Mr. Salvador

M. Z. GARCIA de GALDEANO
de Saragosse.

QUELQUES RÉFLEXIONS

SUR L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Extrait des Comptes rendus de
l'*Association Française pour l'avancement des Sciences.*

CONGRÈS DE PARIS — 1900

PARIS
SECRÉTARIAT DE L'ASSOCIATION
(Hôtel des Sociétés savantes)
28, RUE SERPENTE

Donativo de D. Amós Salvador.

M. Zoel GARCIA de GALDEANO

de Saragosse.

QUELQUES RÉFLEXIONS SUR L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

[510: 371.3]

— Séance du 3 août —

La Mathématique, dans le XIXe siècle et notamment dans la deuxième moitié, s'est transformée, non seulement dans sa partie objective, mais surtout, dans sa partie formelle ou subjective.

Cela est un fait naturel. L'époque de l'invention par la force du génie s'est transformée dans l'époque du progrès par la force de la méthode. L'enchaînement des idées entraîne les unes au moyen des autres.

Jadis, la somme des connaissances était peu considérable ; alors seulement s'imposait la profondeur des vues, l'analyse détaillée; l'esprit s'enfonçait avec force dans le terrain ferme. Aujourd'hui la masse des connaissances ne peut être saisie dans son ensemble. L'artifice de la méthode devient nécessaire pour combler les défaillances de l'intelligence.

L'instruction doit viser au développement des fonctions intellectuelles, conduisant graduellement, depuis l'analyse qui affermit l'esprit d'observation, jusqu'aux idées d'ensemble, qui deviennent le lien entre les nombreuses théories répandues çà et là et dont l'approche seulement est possible par un très puissant esprit de généralisation, dernier degré auquel doit arriver l'enseignement.

Au seuil de l'enseignement, nous croyons utile de rappeler toujours le précepte cartésien : *ne recevoir jamais aucune chose pour être vraie que je ne la connusse évidemment être telle*, principe qui, dans l'enseignement élémentaire, se réduit à maintenir la prédominance de l'intuition dans l'acquisition de toute connaissance; cette intuition se borne ici aux définitions, divisions ou variétés d'objets ; les constructions immédiates de ceux-ci d'après leurs propriétés fondamentales, tout ce qui exerce l'activité naissante de l'élève. Les questions les plus simples, mais entourées d'artifices pédagogiques, affermiront, pour les assimiler, les faits aperçus, qui se transformeront en des concepts, acquérant ainsi une nature intellectuelle.

Il faudra au commencement, apprendre plus dans les objets que dans les livres. Ainsi que dans les sciences naturelles, l'expérience et l'observation des faits devront servir de point de départ; dans la Mathématique, les concepts seront puisés dans les nombres, les figures, les modèles, qui seront les objets proposés à l'intuition. Des faits tels que la superposition, l'égalité, l'inégalité, les substitutions, l'ordination d'objets, etc... doivent être fixés, pour ne plus préoccuper l'élève dans l'avenir; surtout au commencement, il ne sera pas difficile de faire connaître comment certaines données suffisent pour entraîner des conséquences, et quelles autres donneront des incompatibilités ou des surabondances, ce qui conduira à connaître les deux parties qui composent le théorème, à les distinguer et à comprendre aussi comment les théorèmes sont des transformations les uns des autres au moyen de la substitution, dans les hypothèses, de quelques éléments par quelques autres. On verra ainsi comment beaucoup de questions sont des cas particuliers d'autres questions. Tout ceci s'affermira en étudiant les théorèmes au point de vue de la réciprocité, rapport qui s'étend plus tard à celui de la projectivité et d'autres correspondances supérieures.

La géométrie doit être aussi préférée dans le premier degré de l'enseignement, en groupant au début les propositions relatives à l'égalité et l'inégalité, qui sont les plus simples, et les fondements de toutes les autres.

L'arithmétique pourra ainsi s'étudier en même temps que la géométrie. Les concepts d'association, commutation, distribution et contenance dominent cette branche et préparent à la combinatoire.

C'est une préoccupation nuisible que de subordonner le plan de l'enseignement à certains détails tels que des insuffisances dans les démonstrations; on retarde ainsi certaines théories, ou la connaissance de certains objets dont la définition ou, peut-être, quelque propriété fondamentale suffirait pour le moment. L'ensemble doit prévaloir toujours sur quelque défaut de détail.

Les anciennes branches de la science classique ne suffisent pas aujourd'hui, de nouvelles branches ayant été ajoutées, et aussi parce qu'il est impossible de signaler les bornes des unes et des autres; ces bornes se rapprochent ou se détachent d'après quelques vues purement subjectives des auteurs ou de quelques institutions d'enseignement. Il faut donc entreprendre une classification de la Mathématique d'après les liaisons logiques de ses nombreuses branches, ce qui sera très important pour l'enseignement.

Cependant l'enseignement impose quelquefois un certain ordre, parce qu'il faut alors subordonner les questions à étudier aux moyens intellectuels des élèves, souvent insuffisants pour certains buts. Cela n'est pas applicable à la science dans son développement logique. Si le calcul arithmétique doit précéder l'algèbre, cela tient seulement à ce que nous avons à donner des faits concrets aux jeunes intelligences; mais on pourrait exposer l'ensemble des lois numériques ainsi que celles qui forment la géométrie sans effectuer des calculs ou sans construire des figures. La démonstration de l'existence d'un objet est indépendante de son existence ou de sa construction matérielle.

La Mathématique a éprouvé quelque fois les effets d'une insuffisance dans les moyens de démonstration. Tel est le cas de la géométrie, qui fut enrichie par Staudt, grâce à sa méthode purement géométrique pour les démonstrations.

La Mathématique, dans son développement logique purement déductif, pourrait commencer même par l'analyse infinitésimale, la plus haute de ses branches; tout reviendrait à supprimer des détails et à suivre les concepts généraux, les catégories de la raison qui s'entrelacent, sans se subordonner jamais les uns aux autres, étant tous des concepts premiers, pouvant servir de fils conducteurs à nos raisonnements dans des séries distinctes. Nous sommes maîtres de puiser dans la source des concepts de nombre, combinaison, ordre, continuité, égalité, étendue, succession, cause, et d'autres encore, dans le but de suivre aisément nos déductions par l'entre-croisement de ces concepts primitifs; mais *pratiquement* s'est imposée une marche presque toujours ascendante, assujettie aux besoins de l'enseignement, et qui devient contraire à l'exposition parfaite, d'après les seuls besoins de la constitution logique de la Mathématique.

Dans l'enseignement éducatif, nous avons à imiter l'histoire du progrès humain où l'analyse, cette méthode de découvertes, prévaut sur la synthèse; celle-ci est inutile quand la science ne s'est pas encore assez enrichie pour fournir de la matière au travail complémentaire de la systématisation.

L'enseignement, au lieu d'adopter la succession linéaire, doit adopter la disposition cyclique; il doit diviser et déplacer les systèmes classiques, qui ont seulement une existence provisoire, liée dès l'origine aux défauts et au manque de ressources inhérents à l'enfance. Il est convenable, pour cela, de subdiviser les branches d'après les objets à étudier, dans le but d'arriver plus tôt et plus directement à la conclusion, évitant dans la mesure du possible, les préfaces, introductions, préliminaires et toutes sortes d'échafaudages qui détournent l'élève de l'objet principal.

Dans l'enseignement secondaire, il faut détruire ou éviter certains préjugés qu'un esprit de généralisation très naturel peut enfanter sur des questions telles que la continuité, les imaginaires, la résolubilité des équations et d'autres, présentant aux élèves la science élémentaire comme une ébauche d'une science plus achevée et très différente par sa portée et dans ses allures.

L'enseignement supérieur doit réunir deux caractères: fermeté dans sa marche et spiritualité dans les conceptions. Les Facultés des sciences doivent poursuivre deux buts. Préparer pour l'art de l'ingénieur, c'est-à-dire pour les applications et aussi pour le professorat qui est sa principale tâche.

La première partie de cet enseignement aurait un caractère éminemment pratique. Elle doit fournir les matériaux pour s'élever ensuite aux plus hautes généralisations. Une descente des branches supérieures vers les branches inférieures déplacées de leurs anciens sièges réalisera ce but.

La Mathématique est un ensemble de théories qu'on doit classifier et réunir dans un plan général, avec une certaine unité; mais en outre, elle est un ensemble de méthodes; l'histoire de la Mathématique est celle d'une succession de méthodes. L'algèbre est une méthode et un instrument scientifique plus puissant que l'arithmétique, et l'analyse infinitésimale est encore supérieure à l'algèbre.

De même, dans la géométrie, la méthode projective est un autre instrument, supérieur aux méthodes anciennes.

L'enseignement, par conséquent, doit fournir aux élèves, aussitôt que cela est possible, ces moyens d'investigation. Cependant, il convient de s'arrêter à chacun de ces degrés de l'exercice intellectuel. Il est très profitable de présenter d'abord la science, non dans son plus haut degré de perfectionnement, mais comme si elle était à former. Dans cette marche elle s'enracinera plus fortement dans l'intelligence, l'assimilation des connaissances avec notre être spirituel se fera naturellement. Il faut que chacun regarde la science dans son état de formation pour assister ensuite à son organisation.

Jadis, quand le total des connaissances mathématiques était peu considérable, il suffisait d'employer des méthodes que chaque mathématicien inventait; citer leurs noms serait exposer l'histoire de la science. Mais aujourd'hui, la réunion de toutes ces méthodes, jointe aux nouveaux concepts, qui sont les fondements des théories les plus variées, nous oblige à suivre une plus large route.

A la force du génie il faut substituer non seulement les méthodes objectives, mais aussi la méthode subjective. L'étude des méthodes fait partie de la pédagogie mathématique, plus restreinte que la pédagogie générale, qui ne pourrait intéresser qu'en partie les esprits scientifiques, de même que la philosophie ne peut les intéresser qu'au point de vue de la logique.

Nous croyons qu'une nouvelle branche, la *Critique mathématique*, pourrait se substituer à la pédagogie ou s'adjoindre à celle-ci, selon les besoins et l'étendue de chaque plan d'études universitaires. Il faut, en effet, former des professeurs, distincts des hommes de science destinés à faire des applications utiles; ceux-ci ont besoin de connaître les objets des arts, des industries auxquelles la science s'applique dans le but de la production. La préparation au professorat vise la mathématique dans une autre direction qui est notre constitution intellectuelle et la valeur logique des concepts mathématiques. L'étude de ceux-ci conduira à des classifications qui permettront d'unifier la science en la rendant plus simple au milieu d'une inépuisable variété. Les concepts primitifs de relation, d'ordre, de combinaison, de situation, de nombre, de continuité, de limite, du fini et de l'infini, etc., sont à côté d'autres qui révèlent le caractère synthétique de la mathématique actuelle ; tels sont : le domaine, l'ensemble, la variété, le groupe, l'hyperespace et les éléments plus particuliers, de classe, genre, congruence, connexe, etc.

Les anciennes opérations algorithmiques ou géométriques se sont enrichies d'autres qui les ont fait sortir de leur état d'existence individuelle et passer à un état de variation, de mobilité, ou les ont rendues systématiques ; telles sont : la projectivité, l'applicabilité, les configurations ; nous citerons encore les groupes de transformations qui semblent envelopper tout, l'invariation, et plus particulièrement les correspondances d'affinité, d'homologie, d'homographie, etc.

Parmi les anciens objets, toujours réels et intuitifs, nous retrouvons certains êtres de raison très utiles pour simplifier et généraliser les procédés et les résultats mathématiques ; tels sont les êtres imaginaires ou idéaux de diverse nature employés dans quelques raisonnements ; les hyperespaces, les objets du calcul formel ou combinatoire et de l'algèbre symbolique.

Toutes ces brèves indications montrent l'importance de la branche que nous avons appelée la *Critique mathématique*, et qui sera le couronnement des études pour le professorat ; elle contribuera à la généralisation, la simplification et l'unification de la science, non seulement au point de vue logique, mais aussi au point de vue historique, qui aura sa place, parce que faire connaître la Mathématique moderne c'est exposer son histoire, formée par la riche bibliographie du XIX[e] siècle, dont le répertoire est si avancé grâce aux travaux de la Commission permanente et à l'active collaboration de tous les mathématiciens.

Nous terminons en remarquant que les noms des mathématiciens illustres sont des *schèmes* de leurs propres théories ; en les rappelant, on joint l'histoire à la science même.

IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 11450-6-01