

MIS DIVAGACIONES

EN EL

NUEVO MÉTODO DE ENSEÑANZA MATEMÁTICA

POR EL

Dr. D. Zoel G. de Galdeano

CATEDRÁTICO JUBILADO

DE LA

FACULTAD DE CIENCIAS DE ZARAGOZA



ZARAGOZA

Tipografía de G. Casañal, Coso, 98

1919

NO SE PRESTA

BIBLIOTECA CENTRAL DE LA RIOJA



10000205073

MDS 008193

T-73318
C. 205.073

Sonativo de S. Amos Salvador
16 Julio 1920

MIS DIVAGACIONES

R
16108

EN EL

NUEVO MÉTODO DE ENSEÑANZA MATEMÁTICA

POR EL

Dr. D. Zoel G. de Galdeano

CATEDRÁTICO JUBILADO

DE LA

FACULTAD DE CIENCIAS DE ZARAGOZA



2. 84. 410

ZARAGOZA

Tipografía de G. Casafal, Ceso, 98

1919



Mis divagaciones en el nuevo método de enseñanza matemática

Es un hecho ineludible, la adaptación al medio ambiente, lo mismo en los individuos que en las sociedades. Y esto es lo que me ha ocurrido en el transcurso de mi modesta vida científica.

Por los años 1863 hasta el 69, en que pude ingresar en la Facultad de Filosofía y Letras de Zaragoza, gracias a la libertad de enseñanza, que me permitió obtener el grado de Bachiller como alumno libre, y dejar a un lado mis títulos de Perito agrimensor, tasador de tierras y de Maestro de primera enseñanza, único galardón que pude obtener a mis veinticinco años de edad, por vicisitudes lamentables de mi vida, llegué a aprobar los grados de Licenciado en Filosofía y Letras y el de Licenciado en Ciencias exactas en la Facultad libre de Ciencias, creada en Zaragoza, por los años 1871 y 72, preparándome, con estos requisitos, a comenzar las empeñadas luchas de las oposiciones, para obtener una cátedra.

Por aquellos tiempos, el contingente matemático en España, era sobradamente modesto. Toda nuestra literatura se reducía a las obras elementales de Cortazar, Cirodde, Cardin, Vallin y Bustillo, las de Bourdon, Vincent, importadas del extranjero, las de Leroy y Olivier, en Geometría descriptiva, con la española de Elizalde y las de Navier y Duhamel, en Cálculo diferencial e integral. Y a lo sumo, Echegaray, desde 1865, comenzaba a evolucionar en nueva dirección, con la Geometría de Chasles, sus problemas de Geometría elemental y analítica, seguidos de los principios de Termodinámica, y los determinantes, traducidos de la obra de Trudy, con algunas lucubraciones que

siguieron, publicándose en la *Revista de los Progresos de las Ciencias*, por la Real Academia de Ciencias de Madrid.

Por otra parte, la empresa de prepararse para oposiciones a cátedras, era altamente *nociva* a las inteligencias de los aspirantes, en este modestísimo ambiente; en vez de nutrirse con los elevados conceptos de los grandes matemáticos que, por entonces, eran los Riemann, los Weierstrass, los Kronecker, los Jordan, habiéndose anteriormente distinguido, en la Geometría importada por Torroja a España en 1880, los Chasles, los Steiner, Fiedler y Staudt, y habiéndose publicado por Clebsch sus notables lecciones de Geometría en 1875, que llegaba hasta la Geometría sobre una curva algebraica y a la integración geométrica, así como, por su parte, Salmon divulgaba las teorías de Cayley, Aronhold y otros sobre la nueva Algebra de los invariantes, y Hoüel que, desde 1868 divulgaba, en su *Théorie des quantités complexes*, las de Cauchy, de Riemann, de Grassmann y de Hámilton, que después afianzaba en su Curso de Cálculo infinitesimal, así como Jordan contribuía al progreso de esta rama, en su obra *Cours d'Analyse*. Todo ello desconocido en España.

Pero, retrocediendo de estos progresos que llegan al año 1880, no todavía alcanzados definitivamente entre nosotros, a la época de 1874 hasta 1881, en que obtuve, por oposición, la cátedra de Aritmética, Algebra, Geometría y Trigonometría, en el Instituto de Ciudad Real; hemos de lamentar el tiempo que perdíamos todos los dedicados a los estudios matemáticos, para prepararnos, no en la ciencia arriba diseñada de los grandes maestros, sino en triquiñuelas y tiquismiquis que se le ocurría proponer a quien estaba autorizado oficialmente para hacerlo así, dentro del raquítico ambiente en que vivíamos.

Tantas deficiencias y tan lamentables obstáculos al progreso científico, me llevó a combatirlos, auxiliándome de la crítica matemática y de mis tendencias hacia la bibliografía o historia contemporánea científica, con un barniz de estilo literario que, si choca con la rigidez exigida por un matemático, propiamente dicho, es necesaria y

útil a un público no suficientemente dispuesto a recibir, sin preparación adecuada, las doctrinas perspicaces de la Ciencia pura, pues además de que la Ciencia es por sí una manifestación de la belleza, por el orden, debe hacerse agradable a las inteligencias que no pueden contemplarla directamente, como la contemplaron los genios predestinados; y de ello nos ofrece un ejemplo el eminente Poincaré. Y por otra parte, todos sabemos que una demostración elegante excita la moción estética, con tanta intensidad, como la contemplación de algunas armonías naturales o artísticas; pues la belleza se compenetra con la verdad en muchas de sus manifestaciones.

Y si bien es cierto que mis primeras obras, desde 1874 hasta 1881, se inspiran en el rigor lógico y tendencias a la crítica que razona sobre el origen y el por qué de nuestros conocimientos, más tarde se desprendieron de la intransigente austeridad de la lógica, con auxilio de procedimientos pedagógicos que saben conducir a las inteligencias, desde la infancia hasta la edad madura, por etapas continuadas que convierten los caminos de la verdad en senderos llanos y agradables y que sustituyen, a la fatiga, la naturalidad en la acción y el gusto por la labor intelectual, siendo en ésta la belleza, lo que la virtud en los trabajos de la vida.

Es cierto que este desvío, respecto a la Matemática, tiene su disculpa, por el hecho de haber empleado España ocho siglos en la guerra de la reconquista, más propia para excitar los sentimientos patrios con el estro poético, a la manera que Tirteo excitaba al combate, que a recogerse en las meditaciones abstractas que llevaron a los Descartes, Newton y Leibniz, a fundar las Universidades y las Academias del porvenir.

Nosotros, por tanto, hemos carecido de estos alicientes que fueron organizando la Matemática, constituyendo una tradición que nos ha faltado, viéndonos forzados repentinamente a importarla como planta exótica con las deficiencias anexas al caso.

Y esta importación artificial ha sido un lastre abru-

mador que nos ha detenido. Y he ahí por qué razón tal artificio había de consistir, ante todo, en asimilar las inteligencias a este nuevo orden de conocimientos, distanciados de los históricos, legislativos y literarios, únicos predominantes en la constitución de una nacionalidad.

Pero este tránsito, no puede realizarse por camino recto, como se realizó desde Leibniz hasta los Bernoulli y Euler y hasta Lagrange, y desde Gauss hasta Dirichlet y Riemann, como desde Cauchy hasta Hermite y Poincaré.

He ahí cómo, ansioso por salvar esta dificultad, he emprendido, en la última evolución que ha seguido a mis numerosas obras de divulgación, lo que yo llamo *nuevo método de enseñanza*, que suple nuestra falta de tradición científica.

Como precedente, he de consignar que mis trabajos, *Estudios críticos sobre la generación de los conocimientos matemáticos* (1908), *Carácter y transcendencia de la matemática en la época presente* (1895), *L'unification des concepts dans les mathématiques* (Congreso de Zurich, 1898), *La moderna organización de la Matemática* (diez lecciones explicadas en el Ateneo de Madrid, 1898), *Ciencia, educación y enseñanza* (1899), *Note sur la critique mathématique*, (Congreso de París, 1900), el *Boletín de crítica enseñanza y bibliografía matemática* (1910), *La Matemática en su estado actual* (Congreso de Zaragoza, 1908), *La enseñanza científica* (1902), *Plan de enseñanza matemática* (Id., 1902), *Algunas consideraciones sobre Filosofía y enseñanza matemática* (1907), *La enseñanza de la ciencia matemática en la Universidad* (1891) y *Reivindicación de la Ciencia* (1893), tienen por finalidad señalar los puntos culminantes, con propósito de descender después a dominios más concretos; pues, antes de conocer detalladamente una comarca, conviene contemplar, desde grandes alturas, su conjunto, para poder después orientarse en los diversos caminos.

¿Qué puede prometerse quien tan sólo se dedica a problemas especiales, como por ejemplo, de los cuadrados mágicos, a un problema especial de probabilidades, o a un problema geométrico? pues que habrá realizado una

labor aislada, acaso sin transcendencia, como mero ejercicio comprobante de aptitud individual, que puede ser objeto de estudio en una cátedra o en una revista.

Pero, en el desenvolvimiento científico, debe buscarse lo general y fecundo; y así lo fueron la Geometría de Descartes, el cálculo infinitesimal de Leibniz, los grupos de Galois y de Lie, los conjuntos de Cantor, etc., que han llenado siglos con sus numerosas consecuencias y aplicaciones.

Pues, si en el orden puramente matemático, estos ejemplos nos ofrecen un testimonio de la importancia de los grandes conceptos; en el orden intelectual general, tenemos también hechos de gran transcendencia, desde las lucubraciones filosófico-matemáticas de los Descartes, Malebranche, Leibniz y Kant, hasta Comte, y, desde las disquisiciones de los matemáticos Cournot, Duhamel, Freycinet, Du Bois Reymond, hasta los Poincaré, Picard, y los lógicos matemáticos, desde Boole hasta Schroeder y Peano, y hasta los propagandistas del método axiomático, Pasch, Veronese, Hilbert y otros varios.

No es pues de extrañar que yo, siguiendo mi camino emprendido desde 1874 con mis *Observaciones útiles en el estudio de las matemáticas*, *El método en la ciencia matemática* (1875), *Complemento de Geometría o Crítica geométrica* (1881), *El Algebra histórica y críticamente considerada* (1888), hubiera comenzado con un predominio exclusivamente lógico, para continuar con un carácter, ya psicológico, o atendiendo a la complejidad de nuestro espíritu, y proponer *un nuevo método de enseñanza*, fundado en el diverso modo de relacionarse entre sí nuestros conceptos.

Y esto, como he dicho, lo comencé en el Congreso de Zaragoza, con mi *Ensayo de clasificación de las ideas matemáticas* (1908), considerando los diez conceptos: combinatoria y simbolismo (subjetivos), cantidad elemental y sistemas (objetivos), correlaciones, correspondencias y transformaciones (relación), normalización y singularidades (modos) y transformaciones, a fin de considerar, en el nuevo método, la *compenetración* de los conceptos.

Pues, en efecto, en mis *Nociones de crítica matemática* (1916), trato de *el determinamiento, el formalismo, el esquematismo, el separatismo, el fusionismo, el logicismo, el intuicionismo, el sistematicismo, el criticismo y el transcendentalismo.*

Claro es que estas clasificaciones no son perfectas, puesto que, por ejemplo, el determinamiento, el formalismo, el esquematismo y el sistematicismo, se refieren a modos del proceso objetivo, mientras que el logicismo e intuicionismo se refieren a modos del proceso intelectual, el criticismo se refiere a nuestra actividad que depura las correspondencias ideales, que afectan al modo de constituirse u organizarse la Ciencia, y el transcendentalismo se refiere a las correlaciones subjetivo-objetivas, mientras que en la Memoria, presentada al Congreso de Zaragoza, trato de lo subjetivo, lo objetivo, las relaciones, los modos y la generación (en las transformaciones), excluyendo el logicismo, el intuicionismo y el criticismo (modos o procesos intelectuales), y el transcendentalismo que se refiere a la extensión de la Matemática en atención a que hoy la Física y la Química son las genuinas ciencias de la cantidad, mientras que la Matemática pura es la Ciencia del razonamiento, rigiendo a las primeras como los principios a sus aplicaciones prácticas.

Mis dos obras, *Nuevo método de enseñanza matemática* y *Ensayo de síntesis matemática y nuevo método de enseñanza matemática* se encaminan a esta finalidad, pues en efecto, a la época del determinamiento matemático que predomina en la primera etapa, siguió el del sistematicismo, comenzado con la teoría de la proyectividad en Geometría, de los Desargues, Poncelet, Chasles y Steiner, seguida de la proyectividad en los dominios de las formas homogéneas, bajo los esfuerzos de Cayley, Salmon, Aronhold, etc.; y, al sistematicismo ha sustituido el fusionismo, sobre la base de los cuerpos algebraicos de Galois, los campos de integridad y racionalidad de Kronecker, los grupos de Lagrange, Abel y Galois, y los de Sophus Lie, con las nuevas tendencias del Análisis,

señaladas por Weierstrass y Meray y completadas por los matemáticos franceses, a cuya cabeza hallamos al insigne Poincaré.

Tantos y tan diversos materiales aritméticos, algebraicos y analíticos habían de conducir a una compenetración de ideas, en la cual consiste el moderno fusionismo; esto sin contar con las tendencias críticas y filosóficas de los lógicos y creadores de la *axiomática* numérica y geométrica.

Todos estos antecedentes conducen, de un modo natural, a una nueva forma de exposición matemática.

No sólo cabe la nueva forma de cursos breves de divulgación, como capítulos especiales de tal o cual rama, que ya ha constituido una rica colección de obras especiales, mediante las cuales se han disgregado ramas distintas de los antiguos y robustos núcleos de las antiguas disciplinas clásicas; sino que tal o cual concepto o teoría sirve de ocasión para ilustrar a los alumnos o lectores en multitud de ideas, concernientes a los más diversos asuntos, lo cual es hoy necesario, ya que el inmenso caudal de conocimientos aportados, según las varias tendencias de los matemáticos dificulta o imposibilita una adquisición de la Matemática en su conjunto.

Y esta adquisición sintética, o en conjunto, se impone; porque hoy las antiguas categorías de las ideas, concentradas en las clases superiores del número, la extensión, las ecuaciones y las funciones se han desmoronado, bajo la acción de los nuevos predicados que se aplican a los antiguos substantivos o entes primordiales en las regiones matemáticas.

El copioso arsenal de tanto conocimiento, se encuentra en las bibliotecas matemáticas, que contienen los tesoros depositados por los sabios y los grandes talentos.

Y estos materiales, yacentes en el fondo de las obras y de las Memorias académicas, pueden adquirir nuevas formas y vida, bajo la acción de los investigadores a quienes les basta remover aquel fondo, para hacer brotar de él nuevas ideas; puesto que cada coordinación feliz de al-

gunas de ellas produce, por cierta ley generadora, lo que es original sobre la combinación de los elementos primitivos, a la manera de los compuestos químicos isoméricos que pueden ser distintos, a pesar de la invariabilidad de los componentes simples y permanentes.

La Ciencia no es pues aquella rígida mole de ideas, acumuladas por *yuxta* o *intussuscepción*, es indefinidamente variable, por las diversas combinaciones de conceptos, como en el orden material nos prueban los nuevos agentes de la Física y de la Química, que hoy se han enriquecido con la insólita aparición de las materias radioactivas y la de las mutuas acciones de las energías, calor, luz, electricidad y magnetismo que han derrocado el antiguo imperio de la ciencia clásica en el fondo de los laboratorios, sometidos a nuevos y más potentes medios de acción, como el microscopio y el telescopio han prolongado las escalas de los seres invisibles, por su magnitud o por su alejamiento de nosotros, entrando estas ciencias experimentales en los dominios matemáticos, bajo leyes asimilables, difiriendo, no obstante, en su procedencia ideal y combinatoria *a priori*, por definiciones, o *a posteriori* por las manipulaciones experimentales.

Así es como, por ejemplo, al lado de las lucubraciones de un Newton, acerca de la relación entre los coeficientes de una ecuación y las funciones simétricas de sus raíces, hallamos, en el Algebra de las formas, un medio de obtener el resultante de las ecuaciones, y, cómo los emanantes dependen de obtenciones iterativas de las antiguas derivadas, y los polinomios de Legendre contribuyen a la constitución de las fórmulas de Bessel, y, cómo, de los porismas de Euclides, surge la moderna geometría proyectiva, y del método de exhaustión de Arquímedes, nace el concepto de los indivisibles de Cavalieri o de los infinitamente pequeños de Leibniz.

Por esta razón, hoy, la historia de la Matemática y la bibliografía son los manantiales inagotables de todo progreso; y urge multiplicar, en los cursos universitarios, el estudio de estas ramas y las lecturas de obras cualesquie-

ra, para hacer ostensibles multitud de ideas en ellas latentes y provocar, con este motivo, conversaciones matemáticas.

Bien es cierto que esto no completa la educación del matemático; porque a esta parte, algún tanto pasiva, por contribuir tan solamente a una inventiva *a posteriori*, por composición, hay que agregar la invención *a priori*, que sólo se obtiene por el hábito de resolver problemas.

La lógica y la intuición juegan un papel distinto en este progreso.

La lógica, la menos original, produce deducciones y descubrimientos, a lo sumo, por composición o diversos modos de combinaciones; pero la intuición del genio, o del talento cultivado, llegan a algo parecido a *crear*, a importar lo no existente, como en la Química se han producido nuevos elementos por la descomposición de los que, por largo tiempo, aparecieron como simples; tales han sido los conceptos de límite, de grupo, de números transfinitos, etc.

Por esta razón, he creído que estas *divagaciones* predominantes en mis diversos escritos, se encaminan a exponer las varias correlaciones de las ideas, la mutua generación de las unas por las otras, sus identificaciones o analogías, como base de conocimientos teóricos analíticos.

Pero en el orden de la práctica, la cuestión es más difícil.

Tenemos, en la práctica de la enseñanza, la sección que concierne a la resolución de los problemas; y cuando se trata de la finalidad educativa, no puede prescindirse, atendiendo a la debilidad intelectual de los alumnos, de establecer cierta graduación en las dificultades; de modo que se proceda, elevándose con lentitud, desde los problemas elementales, a otros más complicados; y de ello nos ofrecen ejemplos las numerosas obras destinadas a esta finalidad, lo cual va despertando las iniciativas del alumno, acostumbándolo a pensar por sí, alejándole de la enseñanza dogmática; que le acostumbra a ser un mero re-

petidor o acaparador de conocimientos ajenos; lo que puede conducir tan sólo a la erudición.

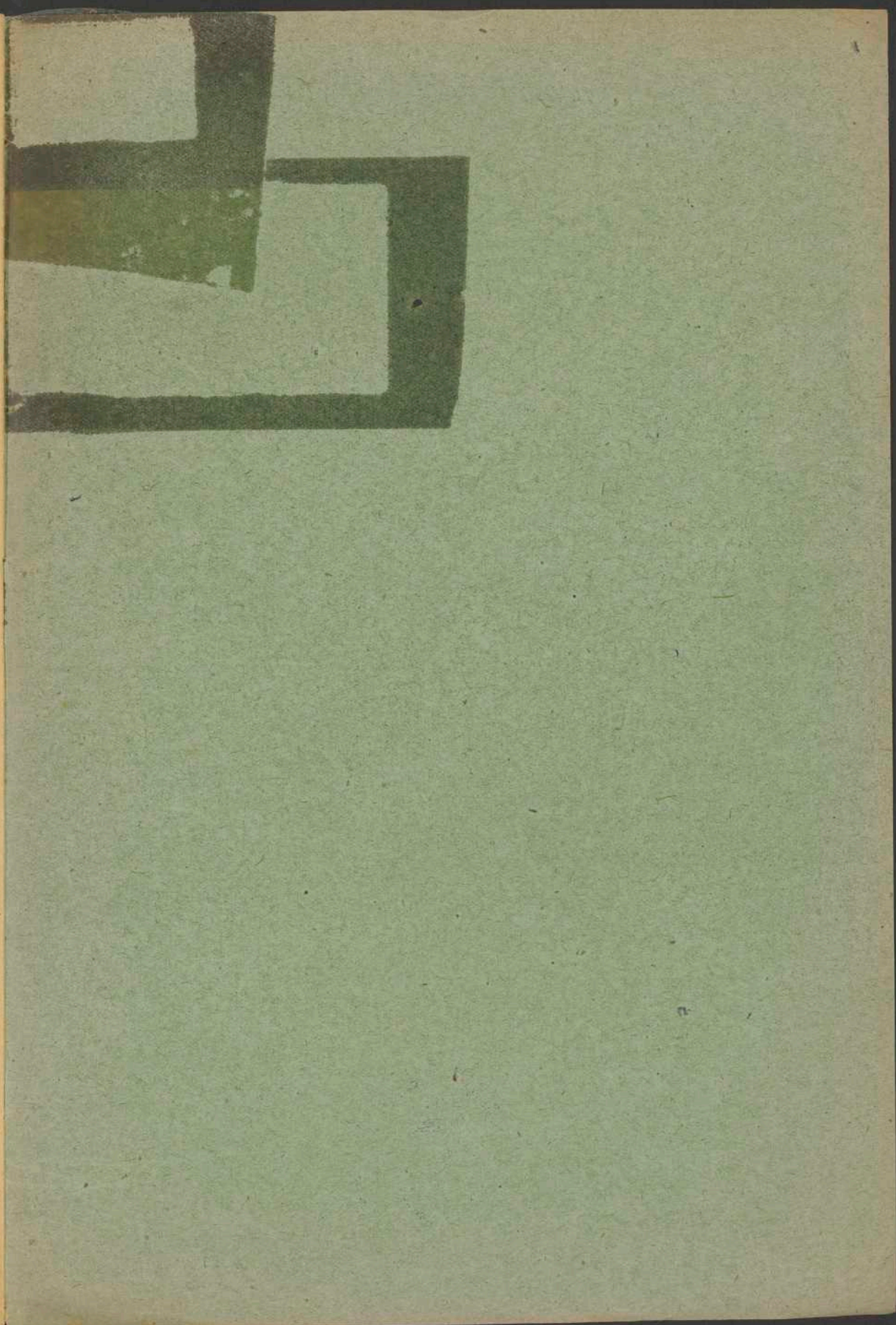
Pero, adquirido el hábito hacia la propia producción, hay que elevarse a aumentar su calidad intensiva; lo que ya depende de la potencia intelectual de cada individuo, que le coloca en la extensa escala de las inteligencias y que distingue un Newton de un mediano productor. Pero siempre, en una Nación, la suma de las potencialidades de los individuos, medirá el grado de cultura de la totalidad.

Y acerca de este particular, hemos de tener presente que la finalidad científica, aparte de sus aplicaciones útiles, debe constituir preferentemente este grado de cultura que da a cada raza aptitud para producir y elevar su nivel.

La *Revista Hispano-Americana*, con su sección de problemas, tendrá un medio eficaz para este desenvolvimiento intelectual, encauzándonos hacia la corriente general del progreso, del que nos desviamos, no por culpa nuestra, sino por las vicisitudes de la historia.

Resumiremos estas ideas, para no prolongar este artículo diciendo que hoy los estudios matemáticos comprenden tres fases complementarias: 1.^a El estudio profundo y detallado de cada rama, expuesto en los tratados. 2.^a La formación de las aptitudes originales inventivas, desarrolladas mediante la resolución de problemas. 3.^a El estudio sintético de conjunto, emanado de los conocimientos históricos y bibliográficos, fuentes de la crítica científica que pueden adquirirse en cursos breves de extensión universitaria y que permiten reducir cualquier asunto elegido, en una conversación matemática, como manifestación de su rica literatura, de cuya necesidad han dado fe los Congresos matemáticos internacionales, al agregar una sección de historia y enseñanza, y la publicación de la Enciclopedia matemática, como fuente de crítica científica.





R
16108

BIBLIOTECA CENTRAL DE LA RIOJA



10000205073

MDS 008193