BOLETÍN

DE

Crítica, Enseñanza y Bibliografía Matemática

DEDICADO Á LA

ASOCIACIÓN ESPAÑOLA PARA EL PROGRESO DE LAS CIENCIAS

Y PUBLICADO POR EL

Dr. Zoel G. de Galdeano

Catedrático de Cálculo infinitesimal
en la Universidad de Zaragoza, Corresponsal de las RR. Academias de Ciencias
de Madrid y de Lisboa
y miembro de otras Asociaciones matemáticas.

ZARAGOZA
Tipografía de Emilio Casañal, Coso, 100

1908

BOLETÍN

DE

Crítica, Enseñanza y Bibliografía Matemática

DEDICADO Á LA

ASOCIACIÓN ESPAÑOLA PARA EL PROGRESO DE LAS CIENCIAS

Y PUBLICADO POR EL

Dr. Zoel G. de Galdeano

Catedrático de Cálculo infinitesimal
en la Universidad de Zaragoza, Corresponsal de las RR. Academias de Ciencias
de Madrid y de Lisboa
y miembro de otras Asociaciones matemáticas.

ZARAGOZA
Tipografía de Emilio Casañal, Coso, 100

1908

BOLETÍN

DE

CRÍTICA, ENSEÑANZA Y BIBLIOGRAFÍA MATEMATICA

PREFACIO

El primer Congreso científico de la Sociedad española inaugura una nueva era en nuestra vida científica; si vida puede llamarse á esta quietud intelectual que nos abruma, desde muy largo tiempo.

Hace falta ante todo, para esta vida, una renovación de la atmósfera, que ha de comunicar movimiento á nuestras inteligencias atrofiadas por el reposo, debido á la ley de inercia, en virtud de la cual todo se mueve conforme al impulso recibido.

Según los planes que nos rigen y los procedimientos repetidos, con persistente monotonía, no refiriéndonos á lo material que principalmente concierne á las ciencias prácticas por excelencia, como la Física y la Química, sino á la Matemática teórica, que preside la evolución de éstas y otras muchas aplicaciones, podemos decir que ha faltado: 1.ª Una colección de enseñanzas, conforme á los planes de las Universidades modernas. 2.ª Procedimientos pedagógicos para facilitar la adquisición de los conocimientos y hacerlos agradables.

Sin estas dos condiciones, la enseñanza es completamente inútil y carece de finalidad.

La publicación del *Boletín de crítica, enseñanza y bibliografía matemática* tiene por objeto, no solo poner de manifiesto las diferencias de nuestra enseñanza matemática, desde su punto de vista formal y práctico, sino servir de complemento á los estudios oficiales, ya con exposiciones didácticas sobre las diversas ramas de la Ciencia, ya con noticias interesantes del movimiento actual, en lo que concierne á la misma.

Diferencias entre la segunda enseñanza y la superior

Las enseñanzas elementales deben tener cierto carácter de aislamiento. Las inteligencias por formar, no se hallan dispuestas para las grandes síntesis; porque éstas solo se edifican sobre numerosas ideas y conocimientos. Lo individual debe preceder á lo general, el análisis á la síntesis, la intuición á lo abstracto, las representaciones sensibles á las leyes ó principios científicos.

La enseñanza debe imitar á la Naturaleza y seguir la marcha de la evolución histórica. Aquélla ofrece el material á nuestros sentidos, para que se depure por los conceptos; ésta se verifica en ciclos de conocimientos incompletos, que se perfeccionan en otros ciclos sucesivos; los genios matemáticos adivinaron lo que después ha completado la crítica perfeccionándolo, y haciéndolo servir de base para nuestros descubrimientos.

Es por lo tanto desacertado el querer enseñarlo todo, el engolfarse en detalles indigestos que producen repulsión y antipatía previa, causa del alejamiento hacia lo que pareció desagradable al principio, y que lo parecerá siempre, después. Será también desacertado el pretender enseñar completamente lo que se llama una asignatura. Convendrá enseñar cierto número de definiciones, divisiones y reglas, aprovechando la edad del desarrollo de la memoria mecánica; el libro, escrito con la debida concisión, será un *vade-mecum* del estudiante; pero del libro ha de extraer el profesor lo sustancioso, para su obra educativa, por medio del análisis y una graduación lenta de los problemas que vayan enseñando al alumno á discurrir, venciendo dificultades de escasa cuantía.

Así como los libros extensos son perjudiciales; porque los han de aprender de memoria los alumnos, no acostumbrados todavía á dar el debido valor á las palabras y, menos, á hacer resúmenes de lo que han leído, propio solo de personas de cierta cultura; también es muy difícil que mantengan la atención durante largas peroraciones del profesor, pues se hallan en la misma situación que quien oye hablar en país extranjero un idioma al cual no se halla acostumbrado.

La acción del profesor debe ser intermitente, no contínua; debe seguir el trabajo del alumno corrigiéndolo; y así éste tomará parte activa, é irá *construyendo* la ciencia á su manera, bajo la dirección de aquél, que antes de formular la conclusión definitiva, debe hacer intervenir á otros alumnos para mantener así en acción la actividad y el interés de todos, y elaborar las ideas.

En vez de presentar las ideas bien ordenadas en una rigurosa síntesis, deben presentarse según el desorden del análisis. Los ensayos, las tentativas y correcciones de este método, aquilatan los conocimientos á que conduce. Los conocimientos así adquiridos son verdaderamente propios; ha elaborado las ideas, convirtiéndolas en productos intelectuales, es decir, en conocimientos fundados; y así como el arquitecto contempla el edificio que ha construído, desde los cimientos, después de haber analizado todos los materiales constitutivos del mismo, el alumno podrá contemplar el todo, que es la forma abreviada de su trabajo.

En la enseñanza superior, por el contrario, el libro adquiere una gran importancia. Ya el alumno ha comenzado á emplear la razón como instrumento; ya puede hacerse cargo de lo substancial de los razonamientos, expuestos en las obras de consulta; y puede seguir la explicación del profesor, que debe tender á la síntesis de lo que nunca puede ser tratado, desde muchos puntos de vista, en una sola obra.

Si en la segunda enseñanza, cada asignatura es y debe ser una disciplina aislada de las demás, en la enseñanza superior esta tendencia debe ir desapareciendo desde el comienzo, pues las ramas de la Ciencia se van entrelazando. En Geometría analítica, los determinantes, invariantes, etc., se combinan con los resultados obtenidos en el estudio de las curvas y de las superficies; en el Algebra también hay algunos de estos conocimientos que se enlazan con los concernientes á los grupos y la teoría de los números.

Y cuanto más nos elevamos, tanto más se relacionan los diversos sistemas.

En segunda enseñanza, parece que nos hallamos en la época del clasicismo. Así como en los porismas de Euclides nos encontramos innumerables proposiciones particulares, cual detalles dispersos de un problema superior, que se trata de resolver, y que Chasles resolvió, en general, con la síntesis que constituye su Geometría superior, también vemos cómo Fermat acumula proposiciones sobre proposiciones en sus comentarios á la Aritmética de Diofanto, y los Bernoulli, el Marqués del Hospital y otros afianzan con nuevos problemas, y contrastan la eficacia y bondad de los inventos Newtoniano y de Leibnitz. El espíritu analítico de las escuelas filosóficas, exclusivamente demostrativo, parece preponderar, con excepción de las ráfagas de genio que daban algún avance, llegándose hasta la gigantesca concepción de la Mecánica celeste. La enseñanza secundaria debe tener ese carácter clásico, esa sobriedad de razonamientos, esa fijeza en cada cuestión especial, que no desvíe la atención de la línea recta del razonamiento.

En la enseñanza superior, el carácter preponderante es el que señalan las innumerables conquistas hechas en el brillantísimo siglo XIX.

Hoy, no investigamos aislados cual los pocos matemáticos que formaban una pléyade, en la época de Descartes, ni en la Newtoniana, pues los organismos universitarios, mancomunados con multitud de asociaciones científicas, constituyen un núcleo poderoso de progreso; y la Ciencia se mueve bajo tan múltiples impulsos. No es de extrañar pues, este avance continuo en todas direcciones; y que la vida de las ideas sea una de las varias finalidades y la más poderosa, en el progreso de las naciones cultas; lo que se expresa por el gran movimiento bibliográfico, tanto en la ciencia abstracta, como en sus aplicaciones.

El rigor en la demostración se aquilata, hasta el punto de prescindir de la intuición, manteniéndolo en los razonamientos, por el ténue hilo de los conceptos eminentemente abstractos de la razón pura.

Mas, por otra parte, la dirección del razonamiento no es la exclusiva de agotar todas las consecuencias de un principio, ahondando indefinidamente; sino la de extensión, propia de los juicios sintéticos que suman conocimientos nuevos á los ya adquiridos, como ramas colaterales que se enlazan y afianzan las unas en las otras, adquiriendo mayor rigidez y fuerza y constituyendo macizos que sirven para sostener y generar otras nuevas.

Así como el silogismo es puramente un medio demostrativo, y contiene, continuándose, multitud de consecuencias; así tenemos numerosas verdades matemáticas, contenidas en una verdad más general; y nos basta poseer esta primera, para poseer todas sus consecuencias, que fácilmente pueden hacerse explícitas, sin preocuparnos de ello, hasta que nos sirvan de alguna utilidad.

En otro caso nos hallamos, cuando se pretende obtener nuevas verdades. No se trata de una coexistencia de más á menos, como entre la causa y el efecto, entre el género y la especie; sino de una coexistencia colateral. No se trata de profundizar, desde un principio, todas las consecuencias en él contenidas, sino de agregar á unas coexistencias por contiguidad, otras que espesen la serie de relaciones, como se espesan las tramas de un tejido ó la red de triángulos en un cánevas geodésico.

Esto depende de lo que en lógica se llama la comprensión de una idea, que corresponde á la multitud de cualidades que posee cada ser.

Por ejemplo: en la Geometría del triángulo, se trazan las bisectrices, las medianas, simedianas, el punto y círculo de Lemoine ó de Brocard, etc., y al triángulo primitivo se han agregado distintas figuras, íntimamente relacionadas, y que forman un complejo de construcciones indefinidamente prolongable, por agregación de nuevas figuras; y el plano será el soporte de todas ellas; y esto resulta análogamente en las configuraciones y en la multitud de sistemas que pudieran construirse; y no simplemente en un plano, sino en el espacio; y no en el espacio, sino en nuestra inteligencia que, contiene la imagen del mundo exterior en forma de ideas, y cuantos mundos ideales pueden crearse, con esa fuerza combinatoria, que es la fuente de todas las relaciones que se encadenan en la Ciencia.

Por esta razón, las matemáticas han dado gran impulso al estudio de las transformaciones y las han multiplicado, tanto, que hoy casi puede llamarse la Matemática, la ciencia de las transformaciones.

Y la enseñanza universitaria sigue á la Ciencia en esta evolución. Así como en Geometría elemental, por ejemplo, se pasa de un teorema á otro teorema, mediante la simple sustitución de un ángulo por otro, ó de una recta secante por otra paralela, en las geometrías superiores, ó en análisis, se pasa de unos sistemas á otros; y esto constituye un método demostrativo; porque la existencia y la verdad del primer sistema se reproduce exactamente en el sistema deducido, á través del término medio, representado por la relación intermedia, que sirve de tránsito del uno al otro.

Este método de las transformaciones es el instrumento más precioso; porque traslada las dificultades de un sistema á otro más sencillo, hasta que se han reducido á verdades evidentes: así vemos cómo, por el teorema de Noether, una serie de transformaciones bicuadráticas reduce un sistema que contiene tangentes coincidentes á otro que las contiene separadas; así, las secciones hechas en una superficie de Riemann reducen el orden de conexión; y así, desde el comienzo del cálculo integral, un simple cambio de variables conduce á la integración de muchas funciones.

Por último, la enseñanza universitaria, no debe practicarse en un orden simplemente sucesivo, á la manera de un hilo sútil de longitud indefinida, sino como una serie de irradiaciones ó núcleos que, desde varios centros, se extienden en múltiples direcciones; en vez de separar por abstracción, se deben concentrar las ideas en los sistemas, donde se compenetran, formando entidades complejas. Y al contrario, en vez de avanzar por lo simple, sintetizado, en un procedimiento de carácter abstracto, se debe caminar por lo compuesto, para estudiar á la vez varios objetos, que el análisis va separando de aquéllo. Por ejemplo, con motivo de las integraciones, el alumno se irá perfeccionando, mediante la práctica, en las diferenciaciones; y en vez de separarse, como hace medio siglo, el cálculo diferencial del integral, se estudiarán simultáneamente; porque ambas operaciones son completarias entre sí.

Otra fase de la enseñanza matemática es su parte estética, muy descuidada.

Es cierto que los verdaderos matemáticos no necesitan de estos auxiliares. En sus privilegiadas inteligencias se presenta la Matemática con sus naturales atractivos, ocultos á la generalidad de los que estudian por necesidad esta ciencia.

Si la inspiración artística tiene algo de casuístico, de inconsciente y rápido que parece apartarse de las leyes naturales, las altas ideas de los génios matemáticos han tenido su parte de inspiración, aunque refrenadas por la razón, que ha contrastado los primeros arrebatos del genio. La ley de atracción de Newton, la concepción de los grupos de Galois, la inversión de las integrales elípticas, etc., han sido momentos de inspiración, así como lo es, aunque en menor grado, una solución *elegante* de un problema.

Generalmente atrae más aquéllo que impresiona á los sentidos; pero existe un sentido superior que ve las relaciones abstractas; y éste, ó se adquiere con la práctica de la enseñanza ó existe, desde un principio en las inteligencias matemáticas.

De análoga manera que un objeto bello, se ofrece por los sentidos á la sensibilidad, que provoca la moción estética en nuestro espíritu, los objetos matemáticos, por sus armonías, por la manera de constituir unidades de conceptos en variedades, que son, como los colores en la pintura y las notas en la música, también producen la impresión de lo bello. Este tiene sus gradaciones. Comienza por la contemplación de la simetría, por la combinación de las figuras regulares en los dibujos; continúa por el empleo de ciertas curvas, también regulares; y se ve cómo esta composición de elementos sencillos va constituyendo combinaciones variadas y agradables.

Por otra parte, el número nos ofrece algunas armonías, tales como las que Pitágoras comenzó á contemplar en las primeras representaciones gráficas de los mismos. Y estas armonías se continúan, primero conforme con la sobriedad según la que el Algebra interpreta y resuelve algunos problemas, lo que se acentúa más, cuando nos elevamos á las armonías de los infinitos, etc.

Para el matemático, la Mecánica celeste de Laplace es como un reflejo de las armonías sensibles del Universo; y no necesita ni los colores ni las magnitudes, ni la simultaneidad de los movimientos para contemplar un conjunto bello y hasta sublime; solo que en el matemático, la razón dirije á la moción estética, que se realiza como un hecho subordinado.

Pudieran escribirse muchos volúmenes, describiendo las bellezas matemáticas, que constituyen un dominio extenso en el dominio de lo bello; puesto que una de las características de este sentimiento es el orden; y el orden resplandece en todas las concepciones matemáticas, desde la concepción de Descartes, al subordinar á las ecuaciones la Geometría, y desde el binomio de Newton, que encierra el germen de las leyes combinatorias, y la aspiración de Wronski hacia una ley suprema de la Matemática, hasta el actual armonizarse de las más diversas teorías, todo expresa que la Matemática tiene una constante dirección hacia lo bello; pero lo bello, cuyo escenario es la razón, independiente de otras afecciones humanas, que también ofrecen en otros mundos distintos la representación de la belleza.

Pero en lo bello matemático existe un elemento considerado generalmente, como extraño á la estética; la precisión que es su carácter esencial, el solo que guía hacia lo verdadero, independientemente de las apariencias ó aspectos de la verdad.

Otro carácter de la enseñanza universitaria ha de ser el espíritu de expansión. La Matemática actual no puede encerrarse en un marco, por grande que éste sea; extiende sus teorías indefinidamente en multitud de direcciones; y sobre los problemas actuales, cuando se hallen resueltos, ó se haya demostrado su imposibilidad, surgirán otros nuevos.

El estado natural de la Matemática, como el de la Física y la Química, es de formación y de avance indefinido.

El profesor, además de las obras de consulta, ha de hallarse al tanto de lo que actualmente se produce. Por esto, son muy provechosas algunas lecciones semanales ó quincenales, según se efectúa en algunas universidades, de lectura ó crítica de algunos capítulos ó trabajos, sean memorias ó disertaciones, lo que es muy útil para despertar el espíritu de la investigación y de análisis general.

Enseñanza de la Geometría

No vamos á recorrer la enseñanza de la Geometría, ya según la dirección adoptada por Legendre, cuyos más genuinos representantes han sido hasta el día M.M. Rouché y Comberouse, ya según el nuevo rumbo seguido por M. Meray, que tantos prosélitos cuenta, en su empleo de las rotaciones y traslaciones, y la subordinación al concepto de grupo.

Vamos á exponer algunas observaciones complementarias á la enseñanza y á la exposición de esta disciplina matemática.

Respecto á los principios de la Geometría, bastará decir que, más deben ser presentados á los alumnos como origen de donde han de partir las consecuencias que vayan aprendiendo, que como discusiones filosóficas, pues la crítica de los principios debe ser objeto de la preparación para el profesorado, en los cursos universitarios de Pedagogía é Historia crítica de la Matemática.

Es muy necesaria la noción de la recta y el plano como sistemas de puntos fijos en el espacio, por el resbalamiento, según dos ó tres puntos que quedan fijos; lo que puede enseñarse con reglas ó planos adecuados.

Los procedimientos de superposición ó del empleo de triángulos iguales, son los primeros recursos que se utilizan para la demostración geométrica.

Pero enseguida se podrá dar cierta unidad á estas investigaciones, tomando como base las equivalencias geométricas. Así, por ejemplo, en un plano; dar dos puntos equivale á dar un punto y una dirección, ó sea un ángulo (con relación á una recta ó dirección fundamental), y dar una paralela equivale á dar un punto para la determinación de la recta.

El sistema de dos paralelas cortadas por una secante equivale á dar un triángulo. El triángulo es la figura fundamental de la geometría plana, pues todas las determinaciones se reducen á encadenamientos de triángulos, que se determinan á su vez, mediante combinaciones de dos puntos ó de un punto con una dirección; y no basta dar dos direcciones (respecto á dos rectas que necesariamente forman un ángulo finito ó nulo) porque: *Todos los triángulos tienen una suma angular constante*; y no se sabe cuál de estos triángulos es el que quiere considerarse, habiendo por lo tanto, indeterminación.

Pero hemos de tener presente, desde un principio, otra relación que sigue á la *determinación* ó sea, la *correspondencia unívoca*.

La forma lógica de la relación unívoca está dada por las proposiciones contrarias ó recíprocas.

La demostración simultánea de una proposición y su contraria ó su recíproca equivale á establecer la correspondencia unívoca.

Esta correspondencia es un caso particular de la siguiente: *Si en todos los casos posibles de una cuestión, á cada uno de ellos* *corresponde una consecuencia distinta, se efectúa la proposición recíproca; la relación será unívoca.*

Cada antecedente con su consecuente, se hallarán en una región distinta de las que representen esquemáticamente cada uno de los casos. No habrá ni omisión ni compenetración.

Esta relación unívoca se podrá continuar por toda la Geometría, á partir de la definición de la recta como la que se superpone á sí misma, al moverse, quedando fijos dos de sus puntos.

Al girar una recta por un punto exterior á otra, tomada como base, se formará toda la serie posible de ángulos, siempre creciendo ó decreciendo, hacia un ángulo llano (dos rectos) ó hacia cero, según la dirección del giro; y, á cada ángulo corresponderá un solo punto de la recta y quedarán establecidas acto continuo, las proposiciones relativas á la igualdad y desigualdad de ángulos con los lados, en el triángulo, y por consiguiente las propiedades del triángulo, figura fundamental de la geometría plana.

La perpendicularidad, como el paralelismo, como los triángulos isósceles, son las singularidades de la Geometría elemental. El triángulo equilátero es una doble singularidad. Las primeras, suman una determinación; esta última dos, en las condiciones impuestas en los problemas; lo que produce una superabundancia ó exceso de condiciones, que permite una sustitución de términos medios, para llegar á la solución buscada.

Con auxilio de la simetría, se llega al estudio del paralelógramo y hasta los polígonos regulares de $4n$ y de $6n$ lados, siendo n entero. Aun al pentágono regular se llega, con auxilio de la simetría y de los triángulos isósceles; pero ya desde el decágono, hay necesidad del auxilio del número.

Aun se extiende la influencia del método de las figuras iguales á las relaciones de la recta y del ángulo con la circunferencia; y el triángulo isóscelcs es la figura auxiliar necesaria, para las relaciones de igualdad y de desigualdad de posición ó de magnitud.

Pero, como se ve en todas las teorías matemáticas, el número se presenta como el instrumento más natural y sencillo en sus aplicaciones. La razón de proporcionalidad se impone desde luego.

La perpendicular nos ha servido de término medio para las relaciones de simetría. El paralelismo nos sirve para la proporcionalidad, la homotecia y la semejanza de las figuras.

Podemos imaginarnos el plano formado por una red de triángulos iguales, como más adelante se ve en la teoría de las transformaciones fuchsianas; y formándose con estos triángulos elementales otros triángulos, según indica la formación de los números triangulares, nos encontramos con los triángulos semejantes, que se refieren unos á otros, según la ley de proporcionalidad.

El complejo de un triángulo rectángulo con los dos triángulos parciales formados por la perpendicular á la hipotenusa, trazada desde el vértice, conduce al teorema fundamental de las relaciones métricas en toda la Geometría euclídea: al *teorema de Pitágoras.*

Ya no es necesario apelar al elemental procedimiento de la simetría, pues todas las determinacioones serían posibles, mediante redes de triángulos rectángulos; pero esto se suple por el teorema de Pitágoras extendido á cualquier clase de triángulos. Esta relación métrica permite el tránsito de las cantidades ligadas por la ley de proporcionalidad, ángulos, arcos, áreas, etcétera.

Pero las relaciones métricas, después de obtenidas individualmente, se sistematizan en el capítulo de la Geomstría elemental que se llama Trigonometría.

El plano, lo consideraremos ahora cubierto de triángulos homotéticos con cada triángulo rectángulo, cuyo uno de los vértices de la hipotenusa es el centro y el otro un punto de una circunferencia fundamental para deducir, mediante el coeficiente de proporcionalidad, de cada triángulo, todos sus homotéticos; y girando de un modo continuo la hipotenusa alrededor del centro, y considerando todos los triángulos homotéticos de cada tipo de triángulo rectángulo fundamental, tendremos todos los triángulos del plano, sometidos á la ley universal de los grupos.

Sin embargo, la Matemática, siguiendo un rumbo invariable hacia la generalidad de las ideas y la sistematización, sustituye á este procedimiento natural, el que le permite pasar rápidamente de unas determinaciones métricas á otras, por medio de las *fórmulas* trigonométricas, deducidas de la definición del seno como una relación numérica entre un cateto y la hipotenusa; y tenemos resuelto en toda su generalidad el problema de la métrica elemental.

Expuesto ya lo concerniente á la métrica elemental, pasemos á otro orden de ideas.

Podemos suponer el plano eomo una inmensa pizarra donde coexiste una combinación de figuras, sometidas todas ellas á leyes geométricas definidas; y de ello nos ofrece un ejemplo la Geometría del triángulo, cuyos puntos notables, como dice M. Poulain, que se pueden nombrar, son en número ilimitado; y todas sus innumerables figuras expresan soluciones de un número indefinido de problemas.

La supuesta pizarra puede borrarse, para dar lugar á nuevas combinaciones de figuras. Y en este caso, la Geometría elemental se nos presenta como una fuente inagotable de cierto número de configuraciones.

En particular tratemos de resolver un problema sencillo, por ejemplo: *Trazar desde los puntos A y B*, exteriores á *una recta, otras dos rectas que se encuentren en ésta, formando dos ángulos iguales con ella, en sentido opuesto.*

Se sabe que para resolver este sencillo problema, al tomar el punto B', simétrico del B, con relación á la recta dada, entre todos los vértices de los triángulos isósceles, $BM'B'$, $BM''B'$ etcétera, el que da la solución es el vértice M que se halla en la recta AB'.

Análogamente, en la resolución del problema: *Por los extremos de una recta AB, trazar un arco de circunferencia capaz de un ángulo dado*, después de haberse trazado un ángulo MBB' igual al dado, de modo que BB' sea la prolongación de AB, el triángulo isósceles AMB, inscripto en la circunferencia que se busca, juntamente con la perpendicular en B á BM, es la figura que conduce á la solución.

Vemos que, en el primer problema, la recta AMB', y, en el segundo el triángulo AMB, que son dos figuras regulares ó singulares, agregan una condición que *determina* la figura, cuyo complejo da la solución, mediante un simple cambio de un elemento por otro.

De entre los puntos en número infinito M', M'', M''',... de la recta, en el primer problema, solo el M de la recta AB' está *determinado*, de igual modo que el triángulo isósceles AMB, entre la infinidad de triángulos $AM'B$, $AM''B$,...

En el primer problema, figuran la recta y dos puntos simétricos, en el otro, la tangente en B á la circunferencia, el eje de simetría de los puntos A y B, y un sistema de oblicuas iguales.

Se ve pues, que lo esencial en la solución de los problemas, es obtener figuras *singulares*, que tengan una condición superabundante; y, en este caso, basta ya sustituir el elemento que se busca, unido con el agregado ó adjuntado, por una relación de coexistencia determinada.

Ya se sabe que el análisis geométrico de Platon ó Pitágoras, es un enlace hipotético al principio, que se hace efectivo, con auxilio de las figuras intermedias que se adjuntan.

La Geometría elemental expresa los defectos inherentes á la ciencia de las primeras épocas. El genio suple á la falta de métodos y de leyes generales.

Los métodos por simetría, por inversión, de lugares geométricos, el de traslación paralela de Herr Petersen y otros muchos que pudieran citarse, expresan rasgos felices de inventiva, con los que se suple la falta de los superiores ideales de la ciencia moderna.

Sin embargo, con la variedad de métodos arriba enunciados, se combina cierto espíritu de generalización, expresado por las sustituciones sucesivas de unos problemas ó teoremas por otros.

La demostración de un teorema es un encadenamiento de proposiciones, en el que se eliminan varios términos medios, quedando unidos los términos extremos.

En la resolución de un problema, se hacen transformaciones particulares, que reducen aquél á otro problema equivalente, llegándose de este modo á un problema final.

Así, por ejemplo, el problema: *Trazar una circunferencia tangente á otras dos y á una recta*, se reduce á: *Trazar una circunferencia tangente á una recta, á una circunferencia y que pase por un punto*, sustituyendo una de las circunferencias por otra concéntrica y la recta por otra paralela.

Esto lo podemos observar, considerando los célebres porismas de Euclides, que expresan una primera tentativa hacia una generalización de la Geometría, pero encubierta aún por las trabas naturales de una particularización.

Los porismas de Euclides son proposiciones, en las que uniéndose el carácter determinado del problema al carácter general del teorema, condensan en sí, estas dos clases de proposiciones. Se presentaban como un rico filón de verdades, y, á pesar de su carácter de individualización, encerraban los gérmenes de los teoremas de Pascal y de Brianchon y del procedimiento de generación de las cónicas, que evidenciaron con luz clarísima estos dos geómetras, con un espíritu sintético.

Hemos llegado á la línea divisoria de las Geometrías elemental y superior, en la que la enseñanza pasa á adquirir su carácter sistemático.

Nota acerca de algunos problemas de la Matemática

Como es sabido, dos procedimientos sigue toda ciencia en su desarrollo; y de ellos no puede emanciparse: el análisis y la síntesis.

Por combinación de los conocimientos adquiridos, surgen otros nuevos, se forman los conglomerados de ideas y de relaciones que se llaman sistemas.

El avance por composición ó síntesis es, en general, es más sencillo y fecundo; y es parecido á las operaciones directas del cálculo. Rara vez se encuentran contradicciones ó anomalías, porque los primeros datos se extienden ó dilatan, y fertilizan el campo de las verdades, para ponerlo en disposición de producir otras nuevas.

Pitágoras acumuló interesantes propiedades de los números y Euclides llegó hasta los porismas.

Más tarde, la Perspectiva, la Geometría descriptiva, la Proyectiva con sus dos métodos de la proyección y de la sección seguían su marcha progresiva, acumulando siempre relaciones, por combinación.

Pero ya en los primeros pasos del análisis, los resultados eran todavía problemáticos,

La inteligencia se encontraba con algo que le era imposible descifrar; y se detenía ante especies de enigmas, como eran los números llamados *sordos*, así como, por el contrario, se llamó *armónica* aquella hermosa relación que corresponde al acorde perfecto de la música; y encontraba aun más dificultades que vencer en las llamadas *raices imposibles* de las ecuaciones.

En otro terreno, se formularon los famosos problemas de la cuadratura del círculo, trisección del arco, etc.; y progresa la Ciencia con esfuerzos sin cuento, para tratar de resolverlos.

Y todos estos fracasos ó contrariedades obedecían á una causa. Se trataba en tales casos de algo complejo que se aspiraba á desplegar ó desenvolver, sin un conocimiento de su naturaleza íntima; se trataba de obtener una relación ó entidad contra su manera de ser, que implicaba lo absurdo ó lo contradictorio.

Se atribuían á la Matemática incorrecciones que solo procedían de la inteligencia y nunca del rigor y exactitud de aquélla.

Los ejemplos citados conducen á las dos clases de causas que han influído, por largo tiempo, en producir cierta desconfianza para atribuir á la Matemática el carácter de la ciencia exacta, por excelencia.

Tratemos, en primer término, el caso citado respecto á las ecuaciones. Las deficiencias aparentes del Algebra resultaban, no de esta ciencia y rama, no del objeto, sino de la discordancia entre el sujeto ó la inteligencia y el objeto. Pero ademas, un nuevo factor contribuía á oscurecer la verdad y á sumar nuevas dificultades, para que resplandeciesen las armonías y concordancias que debieran siempre existir, entre las relaciones y verdades matemáticas.

El lenguaje, este intermediario entre el sujeto y el objeto, ha sido siempre una causa, sino de errores, de falta de precisión y de exacta correspondencia entre los datos y los resultados de los problemas.

La traducción de los problemas en ecuación, como se sabe por los libros elementales, da origen á asociaciones y disociaciones de multitud de cuestiones que, una discusión pone de manifiesto; y, en cuanto á las imposibilidades aparentes, por la traducción inexacta del enunciado de los problemas ó las efectivas, por exigirse algo contradictorio, se hallan tambien expuestas en dichas obras.

Los símbolos de lo negativo, lo imaginario, del infinito y de indeterminación han sido los medios empleados por el Algebra para corresponder á las circunstancias singulares de los problemas, que les hacían salir de las reglas corrientes.

Las tentativas de Carnot, al establecer las correlaciones de las figuras, por medio de sistemas variables, de una manera continua, y los esfuerzos de Poncelet por justificar el principio de continuidad en los tránsitos de lo positivo á lo negativo é imaginario, juntamente con el principio de *transmutación* de las figuras de Monge, dieron un carácter sistemático á las relaciones entre éstas y las expresiones algebráicas correspondientes, aun en el caso en que ciertos objetos perdían su existencia real, y constituían un estado preparatorio para el actual estado de la abstracción de la Matemática, que ha establecido sus principios con rigor eminentemente lógico, á expensas de la intuición sensible.

La cuadratura del círculo, la trisección del arco, la cuestión del postulado de Euclides, la resolución general de las ecuaciones algebráicas y la integración general de las ecuaciones diferenciales se han resuelto, cada una, segun sus especiales acepciones, y su naturaleza propia.

El simple enunciado de cada una de estas cuestiones era consecuencia natural de un incompleto conocimiento de la nanaturaleza de las cosas, que hoy se ha depurado por la crítica, basada en las exactas definiciones de los conceptos.

Ahora ya no tratamos de armonizar la inteligencia ó el modo de expresión de sus conceptos, con los objetos; se trata simplemente de relacionar dos géneros distintos de objetos intelectuales, tan antagónicos, como el número y la extensión. Tal sucede en los problemas de la cuadratura del círculo y de la trisección del arco.

Estas relaciones, que parecian accesibles, desde las primeras tentativas hechas, con esperanza de éxito, eran complicadas en extremo; pues los mundos del número y del espacio se rigen cada uno por sus leyes propias; si bien la inteligencia ha llegado á armonizarlos en correlaciones innumerables que constituyen como sus intersecciones; pero en las esferas de sus existencias, se acercan muchas veces, sin llegar á coincidir; y únicamente los métodos que crea la inteligencia conducen á aproximarlos indefinidamente, como vemos que se aproxima una cantidad hacia su límite, ya se trate de números, de figuras geométricas ó de uno y otro; porque tambien, dentro de cada uno de estos mundos, existen sus entidades, en cierto modo antagónicas, irreducibles las unas á las otras, ó con existencias separadas;

así como otras se funden en coexistencias que son sus intersecciones, lo común de su ser ó de su vida.

Los dos mundos del número y del espacio existen, cada uno, como especie de caos, en el que todo se halla confundido, amalgamado, como fondo sin forma, como el mármol en las canteras, sin presentar mas apariencias que las de su estructura propia, el modo de agruparse sus átomos y sus moléculas, que son las características de su ser y existir.

Y para que sobre este caos, la inteligencia cree entidades, relaciones, formas perceptibles, agrupaciones y sistemas que se organicen en teorías y éstas en la ciencia, necesita, no solo seguir el método de composición sucesiva, arriba indicado, que constituya la síntesis; sino desdoblar por el análisis, aquéllo que está plegado en circunvoluciones complicadísimas, que solo con reiterados esfuerzos, con incesantes impulsiones y tentativas ha llegado á extender, á desplegar, á dar formas ó apariencias regulares, á convertir en ser inteligible y despues en concepto ó idea.

De esto nos ofrece un ejemplo clarísimo, la serie de ingeniosos procedimientos, y de relaciones, que han agrupado Hermite, Lindemann, y Wantzel y despues Herr Klein, para dilucidar la complicada cuestión de la cuadratura del círculo, de la posibilidad de resolver los problemas con la recta y el círculo, que llevan á demostrar la imposibilidad de resolver los problemas de la duplicación del cubo y de la trisección del arco.

Estas cuestiones ofrecen un ejemplo muy adecuado de cómo se compenetran los conceptos al parecer más heterogéneos en la resolución de un solo problema; y de cómo la Ciencia, para desplegar los objetos sometidos á su análisis, ha de plegarse á su vez, concentrando en una sola dificultad los más variados recursos, los procedimientos que pertenecen á sus regiones al parecer más apartadas.

Dejando á un lado las infructuosas tentativas hechas, desde los primeros tiempos en que los geómetras persiguieron este ideal; y citando tan solo el hecho de haber probado Lambert que la razón de la circunferencia al diámetro es inconmensurable, comenzaremos por bosquejar la serie de conceptos y de verdades que se han agrupado desde las investigaciones de Hermite, para llegar á las últimas conclusiones concernientes á estos problemas irresolubles.

Las fórmulas de Hermite, expuetas en su *Mémoire sur la fonction exponentielle*, implica multitud de relaciones.

La ecuación fundamental, como todas las ecuaciones, lleva en sí, no solo las relaciones implícitas entre las raíces y los coeficientes, sino las determinaciones de éstas verdaderas incógnitas, por el método de los coeficientes indeterminados, llegándose á un grupo de ecuaciones, que hacen explícitos aquellos valores antes implícitos, y, después de transformaciones ingeniosas, á una ley de recurrencia; procedimiento simplificador que, en la Matemática, es un recurso general para reducir las dificultades complejas á su grado más elemental, desde el que podamos ya recorrer de nuevo una fácil escala ascendente; como en el análisis, de una condición hipotética, que se llegó á convertir en efectiva, por una serie de problemas, terminada en otro final, cuya solución se conoce, se vuelve á ascender, según una nueva serie inversa; pero ya, de conocimientos reales y efectivos, hasta la condición antes hipotética, que ahora es también efectiva; porque el encadenamieto tiene en sí la efectividad ó existencia real de las verdades en él eslabonadas.

Ya hemos llegado á dar un paso importante para la resolución del problema; pero tan distantes nos hallamos de su extremo final, que aún no se distingue el camino que salve esta distancia. Todavía es necesario intercalar otros términos medios que sirvan de puente, para mirar los bordes lejanos de las dos regiones del dominio en que se mueven nuestras ideas.

Aún, parece inconcebible, ya que nuestra inteligencia no comprende á veces, cómo conceptos al parecer muy heterogéneos, se entrelazan y combinan, de igual manera que los elementos de la Química. Aún es necesario acudir á las integrales definidas de variables imaginarias, aún es indispensable, adjuntar en un proceso de realidades, algo que sólo tiene una existencia ficticia, que llega á lo sumo á la de su esquema representativo.

El tránsito de lo real á lo real por medio de lo imaginario, que efectuó Cauchy, por un rasgo de su genio incomparable, sirve hoy de fundamento, el más sólido en la Matemática, para establecer las realidades de sus incontrovertibles conclusiones.

La función de una variable compleja y ésta son las afijas de sus puntos correspondientes, en el plano de Cauchy. Las alteraciones de los valores de aquéllas influyen en las posiciones de éstos y recíprocamente.

Se trata pues, de una correspondencia de valores numéricos por una parte y de puntos imágenes por otra.

El teorema de Lindemann, por el que se demuestra la *imposibilidad de la cuadratura del círculo*, se reduce á demostrar que PI RAIZ CUADRADA DE MENOS UNO, *no puede ser raíz de una ecuación con coeficientes racionales*; y para llegar á este resultado, se forma un sólido encadenamiento de verdades, en el que intervienen muy diversas ramas del Análisis.

Como arriba se ha visto, hemos de considerar la correspondencia íntima que existe entre cada punto representativo de una función, su variable independiente y los valores de ésta, es decir, resumiendo, correspondencias entre números variables y sus puntos movibles, como pudiéramos considerar las variaciones de posición entre un cuerpo y su sombra.

Pero, como preparación ó antecedente necesario del teorema de Lindemann, necesitamos la *relación* de Hermite que conduce á la *anulación* de un determinante, que es función de *las diferencias* de las raíces de *cierta* ecuación.

Los puntos principales del trayecto, donde pudiéramos considerar que ha de reposar la inteligencia en su accidentado viaje, están señalados. Son tres: 1.º Formación del determinante de Hermite. 2.º Demostración de que al anularse dicho determinante, se llega al resultado contradictorio de que dos raíces de dos ecuaciones irreducibles distintas sean iguales, lo cual implica la imposibilidad de que pueda existir relación alguna lineal entre *ciertas sumas de cantidades exponenciales*, que entran en las fórmulas de Hermite. 3.º La imposibilidad de que *pi raíz cuadrada de menos uno sea raíz de una ecuación irreducible, con coeficientes enteros*, que representa la estación de llegada de nuestro accidentado viaje. Pues ciertamente, que ha sido necesario despejar el terreno de multitud de obstáculos, de abrir caminos expeditos, y aun de construir puentes, como si realmente nos halláramos en el caso de hacer una campaña en territorio enemigo.

Los preparativos, no ceden á los trabajos que hemos enumerado, pues constituyen un núcleo respetable de doctrina.

Necesitamos llegar al amplio dominio de las funciones de variables complejas que, como hemos dicho, se mueven, por medio de sus puntos representativos en el plano de Cauchy.

Tenemos que integrar, á lo largo de un contorno, es decir, trazar una curva en dicho plano y determinar, para cada uno de sus puntos, el valor de una integral ó función, que es la misma cosa, manteniendo siempre esa relación íntima entre los números y sus puntos correspondientes. Pero, en el plano, como es un país accidentado, existen precipicios, lugares inaccesibles que debemos evitar, aquéllos en los cuales, la función se hace infinita ó indeterminada; porque en la Matemática, no siempre se ve realizada la variación contínua que representa las llanuras; sino que, por el contrario, parece que aquélla ama las alturas y los abismos, los accidentes de todas clases, que como, en la Naturaleza, comunica al alma la impresión de lo bello.

Lo que se conoce con el nombre de singularidades, lo que nos hace forjar un mundo de relaciones, cuyos elementos son imaginarios; y que sobre el mundo sensible, donde varían nuestras intuiciones se ciernen, como en nuestra vida, sucede con las concepciones del arte, que la hermosean y nos llevan también á otra vida superior, relacionada estrechamente con la vida material complementándola; y todo ello constituye la vida superior del matemático. El arte de éste, sin embargo, arraiga con más fuerzas en las puras regiones de la razón, que en las de la fantasía. El orden, en sus indefinidas variedades, es el creador de la belleza intelectual.

Sobre la representación de un símbolo, que nació en la Ciencia con la denominación de lo imaginario, se funda toda la teoría de las funciones de variables complejas, cuya vida queda representada por las huellas que deja en un plano y aún en el espacio y en los hiperespacios.

Ya hemos llegado al determinante de Hermite; ya en el trayecto que debe recorrer la integral, según la línea trazada en el plano, hemos evitado los puntos peligrosos del viaje, que realiza aquélla, conservando su determinación y su continuidad. Pero aun necesitamos disponerla previamente, con objeto de que se presente en forma adecuada para lanzar sobre nosotros la luz de la evidencia.

En las regiones de las cantidades, éstas se presentan embrolladas y amalgamadas de tal suerte, que precisa apelar á los procedimientos matemáticos análogos, á los del análisis químico, por cuyos procedimientos se ha precipitar el metal puro de las sales que lo contienen ó ha aparecer en el fondo de un crisol.

Por los procedimientos reductores, el análisis matemático nos lleva esta vez, á contemplar nuestra integral bajo una forma normalizada, que expresa una relación recurrente entre integrales de grados sucesivos, que nos conduce á su expresión en forma lineal, cuyos coeficientes son funciones enteras, con coeficientes enteros, de las raíces de la ecuación, que sirvió de punto de partida á todo nuestro razonamiento. Y de dicha forma surgen, para cada raíz de la ecuación, otras tantas funciones, cuyos coeficientes constituyen el determinante fundamental en la cuestión resuelta por Hermite, cuya integral tiende hacia cero y acaba por anularse, lo que prepara el teorema de Lindemann.

A continuación de las relaciones arriba diseñadas, tenemos pues, la serie de transformaciones que realizó Lindemann, reducidas en lo substancial, á obtener una serie de ecuaciones de sumas de raíces de la propuesta, supuesta irreducible, como las anteriores, cuyos términos se hallan constituídos por sumas de cantidades exponenciales, que llamaremos *sigmas*, que contiene un término por cada raíz de la ecuación correspondiente de las sumas de las raíces, dos á dos, tres á tres, etc.; y lo esencial del razonamiento consiste en la *imposibilidad de existir una relación lineal, con coeficientes enteros, entre las sigmas de las exponenciales correspondientes á las diversas sumas de las raíces.*

No hay para que seguir las varias transformaciones de Lindemann, que solo pueden conocerse por medio del conciso lenguaje matemático; lo expuesto indica sobradamente la naturaleza y cuantía de los razonamientos, por los cuales se llega finalmente á la conclusión de la imposibilidad arriba formulada, que constituye el teorema de Lindemann; y no es la presente ligera reseña, para citar las recientes investigaciones de los ilustres profesores Hilbert y Klein acerca de esta cuestión, así como la de los matemáticos franceses, que han edificado una extensa rama acerca de las funciones y de los números transcendentes, cuyo origen se encuentra en una memoria de Liouville, inserta en el tomo X del *Journal de Mathématiques pures et appliquées.*

Otro de los grandes problemas de la antiguedad, muy digno de citarse, es la *trisección del arco,* que en la segunda mitad del siglo diez y nueve se redujo á *reconocer si un problema se puede resolver por la regla y el compás.*

Para que un problema se resuelva con la recta y la circunferencia, es necesario y suficiente que cada uno de los puntos encadenados por los datos se determinen: bien por la intersección de dos rectas, bien por la intersección de una recta y una circunferencia ó por la de dos circunferencias.

La resolución analítica del primer problema da una expresión racional y los dos últimos dependen de una ecuación de segundo grado, cuyos coeficientes son funciones racionales de los datos y de las coordenadas de los puntos, determinados ya por construcciones anteriores: Y puesto que se repite esta operación, al determinarse sucesivamente cada uno de los puntos por cuyo sistema se debe llegar á la resolución del problema, tendremos un sistema ó una serie de ecuaciones de segundo grado, que permitirán determinar sucesivamente una serie de incógnitas, que terminará en la verdadera incógnita del problema. Además, por ser recurrentes los sistemas, podremos simplificar; los coeficientes, serán funciones respectivamente, lineales de cada incógnita y de los datos, de tal manera, que una de las ecuaciones no podrá ser satisfecha por una función racional de los datos y de alguno de los sistemas de raíces de las ecuaciones precedentes.

Y, obtenida la ecuación resultante de eliminar las raíces anteriores á la última, se llegará á una ecuación final cuyo grado será *una potencia de dos*, que da todas las soluciones del problema y ninguna extraña, que se demuestra ser *irreducible*.

Con estos preliminares, se puede aplicar el método de Wantzel, comenzando por *determinar si la ecuación propuesta es irreducible; y, si no lo es, descomponerla en factores irreducibles*, á cada uno de los que se habrá de aplicar el método.

Esto sentado, si el grado de la ecuación irreducible del problema es una potencia de dos, *podrá* tal vez ser éste de los que se resuelven con rectas y circunferencias. En caso contrario, se podrá concluir que no es susceptible de tal solución.

Omitiendo detalles que prolongarían demasiado esta reseña, y que pueden verse en la memoria de Wantzel (Journal de Liouville, t. II, 1837) ó en la obra del Sr. Echegaray, *Disertaciones matemáticas sobre la cuadratura del círculo, método de Wantzel y la división de la circunferencia en partes iguales* (1887), bastará decir que el método de Wantzel, conduce á complicaciones enormes de cálculo, tales como las que exigen los problemas de investigar si, dada una ecuación de forma entera con una incógnita, ó en general, un sistema de ecuaciones con coeficientes racionales, admiten como soluciones valores irracionales de las incógnitas, y si, dada una ecuación entera con una incógnita, cuyos coeficientes son funciones *racionales* de los datos, decidir si la ecuación es *irreducible*.

Sólo diremos para terminar que, planteado el problema de la *duplicación del cubo*, se deduce que la ecuación resultante es irreducible; pero, por ser su grado 3, no satisface á la condición necesaria de ser una potencia de 2; y lo mismo sucede en el problema de la *trisección del arco*.

Como se vé, estos problemas entran en la región, no sólo del Algebra sino del Análisis, puesto que se eleva hasta la consideración de los números transcendentes.

Y, á contar de la época helénica, se trató de resolverlos, desde el de la trisección del arco, hasta el de la cuadratura del círculo por la construcción de curvas tales, como la cisoide de Diocles, la concoide de Nicomedes, la cuadratriz de Dinóstrato, y por intersecciones de cónicas, etc.

En cuanto á los problemas de la duplicación del cubo y de la trisección del arco, se ve que resulta de la teoría general de las ecuaciones, y sus dificultades se reducen á las de ésta, conduciendo á la teoría de Galois acerca de la resolubilidad de las ecuaciones por medio de radicales, á su teoría de la adjunción y á considerar el dominio de racionalidad.

En cuanto al problema de la división de la circunferencia en partes iguales, bastará decir, que su dificultad se trasladó á la teoría de los números, según hace ver Gauss en sus *Disquisitiones arithmeticae*; pero que dependió del Algebra, desde que Abel descubrió la teoría de las ecuaciones que llevan su nombre, y se halla expuesta en las álgebras de Serret y Herr H. Weber de la Universidad de Strasburgo y en la obra, sobre esta cuestión, del profesor Herr Bachmann

Respecto al postulado de Euclides nos bastará decir que la Geometría de Lobatschewsky ha demostrado la imposibilidad de demostrarse; pero en revancha se ha llegado á establecer la existencia de tres geometrías igualmente posibles, con sus sistemas especiales de postulados.

Vana era también la tentativa de resolver algebráicamente todas las ecuaciones, empleando á lo sumo un número finito de expresiones radicales.

En este problema, como en todos los demás, parece que los primeros matemáticos se hallaban sugestionados por una aspiración á relacionar todo lo que se presentaba como objeto de sus investigaciones en una correspondencia fijada por ellos, de un modo arbitrarios, según sus individuales aspiraciones, pues arbitrario era cuadrar exactamente el círculo, como trisecar el arco y resolver las ecuaciones con arreglo á una pauta fija, sin atender, á si las relaciones por ellas impuestas á los objetos eran las que realmente les convenían. Aquí había un término arbitrario, y la conclusión solo hubiera sido exacta por una extraña casualidad.

La resolución general de las ecuaciones algebráicas era otra exigencia arbitraria, impuesta por el espíritu exagerado de generalización que guía, por lo común, las empresas humanas.

Se resolvían las ecuaciones de 1.º y 2.º grado; y ya se aspiró á resolverlas todas, por análogos procedimientos, mediante fórmulas constituídas por un número finito de símbolos; pero el problema resistió á los esfuerzos de Euler y de Lagrange, después de haber resistido los de sus antecesores; y Abel demostró la imposibilidad.

No era posible ese desdoblamiento exigido, de lo que formaba un complejo de relaciones, que se extienden á un dominio superior al de las cantidades racionales.

Galois, por primera vez, extendió el dominio de estas cantidades, adjuntándoles irracionales, no cualesquiera, sino pertenecientes á ciertas ecuaciones irreducibles; lo que encierra un concepto de inmensa importancia; pues rige la distribución de los números según una ley de normalidad; porque entre la infinidad de ecuaciones que, como indivíduos ó elementos, se hallan en el sistema que las contiene á todas, se eligen las más simples, aquéllas que contienen siempre todas las raíces de las funciones que dependen de una sola, que en bloques, están contenidas, como factores en dichas funciones, relación análoga á la que liga á los enteros con sus factores primos, que divide el dominio de los números enteros en regiones de números, que tienen un máximo divisor común.

Esta elección de ecuaciones irreducibles, tiende á evitar repeticiones y á producir relaciones unívocas, á la manera que en la teoría de las funciones se prefiere, la consideración de las que son uniformes, y regulares en el entorno de un punto.

La adjunción, permitió á Galois resolver ecuaciones irresolubles, en un dominio más amplio, que el en que eran irresolubles, así como el cálculo ordinario se va generalizando, á medida que el dominio de los enteros se extiende al de los números racionales y éste al de los algebráicos.

Pero esta cuestión tiene otra fase. Las raíces de las ecuaciones se hallan entre la infinidad de los números algebráicos; y para que algunos de éstos pertenezcan al dominio que comprende una ecuación determinada, es necesario que cierta ley de normalización se cumpla para que, en vez de elementos dispersos, sin ley que los dirija, se hallen encadenados en sistemas; y esto se verifica en las ecuaciones resolubles ó abelianas, cuyas raíces se hallan ligadas por medio de un lazo ó relación racional.

Vemos ya pues, cómo la ley de normalidad da la respuesta precisa al problema de la resolución algebráica de las ecuaciones; porque la Ciencia sólo puede contestar, rectificando, una imposición exagerada, conforme con la esencia de cada género de cantidades que existen individualmente, según las condiciones que fijan su existencia y que se ocultan á exigencias arbitrarias.

Las ecuaciones binomias son el caso más sencillo de las ecuaciones abelianas. Sus raíces se distribuyen en ciclos, ó forman todas un solo ciclo, expresando esa ley del orden que presidió, desde un principio al Algebra por lo que se quiso que: en su definición, entrase como esencial el principio del orden, según expresó Poinsot, al establecer la armonía existente entre las ecuaciones algebráicas y las de congruencia, como expresión del orden, tan predominante en la teoría de los números, que convierte á ésta en una de las ramas más elegantes de la Matemática.

Las ecuaciones abelianas, en general, elevan al más alto grado estas relaciones del orden, regidas por las relaciones expresadas en la teoría de los grupos, que es la rama superior de la combinatoria, la ley universal que rige á toda la Matemática, especialmente, cuando á los grupos discontínuos del Algebra, se unen los grupos contínuos del Análisis.

Aun llegamos á otro de los problemas formulados, desde el origen del cálculo infinitesimal: *la integración de las ecuaciones diferenciales.*

Las dificultades de este problema superan á las de los problemas anteriores; y sin embargo, aun se aspiraba á seguir siempre en el sendero que había conducido á integrar las primeras ecuaciones, que se ofrecieron á los grandes geómetras del siglo diez y siete, cuando las aplicaban á expresar las leyes universales de la Naturaleza.

Aquéllas ecuaciones se integraban; el genio matemático hallaba recursos inmediatos que coronaba el éxito; sus transformaciones ingeniosas, la reducción de las dificultades á otras más sencillas, siempre triunfaban de las dificultades. Parecía que la serie de las conquistas iba á ser interminable. Pero pronto fué decreciendo aquel ardor y entusiasmo ante las dificultades crecientes que imponía el problema. Se integraban ecuaciones particulares, pero no se llegaba á la integración general.

Una nueva era comenzó, cuando Lagrange, Monge y Ampére abordaron la integración de las ecuaciones de derivadas parciales y, cuando Pfaff obtuvo la célebre reducción que constituye su problema.

La teoría combinatoria penetraba en la parte formal del problema, con las aplicaciones de los paréntesis y corchetes de Poisson, las fórmulas de Cauchy y de Donkín, y el acertado empleo que de ellas hicieron Jacobi, Mayer y Hamilton, hasta el punto de que en la teoría de las ecuaciones diferenciales, la de las ecuaciones de derivadas parciales es la más perfecta, la mejor construída.

Pero no se trata de resolver tal ó cual ecuación *elegida*, como sucedía en las primera época de las grandes creaciones matemáticas; se trata de resolver *cualquiera* ecuación, es decir, el problema general.

Así, mientras que se trataba de las ecuaciones sencillas, existían procedimientos especiales, como para el caso de las ecuaciones homogéneas, ó se reducían á las cuadraturas, ó se transformaban en ecuaciones de Riccati, etc.

Pero esto comprende un campo muy limitado dentro del que abarca el problema en su generalidad.

Como en la resolución de todos los problemas de la Matemática, fué preciso caminar por otros derroteros.

El orígen de esta nueva dirección se halla, como hemos visto en otras ocasiones, en la nueva dirección adoptada por Cauchy y por Riemann, que coincide con un nuevo concepto de la integral, y en la que se unen las disquisiciones de Herr Cantor y du Bois-Reymond sobre los conjuntos y las pantaquias. Esto, desde el punto de vista algorítmico.

Si acudimos á una imagen que ofrecen las modernas investigaciones y que son una generalización de lo que fundó Cauchy al establecer la correspondencia entre los puntos representativos de las funciones y sus variables complejas, podremos imaginarnos un fondo inmenso, donde se hallan acotados, no solamente los valores de las funciones con sus variables independientes, sino también los valores implícitamente dados por las ecuaciones, no sólo algebráicas sino diferenciales; y podremos representarnos un mundo lleno de puntos líneas, superficies y hasta espacios inferiores incluídos en otros superiores.

Si consideramos, al principio, una recta que contiene todos los puntos correspondientes á valores reales, veremos por un lado, puntos aproximándose indefinidamente hacia sus límites, ó mejor, según la idea de las secciones de Dedekind, dos series de puntos luminosos, por ejemplo que se acercarán de uno y otro lado, á cierto punto que permanece en la oscuridad y expresa el valor irracional á qué aquéllos se aproximan. Y aun hay más; en estas regiones, donde hemos encontrado los números irracionales, constituyendo con los racionales el dominio de los números algebráicos, hallaremos, sobre el fondo del continuo, representado por la línea recta, otros números de superior categoría, los transcendentes, que no pueden existir en los moldes de las ecuaciones algebráicas; números regidos por una ley de crecimiento que pasa sobre las leyes que rigen á los demás números.

Pero antes de llegar á esta categoría superior, tenemos que detenernos un momento en la serie de funciones algebráicas de los diferentes órdenes, cuya clasificación hizo Abel, como preliminar para establecer la imposibilidad de resolver algebráicamente las ecuaciones generales de grado superior al cuarto.

Tenemos, en primer lugar, después de las funciones enteras y racionales, aquéllas que dependen de las variables, y de radicales de índice primo de funciones racionales, que serán las funciones algebráicas de *primer orden*; pero si las funciones de que se trata dependen de las variables, de raíces índice primo de funciones racionales y además, de raíces de índice primo de funciones algebráicas de primer orden, tendremos las funciones algebráicas de segundo orden, y así sucesivamente; llegando á deducir la forma de las funciones algebráicas de orden m y de grado n.

Sobre la clasificación de Abel, Liouville presentó una clasificación análoga de las funciones transcendentes. De primera especie son aquéllas en las que los signos de las operaciones transcendentes se aplican á simples funciones algebráicas; mientras que en una transcendente de enésima especie, los signos de que se trata pueden referirse á todas las cantidades de especie inferior.

No vamos á detallar esta enumeración que comienza en las transcendentes más sencillas, y nos llevaría, con el estudio de las transcendentes superiores, al inacabable desarrollo de la teoría de las funciones.

Basta lo expuesto, acaso con demasiado detalle, como incidente del objeto principal que nos guía en este trabajo, para dar una ligera idea de la infinidad de correspondencias que encontramos entre las funciones y entre las variables y más aún, si consideramos las correspondencias mútuas entre las funciones.

Siguiendo ahora nuestras anteriores indicaciones, encontraríamos, además de la sección de Dedekind, por la que se representa un número irracional, las representaciones que ofrecen los conjuntos perfectos, densos, etc., en la teoría de las funciones de variables reales; y pasando á la representación de las funciones de variables complejas, también podremos considerar el plano como una región de luz, por donde una función es sinéctica, según la denominación de Cauchy, ó bien uniforme, según la expresión actualmente más generalizada; región tan sólo ennegrecida por los puntos singulares aislados, por las cortaduras ó por los espacios lagunares. Dándonos cada función particular un dibujo distinto en el plano, que será su esquema característico. Y estas representaciones se extienden actualmente con auxilio de la superficie de Riemann, á los hiperespacios, á sus conexiones, etc., cuyo conocimiento se facilita por el proceso de la normalización y con auxilio de las correspondencias y de las transformaciones.

Así, para llegar á la integral general, hemos de acudir, otra vez, á la irreductibilidad de los sistemas, como considerábamos ecuaciones irreducibles en los dominios de la teoría de los números y del Algebra; y, siguiendo la sugestiva exposición del señor Pincherle en su obra: *Le operazioni distributive*, consideraremos la correspondencia entre dos espacios lineales S y T con n elementos a linealmente independientes del primero y los n elementos que les corresponden del segundo espacio que, ó pueden ser también linealmente independientes, ó estar sometidos á r relaciones distintas, por efecto de una operación *degeneradora* A, de especie r, resultando, en tal caso, que dicha operación hace corresponder al cero en T, r elementos de S, que llamaremos las r raíces de A, y que servirán para constituir con estas raíces, linealmente independientes, el nuevo espacio de las raíces de A; lo que lleva á considerar el modo de distribución de las raíces, por la iteración de A; lo que se expresa por sus potencias sucesivas, como en la teoría de los números, para los períodos ó en la de las sustituciones, para los ciclos, lo que da las raíces *propias* ó *impropias*, consideraciones que llevan á los espacios *invariantes*, á las operaciones conmutables regulares, singulares, etc., etc.; todo lo que nos interna en la capital teoría de los grupos de transformaciones, cuyos amplísimos desarrollos se deben á Sophus Lie.

Y con estos antecedentes, ya podemos decir que el problema de obtener las soluciones generales de las ecuaciones diferenciales se reduce á la consideración de los espacios raíces y sus correlaciones con sus espacios primitivos, lo que se halla expuesto en la obra citada. Y así vemos en armonía, con lo arriba expuesto, cómo podemos esquematizar con representaciones gráficas, las correspondencias cuantitativas entre la función implícita de una ecuación diferencial y las variables independientes.

Vemos, de igual manera que vimos al tratar de otros problemas, cómo se modifica el primitivo enunciado, á medida que la crítica depura las condiciones del mismo.

Sophus Lie, en sus trabajos monumentales sobre los grupos contínuos, realizó una labor gigantesca, aglomerando, en síntesis grandiosa, los grupos proyectivos del plano, del espacio euclídeo, hasta los grupos de transformaciones de contacto, y aún de los hiperespacios, que condujo, entre la infinidad de aplicaciones y puntos de vista, que es capaz de sugerir tan amplio cuerpo de doctrina, á una teoría respecto á las ecuaciones diferenciales, análoga á la de Galois, acerca de las ecuaciones algebráicas; y por último, la resolución del problema de la integración analítica cuando, han sido infructuosas las tentativas hechas para conseguir su integración formal, estriba en el conocimiento de la *estructura* del grupo de la ecuación diferencial; pero también estriba, á semejanza de lo que hemos visto en otras teorías, en la condición de irreductibilidad, con lo que se lleva el problema á circunstancias análogas á las que llevan á Galois á la resolución de la ecuación por radicales; pues un sistema es reducible, cuando se le puede adjuntar otras ecuaciones algebráicas compatibles, sin ser sus consecuencias; lo que da un *sistema reducido*.

Y el problema de la integración se resume en las dos operaciones siguientes: 1.º Reducción de la ecuación á ecuaciones irreducibles; 2.º al estudio directo, en todo el campo real y complejo, de la integral de estas ecuaciones irreducibles como, manifiesta M. Painlevé en algunos de sus trabajos; y cuando una ecuación diferencial es reducible, entre los sistemas reducibles, existe uno de orden diferencial mínimo, automorfo, es decir, cuya solución general se deduce de una solución particular, por la transformación de un *grupo*, etc.

Por último, es necesario, aplicando los recursos enumerados del análisis, para la representación de las funciones, seguir á la función que satisface á una ecuación diferencial propuesta, en todo el curso de su existencia, señalando las singularidades que la caracterizan, lo que constituye la parte *cualitativa* del problema, según la expresión de M. Poincaré y, después, efectuar los cálculos numéricos.

Vemos pues, qué arsenal de conocimientos y de teorías ha sido necesario para atacar el casi inexpugnable problema de la integración de las ecuaciones diferenciales; que fué preciso abandonar, en la inmensa mayoría de los casos, el ideal primitivo de la *integración formal*, para dirigirse, por los diversos senderos de la integración lógica, geométrica ó analítica, que aún hoy sirven á los matemáticos de estímulo para nuevos progresos, los cuales siempre serán posibles en el amplio campo donde se desarrollan, pues el fondo objetivo es inagotable, como nos muestra el simple hecho de que, solamente en el estrecho límite comprendido entre 0 y 1, tenemos el conjunto inagotable del contínuo donde, por cierta Aritmética infinitesimal, se encierran infinidades de conjuntos de números enteros, racionales, algebráicos y transfinitos; y por tanto en los dominios que también se eligen como escenario de las relaciones matemáticas, en los dos ordenes cualitativo y cuantitativo, comprendiendo en toda su amplitud la extensión y el número, la correlación de unas cantidades con otras, dentro de las distinciones que ofrece la integridad, la racionalidad, lo algebráico y lo transcendente, las discontinuidades, las anomalías de todo género; deben hacerse explícitas ciertas cantidades, lo que no siempre es posible ó repugna á determinadas condiciones exigidas, que no son las propias para conseguir dicho fin.

La Matemática pues ha dado siempre contestación á los problemas clásicos, ya resolviéndolos ó presentando las condiciones de su posibilidad, ya demostrando que son imposibles, dentro de éstas.

La Matemática en España

La enseñanza se adapta siempre á la Ciencia. Podemos afirmar que la Ciencia procede del maestro, así como éste, ó se forma en el ambiente en que vive, ó crea este ambiente, cuando no existe; lo que constituye el límite á que llega el genio.

Platón y Aristóteles enseñaban en sus escuelas, y sus doctrinnas se han perpetuado entre nosotros. De igual manera Arquímedes, Apolonio y Euclides pasaron á traves de la civilización árabe á nuestros días.

Vieta y Descartes crearon el Algebra y la Geometría analítica, y, sobre estas nuevas doctrinas, Newton y Leibitz idearon nuevos algoritmos y señalaron otros rumbos á la inventiva de los matemáticos. Y los discípulos de éstos continuaban el sólido encadenamiento de la Ciencia, que ya no se interrumpió.

Entre otros muchos insignes matemáticos, Euler y D' Alembert continuaban avanzando, á la par que condensaban las anteriores conquistas en núcleos cada vez más espesos, que se dilataban bajo la forma de un extenso tejido de relaciones que, en su vasta extensión, se iluminó por dos nuevos focos espléndidos, representados por Cauchy y Gauss, después que los Lagrange, Laplace, Monge y Ampére habían dado un nuevo brillo á las conquistas de sus predecesores.

En esta situación se hallaba la ciencia matemática á comienzos del siglo XIX.

No hay para qué relatar las numerosas ramificaciones, cuya exposición detallada exigiría muchos volúmenes y nos apartaría de nuestro objeto, que constituyen las diversas finalidades á cuyo impulso la ciencia actual se mueve, cada vez con más vida y con arrestos de mayor potencia.

Nosotros, por desgracia, guiados á impulso de otros derroteros, no pudimos establecer un lazo de continuidad con aquellas corrientes; nuestra ciencia matemática fué un reflejo pálido de lo que produjeron nuestros vecinos; y á lo sumo importábamos, no con la fuerza vital que le comunica el foco primitivo, de donde irradia, fortaleciéndose para nueva vida, sino mediante los ténues reflejos del libro de texto, conformado para aprender y repetir; pero no para crear nuevas ideas. Legendre, Lacroix, Monge primero, y más tarde, obras de menor cuantía, más ceñidas á una enseñanza excesivamente concretada á un fin inmediato, y por esto de menor trascendencia, como Cirodde, Lefebure de Fourcy, Sonnet y Frontera, Leroy, Olivier, Tresca, á los que también agregamos las obras de Sturm y Duhamel para el cálculo infinitesimal.

No es de extrañar que, con solo estos modelos, muy apreciables, como lo fueron indudablemente, para comunicar á la juventud el extracto ó resumen de lo constitutivo de la ciencia clásica, se llegara, en suma, á una noticia de lo que era la Matemática, todo lo más, para las aplicaciones materiales de inmediata utilidad. Pero á estos resultados faltaba algo de esencial, el espíritu inventivo que inspira para creaciones nuevas y que da vocación y gusto para la vida de la inteligencia.

El ilustre talento que se ha movido en las más diversas direcciones, y especialmente en el solitario erial de la ciencia matemática, D. Jose Echegaray, quiso dar impulso á algunas disciplinas de actualidad, en su tiempo, tales como la Termodinámica, los determinantes, la Geometría superior de Chasles, como poco ha lo hizo con la teoría de las ecuaciones de Galois, las funciones abelianas y aún finalmente con la Física matemática, que hoy explica en la Universidad Central.

El sabio profesor Sr. Torroja importó á España la hermosa teoría geométrica de Staudt, y difundió el gusto hacia obras como las de Reye y Fiedler.

Aun se conocieron propósitos de importar las originales concepciones de los Cayley, Aronhold, Clebsch y otros matemáticos, condensadas en los tratados de Sálmon; pero tan acertados deseos, no encarnaron en la práctica. Y nos quedamos con una ciencia incompleta y además, sin condiciones favorables para adquirir iniciativas propias.

También es cierto que, en la misma Universidad central, hoy se explica la Geometría analítica á que el profesor Sr. Vegas ha dado forma, según la dirección de los Chasles, Fiedler y Ovidio; y aun yo, en muy modesta esfera, he trabajado desde hace bastantes años por dar un carácter crítico á la ciencia, al mismo tiempo que importé varias teorías; y algo se ha hecho individualmente en varias revistas publicadas, mejorándose además la parte doctrinal en nuestros cursos universitarios; pero, ni esto, ni las individuales iniciativas de algunos profesores, llegaron á salvar la inmensa distancia que aun nos separa de los verdaderos focos de la cultura científica, mientras no se publique una reforma radical en las enseñanzas de la Matemática, la Física y la Química, que las dote de la parte especulativa y los medios materiales que demandan, y que hoy nos colocan en una lamentable inferioridad, respecto á lo que en las otras naciones se practica.

La crítica matemática

Podemos considerar el origen de la crítica en los tiempos de Carnot y de Poncelet.

Carnot se propuso explicar los principios del Cálculo infinitesimal, por una especie de compensación que se efectuaba en las ecuaciones aproximadas, para llegar á las verdaderas, y, en su Geometría de posición, trata de reducir á una ley general las alteraciones de los problemas, en el tránsito de las soluciones positivas á las negativas y á las imaginarias, sometiendo las figuras á un cambio continuo, que produce la infinidad de posiciones de cada una, dentro de un sistema.

Poncelet lleva más adelante la idea de Carnot, tratando de establecer su *principio de continuidad*, y llegando á generalizar sus puntos de vista, hasta admitir que existen símbolos de imposibilidad, como existen para la posibilidad, pues aquélla, muchas veces es relativa, y solo obedece á ciertas circunstancias especiales, como hizo ver Monge en su método de *transmutación de las figuras*, y en efecto, aunque el eje radial, en el caso de las circunferencias exteriores, pasa á ser imaginario; aún conserva algunas de sus propiedades esenciales.

Poncelet es el primero que lleva su espíritu generalizador hasta considerar los dos puntos circulares del infinito ó la cónica esférica como lazo de unión entre todas las circunferencias de un plano, ó las esferas en el espacio de tres dimensiones.

Trabajos de crítica son los de Helmholtz, cuando aspira á explicar los axiomas de la geométrica, en vista de los nuevos horizontes que abren á la Ciencia las geometrías de Lobatschewsky y de Bolyai. Y por entonces, en el Algebra, la ingeniosa interpretación de las cantidades imaginarias de Argand y de Buée, suscitan los trabajos críticos de Vallés, los de Fly St. Marie, que en España llegan á la interpretación filosófica de Rey y Heredia.

Y, en otro dominio, aunque sin sálir del caracter dogmático de exposición puramente doctrinal, los varios trabajos, primero, de Ampére y de Jacobi y después de Pfaff y de Mayer, principian á vislumbrar un período de crítica para las ecuaciones diferenciales, pues el caudal de métodos y de conceptos al desbordarse, parece que busca una ley reguladora que los mantengan en un sistema ordenado y comprensivo de todos ellos, conduciendo á la contestación definitiva que exigía el problema de la resolución de las ecuaciones diferenciales.

Algunas obras aparecen aisladas en este fluír de los conceptos filosóficos de la Matemática, como son los métodos geométricos de Lamé, las obras críticas de Cournot, los métodos de las ciencias de razonamiento de Duhamel y los principios filosóficos de la Mecánica de Freycinet; y no hacemos alto en las evoluciones iniciadas por Wronski y Comte, porque éstas son más bien un movimiento filosófico-matemático, que un avance dentro de puro dominio matemático, independiente de los especiales criterios de cada sistema filosófico.

Pero el terreno se preparaba cada vez más para un desarrollo franco de la crítica. Los nuevos puntos de vista de Cauchy y de Riemann señalaban una nueva dirección á la Ciencia, que la separaban del desenvolvimiento clásico; y esto se afianzaba más con la originalísima representación dada por Fourier á las funciones de variables reales, por medio de las series trigonométricas.

Por otra parte, Boole, con sus principios del Algebra de la Lógica, importaba á la Matemática una nueva teoría, arrebatada al dominio de la Lógica, que había de influir en la constitución de aquélla, en la dirección de los conceptos combinatorios.

Citaremos al sabio profesor Houel, que escribió obras saturadas de espíritu crítico acerca de los nuevos descubrimientos, que los Hamiton, Grassmann, Hankel y otros establecieron también, como preliminar de un período de franca crítica, necesaria para coordinar tantas y tan dispersas teorías. No hay para qué insistir en el desenvolvimiento que tuvieron las tendencias hacia la crítica, por efecto de este especial desarrollo, en el orden subjetivo; y en el orden objetivo, las teorías de los conjuntos de Cantor y du Bois-Reymond condujeron á trabajos filosóficos tales, como expresan la obra acerca las funciones de este último y las de Hankel.

Pero hasta el actual momento, en que nos hallamos, la crítica no se emancipa del fondo de la ciencia, donde se halla sujeta como la forma que lo complementa. Y llega más tarde la tendencia á la separación de la crítica, como disciplina, con existencia *per se* y no *per accidens*. El inmenso progreso de la Matemática en todos sentidos, lo imponía. No es posible actualmente abarcar su total contenido, sin ideas generales, reguladoras de cuanto en ella se ha hecho. Solo sintetizando, para hallar la idea común á direcciones varias, y procediendo á la clasificación de los objetos, ideas y procedimientos, se puede abreviar el camino para llegar al fin.

Si el descubrimiento constante de nuevos métodos establece una especie de equilibrio entre las dificultades de la ciencia, por su acrecentamiento, y la potencialidad intelectual; la crítica, al realizar sus funciones de clasificación y de ordenación de análisis y síntesis, realiza á su vez este equilibrio, entre la fuerza creadora de la inteligencia y el objeto siempre movible, expansivo y susceptible de una reproducción indefinida.

Este nuevo rumbo de la Matemática se ha sancionado ya por el aditamento en los Congresos internacionales de una sección dedicada á la historia y enseñanza de la Matemática, y se va afianzando con las producciones de los grandes matemáticos y la aproximación de algunos filósofos hacia estas teorías que tienden á la lógica científica.

Las geometrías no euclídeas, la depuración y crítica de las definiciones, postulados y otros principios generales, la explicación de muchas anomalías, para reducirlas á cierta normalidad, dentro de las leyes generales, y aun los nuevos progresos de la Mecánica, la Física y la Química tan afines con la Matemática pura, que pasa á ser un intérprete de sus fenómenos y de sus leyes, ha fijado estas nuevas corrientes, que se van extendiendo, á la vez que profundizando en el cauce de las ideas.

Todo esto, según ya se ha manifestado en varias circunstancias, comienza á llevarse á la práctica en las Universidades y, es de esperar que haciéndose cada vez más extensivo, se llegue á la creación de las disciplinas que enseñen la lógica de las ideas matemáticas y la educación de las inteligencias para facilitarles el modo de adquirir un conocimiento suficiente de lo que hoy comprende el organismo de la Matemática.

Consideraciones respecto al ingreso y ascenso en el profesorado

Ya hemos dicho, en un artículo anterior, que la enseñanza se adapta siempre á la ciencia vulgarmente conocida; y también hemos hecho una reseña muy rápida de lo que oficialmente se practica en nuestra enseñanza, no por falta de un general y ferviente deseo de elevar nuestra cultura científica, sino por falta de iniciativa entre los poderes que han transformar el reposo en movimiento.

La enseñanza es un reflejo de la ciencia, y como tal, la reproduce.

Entre nosotros la finalidad de la enseñanza se ha reducido á aprender algunas teorías, con aptitud para aplicarlas en su parte práctica á algún fin útil; pero á este resultado que puede representar el cuerpo, le falta el alma, la idea, reproduciéndose y extendiéndose para nuevas finalidades. Las ideas y las teorías no son útiles en cada momento; pero pueden serlo; y por lo menos en la Ciencia se trabaja, como dijo Jacobi, por el honor del espíritu humano.

Pero ¿qué puede esperarse de una ciencia importada, sin un centro productor como lo fueron la Escuela politécnica de París, las universidades de Erlangen, de Gottinga, de Cambridge, de Berlín, etc.?

Tenemos que distinguir, desde luego, entre una ciencia y una asignatura, aquélla es un árbol frondoso, que se dilata en todas direcciones, ésta un fragmento informe, destacado con cierta arbitrariedad del organismo á que pertenecía, mutilada por las señales que ha dejado su artificioso desprendimiento.

Una cosa es enseñar tal ó cual asignatura y otra enseñar la Ciencia á que determinada asignatura se refiere.

Enseñar una asignatura es una labor, en cierta medida, mecánica; y como artificiosa, también son artificiosos los medios de adquirirla y de retenerla: la memorria y la fuerza de atención, aunque el espíritu intervenga con su fuerza asimiladora y comprensiva. La ciencia quedará cristalizada é infecunda; el alma será un espejo que reflejará los rayos de luz recibida.

Enseñar la ciencia es otra cosa; es comunicar una corriente de ideas, movibles y adaptables según convenga á determinados objetos, para hacer brotar relaciones: y, aunque siempre bajo una influencia predominante, no encerrada en moldes limitados *a priori*, pues hay que hermanar la libertad con la disciplina, la autoridad con las iniciativas propias, que deben ser siempre dirigidas y encauzadas por el profesor, sobre todo esto último, en la segunda enseñanza donde, en vez de iniciativas, debe cultivarse el espíritu de atención, de análisis, etc.

La enseñanza de las asignaturas, conviene ciertamente en la segunda enseñanza, porque se impone la separación de las teorías con el fin de adaptarlas á la debilidad intelectual del alumno; pero exigir mucho es habituar al exagerado empleo de la memoria y viciar la inteligencia para el porvenir. No se debe olvidar que el fin de la segunda enseñanza ha de ser preferentemente educativo.

En la enseñanza superior, tambien deben existir las asignaturas; pero no siempre con el carácter de aislamiento, que tenían en el período clásico.

No hay más que recorrer algunas obras modernas de ilustres matemáticos para convencerse de ello.

El Tratado de Análisis de M. Picard, recorre muy distintas regiones de la Matemática, todas ellas encadenadas por esa compenetración de ideas que la llevan hacia la unidad. El Algebra del profesor Herr Weber se extiende por las teorías de los números, de las formas homogéneas, y llega hasta las funciones abelianas que invaden sus dominios. La Geometría de Clebsch y de Lindemann comparte con las teorías geométricas de Plucker y de Chasles, las teorías algebráicas de Cayley y del mismo Clebsch, con las de Riemann y también con las integrales y funciones abelianas. La teoría de las superficies de M. Darboux subordina á su objeto la multitud de teorías distintas que concurren al fin principal de la obra.

Lo expuesto, justifica la variabilidad de las enseñanzas por un mismo profesor y aun dentro de un Curso; porque es conveniente, preferir á una serie indefinida de lecciones acerca de un mismo asunto, tratar la Ciencia por capítulos elejidos, con objeto de presentar lo substancial ó culminante, dejando al alumno el completar los detalles fáciles y secundarios, que harían perder un tiempo precioso al profesor, especialmente, si se trata de ejercicios de puro mecanismo, tales como de ejercicios de puro mecanismo ó cálculos sencillos.

Cierto es que aun no estamos en condiciones de adoptar este procedimiento libre de enseñanza, que podría conducir á deplorables abusos; debiéndonos contentar por ahora con el aumento, en nuestros cuadros de enseñanza de las disciplinas que faltan, para que ésta constituya un todo íntegro, según la Ciencia del presente.

Hemos visto de qué modo, la Enseñanza sigue á la Ciencia, y que por tal razón, no puede tener franca finalidad.

Este carácter acompaña á los actos subsiguientes: ingreso en el profesorado, ascensos en la carrera, etc.

La forma de ingreso en el profesorado corresponde á la mezquindad que se nota en las finalidades de nuestra enseñanza.

Por lo general, los ejercicios de aptitud para el profesorado han consistido en preguntas sacadas por suerte, no de un programa publicado en la Gaceta, de modo que cada opositor supiera el límite ó la extensión de la doctrina que se le exije, sino de preguntas que algunas veces fueron como acertijos puestos al azar; cuyo resultado puede, en algunas ocasiones, ser negativo.

Hoy, debieran publicarse cuestionarios amplios que permitieran, no el contestar á un detalle insignificante, que pudiera muy bien no recordarse en un momento dado, ni preguntas con carácter de problemas, que no dan lugar á la reflexión en un momento y que, á lo más, pudiera saberse de memoria, lo que sería contraproducente; sino cuestiones importantes que dieran motivo á interesantes puntos de vista, que revelen al profesor, no al alumno que lleve aprendida una respuesta de memoria.

Además no debe limitarse el cuestionario al reducido campo de una sola asignatura, que ya por sí expresa un fragmento arrancado más ó menos violentamente de la Ciencia; sino cuestiones amplias de varias teorías, pues el profesor, en la actualidad, como sucede con escasas excepciones, debe tener una cultura general, por efecto de las correspondencias mútuas de casi todas las disciplinas matemáticas; y aun en el caso de la segunda enseñanza; porque ahora algunos estudios, considerados antes como superiores, se han elementalizado, pasando á los programas de los Institutos, Liceos y Gimnasios.

Es necesario preferir el enterarse de lo que se sabe en cantidad y calidad, es decir, la prueba positiva, que no mostrar lo que no se sabe, lo cual es como el infinito, para todos.

Y en último resultado: El contestar á cinco, diez ú otro número de preguntas, nada prueba, si es cuestión del momento; pero podría probar si, dándose tiempo para la reflexión, aquéllas preguntas contestadas por escrito, dieran ocasión á revelar el espíritu inventivo del opositor, siempre que la pregunta no fuera simplemente banal.

Respecto á la lección, nada prueba tampoco, el que un opositor encerrado durante varias horas, que llegaron á ser veinticuatro, con cuantos libros de consulta desee, explique durante una hora, lo que se halla en cualquier libro de texto.

Este ejercicio, si fuese improvisado, con algunos momentos para preparar el plan de su explicación, probaría al profesor y mostraría los recursos propios, la inventiva y sus cualidades como tal, y sus conocimientos. Y esto lo afianzaría más en sus réplicas á lo adversarios, que también tendrían ocasión para mostrar su valía.

Pero de todos los ejercicios, el que verdaderamente prueba, es el del programa, que debiera presentar cada opositor, con un sólo día de anticipación ante el Tribunal y sus adversarios;

lo que daría á conocer cualidades del momento y el grado de su cultura científica.

Es, en verdad, altamente deplorable que los ascensos en el profesorado estén reglamentados con exagerada estrechez de miras; aunque ya se comprende que esto obedece á la necesidad de cortar abusos; pero siempre que haya un profesor de notoria ilustración, que lo haya demostrado durante una larga serie de años; y que pueda demostrarlo en cualquier ocasión, con hechos extraordinarios, no corresponde ni á su dignidad ni á su prestigio el someterse á ser juzgado, si desea un ascenso; aunque entre nosotros, éste es muy mezquino, pues solo puede consistir en pasar á la Universidad Central; lo que no compensaría, por otra parte, las molestias de una oposición, sobre todo si deseaba cambiar de asignatura, supongamos por ejemplo, para crearla ó darle nuevas orientaciones: que todo pudiera suceder; pues hay quien siempre permanecerá invariable, á pesar del trascurso de los tiempos; y hay quien puede, separando malezas, es decir, teorías siempre respetables, pero que perteneciendo á un período de formación, hoy sólo deben figurar en la parte histórica, construir un nuevo organismo, atendiendo á las modernas corrientes y, sobre todo, al modo actual de ser las teorías que dejan lastre, de poca utilidad, para aprovechar lo verdaderamente eficaz. Y esto se relaciona con la cuestión siguiente:

Desde hace no pocos años, se halla publicada una ley de analogías que dan derecho á obtener tal ó cual cátedra; y esto se une á la preferencia de quien obtuvo, por oposición igual ó análoga cátedra; y aun para dar derecho á acumulaciones de asignaturas por estas mismas conexiones.

Pero resulta que, en la Ciencia, estas analogías, por lo general son distintas de las dictadas en la disposición.

Pues ¿quién duda que hoy el Cálculo infinitesimal extiende sus ramas por toda la Matemática?

El Algebra es el primer grado del Análisis, en el que las relaciones son entre cantidades conocidas y desconocidas; y éstas aparecen como funciones de aquéllas. Y las relaciones que establecieron Lagrange y Galois, se extienden á las nuevas ecuaciones del cálculo infinitesimal, que se complican por la mediación de las funciones derivadas. Pero la teoría de los grupos domina sobre éstas, de análoga manera que sobre el Algebra.

Aquí los grupos discontínuos, allí los contínuos. Aquí se ha de hacer explícita una incógnita, que es función de las cantidades conocidas, allí una función que ha de aparecer con cierta arbitrariedad, correspondiente á la forma de la ecuación que se da.

En cuanto á la Geometría analítica y la infinitesimal, aquélla es una primera fase de ésta, cuyo elemento común es la tangente, representación gráfica de la derivada; siendo, desde un principio, el cálculo integral, el cálculo inverso de las tangentes, y éste, el cálculo directo de la resolución de las ecuaciones diferenciales, que ha de convertir en explícita una función implícita.

La Geometría analítica, lleva á las singularidades, con auxilio de su rama especial titulada, Geometría sobre una curva algebráica; y á las singularidades conduce la Geometría infinitesimal y se remonta, partiendo del elemento que genera, por un movimiento contínuo, cada curva.

La diferencia que exista entre estas dos ramas de la Matemática estriba en la diferencia de método. Por éste, la Geometría infinitesimal se remonta á regiones muy superiores; y á su vez la Geometría infinitesimal se presenta como la parte gráfica ó representativa del capital problema formulado, al pretender resolver las ecuaciones diferenciales.

Ya hemos analizado someramente las conexiones del Análisis infinitesimal con las ramas inferiores: El Algebra y la Geometría analítica. De igual modo veríamos que la Geometría pura recorre un camino paralelo al de la Geometría analítica, aunque más lentamente; porque jamás las construcciones gráficas podrán igualar al número, en su eficacia para llegar más pronto al fin en sus rápidas evoluciones, que se continuan en escala creciente, desde el número aritmético, hasta el algebráico y, por fin, al transcendente.

Y por último, diremos que, sobre todas estas teorías se ciernen los cálculos abstractos y muy especialmente la teoría de los grupos, que todo lo abarca con su inmensa generalidad, y es como el molde á que cada una se ajusta. Con lo que hemos demostrado, cuán arbitrario es tratar hoy, de establecer afinidades ó diferencias entre las diversas ramas de la Matemática.

Se impone pues, un nuevo plan de enseñanza donde se agreguen las enseñanzas que faltan, donde no aparezcan esas asignaturas, que no deben figurar entre los estudios universitarios, que son una especie de rémora para las inteligencias, y que han alcanzado las ventajas de las acumulaciones, en perjuicio del progreso científico, que exije cierta sobriedad en la elección de disciplina, para realizar la ley de la *economía del esfuerzo*, y una postergación y desigualdad entre el profesorado, por causas fortuítas, y hasta contraproducentes, como arriba se ha demostrado.

Una enseñanza fundada en el azar, en lo secundario é incidental, exige una reforma que sea más conducente para elevar el factor más importante en una Nación: la cultura intelectual, base de todas las demás.

Cursos universitarios

SEMESTRE DE VERANO (1907)

BERLIN. *Schwarz.*—Cálculo integral. — Ejercicios acerca del mismo; Teoría de las funciones elípticas.—Capítulos elejido de la teoría de las funciones analíticas; coloquios matemáticos; Seminario. — *Frobenius.*—Teoría de las ecuaciones algebráicas; Sem. *Schotty:* Teoría del potencial; Teorías especiales de las funciones; Seminario.—*Hettner:* Sobre las series é integrales de Fourier.—*Knoblauch:* Sobre las obras de Leonardo Euler y su significación en la Matemática moderna; Teoría de las superficies curvas; Teoría de las líneas alabeadas. —*Lehmann-Filhés:* Cálculo diferencial; Ejercicios sobre el mismo.—*Schur:* Teoría de los determinantes.— *Landau:* Cálculo de variaciones; Cálculo de probabilidades.— FOERSTER Historia de la Astronomia moderna; Ecuaciones fundamentales del cálculo del tiempo y del espacio.—*Struve:* Astronomía práctica; Seminario.—*Bauschinger:* Teoría de las perturbaciones: Cálculo de interpolación é integraciones de la Mecánica.—*Marcuse:* Introducción á la Astronomía; Geografía y Física terrestre; Teoría de los instrumentos y aplicaciones de la Astronomía.—*Ristenpart:* Conocimiento del Cielo; Movimiento de Mercurio en 1907 y fenómenos relativos al mismo.—*Helmert:* Figura de la Tierra.—Triangulaciones geodésicas.— *Rubens:* Complementos matemáticos de la Física experimental.—*Plank:* Mecánica de los cuerpos deformables, Ejercicios.—*Neesen:* Optica geométrica.

BONN. *Study.*—Geometría diferencial; Capítulos elegidos de la Mecánica; Seminario.—*Kowallekuki:* El problema de la división del círculo; Teoría general de las ecuaciones diferenciales; Ejercicios sobre las mismas.—*London:* Elementos de cálculo diferencial é integral; Ejercicios sobre el mismo: Axonometría y Perspectiva con ejercicios.—*Schmidt:* Integrales definidas; Fundamentos de la teoría de los conjuntos y de la Teoría de las funciones reales.—*Monnichmeyer:* Mecánica celeste; Ejercicios prácticos.—Kustner: Teoría de la determinación de las órbitas planetarias y de los cometas; jercicios prácticos; Coloquios sobre astronomía.

BRESLAU. *Rosanes.*—Cálculo diferencial é integral; Seminario.—*Sturm:* Transformaciones geométricas; Teorías geométricas de la Mecánica; Semin.—*Kneser:* Principios generales de la Dinámica; Teoría de las series de Fourier y de sus integrales; Semin.—*Franz:* Geodesía elemental y superior; Prácticas de Astronomía Geodésica; Ejercicios sobre la Astronomía teórica.—*Schaefer:* Mecánica teórica.

ERLANGEN. *Gordan.*—Algebra; Geometría del espacio; Seminario.—*Noether:* Cálculo diferencial é integral; Mecánica analítica.—*Hilb:* Guía matemática acerca de la Geometría sintética y descriptiva, con ejercicios.

FRIBURGO. *Luroth.*—Funciones elípticas.—Astronomía teórica.—*Stickelberger:* Cálculo integral; ejercicios sobre el mismo; Geometría infinitesimal.—*Loewy:* Ecuaciones algebráicas: Introducción á la Matemática superior con aplicaciones y cuestiones acerca de las ciencias naturales; Seminario.—*Weingarten:* Sobre la deformación de las superficies.—*Seith:* Empleo de las secciones cónicas en la Geometría elemental.—*Koenisberger:* Mecánica de los cuerpos sólidos, líquidos y gaseosos: Geofísica.—*Tolle*: Mecánica tecnológica.—GOTTINGA.—*Klein:* Curvas y superficies; Seminario.—*Hilbert:* Teoría de las ecuaciones diferenciales con una variable independinte; Seminario. —*Minkowski:* Cálculo de variaciones; Calor radiante: Seminario.—*Runge*: Fotogrametría, con ejercicios, Resolución numérica de las ecuaciones, con ejercicios; Seminario.—*Brendel:* Cálculo de las diferencis; Seminario; Trabajos sobre el dominio de las anomalías, Seminario.—*Hergloz*: Ecuacioness diferenciales lineales en el dominio complejo.—*Caratheodory:* Cálculo diferencial é integral.—*Schwarzchild:* Astronomía popular; Rotación de los cuerpos celestes; Astronomía física, Práctica, Seminario.—N. N.—Geometría analítica.—*Schwarzschild:* Astronomía popular; Rotación de los cuerpos celestes; Astrofísica, Prácticas, Seminario.—*Ambronn.*—Determinación de los lugares; y de las órbitas de las estrellas dobles.

Greiswald *Thomé:* Mecánica; Curvas planas algebráicas, Seminario.—*Engel:* Cálculo diferencial é integral II, Ejercicios; Teoría de los grupos de transformaciones.—*Vahlen:* Geometría proyectiva, Ejercicios; Teoría y aplicaciones de los instrumentos geodésicos.—*Mie.*—Complementos matemáticos de la física experimental.

Halle a S *Cantor:* Cálculo diferencial é integral II; Mecánica analítica, Seminario.—*Gutzmer*: Geometría analítica del plano.—Introducción á la teoría de las ecuaciones diferenciales Seminario.—*Eberhard:* Teoría de los números y ejercicios.—*Bernstein:* Algebra y ejercicios.—Introducción á los seguros matemáticos, ejercicios.—*Ruchholz.*—Cálculos de las probabilidades, de los errores y aplicación á las triangulaciones; ejercicios prácticos para la determinación de los lugares.

Heidelberg *Koenisberger:* Cálculo diferencial é integral, Teoría de las funciones, Seminario.—*M. Cantor:* Aplicación del análisis á las curvas superiores planas.—Aritmética y Algebra para los hacendistas. *Kochler:* Geometría analítica plana; Capítulos elegidos de la Geometría sintética del espacio.—*Boehm:* Fundamentos de la Aritmética, el Algebra y el Análisis; ejercicios de Matemática superior.—*Bopp:* Historia del cálculo infinitesimal desde Leibniz hasta Lagrange.—*Valentiner:* Determinación de las órbitas; Capítulos de la Astronomía estelar; Progresos de la Astronomía. Astronomía desde Newton.—*Wolf:* Elementos de Meteorología.

Iena. *Haussner*: Cálculo diferencial con ejercicios; Capítulos elejidos de Geometría (Colineación, Perspectiva y Axonometría); Geometría diferencial, ejercicios de Geometría analítica plana; Seminario.—*Thomae:* Geometría analítica plana; Cartografía.—*Frege*: Teoría de las fuerzas según las leyes de Newton.—*Rau:* Técnica de la elasticidad y tratado de la solidez, ejercicios prácticos.—*Knopf*: Determinación de tiempos y lugares, con ejercicios prácticos, observación de las estrellas;

Geodesia, con ejercicios prácticos, cálculos del curso de los planetas y cometas.

KIEL. *Pochhammer:* Geometría analítica del espacio; introducción á la teoría de las funciones elípticas, Seminario.—*Heffter:* Mecánica analítica; Fundamentos del análisis (Números irracionales, valores límites, convergencia, continuidad), Seminario.—*Landsberg:* Cálculo diferencial, ejercicios sobre el mismo; Cálculo de variaciones.—*Weinnoldt:* Geometría sintética.—*Kobold:* Geodesía superior, ejercicios geodésicos.—*Harzer:* Determinación de los lugares geográficos; ejercicios; Teorías de la precesión y de la nutación. —*Kreutz:* Cálculo de las órbitas de las estrellas dobles, paralaje y aberración.—*Stroemgren:* Cálculos de casos especiales del problema de los tres cuerpos; Geografía matemática.

KOENISBERG I PR.—*Meyer:* Geometría analítica plana, ejercicios; Geometría diferencial, Seminario.—*Schoenflies:* Cálculo diferencial, ejercicios, sobre el concepto de curva.—*Saalschutz:* Teoría de los determinantes; Sobre la serie hipergeométrica de Gauss y otras series interesantes; Ejercicios algebráicos y exposición.—*Battermann:* Teoría de los instrumentos astronómicos; ejercicios con los instrumentos para la observación de las estrellas.—*Cohn:* Introducción á la astronomía teórica; Capítulos elejidos sobre Mecánica celeste.

LEIPZIG.—*Neumann:* Capítulos elejidos de Matemática ó de Física matemática.—*Mayer:* Dinámica analítica; ejercicios.—*Holder:* Teoría general de las funciones de una variable compleja; Integrales definidas, Seminario.—*Rohn:* Geometría proyectiva; Geometría analítica plana, Seminario.—V. *Oettingen:* Geometría perspectiva.—*Hausdorff:* Ecuaciones algebráicas.—*Liebmann:* Ecuaciones diferenciales ordinarias; ejercicios.—*Bruns:* Análisis práctico; Optica geométrica; Ejercicios prácticos sobre la observación de las estrellas.—*Peter:* Astronomía y técnica cronológica; ejercicios prácticos.—*Fischer:* Introducción al estudio matemático de las ciencias naturales.—*Strecher:* Geometría práctica.—*Zimmern:* Sobre la Geometría de los babilonios.—*Des-Coudres:* Introducción á la Física teórica; ejercicios; Series de Fourier.

MARBURG.—*Heusel:* Geometria analítica del plano y del espacio; Teoría de las funciones; Seminario.—*Neumann:* Algebra; Mecánica analítica, Seminario.—*v. Dalvigk:* Cálculo diferencial, ejercicios; Geometría descriptiva con ejercicios.—*Fueter:* Sobre los integrales definidas y las aplicaciones físicas de las funciones en su representación elemental; Astronomía popular.—*Jung:* Ecuaciones diferenciales.—*Frehu Freussner* y *v. Dalwig:* Determinación de tiempos y lugares.

Munick.—*Lindemann:* Teoría de las funciones elípticas; Teoría de las formas algebráicas, Seminario.—*Voss:* Ecuaciones de derivadas parciales; Algebra II, Seminario.—*Pringsheim:* Cálculo integral; Ejercicios; Complemento geométrico del cálculo diferencial.—*Dochlmann:* Geometría descriptiva II; ejercicios; Estática gráfica; ejercicios.—*v. Weber:* Geometría analítica del espacio; Ejercicios; Cálculo diferencial ejercicios.—*Brunn:* Elementos de Matemática superior.—*Hartogs*: Geometría elemental plana y del espacio.—*Perron:* Teoría analítica de los números.—*v. Seeliger:* Los nuevos métodos en la teoría del movimiento de los planetas; Ejercicios.—*Grassmann:* Introducción á la Astronomía.—*Graetz:* Mecánica analítica II.

Estrasburgo.—*Reye:* Capítulos elejidos de Geometría sintética superior; Teoría de las fuerzas, que actúan según la ley de Newton (Teoría del potencial); Algebra, Seminario.—*Simon:* Metodología y Didáctica del cálculo y de la Matemática en las Escuelas superiores.—*Wellstein:* Introducción á la teoría de las funciones algebráicas; Superficie de Riemann; Seminario.—*Timerding:* Geometría analítica del espacio: Geometría descriptiva II, con ejercicios; Desarrollo de los principios de la Mecánica, Seminario.—*Epstein:* Teoría analítica de los números, Seminario. — *Becker:* Astronomía esférica; Geodesia con ejercicios y demostraciones; Observaciones astronómicas é instrumentos de las observaciones estelares; Coloquios astronómicos.

Tubinga.—*v. Brill:* Geometría analítica del espacio; Curvatura de las superficies, Seminario.—*v. Stahl:* Análisis elemental; Análisis superior (Cálculo de variaciones), Seminario.—*Maurer:* Geometría sintética, Ejercicios.—*Gans:* Introducción al Análisis vectorial con aplicaciones á la Física matemática.

Austria-Hungría. Kolorsvar.— *Schlesinger:* Integrales definidas; Funciones fuchsianas; Seminario.—*Valyi:* Geometría analítica; Ecuaciones resolubles algebraícamente; Ejercicios; Seminario.—*Fejer:* Ecuaciones diferenciales en el dominio real; Funciones enteras transcendentes.—*Klug*: Geometría descriptiva; Ejercicios.—*Farkas:* Propagación de la energía; Mecánica analítica; Seminario.

Francia. París. *Facultad de ciencias,* 2.º semestre (desde 1.º de Marzo de 1907).—*E. Picard*: Determinación de las integrales de las ecuaciones de derivadas parciales por diversas condiciones de los límites, dos lecciones semanales.—*Goursat:* Ecuaciones diferenciales y ecuaciones de derivadas parciales.—*L. Raffy:* Teoría de la curvatura y propiedades de las líneas trazadas sobre las superficies.—*P. Painlevé:* Leyes generales del movimiento de los sistemas, la Mecánica analítica, la Hidrostática y la Hidrodinámica.—*P. Apell:* Elementos de Análisis y de Mecánica.—*Andoyer:* Conjunto de materias comprendidas en el certificado de Astronomía.—*Boussinesq:* Corrientes tumultuosas y turbillonarias á que dan lugar los lechos de gran sección, (Tubos de conducción, y corrientes de aguas descubiertas).—*G. Koenigs:* Estudio cinemático y dinámico de las máquinas.—*Borel:* Cálculo de probabilidades y teoría de los errores.

Conferencias.— *L. Raffi:* Conferencia sobre el cálculo integral y las aplicaciones geométricas.—*P. Puiseux*: Conferencias sobre la Mecánica; Trabajos prácticos de mecánica física.

Enseñanzas y ejercicios practicos para los estudiantes pertenecientes á la Escuela normal superior.— *J. Tannery:* Calculo diferencial é integral. — *L. Raffy:* Aplicaciones del Análisis á la Geometría.—*G. Borel:* Matemáticas.—*F. Hadamard:* Matemáticas.

Cursos libres.—*M. d' Ocagne:* Cálculo gráfico y nomografía.

Suiza. Berna.—*Graf:* Funciones de Bessel; Integrales definidas; Ecuaciones diferenciales; Cálculo diferencial é integral; Cálculos diversos; Matemáticas elementales; Mathem. semin. *Ott:* Cálculo diferencial; Geometría analítica plana.—*G. Huber:* Astronomía esférica II; Repetición de la Astronomía I; Geometría analítica del espacio; Teoría de las superficies; Teoría de las envolventes y líneas focales; Mat. semin. (dirección geométrica).—*Beutelli:* Elementos de Geometría proyectiva; Geometría práctica con ejercicios sobre el terreno.—*Moser:* Capítulos elejidos de la Matemática; La transcendente *pi.*—*Crelier:*

Geometría sintética II; Proyección central; Ejercicios de Geometría.—*Bohren:* Cálculo de probabilidades.

Ginebra.—*C. Cailler:* Cálculo diferencial é integral; Ejercicios; Mecánica racional; Conferencias de Análisis.—*H. Fehr:* Teoría de las ecuaciones; Geometría descriptiva y proyectiva; Ejercicios de Algebra y Geometría; Geometría vectorial; Seminario de Geometría superior.—*R. Gautier:* Astronomía teórica. *R. de Saussure:* Geometría del movimiento; Mecánica de los fluídos.

Zurich. *Escuela politécnica federal:* Sección normal de ciencias matemáticas.—*Hirsch:* Cálculo integral, ejercicios; Teoría de los invariantes.—*Franel:* Cálculo integral, ejercicios. *Geiser:* Geometría analítica II; Superficies algebráicas.—*Hurwitz:* Ecuaciones algebráicas.—*Hurwitz mit Lacombe:* Seminario matemático.—*Bebstein:* Seguros matemáticos; Probabilidad matemática; Aplicaciones del cálculo de probabilidades. *Rosenmung*: Arte de las medidas y ejercicios.—*Wolfer:* Determinación geográficas de los lugares; Ejercicios sobre las observaciones astronómicas; Aplicación de los métodos de determinaciión de los tiempos y lugares.—*Bëyel:* Los fundamentos de la Geometría; Axonometría, Perspectiva, Tratado de sombras. *Dumas:* Ejercicios de nomografía; Ejercicios sobre la resolución numérica de las ecuaciones.—*T. Keller:* Ejercicios de Cálculo diferencial é integral.—*Kraft*: Mecánica analítica; Cálculo geométrico.

Cambridge. *Prof. Forsyth.* Ecuaciones diferenciales; Funciones de dos ó más variables complejas. Funciones algebráicas y sus integrales, L. T.; Geometría diferencial elemental, 3. E. T.; *Prof. Sir G. H. Darwin:* Mecánica celeste (Atracciones y Potencial), 3. M. T.: Dinámica astronómica, 3. L. T. —*Prof. Sir R. S. Ball*: Teoría planetaria, 3. M. T.; Astronomía esférica, 3. L. T.—*Prof. Larmor*: Electricidad y Magnetismo, 3. M. T. Conferencias de Física matemática, 3. M. T.: Teoría Electrodinámica y Optica, 3. L. T.: Termodinámica y Teoría de los gases, 3. E. T.—*Dr. Obson*: Análisis harmónico, 3. M. T.: Vibraciones y sonido, 3. L. T.—*Dr. Baker*: Introducción á la Teoría de las funciones, 3. M. T.; Curvas y superficies, 3. L. T.—*Mr. Herman*: Hidrodinámica, 3. M. T.: Optica geométrica, Hidromecánica, L. T.: Hidrodinámica y sonido, E. T.—*Mr. Richmond*: Geometría algebráica; Geometría sólida, M. T. y L. T.: Geometría sintética (Métodos y aplicaciones), E. T.—*Dr. Whitehead*: Geometría sintética: Desarrollo sistemático, M. T.: Principios de Matemáticas (Múmero y Magnitud), L. T.: Principios de Matemáticas (Lógica simbólica). — *Dr. Barnes*: Ecuaciones diferenciales, 3. M. T. *Mr. Webb*: Dinámica y vibraciones, L. T. *Mr. Mollison*: Atracciones y Teoría del Potencial, E. T.—*Mr. Berry*: Funciones elípticas y Teoría elemental de las funciones; Funciones elípticas (Teoría de la transformación), E. T.—*Mr. Bennet*: Geometría lineal, L. T.—*Mr. Munro*: Hidrodinámica y Sonido, M. T.—*Mr. Bromwich*: Teoría elemental de los límites, M. T.: Teoría del Potencial, E. T.: Cálculo de variaciones, E. T.—*Mr. Grace*: Invariantes y aplicaciones geométricas, M. T.—*Mr. Hardy*: Funciones integrales, E. T.—*Mister Bateman*: Ecuaciones integrales.— *Mr. Stratton*: Dinámica analítica, E. T.—*Mr. Hinks*: Demostraciones en Astronomía práctica, M. T. y L. T.—*M. Bevan*: Matemáticas para los estudiantes de Física, M. T.

Estados Unidos. NUEVA YORK.—*Prof. P. Fiske:* Cálculo superior; Introducción á la teoría de las funciones de una variable real; Funciones definidas por ecuaciones diferenciales lineales.—*Prof. F. N. Cole*: Introducción á la teoría de las funciones; Teoría de las curvas planas.—*Prof. James Maclay*: Funciones elípticas; Aplicaciones del cálculo á la teoría de las superficies y curvas en el espacio.—*Prof. D. E. Smith*: Historia de las matemáticas.—*Prof. C. J. Keyser*: Los principios de las matemáticas; Teorías modernas en la Geometría.—*Profesor H. B. Mitchell*: Ecuaciones diferenciales; Análisis geométrico.—*Prof. Ed. Kasner*: Geometría de los sistemas dinámicos.—*Dr. G. H. Ling*: Teoría de los números; Idem superior.

HARVARD UNIVERSITY. *Prof. W. E. Byerly*: Introducción al Algebra y á la Geometría modernas; Series trigonométricas (con el prof. *Peirce*).—*Prof. B. O. Peirce*: Métodos de Física matemática, Elasticidad.—*Prof. Osgood*: Cálculo diferencial é integral (2.º curso): series y productos infinitos; Teoría de las ecuaciones de Galois.—*Prof. M. Bocher*: Teoría de las funciones; Ecuaciones diferenciales de la Física.—*Prof. C. L. Bouton*: Hidromecánica; Ecuaciones diferenciales de la teoría de los grupos contínuos de Lie.—*Prof. J. K. Whittmore*: Elementos de Mecánica; Geometría diferencial de las curvas y superficies.—*Prof. E. V. Huntington*: Conceptos fundamentales de las matemáticas.—*Dr. J. L. Codidge*: Geometría lineal.—*Doctor H. N. Davis*: Dinámica de los cuerpos rígidos. Además hay cursos de lecturas é investigaciones, etc.

La relación completa de estos cursos puede verse en *L'Enseignement mathémetique.*

Publicaciones periódicas

ANALES DE LA FACULTAD DE CIENCIAS DE ZARAGOZA.—Esta es la tercera revista científica que se publica en Zaragoza. La primera fué *El Progreso matemático;* la segunda, *La Revista trimestral*, por el catedrático D. José Ríus y Casas, nuestro distinguido amigo y compañero, y la tercera, los *Anales*, con la colaboración de todo el claustro de esta Facultad de Ciencias.

No hay para que encomiar lo que por sí se recomienda; pues supone ánimos, esfuerzos y sacrificios, donde el público científico está por formar; pues las ciencias positivas, principalmente en su región teórica, han sentido más que ninguna otra clase de estudios, los rigores de la desgracia y de la impopularidad; bien es cierto que, al carecer de atractivos exteriores pierden casi la totalidad de su fuerza sugestiva; pues sus encantos siguen á la meditación y no salen á la superficie.

Nos limitaremos á presentar el *sumario* del último número publicado.

MATEMATICA El cuarto Congreso internacional de matemáticos. *Z. G. de Galdeano.*—Observación á una nota concerniente á la espiral de Poinsot. *R. Guimaraes.*—Lecciones elementales de Geometría analítica vectorial. Lección primera. *G. Silván.*—QUÍMICA Una elcción de Química mineral. *M. Sesé Villanueva.*—HISTORIA NATURAL.—Líquenes de Aragón, por el R. P. L. Navás S. J. (continuará).—METEOROLOGÍA Observaciones meteorológicas.—Resumen del año 1907. Estaciones de Zaragoza, Huesca, Teruel y Soria, por los profesores encargados J. *A. Izquierdo, J. P. Soler, J. Domenech* y *A. Santo Domingo.*—Observaciones del segundo trimestre, por *J. Izquierdo.*

Congresos científicos.—Crónica.—Bibliografía.—Cuestiones propuestas.—Cuestiones resueltas.—Publicaciones recibidas.

L'ENSEIGNEMENT MATHEMATIQUE. SUMARIO: *H. Poincaré.* —L'invention mathématique.—*A. Buhl.*—Le nouveau diplome d'études supérieures et l'agrégation des sciences mathématiques.—*A. Costabel.*—Sur le prolongement analytique d'une fonction méromorphe.—*J. Andrade.*—Le premier livre de Géométrie naturelle (fin).—*C. Burali-Forti.*—L'importance des transformations lineaires des vecteurs dans le calcul vectoriel général.—*Cronique.*—Les mathématiques au 37 Congrés de l'Asociation française, Clemont-Ferrand 1908.—Necrologie.

Notes et documents Cours universitaries.—Allemagne.--Autriche.—Hongrie.—Suisse.

Obras recientes

Bibliographie.—Bulletin bibliographique.

DIOPHANTISCHE APPROXIMATIONEN; *eine einfuhrung in die Zahlentheorie* von *H. Minkowski* (1907). Leipzig, B. G. Teubner.

La primera obra del profesor Herr Minkowski, *Geometrie der Zahlen*, (1896) es, como dice Herr Hilbert, un modelo de una teoría aritmética que opera, de un modo riguroso, con los conceptos de la Geometría.

Esta nueva rama, debida á Herr Minkowski, ha sido posteriormente también objeto de las investigaciones del profesor Herr Klein en sus geniales *Ausgewahlte Kapitel der Zahlen Theorie* 1895 y 1896, y en la *Ecyclopaedie der Mathematische Wissenschaften* se hallan las indicaciones técnicas y bibliográficas correspondientes.

La última obra de Herr Minkowki (1907) es la continuación de las anteriores, con nuevos desenvolvimientos.

Citaremos tan sólo los epígrafes de cada uno de los capítulos.

Capítulo primero. Aplicación de unos principios elementales.—*Cap.* 2.º Enrejados de números, de dos dimensiones. —*Cap.* 3.º Enrejados de tres dimensiones.—*Cap.* 4.º Sobre la teoría de los números algebráicos.—*Cap.* 5.º Sobre la teoría de los ideales.—*Cap.* 6.º Aproximación de las cantidades complejas por cuerpos de números de tres ó cuatro raíces de la unidad, donde se consideran enrejados de números de cuatro dimensiones y cuerpos convexos en los mismos.

Las breves indicaciones que preceden y los títulos de los capítulos expresan suficientemente la importancia de la obra.

Lehrbuch der Algebra *von H. Weber, dritter Band.*— Braunschweig, 1908, F. Vieweg.

Tanto este tercer tomo, como los dos anteriores, expresan la nueva amplitud que ha adquirido este hermoso cuerpo de doctrina matemática, que se llama Algebra.

Como en los tomos anteriores, se ve en él recientemente publicado, cómo se compenetran las teorías matemáticas en una armoniosa unidad. Basta para cerciorarse de ello enunciar las materias que contiene.

Libro primero. Parte analítica. *Cap.* 1.° Integrales elípticas. *Cap.* 2.° Funciones theta.—*Cap.* 3.° Transformaciones de las funciones theta.—*Cap.* 4.° Funciones elípticas.—*Capítulo* 5.° Funciones modulares.*Cap.* 6.° Multiplicación y división de las funciones elípticas.—*Cap.* 7.° Teoría de las transformaciones de las ecuaciones y la ecuación de 5.° grado.

Libro 2.° Cuerpos cuadraticos.—*Cap.* 9.° Discriminante. —*Cap.* 10.° Cuerpos y formas algebráicas.—*Cap.* 12. Ideales en los cuerpos cuadráticos.—*Cap.* 12. Ordenes de los cuerpos cuadráticos.—*Cap.* 13. Equivalencia de los grupos de números. —*Cap.* 14. Composición de las formas y de los ideales.— *Cap.* 15. Degeneraciones de las formas cuadráticas.— *Cap.* 16. Clases de números en los cuerpos cuadráticos.

Libro 3.° Multiplicacion compleja.—*Cap.* 17. Funciones elípticas y formas cuadráticas.—*Cap.* 18. Grupo de Galois de la ecuación de las clases.—*Cap.* 19. Cálculo de las clases de invariantes.—*Cap.* 20. Ecuación multiplicadora en la multiplicación compleja.—*Cap.* 21. La norma de los invariantes de las clases..—*Cap.* 22. Desarrollo de las funciones modulares de Cayley.

Libro 4.° Cuerpos de las clases.—*Cap.* 23. División de los cuerpos.

Libro 5.° Funciones algebraicas.—*Cap.* 24. Funciones algebráicas de una variable.—*Cap.* 25. *Funcionales.*—*Capítulo* 26. Valores numéricos de las funciones algebráicas.—*Capítulo* 27. Diferenciales algebráicas y abelianas.—*Tablas.*

Anaes Scientificos da Academia polytechnica do

Porto, *publ.* s. dir. de *F. Gomes Teixeira.—vol.* III. n.º 2.— Index.—*H. de la Goupilliere: Surfaces nautiloides.*

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo.—Direttore: *G. G. Guccia* (Maggio-Junio)*: Korn*: Algemeine losung des problems Kleiner, stationarer reibenden Flüssigkeiten (cont. e fine), *Pisicati* (*L.*). Sulle corrispondenze funzionli non analitiche originate da integrale definiti.—*Somnia* (*G.*): Sulle configurazioni mobili di Moebins nelle trasformazioni asintotiche delle curve e della superficie.—*Hadamard* (*J.*): Sur les séries de Dirichlet.—*Severini*: Studio sul primo teoreme di Lie.—*Landau*: Ueber die Approximation einer stetigen Funktion durch eine ganz racionale Funktion.—*Fredholm* (*L*): Sur l'integrale fondamentale d'une équation differentielle elliptique á coefficients constants.—*Burali-Forti* (*C*). e *Marcolongo* (*R.*)—Per l'unificazione delle notazioni vetoriali (nota IV). —*Marletta* (*G.*)—Alcuni teoremi sulle curve razionali degli iperespazi.—*Somigliana* (*C.*): Sui potenziali ritardatti.—*Hadamard* (*J.*)—Rectification á la Note «Sur les series de Dirichlet.—*Veblen* (*O.*): On the Well.—Ordered Subsets of the Continuum.

Rendiconti etc. t. XXVI, Fascicolo II, (Settembre-Ottobre, 1908).—Indice: *Medici* (*S*).—Sui gruppi conformi (cont. e fine).—*Noether* (*M.*), *Poincaré* (*H,*), *Segre* (*C.*) (relatore): Relazione del concorso internazionale per la «*Medaglia Guccia*».—*Poincaré* (*H.*): L'avenir des mathématiques.—*Landeau*: Beitrage zur analytische Zahlentheorie.

Journal de Mathematiques elementaires, publiée par H. Wiber (Octobre, 1908).—Colección de ejercicios de Matemáticas y Fisica.

Bulletin de la Societe mathematique de France, (t. XXXVI fasc. III, 1908).—Table des matieres, *Le Roux* (*J.*): Sur les caracteristiques des systémes d'équations aux derivées partielles.—*Combebiac* (*G.*): Sur la génération des métriques.—*Petrovitch* (*M.*): Sur une suite des fonctions rationnelles rattachées aux équations algébriques.—*Raffy* (*L.*): Etude sur les surfaces imaginaires de Monge á lignes de courbure confondues.—*Rémoundos* (*G.*): Contribution á la théorie des singularitées des équations différentiélles du premier ordre.—*Adhémar* (*R. D'*): Les fonctions implicites en nombre infini et l'équations integrale non lineaire.

Obras nuevas

Francesco Severi: Lezioni di Geometría Algébrica. (1908). —Padova, Draghi.

Rudolph Sturm: Die Lehre von den Geometrischen verwandtschaften. Ersten Band. 1908.—Teubner, Leipzig.

G. de Galdeano (Z.): Exposición sumaria de las teorías matemáticas. 1907.

G. de Galdeano (Z.): Algunas consideraciones sobre la Filosofía y enseñanza de la Matemática.

G. de Galdeano (Z.): Cálculo diferencial, pr. 5pesetas.

G. de Galdeano (Z): Principios generales de la teoria de las funciones, pr. 7 pesetas.

G. de Galdeano (Z): Aplicaciòn del cálculo infinitesimal al estudio de las figuras planas, pr. 7 pesetas.

G. de Galdeano (Z.): Cálculo integral.

G. de Galdeano (Z.): Aplicación del cálculo infinitesimal al estudio dc las figuras en el espacio, pr. 8 pesetas.

Teoría de las ecuaciones diferenciales, pr. 12 pesetas.