostrándola; pero es sumamente decisivo, para el progreso, el contemplar desde las cumbres el conjunto, como desde una montaña se contemplan extensas llanuras, entre cuyos varios accidentes, nuestra vista nos permite elegir lo importante y prescindir de lo ordinario y sin relieves.

Poincaré dijo que lo principal es *saber elegir*, como entre nosotros Cánovas del Castillo dijo que lo principal es *saber leer*.

Por esta razón, al ofrecer a mis alumnos, en mi obra, abundante y hasta pletórico material, he querido presentarles vastos

territorios que recorrer en direcciones varias, para poder elegir. He preferido pasar de un sonsonete aburridor y fatigoso, a dominios variados y agradables para aligerar el paso, de conformidad con enseñanzas provechosas; pues cada idea fecunda que se elige entre una enmarañada red de relaciones, abrevia lo que por otra elección resultaría tardo y monótono. Hay ideas que compendian un libro o una teoría; y conociendo sus diversas jerarquías, se huye de lo difuso; porque quien posee una idea fecunda, posee sus múltiples consecuencias, cuestiones de mero detalle. Los kilómetros que se avanza en la Ciencia, contiene todos los milímetros que aquellos abarcan.

El avance torpe del reptil está en contraposición con el vuelo rápido del águila. Y así se comparan con las águilas los pocos genios que, en un reducido número de ideas, abarcan una Ciencia, como Galois, con su concepto del grupo de una ecuación, dejó honda huella en todo el siglo XIX.

Y volviendo a la *mémoire* presentada por el Sr. Peñalver, en cuanto a mí se refiere, diré que a su reticencia, hecha *porque sí*, pues nada puede saber que lo que me reservo *in petto*, al escribir que : Parmi ces programmes, celui redigé par notre savant confrère. M. Zoel García de Galdeano, est celui qui embrasse un plus grand nombre de théories, *quoique il n'exige que des légeres notions sur toutes*, van encaminados los anteriores párrafos; pues ya se sabe que, en los cursos universitarios, lo esencial es *inculcar el espíritu científico*, por cuanto las consecuencias de segundo, tercero y enésimo orden, son cuestiones de tiempo y de paciencia; y cada cual las puede deducir según sus necesidades del momento; y más vale media docena de brillantes que un montón de pedruscos.

Pero, dejando a un lado esta reticencia y prescindiendo de que me achaca mi *entusiasmo* por el cálculo de probabilidades y el de diferencias finitas al decir: *Dans les programmes des Eléments de Saragosse, le calcul des probabilités et celui des différences finies, qui ne figurent dans aucun autre*, sin hacer hincapié en otras teorías de los Abel, Borel, Darboux, Lie, Poincaré, etc., a los que doy *preferente* importancia sobre las teorías que in-

ventaron en el siglo XVI y XVII Pascal y Newton; pues mi objeto es *modernizar nuestra vetusta enseñanza*; y que vuelve a la carga en atribuirme *notoriamente* teorías anticuadas (por más que sean importantes), tales como *el cálculo directo e inverso de las diferencias con las fórmulas de interpolación*, pues dice: *Comme application de la théorie exposée, en suivant l'exemple de notre ilustre confrère M. García de Galdeano, le calcul direct et inverse des différences avec les formules d'interpolation et le calcul des probabilités avec son application aux moindres carrés.* Y dale con atribuirme preferencia por la Matemática del siglo XVII.

Y, sin hacer hincapié en estos detalles, repito, voy a tratar de lo más perjudicial que encuentro para mi labor científica cual es el atribuirse, recomendando lo que yo tengo hecho en mis cursos, mis programas y mi obra, cuando todo se reduciría a decir simplemente: (*) «Al Sr. Galdeano debemos las innovaciones que yo considero procedentes, o decir, *el Sr. Galdeano ha dicho lo que yo digo.* Y se acabó pues, en efecto, si se lee cualquiera de mis programas impresos (antes de imprimirlos ya abundaba en las mismas ideas) tenemos las siguientes materias que el señor Peñalver recomienda *como suyas:* El método clásico de Cauchy, el de Riemann y Weierstrass, la teoría de los grupos de transformaciones, ecuaciones de Laplace, paréntesis, corchetes, las características y los métodos de Mayer, de Lagrange-Charpit, de Ampère y de Monge, de todo lo cual trato hasta la saciedad. *Y así se escribe la historia*, pues la historia es mi obra que se escribió entre 1902-1906, así como mis programas; y el cronista es el Sr. Peñalver que escribió en 1912.

En resumen: Al leer el *rapport* del joven señor Peñalver, cualquiera creerá que yo soy acérrimo partidario de las teorías de los siglos XVI y XVII y que el Sr. Peñalver lo es de las más recientes del siglo XIX, lo cual no dudo, pero después que yo las estoy divulgando desde hace muchos años. Y esto es lo que no debe saber el curioso lector.

Pero váyase lo uno por lo otro, pues en cambio me atribuye

(*) En esta, mi última obra, dedico un capítulo al *cálculo de probabilidades*, pero como precedente a las teorías de Maxwell, de Gibbs y de Boltzmann Cada cosa a su tiempo, etc.

excesiva predilección por las teorías de los Pascal, Newton y Lagrange que es de agradecer, por lo selecto de la compañía. Y, después de todo no hay que despreciar la Ciencia desde el siglo XVII hasta fines del siglo XVIII, pues no siempre ha de ser uno modernista a trancos y a barrancos.

Y después de haber tratado de la memoria del Sr. Peñalver, creo oportuno referirme a las memorias acerca de la *Geometría métrica* por D. Cecilio Jiménez Rueda y del *Análisis matemático* por D. Luis Octavio de Toledo, presentadas al Congreso de Cambridge.

No voy a discutir el criterio del Sr. Jiménez Rueda acerca de la Geometría métrica en España, pues cada uno es libre de defender sus opiniones, o esto no es pertinente al momento actual. Pero he de observar que cita algunos de nuestros profesores de Geometría que laboraron hace más de medio siglo, entre quienes no veo citado al Sr. Echegaray, por cuyas obras sobre problemas de Geometría elemental, de Geometría analítica y su *Introducción a la Geometría superior*, bien mereciera, a mi juicio, ser citado entre los Sres. Cortazar y Elizalde, pues en nada desmerecen dichas obras de las de estos dos últimos profesores; y así no es de extrañar que haya pasado por alto mis varios trabajos publicados en el *Progreso matemático* acerca de los métodos de Poncelet, de Moebius, de Chasles, de Grassmann, de Hámilton, etc., de mis esfuerzos por introducir en mis enseñanzas de la Geometría, nociones acerca de los porismas de Euclides, manantial fecundo de teoremas y de problemas; que, como indico y hago ver, fueron la fuente de inspiración de la Geometría superior de Chasles; y aun he insistido en varias de mis obras y artículos sobre los puntos de vista de Cayley y de Clebsch, en dirección del Algebra de los invariantes, además de los trabajos sobre las geometrías no euclídeas, hoy tan útiles en las altas investigaciones científicas como en este trabajo se ve, al tratar del principio de relatividad por los Sres. Borel, Laue y Volterra; y aparte de los cuaternios, las equipolencias, el cálculo baricéntrico, que de todo ello he tratado, la parte pedagógica que he proseguido sin descanso, desde que en la primera edición de

mi *Geometría elemental* (1881) que termina con la parte: *Crítica geométrica*, y trata de la *metodología geométrica* y de la *crítica de las verdades geométricas* que afiancé en mi folleto *Complemento de la Geometría elemental o crítica geométrica* (1881) y mis *Consideraciones sobre la conveniencia de un nuevo plan para la enseñanza de las matemáticas elementales* (1877), trabajos citados con elogio por Max Simon en la obra arriba citada y mi originalidad en disponer las materias, lo que hice también en la Aritmética y el Algebra, muy distinta de la consabida repartición que se continúa desde tiempo inmemorial, sin que sólo se note de diferencia más que en el nombre del autor, y especialmente mi modo de tratar la Trigonometría que mereció del Sr. Gino Loria el ser citada en su obra: *Nicolas Fergola*.

Cierto es que estas teorías no han penetrado aún en el marco de la enseñanza entre nosotros, como tampoco ha merecido que el Sr. Jiménez Rueda se fijara en esta avalancha de ideas; pero, habiendo citado a otros profesores ¿creyó que mi labor y mis antiguas enseñanzas eran sólo dignas del silencio y del olvido, porque no entran en los dominios de la Geometría cuadrática?

En cuanto a la memoria de mi amigo D. Luis Octavio de Toledo, análogas observaciones debo hacer.

Claro es que, en este asunto de la distribución de materias, cada uno echa las culpas a los demás; y por eso la pelota está en los aires, sin rebotar en ningún sitio; pues muy cómodo es decir que los alumnos se hallan sin preparación, argumento igual al de los profesores de segunda enseñanza, para que estemos eternamente preparándonos; y un buen pedagogo puede suplir muchas deficiencias materiales, porque no hemos de atender a la cantidad, sino a la calidad; y la instrucción no se realiza con una interminable letanía de materias, sino tendiendo *en todo momento* a despertar la actividad e iniciativas; y un buen maestro, con un mal material, puede producir excelentes resultados, mejores que un mal maestro, que siempre producirá malos frutos, aun con los más selectos objetos y con los más eficaces medios de enseñanza.

El Sr. Octavio de Toledo cita las obras de eminentes mate-

máticos, entre los cuales sólo se halla el español Sr. Echegaray. Y ciertamente que yo no estoy en el caso de ser citado, puesto que mi Algebra (2.ª parte, tratado superior) se detuvo en esta segunda parte y no llegó a la tercera por falta de ambiente; pero se halla inspirada en las obras de Serret y de Salmon citadas; pues en 1886 aspiré a afianzar las teorías de los grupos y del Algebra de las formas homogéneas con un aditamento de las teorías de Cauchy, de Puiseux, etc., sin conseguirlo ni en poco ni en mucho; pero no ha dejado de ser una iniciativa que ahora, muy tardíamente, comienza a entrar en la realidad de los hechos.

Y si se quiere, mi obra, creo merece ser citada como un anticipo que *aún está por venir entre nosotros*, a pesar de estos veintisiete años que llevo por adelantado. Bien es cierto que entre nosotros parece existe un irresistible horror hacia la teoría de los grupos, como si no hubieran existido Cauchy, Abel ni Galois. Y creo que todo esto merecía ser citado.

Sin embargo, no todo ha sido espinas y abrojos en este campo de soledad, al que pudiéramos añadir, *mustio collado*, para terminar el verso.

Cierto es que la Real Academia de Ciencias me ha honrado con sus elogios en ocasiones varias, dándome siempre muestras de su aprecio, a lo que estaré siempre reconocido; y aun no hace muchos años, un muy laudatorio y expresivo informe del Consejo de Instrucción pública, que no puedo reproducir aquí, invitando a los Poderes públicos para que protegiera la vida del *Progreso matemático*, pues añade, sería vergonzoso permitir que desapareciera tal revista por falta de recursos. Y en el *Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze matematiche*, se dice:

«Il dotto ed infaticabile *Dt. Zoel G. de Galdeano* ha testé iniziato la pubblicazione di un «*Boletín de Crítica, Enseñanza y Bibliografía matemática*». L'insegnamento matematico spagnolo ha nel *de Galdeano* un apostolo entusiasta ed illuminato che da moltissimi anni ha ed esso dedicato tutte le energie della vasta sua mente, tutta la sua attivitá morale e matariale. E con ragione puó dirsi che se la Spagna in pochi anni ha fatto passi giganteschi nella via delle riforme negli studi secondari e

superiori, se la sua produzione matematica é notevolmente cresciuta, se l' associazione matematica spagnola puó dirsi un fatto compluto, tutto a lui si deve per la maggior parte, a lui che colle sue pubblicazioni geniali, non badando a sagrifici e fatiche, ha saputo riunire attorno a sé un'eletta schiera di studiosi non d'altro desderosi che di continuare l'opera salutare da lui iniziata. Il benemerito «*Progreso Matemático*» che audacemente ha voluto farsi strada fra un'apatia quasi generale dei suoi connazionali era creazione sua: sospese per un po' di tempo le pubblicazioni, era nuovamente riapparso piú vigoroso e completo, e la collezione di esso, ormai preziosa e rara, forma una raccolta che si é orgogliosi di possedere. Le numeroso sue pubblicazioni di critica e di pedagogia matematica formano una raccolta di grande pregio e nella quale anche i piú dotti e provetti maestri trovano nuove ed utili osservazioni, proficui consigli. Non é dunque da stupire se l'apparizione del primo numero della nuova rivista é stata salutata con viva gioia da tutti coloro che amano l'insegnamento e la scienza, a qualsiasi nazione essi appartengano.»

»La pubblicazione del «*Boletin*», dice l'egregio direttore d'esso, ha per oggetto non solo di porre in evidenza le deficienze dell'insegnamento della matematica sotto l'aspetto formale e pratico, ma anche di servire di complemento ai programmi ufficiali sia con esposizione didattiche nei vari rami della scienza, sia colle notizie piú interessanti sull'attuale movimento progressivo di essa.»

»Con molto interesse attendiamo i successivi numeri del *Bollettino* per darne piú ampia notizia ai lettori della *Rivista* la quale saluta con vero entusiasmo la nuova ed ultilissima pubblicazione.»

Ya ve el Sr. Mur que de mí puede decir algo más de que *soy incansable*, lo cual es verdad; porque a pesar de tantos sinsabores como parece debieran amargar mi existencia, continúo tan incansable y firme como el primer día en que como caballero andante me inauguré en la palestra, ávido de *desfacer entuertos*. Y si no desfago más, es porque el enemigo no se presenta, y a

enemigo que huye, puente de plata, y además, porque no hay peor sordo que el que no quiere oir.

Todo ello se reduce a que unos se atrincheran en la Geometría cuadrática o en la de posición, barajando las formas de primera, segunda y tercera categoría, sin avanzar ni retroceder en el espacio, y otros, como el viajero de Thomson, recorremos el espacio provistos del cronómetro para precisar lo que es en sus diversas regiones y establecer así la armonía entre todas las unidades físicas; y hay otros que siguen la tranquila labor de la catalogación indefinida, a lo sumo del recuento de lo existente (sin pasar de los dos segundos tercios del siglo diez y nueve, tilde más o tilde menos), para no salir de un mismo recinto, lo que constituye tan sólo una cuestión de conveniencia.

En resumen: Hemos visto, cómo en vez de sumarnos para constituir un núcleo resistente, nos disgregamos como bolas de mercurio, por aquello sin duda de que en *la casa donde no hay harina, todo es mohina*; y renovamos aquellos tiempos de los güelfos y gibelinos, como en cierta época nos dividíamos todos en krausistas y no krausistas, hasta que de repente nadie se volvió a acordar de tal cosa. Y en cuanto a los elogios, también exageramos en ambos sentidos, pecando unos por carta de más y otros por carta de menos, produciendo en el público un desconcierto y una desordenación que lo imposibilitan para formarse *el buen sentido* que debe acompañar a nuestras apreciaciones, resultando: o quijotes que defienden su ilustre abolengo, aunque sea tan real como las ínsulas de Sancho, o toreadores por lo fino que escurren el bulto y se dejan de *andróminas*.

Y acerca de este punto, debo insistir en aquella *traduccioncita* de una obra inglesa sobre el *Cálculo infinitesimal* que publicó por su cuenta una prestigiosa Sociedad, de cuyo nombre no debemos acordarnos; pues dicha obrita aunque, repito, tiene algún ingenio, abusa de la palabra *necio* aplicada a los matemáticos, sean los que fueren. Y como muestra, nos basta recordar a todos los matemáticos y físicos citados en esta obra, de entre los cuales no podemos decir que uno siquiera sea necio, como lo son los cuadradores y descubridores del movimiento continuo que

hoy por hoy pueden ser colocados entre los necios y los ilusos; y esto es lo que no puede distinguir la honrada masa neutra de la Ciencia, con lo cual existe el peligro de desacreditar la Ciencia más excelsa y más invulnerable ante la crítica.

Y en cuanto al fin que se propone el autor de difundir en esta masa neutra los profundos conceptos de tal Cálculo, es inútil, pues a quien tales auxilios necesita para poder comprenderlo, más le vale quedar ignorante toda su vida; pues con ello sólo conseguiría ser un *tonto adulterado por el estudio*, según una frase de Cánovas, y más vale que existan gentes ignorantes y modestas que grajos vestidos con las plumas de un pavo real.

En cuanto a la enseñanza, tenemos el defecto de marcharnos siempre por las ramas o por los espacios imaginarios.

Si se trata de una reforma, se principia por nombrar comisiones con tal o cual objeto que nunca llegan a ningún resultado positivo por aquello de la olla de grillos, pues a muchos de los que intervienen en tal o cual asunto, se les puede preguntar: Y a usted ¿quién lo presenta?

O también se cree que se ha salvado la patria, dictando reglas para hacer las oposiciones o para la provisión de cátedras, etcétera, cuando lo substancial estriba en una sola cosa, *enseñar bien* y que cada individuo por sí vaya introduciendo perfeccionamientos, no con criterio propio, sino con el que señalan los hombres prestigiosos en la Ciencia; porque de no ser así, tomaríamos la peligrosa senda de los cuadradores y desequilibrados de toda especie y entonces sí que resultaría la olla de grillos. Y cada cual debe estar, según le corresponda, o en el escenario o entre el público.

Hay que principiar por destruir inveteradas rutinas.

Quién creía antes, por ejemplo, que no se podía estudiar Geometría analítica sin haber estudiado antes, concienzudamente toda el Algebra, incluso la regla de signos de Descartes.

Quién opina que no se puede abordar la teoría del factor integrante sin haber estudiado antes *todos* los procedimientos para obtener las derivadas e integrales de las funciones conocidas, cuando basta conocer el espíritu general del asunto y fijar bre-

vemente la ilación de las ideas, relegando los detalles a ser meros ejercicios prácticos. Y aun en los tratados de Sturm, Duhamel, etcétera, se efectúa el cambio de variables en ecuaciones diferenciales que se tratan a lo último de la obra; pues aquí la ecuación diferencial es un mero objeto que no nos importa el conocer.

En este sentido, por ejemplo, puede uno abordar alguna cuestión de ecuaciones de derivadas parciales, sin haber estudiado los métodos de Jacobi y de Cauchy, etc., pues lo esencial es que se *defina y conozca* el objeto sobre que se investiga. Y porque a veces, como sucede entre nosotros, la necesidad obliga; y debemos caminar en ocasiones varias, por el atajo. Hay que simplificar y elegir entre la innumerable muchedumbre de objetos, pues el todo estriba en una *acertada elección* que está reservada a los verdaderos maestros y en la *economía del esfuerzo*, arte divino, por el que se llega rápidamente al fin; y no con tortuosidades indigestas, para que no decaiga nunca el interés, el entusiasmo y la vocación. Luego puede abordarse el *teorema de la existencia*, las dependencias funcionales, etc., es decir, filar más delgado.

Hay en el estudio dos partes: La una que nos capacita para nuestra profesión o finalidades, que es la *práctica*. Esta es generalmente un mecanismo útil que es indispensable poseer, que nos hace peritos en aquéllo que cultivamos; pero que si se exagera, conduce al estancamiento y al empirismo, al hombre máquina o estatua.

La otra parte es la que vivifica nuestras facultades, dilata el espíritu y lo lanza al movimiento en la vida de las ideas.

La parte espiritual brota de la multiplicidad de los hechos, como la Ciencia, bajo la acción intelectual, sustituye a lo individual de los hechos y fenómenos naturales, los conceptos más o menos generales que se agrupan u organizan para incluir en este organismo lo desorganizado de las apariencias individuales. La Ciencia es el arte supremo que domina con sus unidades la muchedumbre de lo que permanecería siempre como muda esfinge, sin las representaciones y significado que les imprime la

acción intelectual. La Naturaleza con sus fenómenos tiene su significado en la Matemática, la Física, Química y cualesquiera otras ramificaciones de las ciencias naturales, como el billete de Banco es la representación de muchas necesidades satisfechas o de múltiples transformaciones en el curso de la vida. Y hay una lucha perpetua entre el ser y el parecer, que se dibujan sucesivamente en las diversas teorías que se suceden como aconteció desde Tolomeo hasta los sistemas astronómicos actuales y como desde Arquímedes hasta el principio de la relatividad.

Esta parte espiritual de la Ciencia es la que descuidan nuestros profesores, que no me atrevo a llamar pedagogos; porque una cosa es el transmitir simplemente conocimientos y otra el amplificar nuestras aptitudes, para adquirir, no solamente la mayor suma de éstos, sino hacerlos fructificar por nuestra actividad original; y cuando no sea esto posible, el convertir la simple suma en una función más complicada por la organización y varias maneras de agrupación que por lo menos producen un placer estético. Para la simple transmisión, basta el libro. Y si a esto se limita el profesor, será un mero repetidor; pero no un verdadero maestro, que además de los conocimientos, debe comunicar el amor a la Ciencia y las aptitudes para que sea eficaz su cultivo.

Demos, pues, al traste con creer que nuestro remedio se halla en las comisiones que han de dictaminar sobre tal o cual punto y sobre el modo de hacer nuestras oposiciones y la provisión de cátedras, que pertenece al orden externo de nuestra organización docente; y persuadámonos de que lo principal es la labor individual, como lo hicieron los Gauss y Cauchy y hasta los colaboradores de las revistas matemáticas, aportando cada cual su piedra grande o pequeña al edificio de la Ciencia. Así se labora y no como muchos, en expectativa de que otros les traigan el maná para comérselo ellos. Y dejémonos de peroratas y de lamentaciones estériles, de las repeticiones históricas desde los pobres Pitágoras y Galileo, víctimas de nuestras disertaciones académicas; y vayamos al bulto que no es disertar sobre personas y *exponer*; sino laborar de modo que resulte algo, si no

nuevo, al menos de alguna utilidad, sin embriagarnos con el recuerdo de pasadas glorias, sino tranquilamente proseguir clavando el acicate de nuestra actividad en la resistencia que ofrece la verdad para ser conocida y fecunda en nuestras investigaciones. Y este es el objeto de la verdadera pedagogía que, si en la época histórica no era necesaria, porque a cada investigador le bastaban los recursos de su propio talento, hoy es necesaria para atenuar de un modo artificial la inmensa red de teorías que han complicado el caudal de la Ciencia por una simplificación que resulta de la posesión de las altas ideas, capaces de organizar, dando unidad a tan alambicado conjunto.

Estas indicaciones justifican lo necesario que nos es, como complemento de las exposiciones didácticas, cultivar la Crítica, la Pedagogía y la Bibliografía matemáticas, objetos preferentes de mis varias publicaciones; y aún pueden servir de brújula a los alumnos de hoy, maestros de mañana, para que aprovechándose de ellas, puedan rectificar inveterados errores y prácticas nocivas para nuestro progreso y desenvolvimiento, y, alguna vez debe comenzarse por presentar la verdad más o menos desnuda; pues con tapujos y convencionalismos, más o menos artificiosos, siempre permaneceremos en *statu quo*. Y, además, porque con haber sido tan numerosas mis publicaciones, en medio de un silencio tan sepulcral entre nosotros, casi parece que podríamos decir: *Aquí no ha pasado nada*.

A mis anteriores manifestaciones añadiré, para terminar, que el período de la Matemática en España, desde 1865 hasta los momentos actuales, ha sido casi infructuoso o inapreciable para esta Ciencia, entre nosotros. Es decir, no ha arraigado.

Y si he faltado a mi propósito de no escribir más obras, el motivo de esta última ha sido el presentar nuevos alicientes a los alumnos de mis actuales cursos. El entusiasmo más ferviente se extingue ante la indiferencia general.

Hoy no creo que lean una docena de personas mis trabajos (ni los de los egregios matemáticos portaestandartes de la Ciencia en el extranjero). La generación actual parece divorciada de la Ciencia, por efecto de los malos métodos de enseñanza

seguidos, que he combatido con toda mi energía durante cuarenta años. Y cuando no hay público ni otros alicientes, carece el trabajo de finalidad. Y cuando no hay finalidades en algunos de los actos de la vida, éstos se anulan para ser sustituídos por otros más en armonía con el medio ambiente.

Aparte de la carencia de medios educativos de las inteligencias, se presentó ante la juventud estudiosa el fantasma de la Geometría de la posición, enclavada firmemente por las intransigencias de la agrupación de sus propagandistas, cuando siempre lealmente hay que reconocer que la Geometría de Staudt es la *menos propagandista* y la *menos educativa* de las Geometrías existentes, por más que puede presentarse como una curiosidad científica. Pero la Ciencia no es como las pirámides de Egipto que siempre se hallan fijas sobre sus sólidos cimientos. La Ciencia evoluciona. La Geometría de Staudt fué una preciosa conquista, pero no hay que exagerarla, y solo en este caso resulta un bien para la cultura científica, aunque no irreemplazable.

Después de los Lagrange, Laplace, Ampère y Monge, llegó el período de Cauchy que llenó cuarenta años del siglo XIX, reforzado por las geniales concepciones de los Galois, Abel y Jacobi. Pero luego sucedió a este período el de los Riemann, Weierstrass, Kronecker y Sophus Lie de otros cuarenta años también, próximamente, y luego ha comenzado desde hace una veintena de años el período de los Cantor, Poincaré, Picard, Painlevé, Borel, Dini, Hadamard, Du Bois-Reymond, Meray, Mittag-Lefler, Lebesgue, etc., que comienza a transformarse por la evolución debida a los Fredholm, Hilbert y Volterra. Y el pretender que sólo la Geometría de Staudt debe permanecer inquebrantable e inamovible, como no lo están ya ni las estrellas que antes se llamaron fijas, es absurdo y hasta ridículo. Además la separación de la Geometría del Análisis va resultando sobradamente arcaica, pues se han fundido la una en el otro para constituir un mismo objeto bajo dos aspectos.

La Geometría, en particular, también ha tenido su evolución. Primero los Poncelet, Chasles, Steiner y Moebius, luego los Cayley, los Clebsch, los Plücker, los Laguerre, seguidos de los Klein

y Minkowski hasta llegar a esta Geometría general que desarrolla las ideas de Lobatschewski y el *Analysis situs* de Riemann. Y no se puede admitir la inamovilidad de la Geometría de Staudt, que es tan sólo un método gráfico o puramente geométrico, independiente de toda idea analítica, por lo que se ofrece como *un método ingenioso*, pero extraño, y debe ser descartado de la Ciencia *evolutiva*, que es lo esencial.

Y para tener conocimiento de esta curiosidad científica, basta a los alumnos acudir a lo publicado en uno de los manuales Hoepli u otros análogos; y es superabundante o pletórico el dedicarle abultados volúmenes, pues los apremios del tiempo exigen el recorrer otros campos más fértiles, educativos e instructivos de la Matemática. Bien es cierto, que no todos los geómetras *puros* llevan al último extremo su intransigencia. En esta excepción merece ser colocado el catedrático de Geometría de la Universidad de Zaragoza D. José Alvarez Ude que, rindiendo culto a la escuela de Staudt, modifica sus rigores con claro talento, a la manera de Reyes, Fiedler y otros geómetras, más tratables que los *puristas-geómetras*. Y por otra parte, hemos de tener presente la cuquería del alumno que pretende aprobar sus estudios sin trabajar, lo cual justifica un saludable rigor hacia estos estudios que llevan al detalle, como contraposición, a las *filorituras* excesivamente ideales y teóricas, bajo cuyas apariencias engañosas suele con frecuencia velarse la ignorancia. Y hay que ver, por las indicaciones hechas en esta obra, para la Matemática físico-química, la intensión matemática que exigen estos nuevos estudios de reconocida utilidad práctica, en consorcio con las modernas doctrinas matemáticas, en las que juega papel importantísimo la Geometría. Y no digamos nada de la Geometría cuadrática o de las secciones cónicas que revestida de un poco de indumentaria moderna se nos sirve con asiduidad sobradamente insistente como plato del día. Reducida también a los límites de un manual, hay que sustituirla por la Geometría diferencial o infinitesimal en el sentido que lo han hecho los Darboux, Bianchi, etc.

Por estas razones, si bien no debemos olvidar la densa labor

del Sr. Torroja, al modelar una geometría pura, independiente del Análisis que llega a las más recónditas ramificaciones a que ha permitido el método de Staudt respecto de las curvas y de las superficies que interese a un especialista, hemos de tener presente ante todo, que la Matemática es como un ser orgánico en el cual debe mantenerse la proporcionalidad de sus órganos.

Y un ser con un brazo, una cabeza o un estómago excesivamente desarrollado, degenera en un monstruo.

Además, este organismo debe conservar cierta proporcionalidad respecto a la importancia de cada una de sus partes y la finalidad de cada una de ellas, como la de un brazo, por ejemplo, con el corazón o los pulmones. Y si uno de estos falta, el organismo perece, y no, si falta aquel órgano accesorio.

Y la misma intensión de la labor del Sr. Torroja, ha producido este desequilíbrio a favor de la Geometría pura, pletórica en detalles, verdadera pesadilla de los alumnos que borra en ellos la impresión que les causan otras disciplinas, eclipsadas ante la que pudiéramos llamar la *reina de* NUESTRAS *facultades de Ciencias*. Porque además no basta dar órdenes, sino disponer de medios eficaces para que se cumplan. Y en el consorcio general, nadie debe usurpar la parte de los demás, e impedir que otros entren en la liza. Así, bien dijo el egregio Gauss, que *la Aritmética es la reina de las matemáticas* y el gran Poincaré abundó en la misma idea.

El pretender que en los cursos universitarios predomine el estudio detallado de las curvas y de las superficies, nada menos que hasta una curva cúbica o una cuártica alabeada, acusa una firme y sana voluntad, propia de un especialista. Pero así como en Física y en Química los estados flúidos absorben preponderante atención sobre el estado sólido, en la Matemática el concepto de *posición* ha cedido la plaza a su antípoda de hoy las *funciones de líneas* y las *ecuaciones integrales* y otros varios conceptos importantísimos de los que nuestros licenciados y doctores salen de nuestras Universidades sin tener de ellos la menor noticia.

Y los Bianchi, Cántor, Fourier, Fuchs, Lie, Poincaré, Volte-

rra, Weierstrass, tienen tanto o más derecho que Staudt para ocupar un puesto en nuestros estudios universitarios, si se ha de tener alguna noción de la Matemática actual; deficiencia que me ha obligado a dar excesiva extensión a mis cursos de *Cálculo infinitesimal*, aunque en vano, porque ¡cómo en dos cursos se ha de incluir tanta doctrina como falta! y existiendo en cambio otros varios cursos completamente hueros, ¡se entiende esto en los siglos XIX y XX! pues para los XVII y XVIII, estaba bien. Es decir que tenemos una cabeza monstruo en la Geometría pura, un estómago vacío en los cursos 1.º y 2.º de Análisis, Geometría métrica, etc., etc., y todo lo demás que debiéramos tener, parece que está demás.

¡Pobres Abel, Galois, Cantor, Clebsch, Cayley, Fuchs Poincaré...! ¡Están desterrados de España por mandato de Staudt! (*)

Puede ser que las generaciones que nos sigan, después que hayan desaparecido las huellas de la generación a que pertenezco, orienten sus pasos en otras direcciones.

Por esta razón, aunque mi trabajo tenga escasa transcendencia; porque pocos lectores cuentan esta clase de lucubraciones; siquiera servirá para unos pocos de aviso que les haga volver sobre sus pasos, desviados del cauce general para no ser *puntos aislados* en el consorcio de las múltiples y diversas ideas que integran el mundo matemático, excéntricos que, si bien no llegan al grado máximo de los cuadradores, perjudican a los suyos, pareciendo del ejército contrario, como cierto *matemático puro* (geómetra moderado) que al abogar por su causa, asemejándose a cierto examinando que creía en la necesidad de alinear perfectamente los árboles para producir frutos abundantes y sabrosos, quiso sostener ante una asociación matemática, lo que no se le consintió: lo conveniente de comenzar por el desenvolvimiento de la industria para relegar la Matemática a segundo término y luego recrearnos con una especie de *Nueva Arcadia* como se recreaban los poetas en las Cortes de los Felipes III y IV; cuando la Ciencia siempre precede a la industria.

(*) Y esto que parece paradoja, no lo es si bien se mira por ser un hecho funesto.

Porque sin *intelectualidad no hay industria*. Y no voy a insistir en otras manías unipersonales de poca monta, que perturban nuestro buen sentido, que al fin desaparecerán por sí solas, pero que nos han perjudicado, como *verbigracia* el creer, para consolarnos, que podemos hablar a Lagrange o a Cauchy de *tu*, solo con proponérnoslo, con la *sans façon* del señor aludido.

El descender a estos detalles parece poco serio e impropio de una obra científica; pero tiene gran importancia en el orden educativo; porque los discípulos de hoy son los maestros de mañana, como los maestros de hoy fueron discípulos, educados en las falseadas tradiciones de nuestra supuesta leyenda científica. Y por esta razón falsearon su criterio propio con ciertas aberraciones, habiéndose colocado tan fuera de la realidad en su manía u obcecación característica, que se les puede decir: *Cosas tenedes mio Cid que farán fablar las piedras*. Y todo esto debe aprender la juventud para evitar que nos imite en aquello que se nos pueda censurar.

No creamos en aquellos pozos de ciencia, escudados en una inquebrantable modestia sino, por el contrario, creamos en los *hechos* que cada cual presenta a la luz del día con modestia o sin ella. Y atengámonos en ser historiadores fieles y a ilustrarnos e ilustrar a los demás, por la bibliografía y la publicidad de los trabajos de *los demás*.

Y resumiendo:

En 1874 y 75 comencé mis publicaciones *Observaciones útiles en el estudio de las matemáticas elementales* y *El Método* (psicológico) *aplicado a la Ciencia matemática*, y en 1877, cuando hice mis segundas oposiciones a cátedra, sin resultado favorable, el folleto *Consideraciones sobre la conveniencia de un nuevo plan para la enseñanza de las matemáticas elementales*, de carácter *crítico-psicológico*, y por consiguiente también lógico. Y mis ideas parecieron perturbadoras e inadmisibles al tribunal, puesto que no me consideró digno de una cátedra. Y fué necesario que en 1881 juzgaran buenas mis ideas los Sres. Archilla y Torroja, lo que me valió el ingresar en el profesorado, ideas que publiqué, en el orden didáctico, en mi *Geometría elemental* (1881)

y en el orden crítico en la 2.ª parte de esta Geometría bajo el epígrafe: *Parte crítica*, que completé en el *Complemento de Geometría o Crítica Geométrica* (1881). Y ya en el profesorado, pude publicar mis tratados de *Aritmética y Algebra elemental* y *Problemas de Aritmética y Algebra* (1883 y 1888), donde expuse mis puntos de vista sobre la enseñanza y sus tendencias a elevarla, simplificando; pues trato de los restos potenciales, teorema de Fermat, fundamental en la divisibilidad, de la generación de las series mediante la división, de los ciclos, cuyos primeros representantes son los polígonos estrellados; porque bueno es que a los alumnos se le presenten en mera perspectiva, como finalidades más o menos lejanas, algunas ideas interesantes y sujestivas que despierten en ellos la vocación hacia dichos ideales. Y dicho está, que también va expuesta la teoría geométrica de las cantidades imaginarias que permiten una representación gráfica de la periodicidad de las funciones trigonométricas, seno, coseno, etc., después de haber definido en la combinatoria, (Tratado de Algebra 1883) los grupos de sustituciones que tan bien cuajan en la teoría de los números y en el Algebra.

Habiendo ingresado en el profesorado universitario en 1889, pude utilizar la segunda edición de mi *Geometría* publicada un año antes (1888) para dar a conocer a mis alumnos las teorias de Chasles, incluso la doctrina de los porismas de Euclides.

Pero urgía perentoriamente, para salvar con rapidez nuestro patente atraso matemático, elevar mi trabajo de propaganda intelectual al carácter de propaganda colectiva y fundé con este fin, *El Progreso matemático*. Y con el auxilio generoso que me prestaron muchos matemáticos distinguidos, allí se dieron a conocer las más varias disciplinas: La Geometría del triángulo, la de cuatro y más dimensiones, las no-euclídeas. En la sección bibliográfica se dieron a conocer las obras actuales de los más distinguidos matemáticos, todos aquí desconocidos como Borel, Beltrami, Clebsch, Darboux, Gomes-Teixeira, Lampe, Schroeder, Schlegel, Picard, Poincaré, Veronese, y otros muchos matemáticos de diversas nacionalidades, así como las revistas matemáticas, con multitud de memorias sobre las más

distintas ramas del saber matemático, habiendo intervenido asiduamente matemáticos como Brocard, Longchamps, Loria, Lemoine, Pascal, Pirondini, Retali, Van Aubel, etc.

Además, esta revista tuvo alguna transcendencia en ciertos hechos, pues se hizo eco en sus tomos III y IV (1893 y 1894) del proyecto de la fundación de Congresos matemáticos internacionales, acerca de lo que se votó una conclusión en el Congreso de Caen (1894) y acerca del *Repertorio de Bibliografía matemática*, (de cuyos trabajos en España tuve más tarde que ser el encargado) y del proyecto de crear una Asociación internacional de matemáticos (*Progreso matemático*, t. IV, p. 361), anunciándose que se podría contar con la participación de la Sociedad alemana en dichos Congresos. Y aun insistí en dar publicidad a este propósito, ya iniciado, de promover relaciones personales entre los matemáticos de las diversas naciones al tratar del primer Congreso celebrado en Zurich (t. I, 2.ª serie, p. 24, 1899), terminando por hacer una reseña del Congreso de París, bosquejando las importantes conferencias del Sr. Hilbert acerca de los *problemas matemáticos* y de Poincaré acerca de *La intuición y la lógica en matemáticas* (Idem, t. II, 2.ª serie, págs. 394-398, 1900).

Y véase cómo la Matemática ha corrido también hacia los campos de la crítica, preconizada por los trabajos de Hilbert, Picard y Poincaré, realizando mis nuevos ideales de los años de 1874, 75, 77, 81, etc., contra las rutinas y el dogmatismo exagerado reinante por entonces. Y cómo también mis tendencias hacia la bibliografía, han sido coronadas finalmente por la colosal obra de la *Encyclopaedie der Mathematischewissenschaften*. Y este espíritu, en mí siempre dominante, se me contrarrestaba aislándome en mis actos públicos y en mis varias publicaciones, en las que he procurado siempre hacer todo lo amena posible esta Ciencia, por necesitarse algún atractivo en un terreno refractario a los estudios abstractos.

Se ve, pues, cómo desde la Geometría proyectiva de Chasles y de Poncelet hasta las teorías de Hámilton y de Grassmann y las teorías de los Schlegel y Brüncker que traté en *El Progreso matemático*, además de los desarrollos acerca del Algebra de la

Lógica, debidos a los Schroeder y Peano, hasta las ideas de *crítica matemática* que comencé a divulgar desde mis folletos publicados en 1874, 75 y 81 hasta la más alta cumbre que hallamos en el insigne e incomparable Poincaré, de todo me ocupé en *El Progreso matemático*, escribiendo memorias tales como *Las equivalencias y sustituciones en los problemas geométricos* (1891), *Teoremas, problemas y métodos geométricos* (1892), *Estudios sobre la enseñanza y el organismo de la Ciencia matemática* (1893), *La enseñanza de las ciencias matemáticas en la Universidad* (1894), *La sistematización de la Geometría* y *Nociones sobre los sistemas geométricos* (1895), *Apuntes para un plan de educación científica*, *La moderna organización de la Matemática*, *La Matemática y su enseñanza* (1899) (curso explicado en el Ateneo de Madrid que no pude dar a conocer íntegro; pues me ví obligado a terminar la publicación de esta revista por falta de suscritores y de auxilios oficiales).

Y si los matemáticos españoles se hubieran agrupado por entonces en torno de esta Revista, *El Progreso matemático* habría adquirido nuevos bríos y mayor importancia, como pasa con la bola de nieve. Y hoy la *Revista de la Sociedad matemática española* habría podido elevarse a superior categoría, tomando a aquélla como cimientos del nuevo edificio que se aspira a construir. Pero abandonado a mis propias fuerzas, se redujo a una bola de mercurio, representada por otras varias revistas que pretendieron en vano ser imitación suya. Y no hay que evocar el españolismo; porque la Ciencia no tiene Patria. Y toda la humanidad en ella colabora.

Y lo mismo ha resultado con la delegación española de *L'Enseignement mathématique* que conquisté para España por mi concurso a todos los Congresos matemáticos internacionales; pues desde mi puesto veía la situación difícil, porque jamás llegaba la ansiada reforma de nuestros estudios universitarios que se hallan empantanados en la Geometría de las curvas y superficies de segundo orden y en la tantas veces citada *Geometría de la posición*, razón por la cual; ya que no tenía asunto de que tratar, echaba la carnaza de mis propias obras, *Nueva*

contribución, etc., Exposición sumaria, etc. (1907), *Nuevo método de enseñanza matemática, Ensayo de síntesis*, etc. (1910), *Algunas consideraciones sobre Filosofía y enseñanza matemática* (1907), *Algunos conceptos fundamentales*, etc. (1911). Y no contento con esto, me decidí a publicar mi *Boletín de Crítica, enseñanza y Bibliografía matemáticas* (1908 y 1909), con el sólo objeto de hacer patente a la *Commission internationale de l'Enseignement mathématique* que no faltaba en España, aunque sólo fuera un individuo, que trabajaba efectivamente por el progreso de nuestra enseñanza, y aun más hubiera hecho, si no se me hubiera postergado en el momento crítico de acudir al último Congreso internacional que había de celebrarse en Cambridge, al que acudí como simple *amateur* con mis recursos personales. Y también en este caso se ve reducida de nuevo una bola de nieve a muchas bolitas de mercurio.

Múltiples causas se han acumulado para infundir en el espíritu español su imponderable indiferencia por los estudios matemáticos que contrasta con la simpatía en las demás naciones, como se ve por nuestra producción próxima al cero absoluto en este orden intelectual, pues los libros de texto no se cuentan y fueron excluídos del *repertorio del índice de bibliografía matemática*. Y fueron enviados a la Comisión respectiva sólo unas 125 ó 150 fichas contra miles reunidas en otras naciones; y eso que muchas de las nuestras tenían cierto sabor preparatorio para alumnos, por lo cual debieran haberse excluído. Pero ¡quién se había de enterar! y siquiera se salvaron las apariencias aunque de un modo asaz modesto. Por aquello de que *no hay más cera que la que arde*. Y algunas veces la sinceridad tiene gran precio, porque sirve para corregir nuestros defectos.

La primera de las causas es la falta de publicidad, pues los periódicos de gran circulación no dan noticias de este género. La segunda es la falta de voluntad de los que, en las pocas ocasiones que se ofrecen, no divulgan lo que conocen en el asunto o lo desfiguran. La tercera es lo aparatoso y enigmático con que se presenta lo que es fácil en sí, cuando se expone con claridad y en armonía con las fuerzas intelectuales y prepara-

ción de los alumnos; pues no es fácil que comprendamos una cosa, cuando se nos explica en chino. Y sólo se llega a las alturas por rampas o escalones, para poder repetir a diario el caso del huevo de Colón. La cuarta es las deficiencias de los planes de enseñanza, tratados por quienes son extraños a los estudios matemáticos y sus congéneres, y que no han logrado tener leales y competentes asesores. Y por esta razón, hace más de veinte años, los alumnos de la sección de exactas de la Facultad de Ciencias, pierden los dos primeros años en el vacío, pues a ello equivalen las enseñanzas de Análisis y Geometría métrica que se diluyen en ellos, dignas de los cursos de segunda enseñanza. Y no hay que recurrir al argumento consabido de falta de preparación de los alumnos, pues entonces diremos que *cada palo aguante su vela*, y cargar contra los profesores de segunda enseñanza; y si éstos repiten el razonamiento, contra los de primera, y dar así un completo recorrido, a toda la escala educativa e instructiva, para que comience la reforma donde deba; pues los españoles no somos una colección de ineptos.

Y pasando a la Geometría descriptiva, cuya enseñanza hoy influye de un modo deplorable en nuestra educación e instrucción matemática, diremos que se falta, en el modo de disponerla, a los más rudimentarios preceptos pedagógicos.

El colocarla *al final de la licenciatura*, equivale a colocar los estudios de Física al final del bachillerato, cuando las ciencias experimentales pueden servir, en un estado rudimentario, para formar el espíritu de observación, omitiendo fórmulas matemáticas.

Sin necesidad de internarse en el vasto territorio de las superficies, recargado por las alabeadas, etc., pudiérase preparar el campo desde los primeros años de facultad, y aun desde los últimos de segunda enseñanza, como ya está acordado en las demás naciones; porque a los 16 ó 17 años y aun antes, los alumnos tienen gran disposición para el arte del dibujo; y muy bien pueden ejercitarse en las primeras representaciones de los métodos proyectivos, en las intersecciones de rectas y planos, etc., con lo cual principiarían a formar el gusto, hacia lo objetivo y práctico.

Pero acumular todos estos andamiajes, *de una sola vez*, sobre alumnos de 20 ó más años, es encomendarles una carga asaz molesta; porque a esta edad se han desarrollado las aptitudes que integran la razón, y más gustan de lucubraciones de los Clebsch, Jacobi, Riemann y Weierstrass que de los Chasles, Monge y aun del predilecto Staudt, por más lógico que sea, y aunque resulten verdaderas filigranas, en eso de representar las curvas alabeadas, y las superficies. Y especialmente, las inteligencias en los últimos años de Facultad, rechazan estos manjares, por bien condimentados que se presenten; aparte de que con ello se invade el dominio de los ingenieros y arquitectos, cuyos alumnos, si no han de tener la espiritualidad de los alumnos de Ciencias, deben mitigar los sinsabores del dibujo, con el lenitivo de la recompensa material que lleva la construcción de planos de toda especie y ejercicio de su profesión.

Pero si el pasado y el presente han sido tan deplorables para la Matemática en España, no debemos desalentarnos; pues contamos con dos jóvenes y egregios profesores, Julio Rey Pastor, alumno predilecto de la Universidad de Zaragoza, hoy catedrático, por brillantísima oposición, de la Universidad Central, después de haberlo sido de la de Oviedo y a quien puede aplicarse el: *veni, vidi, vici*, como a Esteban Terradas, prestigioso catedrático de la Universidad de Barcelona, que en pocos años han dado muestras de su gran valía y que parece poseen lo que nos ha faltado a los demás, iniciativa personal y espíritu inventivo, en el buen sentido de la palabra. ¿Los malograrán los desengaños?

Y cuando la generación que ha dominado hasta el presente, desaparezca por completo, sin dejar rastro alguno, ni memoria de su mísera vida, con su espíritu de intransigencia, sus resabios y rutinas inveteradas, su apego al dogmatismo lógico, estéril fruto que nos ha enclavado en el pobre terruño de la Geometría pura, con visos al método de Staudt, como única conquista, transplantada de la escuela de Erlangen; nuevos horizontes se abrirán a la investigación científica española y pasaremos de ser una mera sucursal del extranjero a constituir un núcleo científico con vida independiente y propia.—(Octubre, 1915).

BIBLIOTECA PROVINCIAL LOGROÑO

Gobierno de La Rioja
BIBLIOTECA CENTRAL
10000223842
R
16103

LIBRARY
OF THE
MUSEUM
OF
COMPARATIVE
ZOOLOGY