

4. = 2824
102

BOLETÍN

DE

Crítica, Enseñanza y Bibliografía

MATEMÁTICA

PUBLICADO POR EL

Dr. Zoel G. de Galdeano

Catedrático de Cálculo infinitesimal
en la Universidad de Zaragoza, Corresponsal de las RR. Academias de Ciencias
de Madrid y de Lisboa.

Delegado de la Comisión Internacional de la enseñanza matemática
y miembro de otras Asociaciones matemáticas

—
Núm. 2. — Precio: 2 ptas.
—



ZARAGOZA

Tipografía de Emilio Casañal, Coso 100

1909

NO SE PRESTA

174413

Donatario de D. Anís, Salvador.

— 57 —

R
16116

El moderno simbolismo matemático

Ya, en distintas ocasiones he tratado esta cuestión, desde varios puntos de vista. Hoy será tratada con el objeto de justificar este procedimiento matemático, que á primera vista parece un juego de conceptos por lo menos extravagante y que pugna con nuestro natural modo de pensar.

Locuciones tales como la de que todas las circunferencias de un plano se encuentran en dos puntos del infinito del mismo y las esferas en una circunferencia imaginaria, que las rectas isótropas son perpendiculares á sí mismas, y otras muchas que pudieran citarse, han motivado, ó desdén, ó pintorescos comentarios.

Sin embargo, no hay razón para tales efectos, y solo sí motivo para someterse de un modo absoluto á este nuevo proceder de la Ciencia.

Ya en Metafísica, los filósofos admiten leyes distintas para lo infinito y para lo finito: dos infinitos que difieren en una cantidad finita son el mismo infinito.

En la Matemática, este concepto adquiere más varias manifestaciones, porque precisamente nos hallamos en pleno dominio cuantitativo. Y la Ciencia que trata de estas manifestaciones, es el Cálculo infinitesimal, hoy sujeto á una escrupulosa revisión, con auxilio de la ingeniosa y sutil teoría de los conjuntos.

Pero en el dominio geométrico, aun parecen más chocantes los enunciados matemáticos. Además, estas consideraciones pueden referirse de igual modo al caso de las cantidades ó figuras imaginarias.

Y, sin embargo, puede afirmarse que hoy lo infinito y lo imaginario son los conceptos de mayor arraigo en la Matemática, de los cuales es imposible prescindir.

La Ciencia ha sido siempre el resultado de cierto antagonismo existente entre nuestra naturaleza intelectual y otra naturaleza externa, que tienden á fusionarse en el lazo de los

2. 77. 965

conceptos y de los conocimientos. Y el resultado de las impresiones de lo externo sobre nuestro yo, se ha presentado siempre bajo la forma de sistemas.

Pero estos sistemas ofrecen cierta gradación, desde los más complejos, que estudia la Metafísica, hasta los de las ciencias que suelen denominarse, la Filosofía natural, según la expresión vulgarizada en Inglaterra y por último, hasta la ciencia más eminentemente subjetiva: la Matemática.

Entre las ciencias matemáticas, la Física y la Química son las que tienen el máximo de objetividad, y el Análisis, la subjetividad más absoluta, la que está más próxima al criterio de Vico; porque la inteligencia es su factor, creándolo á su imagen.

En Astronomía, Física, etc., los sistemas se han sucedido, porque la Ciencia teórica halla su comprobación en la experiencia. Y se trata siempre de que las ideas tengan la más perfecta correspondencia que sea posible, con los hechos.

En la Matemática, las dificultades de esta correspondencia se hallan aminoradas. La Geometría es la que ha exigido cierto número de postulados que proceden de la naturaleza objetiva del espacio. Y desde este momento, nos hallamos en la región de las ideas puras, y, en su último grado, cuando partimos del concepto de número para crear la Algoritmia.

Si consideramos el desenvolvimiento matemático en sus épocas sucesivas, observamos una tendencia predominante hacia la idealización.

Descartes despojó al concepto de potencia de un número del carácter geométrico, que hasta él tuviera, reduciéndolo á un carácter abstracto; y, hacia la abstracción caminaba, al importar á la Ciencia las cantidades negativas; bien es cierto que, aditándolas el carácter cualitativo, lo que preparaba la cuantificación de la cualidad, realizada por Morgan y Boole en el siglo XIX.

Ya, en más de una ocasión, hemos citado la doble excurción progresiva de lo infinito y lo imaginario, seguida por los Monge, Poncelet, Chasles, etc., en Geometría, ya por Cauchy y sus sucesores en el Análisis, lo que va justificando de un modo práctico, la necesidad sentida por los matemáticos de ayudar sus investigaciones, mediante estos poderosos instrumentos, empleados como auxiliares por los analistas del si-

glo XVIII, que siquiera les permitían llegar á transformaciones rápidas en sus cálculos.

Pero ahora vamos á ver cómo estas prácticas sucesivas, realizadas por los matemáticos, desde el descubrimiento del Cálculo infinitesimal, se han afianzado de un modo profundo en la época presente.

Los seres de pura razón, infinito é imaginario, que se escapan á la intuición sensible, tienen siquiera una existencia que podemos apreciar y aun seguir en sus alteraciones por medio de sus símbolos representativos.

Lo imaginario tiene sus correspondencias con lo real en la Geometría, así: *Por un punto real se puede trazar una infinidad de rectas imaginarias, la recta que pasa por dos puntos imaginarios conjugados es real, el punto medio de la recta, que une dos puntos imaginarios conjugados, es real, etc.*

En el análisis, desde las célebres fórmulas de Euler, que expresan las funciones circulares, por medio de exponenciales imaginarias, se ve esta conexión entre lo real y lo imaginario, cuyo primitivo origen se halla en las ecuaciones algebraicas, y, del que no se puede prescindir, sin prescindir también de éstas, y del rígido encadenamiento de las relaciones en ellas envueltas; que, después de todo, tiene por único origen el fundamento empírico de las operaciones del cálculo aritmético que se fundaron en reglas muy particulares, y cuya generalización se ha impuesto después, necesariamente.

De igual manera que la Geometría cartesiana fija un sistema de ejes como fundamento de todas las construcciones de las figuras, de que luego prescindió Hámilton en su cálculo vectorial, y de que se prescinde en la Geometría intrínseca, independiente de los sistemas de coordenadas, se prescindió del carácter de multiplicador, para identificarlo con el multiplicando, al explicar las multiplicaciones conmutativas, generalización que se extendió, cuando aparecieron las primeras multiplicaciones no conmutativas en la teoría de los cuaternios de Hámilton.

Vemos, pues, cómo el símbolo de imaginarismo surgió de una particularización, impuesta por el origen empírico de las operaciones, y que se amoldaba á nuestra manera natural de proceder en la formación de la Ciencia, por generalizaciones sucesivas, sobre intuiciones sensibles.

La intuición sensible era el instrumento de la Ciencia, y Descartes fundó en ella sus teorías matemáticas. El razonamiento era una cadena continua de intuiciones, y la inteligencia contemplaba, con luz radiante, la verdad.

Si se trataba de problemas, los matemáticos los exigían de la Naturaleza. Newton fundó su filosofía de la Naturaleza en su célebre principio de la atracción de la materia en razón inversa del cuadrado de las distancias; y desde este momento se acumularon problemas sobre problemas, que fueron resueltos por los matemáticos de los siglos XVII y XVIII, los cuales constituyen el período de la resolución clásica de las ecuaciones diferenciales.

Ya entonces, se comenzaba á prescindir de la intuición. La idea de límite, que tiene su origen en la concepción cartesiana de la tangente, se une á su congénere del infinitamente pequeño.

En una y otra, la razón tiene que suplir á la intuición. Las leyes inflexibles á que se someten las cantidades en su variación, las impide llegar al límite, lo mismo que el decrecimiento continuo de una cantidad infinitesimal hacia cero le impide, por siempre, anularse.

La razón suplía á la intuición, por la ley de incomparabilidad de los infinitos de los diversos órdenes. Este era un primer paso de emancipación, que alejaba de las intuiciones, para aproximarse á las categorías de la pura razón.

A continuación de esta serie de procesos, según la que avanza la Ciencia *a posteriori*, tenía que efectuarse otra serie de procesos *a priori*, que revisara y contrastara lo obtenido por trabajosa acumulación de resultados particulares.

Un brillante destello se nota aún en dicho desenvolvimiento clásico, á principios del siglo XIX, ocasionado por la resolución del problema de la cuerda vibrante y su resolución, por medio de la serie de Fourier.

Se aquilataba el empleo de lo infinitesimal. Cauchy, además de realizar el avance portentoso de pasar de lo real á lo real, por medio de lo imaginario, estrecha las discontinuidades de las funciones en los reducidos intervalos, dentro de los que varían las integrales singulares; y comienza á estudiar las singularidades, por medio de su cálculo de los residuos, y funda sobre lo imaginario la representación y el modo de existencia

de las funciones, al introducir las integrales, tomadas á lo largo de un contorno.

Prescindiendo de seguir estos desenvolvimientos en las teorías de Puiseux, y de Riemann hasta la actualidad, pues basta lo indicado, para hacer ostensible la tendencia á la abstracción, al puro concepto, que va prescindiendo de la intuición, y que lleva al carácter representativo de la Matemática actual, llegamos á un elemento de capital importancia en ésta, á saber: el lenguaje, el sistema de signos, el simbolismo.

El lenguaje matemático se ha ido transformando, conforme con su modo de ser, cada vez más abstracto de la Matemática.

Al principio, tuvo un carácter eminentemente objetivo, con sus dos clases indispensables de signos, correspondientes á los objetos y á las operaciones, ó como si dijéramos, á los sustantivos y á los verbos del lenguaje común, y aun se efectuaba, y se continúa efectuando una traducción del lenguaje gramatical en lenguaje matemático, al plantear los problemas concretos, con la discusión consiguiente, para salvar las discrepancias de dos sistemas de expresión tan distintos.

La naturaleza de los objetos matemáticos y su modo de expresión por el lenguaje, reaccionaban; un progreso ó alteración del uno provocaba un progreso recíproco del otro.

Debemos considerar los dos desarrollos en su estado explícito ó implícito, que expresa continuamente sus dos fases recíprocas.

El problema inverso, expresado por las ecuaciones, en virtud del que se aspira á hacer explícitas ciertas cantidades, envueltas en aquéllas, por medio de operaciones varias, es la transformación capital de la Matemática, análoga á la obtención de un elemento químico, unido á otros varios por la fuerza de afinidad. Es un desdoblamiento de una relación dada. Ya veremos cómo se ha ido alterando el organismo de la Matemática. Ahora vamos á tratar, especialmente, de la alteración y de los progresos del lenguaje.

El elemento infinitesimal y los cualitativos, representados por lo negativo y lo imaginario, habían enriquecido el campo matemático; y á este enriquecimiento material tenía que corresponder otro formal.

Argand había establecido que, al girar un cuadrante en un

ángulo recto, para colocarse en su inmediata posición, la unidad positiva se convertía en negativa, y asimilando esta operación geométrica con la algorítmica de la multiplicación, establecía el hecho fundamental del cálculo sobre las cantidades imaginarias. Este se fundaba en una realidad sensible. Lo que se efectuaba sobre un cuadrante, se podía efectuar sobre arcos cualesquiera.

El cálculo vectorial tenía ya una base para sus ulteriores desarrollos. Las equipolencias y los cuaternios estaban en el filón de donde los habían de extraer los genios de Bellavitis y de Hámilton. Solo faltaba para el uno, la idea de la descomposición en dos ecuaciones ordinarias de una ecuación de equipolencia, y para lo otro, la definición del escalar y vector, que traducen la traslación y la rotación, transportando la Geometra á la Cinemática.

Por otra parte, la Algoritmia acrece sus dominios con el algoritmo de las facultades, importado por Kramps. Ya el logaritmo había resultado de una relación entre crecimiento por suma y crecimiento por producto. Los logaritmos y sus números correspondientes, constituían dos regiones de cantidades de distinta categoría; según su crecimiento, cuyo grado de rapidez expresa gráficamente la curva logarítmica.

Ahora se trata de un nuevo crecimiento, el crecimiento potencial, que aparece frente al crecimiento por diferencia.

Las funciones hasta Kramps, habían dependido de un crecimiento por suma en las variables independientes. Ahora dependen además, de un crecimiento más rápido que afecta á los exponentes.

El sistema de signos matemáticos tiene un acrecentamiento, y varios matemáticos, entre ellos Ohm y Oetingen, aspiraron á perfeccionar y extender este nuevo simbolismo que se combinaba, por un lado, con el progreso del cálculo de las series, y por otro, con el algoritmo combinatorio creado por Vandermonde.

Pero llegamos, como si dijéramos, á la estación central de la matemática moderna, al momento en que el incomparable Cauchy, con sus 789 Memorias, señaló gran número de direcciones que habían de constituir la red de teorías de la Matemática actual.

Ciñéndonos á lo concerniente al lenguaje, bastará citar

sus escritos acerca de las claves, de las ecuaciones simbólicas y, sobre todo, el empleo preferente de los símbolos imaginarios, que se concretó, de un modo permanente, como ruta imprescindible para lo venidero, en la teoría de las funciones de variables complejas, fijando la base de los ulteriores progresos del Análisis.

Nos encontramos ahora en el momento de una bifurcación que dirige, ya á la Geometría, ya al Análisis.

Pero sobre ésta, y como núcleo que ha de servir de apoyo á los nuevos desarrollos, tenemos un nuevo elemento más fundamental y más comprensivo que todos los demás, el elemento subjetivo.

Hasta ahora, la inteligencia había elaborado su objeto, y se presentaba como el motor oculto de sus representaciones. En el momento actual, se presenta como factor aparente, como causa de sus producciones. Llegamos á la resurrección de las ideas de Leibniz, de aquel espíritu tan eminentemente matemático, que todo lo reducía á su idea predilecta; el que aspiraba á una ciencia general, que concibiendo la lógica, no solo como el arte de juzgar y de demostrar, sino como el de inventar, de obtener de los conocimientos adquiridos, otros, por nuevas combinaciones, solo para resolver los problemas, reduciendo su solución á problemas conocidos, como en Geometría, y estableciendo sus máximas acerca del arte de inventar (*), encerrando en su obra *De Arte combinatoria*, el germen de esta Lógica inventiva, estableciendo sus categorías matemáticas; y en su ensayo sobre una lengua universal, llega á echar los fundamentos del Algebra de la Lógica, que reinventaron el filósofo Hámilton y, de un modo más definitivo, Boole y Jevons. Hemos llegado á la época de las clasificaciones, de los esquemas y cuadros representativos.

Pero este predominio subjetivo no prevalece de un modo absoluto en la Matemática. Deja, ciertamente, huella profunda en la nueva rama, el Algebra de la Lógica, cuyo principal propulsor ha sido Schroeder; y, luego, sin perder su influencia sobre los desarrollos de los conceptos directores, que iluminan siempre el campo sobre que se aplican, vuelve á su carácter objetivo, primero, en los trabajos de Grassmann, que

(*) COUTURAT.—*La Logique de Leibniz*.

constituyen un *cálculo formal*, correspondiente á la Geometría de n dimensiones de Riemann, que es una Geometría, á su vez envuelta bajo las formas abstractas del Análisis; y después, Cayley, el matemático de las grandes abstracciones, en cuyos trabajos prevalece el trabajo simbólico y combinatorio, predomina entre sus contemporáneos en el arte de crear formas y relaciones abstractas, que no son puramente triviales, sino que tienen infinitud de aplicaciones.

Como dice B. Peirce en su *Linear asociative Algebra*, deben adoptarse símbolos que sirvan para materializar las formas de argumentos, sometidos á las condiciones de representación ó de especiales interpretaciones.

Las álgebras se clasifican según la naturaleza de sus unidades, que se combinan, ó las *extraordinarias* de Cayley, y están caracterizadas por sus tablas de multiplicación, que expresan las leyes combinatorias, por su alfabeto, su vocabulario y su gramática.

Tenemos, pues, que de esta relación subjetiva nos quedan, en el dominio matemático, no solo las leyes combinatorias, que, desde Vandermonde, Cauchy y Galois constituyen la teoría de los grupos.

Tenemos un simbolismo, que es una de las características de la Matemática actual y que, llevado al Algebra de n unidades complejas por Weierstrass y Dedekind, conduce á entidades de carácter tan extraordinario, como los divisores del cero, que si no tienen representación en sí, y pugnan con los conceptos ordinariamente admitidos, sin embargo tienen una existencia en las relaciones de que proceden, como en Geometría, según Poncelet, las relaciones de imposibilidad (relativa) constituían una huella que las caracterizaban.

La Geometría por otra parte, según se ha indicado, también ha admitido una multitud de seres de razón, que en ella representan el simbolismo del Análisis.

En resumen, la Matemática, sobre un campo inagotable de realidades, depuradas por un perfecto rigor, tiene una parte formal ó simbólica de carácter subjetivo, que la domina, como la idea á la materia.

Esta parte ideal, que vemos ha penetrado por grados sucesivos en la Matemática, y que constituye su espíritu, es de suma importancia, pues por ella, las más diversas teorías se

unifican parcialmente y en conjunto. Y además de ser importante, es necesaria, en el estado actual de esta ciencia, que ha adquirido un carácter eminentemente representativo.

Cuando la Matemática comprendía tan solo un reducido número de teorías que se desenvolvían aisladas con auxilio del tardo procedimiento analítico, sobre intuiciones inmediatas, los idealismos de la Matemática actual eran innecesarios.

Los géometras procedían por la adivinación del genio, profundizaban por la energía del vigor intelectual, capaz de vencer los obstáculos de muchos y difíciles problemas.

Bastaban entonces los procedimientos y recursos naturales. Pero más adelante fué necesario emplear artificios de toda suerte, capaces de vencer resistencias siempre crecientes, de igual manera que hoy las modernas industrias han reemplazado los procedimientos manuales por máquinas, cada vez más eficaces y perfectas.

Las notaciones matemáticas eran extremadamente sencillas: la a , la b y la c bastaban para expresar por ejemplo, las tres coordenadas de un punto como la x , y , z las variables sobre que versaba un teorema ó un problema.

Los procedimientos se reducían generalmente á transformaciones ingeniosas, que simplificaban los problemas á que daban formas sencillas á los enunciados de los teoremas.

La invasión de una rama en los dominios de las otras, no tenía otro fin, que el servir como de medio auxiliar, ya de representación ó de reducción ó de simplificaciones; y consistía, más en una yuxtaposición que en una asimilación ó fusión de varios objetos en uno solo. Hoy, la compenetración de los conceptos es general, realizando síntesis grandiosas, que tienden á unificar las más diversas teorías.

La esquematización ó el simbolismo se imponen como condiciones necesarias de la *tendencia actual de la Matemática*, que será objeto de otro artículo; pues sin este poderoso instrumento de generalización, sería imposible clasificar, conforme á un orden riguroso y completo, la infinidad de objetos creados por las modernas teorías, y que es necesario concentrar alrededor de las ideas generales, para impedir que la inteligencia quede abrumada bajo tan inmenso cúmulo de conocimientos.

Ensayos de generalización y de síntesis matemáticas

I. Reseña retrospectiva

En esta primera parte, seguiré el orden de sucesión de mis ideas, expuestas en algunos de mis trabajos, no precisamente conforme con el rigor de sucesión lógica, y con intermitencias por efecto de las circunstancias especiales y desfavorables, bajo cuya presión he llevado adelante mis diversas publicaciones.

Con las *Observaciones útiles en el estudio de las matemáticas*, comencé en 1874, á exponer algunas ideas de orden psicológico y lógico, ó bien, algunos principios rudimentarios de las matemáticas elementales; la correspondencia entre el problema y el teorema. *El teorema es una proposición que expresa una relación de coexistencia entre modos de ser de varias cosas.*

El teorema es el enunciado perfecto de un problema resuelto.

En el análisis de lo que constituye la demostración de un teorema, ó la resolución de un problema, encontramos: 1.º ciertas entidades y relaciones caracterizadas por existir hipotéticamente. 2.º otras entidades y relaciones, ligadas á la primera por el lazo de la coexistencia. 3.º ciertas construcciones ó transformaciones que permiten introducir nuevas entidades y relaciones, que nos sirvan como medio de enlace entre los elementos expresados en el teorema ó problema. 4.º Teoremas que justifican los enlaces entre dichos elementos.

Pero, aparte de estas relaciones y existencias que hallamos en cada cuestión particular, hay que considerar el conjunto ó totalidad de cuanto concebimos en el orden de la existencia, y que nuestra inteligencia enlaza para constituir sus conceptos ó las verdades científicas.

Esto conduce á la relación entre el sujeto y el predicado, en los géneros de la lógica, entre la hipótesis y la tesis de los teoremas matemáticos.

La diversa extensión de las entidades que pueden combinarse en un juicio ó en una proposición matemática, llevan al

estudio de la reciprocidad ó no reciprocidad de los teoremas; lo que me condujo á la demostración por reducción al absurdo, consistente en desechar una de las proposiciones incompatibles, por haberse demostrado que la otra era cierta.

Estas consideraciones, de carácter lógico, fueron desarrolladas más detalladamente en *El método filosófico aplicado á la ciencia matemática* (1875).

Pero estas consideraciones de la reciprocidad y del método por *reducción al absurdo* exigían más detenido examen, ya por llegar, en el curso de nuestro razonamiento, á una proposición contraria á una definida, ya porque se trata de dos teoremas recíprocos, lo que lleva á distinguir las proposiciones directas y recíprocas y la sustitución de una proposición por la recíproca de la contraria, lo que conduce á diversos enunciados de proposiciones equivalentes, de todo lo cual, traté en *Consideraciones sobre la conveniencia de un nuevo plan para la enseñanza de las matemáticas elementales* (1877).

Todos estos desarrollos conducían á dos ramas pedagógicas de la ciencia matemática, la *metodología* y la *crítica*. De la primera comencé algunas consideraciones en la última obra citada, que me condujo á hacer breves indicaciones respecto á diversos métodos elementales; citaremos especialmente los métodos que denominé *adjuntivos* ó *supresivos* que permiten, ya restringir, ya ampliar la generalidad ó extensión de las cuestiones.

Respecto á la *Crítica*, nuevas cuestiones tenía que proponerme. Estas eran, en primer lugar: la *existencia* y la *determinación*.

Teniendo su origen muchas entidades matemáticas en una existencia de orden psicológico, determinada por su *definición*, era necesario establecer su realidad, por lo menos intelectual, es decir, sometida á respetar siempre el principio de contradicción.

De estos principios traté en la *sección crítica* de mi *Geometría elemental* (primera edición, 1881) y en mi *Complemento de la Geometría elemental* (1881).

Además, la generación de un objeto ó ente matemático no se efectúa tan solo mediante una definición que lo constituya en bloque, como un todo rígido. Tenemos la generación geométrica, reducible á sus elementos, la rotación y la traslación.

El *movimiento* es un medio inagotable de creaciones geométricas. Pero además de la extensión de una idea, debemos considerar su *comprensión*, es decir, la suma de caracteres que la integran.

Una línea recta se determina por dos puntos y también por un punto y un ángulo, un triángulo, por dos lados y el ángulo comprendido y también por un lado y los ángulos adyacentes, etc.

Esta doctrina, que trato bajo la denominación de *sustituciones y equivalencias geométricas* en dicho *complemento de Geometría*, es el riquísimo arsenal que hoy, en todas las regiones de la Matemática, provee de inagotables transformaciones, como medios para resolver problemas ó para llevar á la demostración de los teoremas.

La demostración de un teorema, según expongo en mi *Geometría general* (1892), tiene por objeto establecer un encadenamiento de términos medios, que enlazan el primer eslabón (hipótesis) con el último (tesis), para suprimir aquéllos en el enunciado. Y cabe gran variedad en la elección de dicho encadenamiento, en virtud de la variedad de caracteres que ofrece la comprensión de cada idea.

La demostración es una serie de sustituciones de condiciones equivalentes, como prácticamente expresan los epígrafes: *Transformación ó sustituciones de las relaciones angulares por relaciones de paralelismo. Transformaciones de las relaciones angulares y de posición en relaciones de longitud lineal*, etc. (*Geometría elemental*, 1881).

La determinación del *punto* ó de la *recta* por medio de una *razón* numérica, constituye una generalización del método de superposición ó de igualdad de triángulos. En particular, podemos referir todos los triángulos homotéticos rectángulos al triángulo rectángulo, cuyos vértices de los ángulos agudos se hallan en el centro y en la circunferencia y cuyo radio es el de las tablas de las líneas trigonométricas, y proceder así, para cada tipo de triángulo rectángulo, deduciendo inmediatamente las relaciones trigonométricas correspondientes á un triángulo rectilíneo cualquiera, como las de un triángulo curvilíneo pueden reducirse á las de los triángulos rectilíneos por proyección sobre un plano (*Geom. elem.* 2.^a edic.), estableciéndose encadenamientos de figuras, de igual modo que

se pueden establecer, de una manera uniforme en el plano, de las relaciones de igualdad y desigualdad geométricas; pudiéndose emplear en estas relaciones el principio de la correspondencia binuívoca y hacer una exposición sistemática de la Geometría.

El plano (como el espacio) sería un fondo en el que se pueden realizar construcciones sobre construcciones, á la manera que se efectúa en la Geometría del triángulo, y las construcciones que se efectúan para resolver cada problema particular, no son más que hechos aislados, que se destacan con ocasión de la cuestión propuesta de la posibilidad de relaciones existentes, según las múltiples combinaciones de datos que se puedan ofrecer en cada caso, lo que llega á conducir, reglamentado, á un arte de proponer problemas, correlativo con un arte de resolverlos; lo cual hoy se efectúa, por el hecho contingente de las aptitudes especiales de cada matemático y sus conocimientos teóricos ó de su poder inventivo, que le conduzca á nuevos procedimientos, que crean otros nuevos enlaces entre los dos términos de cada problema, ó sea entre los datos y las incógnitas.

En el dominio elemental, es evidente que la exposición de la ciencia ocupa un lugar secundario, pues el resultado esencial debe ser que el alumno desarrolle sus aptitudes. «La enseñanza debe corresponder á las fases del desarrollo intelectual: la intuición empírica ó percepción, la memoria y la imaginación, son los primeros recursos del niño, á los que corresponde la adquisición de numerosas representaciones del mundo físico, mecánica y rudimentariamente enlazadas por la memoria y la fantasía, después, la inducción, la generalización y clasificación; por último, la abstracción y el conocimiento racional. Esta es la gradación que existe desde los primeros rudimentos de la enseñanza, hasta su grado superior».

Esto constituye el asunto de mi folleto, *Consideraciones sobre la conveniencia de un nuevo plan para la enseñanza de las matemáticas elementales (parte primera, exposición 1877)*. Me limitaré á reproducir el siguiente párrafo:

«La enseñanza debe corresponder á las fases ya anteriormente indicadas del desarrollo intelectual. Las percepciones y recuerdos, las ideas abstractas y las ideas racionales, son los tres puntos de vista para fijar el plan».

«El primer tratado, llamado *exposición preliminar ó intuitiva*, contendrá las definiciones, divisiones y operaciones correspondientes á la Aritmética, ciencia del número, es decir, la descripción del objeto y sus variedades, y la parte práctica, cuya justificación es un análisis intuitivo de escasa dificultad; después seguirán las definiciones y divisiones pertenecientes á la Geometría, ciencia de las figuras, cuyo objeto, más concreto é inteligible que el del Algebra, cuyos métodos, más numerosos que los de ninguna otra parte de la Matemática, la hacen muy propia para mostrar, desde luego, los medios que ha de emplear la inteligencia en la demostración y resolución de los problemas. La memoria y la intuición empírica son las funciones intelectuales, casi exclusivamente ejercidas en esta parte.

El *segundo* tratado será la *Metodología*, que principiará por consideraciones generales respecto al teorema y problema, distinción de uno y otro, partes de que constan y numerosos ejemplos para ejercitar en distinguir la hipótesis de la tesis, los datos de las incógnitas y, en obtener el teorema recíproco de otro dado. Seguirá una ordenada descripción de los métodos demostrativos, empezando por los geométricos de superposición, rebatimiento y giro, de carácter práctico, concretada á las demostraciones de teoremas muy sencillos. Después se enseñará el método de la *cuarta proporcional*, y de las *rectas antiparalelas*, pasando á los de *sustituciones sucesivas* y de los *límites*, para dejar en último término, el *ad absurdum*, que se expondrá en sus dos casos.

«La *Metodología* dará por resultado, poner en conocimiento al alumno de los diferentes procedimientos matemáticos que se combinan para demostrar y resolver las cuestiones».

«El *tercer* tratado debe ser la exposición razonada de la ciencia elemental en sus cuatro partes, *Aritmética, Geometría, Algebra y Teoría de las funciones circulares, con la resolución numérica de los triángulos rectilíneos.*»

«En virtud de lo ya expuesto, bastará indicar el método ó los métodos demostrativos empleados para cada caso, desarrollándolos, á lo sumo, en los primeros ejemplos ó en algunos que ofrezcan dificultad ó circunstancias notables. Esto evitará el trabajo más difícil para el alumno que estudia los textos actuales, consistente en deducir, de una larga relación,

lo esencial, que constituye las demostraciones, es decir, un análisis de la doctrina expuesta, para comprender sus extremos, y una síntesis que resuma las ideas capitales con su natural dependencia, para ponerle en conocimiento de la verdad, no mediante la memoria, sino mediante el juicio, lo cual supone un gran discernimiento, un buen criterio y facilidad para traducir las palabras en ideas, con reciprocidad. Esta tercera parte dará por resultado perfeccionar al alumno en el conocimiento de los métodos que superficialmente adquirió durante el anterior, por efecto del gran ejercicio práctico que constituye la exposición demostrada, en la ciencia elemental».

«La *Crítica* dará por resultado hacer pasar el conocimiento espontáneo de la ciencia adquirida por el alumno, á conocimiento fundado. Aprenderá, en este tratado, la razones del orden expositivo y del empleo de los métodos y, cómo se subordinan y coordinan entre sí las verdades, es decir, cómo fundan las unas á las otras, y según qué leyes ó reglas se sustituyen. En éste, como en el anterior Tratado, hay un predominio de la razón sobre las demás facultades ó funciones intelectuales.»

El *quinto* y último tratado será una *síntesis general*, hecha *a priori*, prescindiendo de las trabas que impone la necesidad de fundar (en el estado actual de la ciencia) unas proposiciones en otras, es decir, defectos debidos al escaso progreso de los métodos de enseñanza y al estado intelectual de los alumnos que exige, con frecuencia, alteraciones en la rigurosa exposición sintética. Esta se realizará, procurando presentar un cuadro completo, donde aparezcan las verdades según sus conexiones naturales, revelando sus armonías, presentándose como simétrico conjunto, para que la inteligencia, en cuyo fondo reside la idea de orden, lazo universal de las ideas, retenga los conocimientos adquiridos, no por el artificio pasajero de la memoria, sino por una fuerza permanente, capaz de reproducirlas en todas ocasiones».

«El objeto del quinto tratado es evitar que la inteligencia, agobiada por los detalles, se pierda en la numerosa variedad de éstos, colocándola á una superior altura, desde donde le sea fácil distinguir el conjunto de los detalles, unidos entre sí, por relaciones naturales».

Esto exponía en la obra citada, hace muchos años; pero si bien el espíritu, según el cual fué escrita, prevalece aún, como

criterio dominante, en lo que debe ser la enseñanza, hoy tendrían su lugar propio estas consideraciones ú otras análogas, en la asignatura que debe crearse con el título de *Crítica y Pedagogía matemática* ú otro equivalente, de lo que he tratado en varias ocasiones; y respecto al modo de practicar la enseñanza, en los últimos años, se han publicado tratados excelentes que indican los procedimientos más acertados.

II La actual evolución crítico-pedagógica

Al inmenso progreso doctrinal de la Matemática durante el siglo XIX, ha seguido otro progreso correlativo, si bien de inferior cuantía en la parte didáctica.

La obra de Clifford, acerca del sentido común en matemáticas, la *Initiation mathématique* de M. Laisant, tienen un carácter eminentemente educativo.

Otras obras tales como *Lehrbuch der Mathematik nach modernen Grundsätzen* de los señores Behrendsen y Gotting, *Geometrische Fragen* del Sr. Enriques, *Encyklopaedie der Elementar-Mathematik* de los Sres. H. Weber y Wellstein el *Handbuch der Elementarmathematik für Lehrer* del Sr. Schwering y otras que citarse pudieran, señalan un nuevo carácter de selección de materias que reemplazan ventajosamente, al antiguo dogmatismo, derogándolo en la enseñanza. Y una brillante muestra de esta derogación la ha dado M. Meray con sus *Nouveaux éléments de Géométrie*, cuya primera edición data de 1874, y en los que sustituye la clásica exposición euclídea por otra basada en los movimientos de rotación y de traslación.

Pero estas tendencias innovadoras, que afectan á la forma, van acompañadas por otras que se refieren, á la materia, pues el inmenso caudal de ideas y de teorías y el progreso natural ó transformación sufrida por la Matemática en el siglo XIX, han impuesto la elementalización de lo que en su origen, por ser desconocido, se ofreció con el carácter de lo superior.

Los grandes descubrimientos, desde Abel hasta Weierstrass, habían permanecido ocultos en cierto modo, y relegados en las altas regiones de las revistas ó los periódicos, de carácter superior, á las que sólo llegaban los grandes maestros en el saber, creadores por excelencia, pero no divulgadores.

La Matemática adquirió inmenso tesoro en importantes y novísimas teorías.

De tales alturas, después de una gestación de treinta años, la Ciencia fué descendiendo, como fecundizante manantial, á las regiones de la enseñanza.

Los primeros divulgadores fueron Serret y Houel en Francia, el primero de las teorías de Abel y Galois, el segundo de las de Cauchy y de Riemann, en Alemania Roch, Hankel y Durege de las teorías de Riemann, en Inglaterra Salmon de las Cayley, y Aronhold, etc., precisamente hasta la mitad del siglo XIX.

Esta es la primera avalancha de ideas que conmueve el campo de la enseñanza, para disolverse y difundirse en nuevas doctrinas, y, poco más tarde, Dedekind y Kronecker, Weierstrass y Fuchs, Herr Cantor y los contemporáneos, cambian definitivamente la faz de la ciencia, y, enseguida, la de la enseñanza.

Tan radical transformación de la parte teórica influye en la organización de la parte didáctica.

Las antiguas teorías ceden puesto á las nuevas, concentrándose en sus extremos principales y desprendiéndose de multitud de detalles, que pasaron á tener importancia secundaria. Parte de la antigua labor quedó infecunda, pues los inventos modernos habían señalado nuevos rumbos, campos fértiles que cultivar, con esperanza de abundantísimas cosechas.

A la aridez, al aislamiento de las ideas sucedieron armonías sin cuento, ramificaciones y eslabonamientos sólidos, á la heterogeneidad, la uniformidad, la unificación, á la dificultad la sencillez. Las antes consideradas como elevadas teorías, descendían hacia los umbrales; se elementalizaba lo superior.

No hay más que ver y comparar los actuales tratados elementales con los de hace treinta años, para convencerse de los progresos de la enseñanza que, con haber sido muy considerables, aun exigen otros nuevos, por ser tan abundante el material, que debe ordenarse y organizarse para la fácil adaptación á las inteligencias.

Así han descendido las nociones de la teoría de transversales y de las figuras proyectivas, como se ve en *Leitfaden der*

ebenen Geometrie del Sr. H. Muller (1875), de la Geometría de la posición en *Geometrie der Lage* del Sr. R. Boger (1900), *Leitfaden der projektions-Lehre* por los Sres. H. Muller y O. Presler (1903).

La elementalización del cálculo infinitesimal se observa en *Hohere Analysis* del Sr. F. Junker y *Aufgabensammlung, Einfuhrung in die Differential und Integralrechnung* del señor H. Muller y *Elemente der differential und Integralrechnung* del Sr. L. Tesar, y análogamente han efectuado los Sres. Simon, Aschieri, Pincherle y otros en obras que forman parte de las colecciones Goschen y Hoepli.

La *combinatoria*, la *sistematización*, la *compenetración*, la *aritmétización* y el *esquematismo* son las nuevas características del actual desarrollo matemático. Por último, un valiosísimo testimonio en pro de lo expuesto ofrece la obra reciente del ilustre profesor Herr F. Klein, *Elementarmathematik von hoheren Standpunkt* (Teil I: *Arithmetik, Algebra, Analysis* (1907-1908), en la que se admira, como siempre, la inagotable genialidad de tan eximio maestro, y la libertad indefinida que cabe, actualmente, en la combinación expositiva de las teorías matemáticas y de su adaptación á la enseñanza.

III Fundamentos para una clasificación de ideas matemáticas

En mi memoria, presentada al *Congreso científico de Zaragoza* con el título: *Ensayo de clasificación de las ideas matemáticas*, establecí diez tipos, dentro de los cuales se contienen los conceptos y procedimientos principales de la Matemática, á saber: La *combinatoria* y el *simbolismo*, de carácter eminentemente subjetivo, el *quantum*, de carácter objetivo, y los *sistemas*, las *correspondencias*, *correlaciones* y *representaciones*, con las *transformaciones*, todos estos de carácter subjetivo-objetivo.

El *quantum* es como la primera materia de la Matemática, de la que nacen todos sus conceptos y relaciones, ya bajo la forma de número ya bajo la de figura geométrica.

Así, la *Aritmética* genera el número por la más simple de las combinaciones del espíritu, en el mayor grado de pureza

subjetiva, llegando con este carácter, á la *Teoría de los números*, que investiga las leyes de los mismos, en su mayor generalidad.

Por otra parte, la Geometría, al tomar como objeto el espacio, que tiene una existencia independiente de nosotros, exige ciertos postulados, por la que se mantiene una primera correspondencia subjetivo-objetiva.

Tenemos además los *sistemas*. Estos no son más que objetos que provienen de una definición, considerada en toda la extensión, ó referida á todos los objetos que comprende ó presupone, en el orden abstracto ó simbólico; y, aunque ofrecen gran variedad en el orden objetivo, como por ejemplo, los sistemas de numeración, los sistemas de logaritmos, los cuerpos finitos de números, los números ideales de Kummer, sistemas modulares, etc., á su vez, los haces de curvas, las redes, las configuraciones, etc., tienen capital importancia en el orden subjetivo ó lógico, al constituir procedimientos generales, como el sistema de Chasles y el de Staudt, de Hamilton y de Grassmann. El sistema de coordenadas cartesiano y el de coordenadas polares, las clasificaciones de curvas, de grupos, de soluciones de ecuaciones diferenciales, la aritmetización, la simbolización de Boole de Cayley, etc. Hay pues sistemas objetivos y subjetivos.

La combinatoria comprende el primer grado de nuestros procedimientos y lo más subjetivo que hallamos en la ciencia.

La combinatoria se ejerce, ya sobre objetos reales, ya sobre objetos ideales que solo tienen una realidad intelectual. Las operaciones combinatorias se aplican á objetos reales ó á objetos ideales.

Tenemos como primeras generaciones: los *algoritmos*, con carácter individual, los *grupos* con carácter sistemático.

El *simbolismo*, que aparece en todas las manifestaciones de la Ciencia; porque en su lenguaje ó modo de expresión, adquiere un carácter especial, digno de señalarse, cuando se nos presenta como instrumento de generalización, y de simplificación y como medio de crear realidades ficticias útiles en nuestros razonamientos, ya que regulariza las producciones intelectuales, etc.

En el grado más abstracto del simbolismo se agrupan las entidades llamadas imaginarias, los números ideales, las cla-

ves, las extraordinarias, los hiperespacios y numerosas representaciones del *Analysis situs*. En esta rama, la rigidez ó precisión de las relaciones suple la falta de objeto real; pero es un lenguaje de ideas, que puede servir de molde á la realidad.

Cada objeto puede considerarse en sí, ó en las dependencias de nuestra acción sobre el mismo.

En el primer caso, tenemos el estudio de las *singularidades*.

Por efecto de la fusión de la Geometría en la Algoritmia, bajo la fecunda representación geométrica de las funciones de variables complejas, la creación de la Geometría sobre una curva algebraica y la concretación de la teoría de los conjuntos en los sistemas de puntos, podemos considerar indistintamente las singularidades algorítmicas, tratadas por Cauchy y Weierstrass en el puro análisis, al lado de las singularidades que, comenzando á estudiarse en las geometría Cartesiana y Newtoniana, llega á organizarse en teoría geométrica, bajo la ley fundamental que constituyen las fórmulas de Plücker; y por último de las nuevas singularidades, reveladas por el estudio de las ecuaciones diferenciales, tales como, por ejemplo, los *nodos*, *gargantas* (cols), *fondos*, *centros* y *focos*, de que trata M. Poincaré en su *Mémoire sur les courbes définies par des équations différentielles* (*Journal de Math. pures et appliquées* (1881, 82 y 85), las singularidades propias y accidentales, fijas y móviles, etc.

Los resultados de la acción intelectual sobre los objetos, con el fin de facilitar su estudio, por un cambio conveniente de forma, se comprenden en lo que podemos llamar *normalización*.

El primer caso de normalización se encuentra en la expresión de números por el sistema decimal. El empleo del sistema ortogonal de coordenadas es un procedimiento de normalización, que se completa por la transformación que hace desaparecer el término rectangular en las ecuaciones de segundo grado.

Esta necesidad de simplificar las expresiones se ha impuesto á medida que la Matemática ha progresado, como compensación de las dificultades crecientes, y para facilitar el estudio de los objetos presentados bajo formas regulares. En

todas las teorías encontramos objetos reducidos á su forma normal. Y la normalización es objeto preferente de los matemáticos, pues de ella dependen los progresos de la Ciencia.

La normalización consiste en una transformación *especial*, con carácter exclusivamente útil, que se somete á las condiciones de finitud, simetría y regularidad. Pero podemos considerar las transformaciones, en general.

La transformación consiste unas veces, en hacer cambiar simplemente de forma á un objeto. Como, por ejemplo, cuando se expresa una fracción ordinaria en fracción decimal ó continua, ó una función en serie. Pero también la transformación consiste en cambiar de región un objeto ó sistema. Así tenemos: las transformaciones lineales, las transformaciones de un dominio, cuerpo de números, etc., en otro dominio ó cuerpo de números, etc., las homográficas, en general, las transformaciones proyectivas, etc.

Las transformaciones ofrecen un medio de estudio de un objeto por otro, la fijeza de la ley de encadenamiento responde de la exactitud de los resultados que se buscan en un objeto ó sistema, basada en la exactitud obtenida sobre el objeto transformado; las transformaciones son un medio indirecto de deducción; son en la Matemática, lo que las proposiciones intermedias de los sorites de la lógica, que enlazan las dos proposiciones extremas.

Tenemos además las *correspondencias*, las *correlaciones* y las *representaciones*.

Las *correspondencias* son simples relaciones entre dos sistemas distintos. Las correspondencias son relaciones fijas, permanentes, así como las transformaciones son mutaciones sucesivas de un objeto ó sistema en otro, los diversos modos de existencia, análogos á las diversas curvas que constituyen una familia de curvas ó superficies, por todas las variaciones posibles de los parámetros. Pero las correspondencias son resultados de comparación de dos objetos; constituyen el estudio de las propiedades ó caracteres del uno, que están reemplazados por los caracteres correspondientes del otro, el modo de coexistir ambos; de modo, que al darse los caracteres del uno, quedan determinados los caracteres del otro. Dos casos tipos de la correspondencia están dados por la correspon-

dencia biunívoca, y por la correspondencia holoédrica ó meriédrica de dos grupos isomorfos.

La correspondencia difiere de la transformación en que ésta se halla regida por una ley fija y *común* para todas las entidades como, por ejemplo, se verifica entre los puntos ó rayos de dos sistemas homográficos ó en involución; y, en la correspondencia existe heterogeneidad en las relaciones, como se ve en la correspondencia entre los coeficientes y las raíces de una ecuación algebraica, entre cada forma cuadrática y un grupo fuchsiano, entre los índices y el número de raíces comprendidas en el interior de un contorno. Las correspondencias sirven para caracterizar los objetos; constituyen el catálogo de sus varias propiedades, que pueden multiplicarse indefinidamente. Bien es cierto, que la Ciencia debe limitarse á una selección de las más importantes, para evitar redundancias intolerables en un organismo perfecto.

La continuidad se define por la correspondencia de dos números, uno fijo cualquiera y otro tan pequeño como se quiera. El límite es una correspondencia indefinida entre una cantidad, siempre variable, y otra cantidad fija, con la que aquélla no puede llegar á coincidir.

Las correlaciones son correspondencias restringidas, con el carácter asociativo; son propiedades más íntimas que afectan al organismo interno de cada objeto ó sistema. Así, tenemos: los ideales, cuerpos, elementos imaginarios, polos y focos conjugados. Las formas asociadas, espacios recíprocos, raíces conjugadas, expresan la estructura de un objeto ó de un sistema.

Las representaciones son también correspondencias pero que pierden este carácter principal ante la idea de imagen ó sustitución más ó menos adecuada. Por las representaciones buscamos esquemas ó imágenes que faciliten el conocimiento de las cosas.

Los hiperespacios, la representación esférica y conforme, las teorías de las funciones automorfas y de los grupos fuchsianos, así como las curvas y las superficies correspondientes á las ecuaciones diferenciales, ofrecen ejemplos de esta simplificación por medio de imágenes ó esquemas.

En el orden didáctico, tenemos pues, dentro del orden objetivo, los dos órdenes de conocimientos: individual y siste-

mático: la especificación de cada objeto ó sistema por la descripción de las singularidades y las regularizaciones, por medio de la normalización.

En el orden subjetivo, la combinatoria genera toda clase de operaciones, desde las del Algebra de la lógica, hasta los algoritmos del Análisis, las operaciones gráficas, las geométrico-algorítmicas las abstractas del cálculo formal y las esencialmente combinatorias de la teoría de los grupos.

Dentro de la combinatoria, como región parcial, se halla el cálculo de los símbolos, que prescinde al principio de la naturaleza de los objetos, para interpretar al fin los resultados, sin otro criterio que respetar siempre el principio de contradicción.

Las transformaciones constituyen un procedimiento que consiste en sustituir un objeto por otro, según expresa cierta ley dada por una fórmula indicadora de la transformación. Las transformaciones son como correspondencias en movimiento.

Las correspondencias son relaciones de coexistencia expresadas por los teoremas que enlazan objetos distintos, expresados en la hipótesis y en la tesis; por las correspondencias, la Matemática se presenta bajo la apariencia de una red ó tejido, relaciones, cuyas mallas se espesan, mediante su perfeccionamiento. Las correspondencias tienen un carácter doblemente objetivo. Enlazan series de objetos por una relación dada.

En la Matemática, podemos considerar algo análogo á la comprensión de una idea, que estudia la Lógica. Así, por ejemplo, una recta puede ser arista de un poliedro, ó lado de un cono, ó tangente á una curva ó elemento de un haz, etc.

Esta susceptibilidad de ejercer distintas funciones cada entidad matemática, respecto á las demás, genera un fondo de relaciones análogo al fondo que constituyen todos los individuos que integran la generalidad de una idea. La supresión de un carácter, propiedad ó condición, generaliza, así como la adjunción particulariza. Por ejemplo, en un sistema de ecuaciones, la supresión de una de ellas extiende la variabilidad de las incógnitas, desde un número finito de soluciones, hasta la dependencia de una, dos..., variables independientes; la adjunción puede llevar á exigir condiciones para la compatibilidad ó posibilidad.

Las correspondencias son resultados obtenidos bajo la forma de teoremas. Su carácter es subjetivo-objetivo, pues la tesis depende tan solo de la naturaleza del objeto que se construye ó forma, al combinarse con la hipótesis, impuesta por el sujeto. La arbitrariedad del sujeto para imponer hipótesis da á la Ciencia una capacidad de extensión indefinida.

Las correlaciones son correspondencias especiales; constituyen relaciones de coexistencia de carácter puramente objetivo. Por ejemplo, las raíces conjugadas de una ecuación, los poliedros conjugados, las sustituciones conjugadas que forman un grupo, la variedad de curvas que constituyen una clase ó sistema de las mismas.

Las correlaciones expresan, ya la unión de los elementos que integran un todo, ya los elementos que entran en una clasificación.

Las representaciones, de carácter subjetivo-objetivo, difieren de las correspondencias en que éstas tienen un carácter necesario, el de un teorema demostrado.

Las representaciones tienen un carácter arbitrario. El sujeto elige con cierta libertad los medios de representación y crea lenguajes, con su gramática propia, según leyes combinatorias; y lo principal es la interpretación de los resultados de las combinaciones. Esta representación, en general, es meramente simbólica, como por ejemplo, en las álgebras de un número elegido, según las circunstancias, de unidades complejas, tales como las de Cayley, Peirce, Weierstrass, etc., dependientes, cada una, de ciertas leyes combinatorias.

También puede tener esta representación el carácter de imagen, como sucede, por ejemplo, en la representación esférica, en la conforme, en la reflexión, en las representaciones poliedrales de las variedades ó espacios y multitud de representaciones geométricas y algorítmicas.

Por último, diremos que los sistemas están constituidos por todos los individuos que comprende cada definición.

Así, las definiciones son las fuentes de los sistemas, por la generalidad que lleva en sí cada idea.

Evolución actual de la Matemática

Vemos cómo la inteligencia, al reaccionar sobre las impresiones que en ella produce el mundo externo, crea nuevos conceptos, especies de moldes á que se adaptan aquéllas, y por los que se establece una constante armonía entre los dos mundos espiritual y material.

En la sucesión de los siglos, se han acumulado problemas sobre problemas, puesto que se unen los unos á los otros en un encadenamiento indefinido, que se rige por el actuar incesante de la inteligencia, constitutivo la vida de la ciencia, en su fluir y desenvolvimiento, cada vez más amplio é inagotable; porque imitando á la Naturaleza, cada descubrimiento deja nuevos gérmenes para otros.

El problema de la braquistócrona de Bernoulli dió origen al cálculo de variaciones; el problema de Fermat sugirió á Kummer el nuevo concepto de los números ideales; y, el problema de los tres cuerpos ha inspirado á M. Poincaré nuevos métodos de la Mecánica celeste, como dice Herr Hilbert en su memoria *Sur les problèmes futurs des Mathématiques* (Congrés, internacional de París) y M. Poincaré en su memoria *L'avenir des mathématiques* (Congreso internacional de matem. de Roma), señala, de un modo magistral, las características de las diversas ramas de la Matemática: Aritmética, Algebra, ecuaciones diferenciales, ecuaciones de derivadas parciales, funciones abelianas, teoría de las funciones, teoría de los grupos y la Geometría, conforme con la preconización del golpe de vista, que denominaríamos pensamiento en bloque, por el que se distinguen, según cierta armonía y orden de dependencia, las ideas, que es el discernir, el elegir, evitándonos comprobaciones inútiles y atendiendo á la economía de pensamiento.

Este espíritu sintético y esta economía del esfuerzo son las condiciones impuestas al actual progreso matemático.

El espíritu de selección relega á lugar secundario teorías del pasado, que sirvieron de andamiaje á descubrimientos ulteriores, perdiendo más tarde su primitiva importancia.

El espíritu sintético agrupa en poco espacio aquéllo que podría abrumarnos por una extensión indefinida, superior á

nuestra capacidad. Y así, la multiplicidad inacabable de los objetos que se presentan á nuestra inteligencia, queda compensada ó neutralizada por la eficacia de los métodos, que someten aquélla á cierto lazo de unidad. Solo así es posible que la inteligencia pueda abarcar la inmensa labor matemática realizada en el siglo XIX; y solo así concebimos la posibilidad de nuevos progresos.

La Matemática es una sucesión de métodos que dan á la inteligencia una potencialidad capaz de vencer las nuevas dificultades importadas, por los adelantos de cada teoría. La idea de proyectividad lleva en sí la clave para la resolución de infinitud de problemas, como la de relación anarmónica implicada en aquélla, subordina, en su unidad, la variedad de las proposiciones llamadas porismas de Euclides.

Las ideas de grupo, invariación y en más restringida esfera, las de conectividad, género, racionalidad, etc., implican gran número de relaciones y de clasificaciones, que ordenan las entidades en agrupaciones constitutivas de unidades de complejidad varia, consiguiendo disminuir lo individual, dentro de lo general, lo que acorta el camino de la Ciencia, y lo hace más fácil y expedito.

Los clásicos conceptos de análisis y síntesis, sin haber dejado de conservar su importancia primera, han descendido del puro dominio de la Lógica para concretarse en la idea del grupo, que todo lo domina, en el campo de las existencias matemáticas y en el estudio individual de las singularidades, que caracterizan cada entidad matemática. Aquéllos eran puramente formales, éstos son esencialmente objetivos; encarnan en los dos elementos matemáticos: el *número* y la *extensión*; y de la compenetración de ambos surge el sistema constitutivo de la Matemática.

Por un lado, el concepto de grupo ha producido un inmenso núcleo de literatura matemática, que ha irradiado hasta los grupos fuchsianos y las funciones automorfas, especie de red telegráfica que conduce á todo género de conceptos y de relaciones matemáticas; por otro, el análisis, la disección de cada entidad ú objeto, que determina su estructura, hasta los mínimos detalles, produce una variedad indefinida de resultados, imposibles de retener en nuestra inteligencia, si no fue-

se por las clasificaciones que fijan cada uno de los tipos. Esto conduce á dos direcciones extremas.

Por la una, se impone un estudio psicológico-matemático que clasifique las ideas en sus géneros y especies, lo que constituye una filosofía matemática, la parte más subjetiva y teórica de la ciencia; por la otra dirección, hay que retener los frutos de cada análisis particular, en colecciones y cuadros de clasificaciones, análogos á los que emplean los naturalistas, sin los cuales no les sería posible fijar el lugar que corresponde á la infinitud de seres que integran los tres reinos de la Naturaleza, ni describir y hacer permanentes en la Ciencia, los caracteres propios de cada individuo.

Ya se han hecho tentativas aisladas en este sentido: Las tablas de integrales de Meyer Hirsch y las Biraan de Hans son colecciones que alivian al calculista de la improba tarea de obtener miles de integrales. Establecen un grado superior al que representan las tablas de logaritmos y de los valores de otras clases de funciones. Ya es un grado de carácter más formal y simbólico.

La clasificación de las cúbicas de Newton entra en otro orden superior; porque atiende á diversos caracteres tales, como son los diámetros, vértices, centros, ejes, ramas asintóticas, etcétera. Las de Plucker, Cayley, etc., tienen un carácter más científico.

Otras clasificaciones parciales se han hecho por varios matemáticos, en memorias especiales. Tales son las efectuadas por M. Alezais en su obra: *Sur une classe de fonctions hyperfuchsiennes*.

Estos trabajos individuales podrán un día colleccionarse para bien de la Ciencia, imitando según hemos dicho, el ejemplo de los naturalistas; porque solamente así se podrá condensar lo que ya actualmente tiene una extensión imposible de ser abarcada por la inteligencia, con suficiente detalle.

Pero la Matemática ha seguido fielmente el desenvolvimiento de las ciencias de la Naturaleza. Los grandes problemas matemáticos han correspondido á necesidades sentidas por éstas. Desde el rudimentario estado de la época Newtoniana, pasaron á la época de los Fourier, Ampère y Cauchy, y de ésta á la de la transformación de las energías, de la radioactividad y de la moderna constitución de la Química.

Las ciencias de la Naturaleza evolucionan incesantemente. Sus leyes son una constante incógnita, que se ofrece bajo diversas formas á la inteligencia humana; y á esas evoluciones corresponden otras evoluciones de la Matemática, que se transforma, según dos opuestas direcciones. Por la una, consigue traducir en fórmulas y realizar por números los hechos del mundo físico; convierte en científicos los fenómenos de la experimentación, las leyes empíricas, conceptualizando lo que por su esencia es material. Por la otra dirección, descendiendo desde las augustas regiones de lo espiritual, para lo que tan solo necesita moverse bajo la influencia de sus categorías propias, de las categorías matemáticas, crea y acumula nuevas teorías sobre las ya constituidas; y, al crear, ordena de nuevo, coordinándolo con lo ya creado, en planes cada vez más amplios.

Y, en esta competencia, el espíritu se sobrepone á la materia. La Matemática teórica ó pura se adelanta á la Matemática aplicada.

Cada época ha tenido un problema: En la época clásica, dentro de la que comprendemos la antigüedad y el Renacimiento, se fueron acumulando la cuadratura del círculo, la trisección del arco, la resolución de las ecuaciones, hasta el período cartesiano, á los que se agregaron, en el período Newtoniano hasta Lagrange, las cuadraturas y la integración clásica de las ecuaciones diferenciales. En el período moderno, que comienza con Gauss, Cauchy y Abel, continuándose con Riemann y Lobatschewsky cambian de aspecto los problemas, de la resolución de las ecuaciones algebraicas, del postulado, de las paralelas y de la integración de las ecuaciones diferenciales, creándose al mismo tiempo nuevas teorías: las congruencias, los grupos discretos, el algoritmo de las facultades, las series de Fourier y las funciones de variables complejas y las trascendentes de Jacobi y Abelianas, señalándose el nuevo concepto de funciones analíticas y el *Analysis situs*, con el concepto de los hiperespacios y de los espacios no-Euclídeos.

El período actual, que amplifica los descubrimientos del anterior con las teorías invariantivas de Boole y de Cayley, con las funciones analíticas de Weierstrass, con la fusión del Análisis y la Geometría, mediante la Geometría sobre una curva algebraica, es un período de fusión ó de armonía, de crítica, de síntesis y de penetración de los conceptos.

Weierstrass aspira á la unidad que reduce el Análisis al estudio de las series enteras; el profesor Herr Cantor introduce un nuevo cálculo infinitesimal, con la teoría de los conjuntos, que lleva al estudio directo é íntimo de los elementos infinitesimales, instrumento precioso para depurar las discontinuidades y darles un papel preponderante en el Análisis, teoría, por otra parte, muy adecuada para afianzar la moderna teoría de los números trascendentes, importada por Liouville. Sophus Lie, con su teoría de los grupos continuos constituye la síntesis más grandiosa que se ha efectuado, con el doble carácter geométrico-analítico, de tal naturaleza, que resuelve el problema de Riemann-Helmholtz, y lleva la resolución de las ecuaciones diferenciales á depender de la estructura de sus grupos, extendiendo los resultados de Lagrange, de Abel y de Galois.

Y, contraponiéndose á esta dirección sintética, se adopta el análisis directo, la discusión detallada de la marcha de cada función, correspondiente á los valores de la variable ó variables de que depende, que descubre todas sus singularidades, permitiendo determinar las curvas ó superficies correspondientes, por esta compenetración actual de los conceptos del Análisis con los de la Geometría, conforme al carácter actual de la Matemática; porque el método hoy seguido, es el empleo indefinido de las transformaciones.

Sobre los dos caracteres señalados de síntesis y de análisis se halla el de fusión y compenetración de los conceptos.

Las transformaciones de todo género son empleadas para reducir el estudio de unas entidades á otras más accesibles á la inteligencia; y así el matemático, construye redes de relaciones, con las que unas veces materializa los conceptos abstractos y otras, por el contrario, esquematiza los conceptos de carácter individual, para someterlos á leyes generales.

El matemático no se preocupa de que sus construcciones ideales carezcan de realidad correspondiente; busca principalmente la facilidad en sus deducciones, seguro de que los lazos que establece le conducen, por una continuidad inquebrantable, á resultados en que después resplandecerá la más viva intuición ó la fuerza lógica más incontestable.

La Matemática es una ciencia de representaciones; la eficacia de éstas depende del acierto en la elección. Las clásicas

transformaciones se reducían á un afortunado cambio de variables, tales como las transformaciones de Laplace y de Legendre. La inversión de las integrales elípticas es una nueva transformación que señala un capital progreso del Análisis matemático. Las transformaciones lineales llegan á ser un procedimiento general que se practica en todas las teorías matemáticas, y envuelve la relación proyectiva. Las transformaciones birracionales, las cremonianas, la por radios vectores recíprocos, etc., son los instrumentos más necesarios de las teorías recientes, tales como los ideales de Dedekind, las funciones elípticas y abelianas, las funciones automorfas, poliedrales, y las geométricas de cualquier especie, etc.

Por último, á esa difusión ó expansión de los conceptos, á través de medios distintos, corresponde una compenetración de los mismos, que obedece á la múltiple comprensión de cada entidad matemática, en la simultánea subsistencia de varias propiedades ó atributos. Al encadenamiento científico acompaña la coexistencia en núcleos, desde donde irradian las ideas, como á la traslación la rotación, en los cambios geométricos, ya en el plano, ya en el espacio.

Podemos terminar, indicando que, respecto á la enseñanza, se ha impuesto y se va realizando, la obra de elmentalización de las teorías, por efecto de haberse vulgarizado.

Pero el gran caudal de conocimientos acumulados exige una labor, no solo de síntesis dentro del campo doctrinal, sino de clasificaciones y de catalogación, de bibliografía, trabajos colectivos generales, como el que realizó la Comisión del *Repertoire bibliographique des Sciences mathématiques*, como el que realizan los Congresos internacionales, en su sección de Historia y de Enseñanza, como especialmente practican algunos propagandistas de la ciencia, publicando colecciones, de géneros diversos, cuyo más acabado modelo ofrece la *Encyclopedie der Mathematische Wissenschaften*, que realizan mancomunadamente los más ilustres matemáticos; pero que exige además, como complemento, para los detalles de carácter técnico, la individual labor de los coleccionistas, que alivien á la inteligencia del abrumador peso de tantos resultados y hechos parciales, que deben agruparse en clases, géneros y especies de ideas, á semejanza de lo que los naturalistas realizan con los seres, objeto de su estudio.

Hoy la descripción de las entidades de la Matemática parece que se reduce á un estudio anatómico, á una disección de las ideas, y exige no poco de los encasillados de los trabajos estadísticos; pero todo, sometido á un idealismo director, que hace prevalecer el carácter científico, sobre un empirismo á que no puede llegar la Matemática, por su carácter abstracto.

Y esta finalidad práctica se enlaza íntimamente con la tendencia á las aplicaciones. El mundo matemático es un sistema que, después de haberse organizado, según la inteligencia, ha de amoldarse á otros mundos de orden más concreto.

Así como el postulado que exige un punto exterior al espacio de tres dimensiones, produce un nuevo sistema ideal, que constituye un espacio de orden superior, dando un organismo construído por la inteligencia, dentro del orden de la Lógica, al añadir á la Geometría un nuevo elemento, la fuerza, se construye otro organismo, la Mecánica, y sucesivamente, se desciende á la Física y hasta á la Química, y aún de éstas á las ciencias de aplicaciones materiales.

Una cuestión nueva que surge de la coexistencia de tan varios sistemas, es la de su correspondencia, la de su mutua adaptación, tender á una aproximación cada vez mayor, ya que no puede jamás llegarse á la coincidencia; por efecto de la discrepancia que existirá siempre entre lo material y externo y lo intelectual, cuyos elementos son las ideas.

Lo ideal será siempre la pauta de lo material. Los progresos de estos dos opuestos dominios se hallan en una correlación perfecta. Cada progreso material ha provocado, en todo tiempo, algún nuevo problema teórico ó por lo menos, un progreso ideal; y recíprocamente, las ideas han reaccionado sobre el mundo material, como el cálculo condujo al descubrimiento de Le Verrier.

No debe desalentar al matemático esa dilatación indefinida del campo de sus investigaciones. Por una parte, los nuevos métodos le dan poderoso recurso para someter y encadenar los recientes cúmulos de ideas. Por otra parte, siempre puede confiar en que algunas de esas innumerables ideas, que al principio se ofrecen como estériles, podrán servir algún día para nuevos descubrimientos materiales.

Las dos tendencias matemáticas

Ya M. Poincaré ha tratado esta cuestión en el Congreso de París y en varias Revistas: *Revue de métaphysique et moral*, *L'Enseignement mathématique*, etc., señalando con claridad evidente, no solo las tendencias lógica é intuitiva en la Matemática, sino de varios matemáticos, cuyo carácter está conformado á seguir una de ellas, á expresar siempre, según los procedimientos que le sugiere su idiosincrasia, aún los problemas que por su naturaleza pertenecen al dominio contrario.

La tendencia lógica, como dice el profesor Herr Klein en su última obra, *Elementarmathematik vom hoeheren Stand Punkte* (1908), es el esqueleto de la Matemática; pero además del esqueleto deben existir los músculos, el sistema nervioso y demás partes que constituyen un todo organizado.

Ya en varias obras (1) y especialmente en mi memoria, *La Matemática en su estado actual*, leída en el Congreso científico de Zaragoza, señalé como nuevas características del actual desarrollo matemático, la *combinatoria*, el *simbolismo*, la *sistematización*, la *compenetración* y la *aritmelización*.

Las dos primeras son predominantemente subjetivas; entran en el dominio formal que modela las ideas, según la naturaleza de nuestro espíritu.

La sistematización es como una clasificación dependiente del objeto, con tendencia á realizar unidades, cada vez más perfectas.

Antiguamente las teorías se desarrollaban aisladas, recorriendo series lineales. Hoy, las teorías se ramifican.

Los objetos matemáticos se han multiplicado de un modo portentoso; porque se han ido destacando del fondo indefinido de las cualidades, que constituyen lo que en la Matemática reemplaza á lo que los lógicos llaman la compresión de una idea. Y este nuevo mundo se genera por simple combinación de un reducido número de elementos fundamentales.

Así, por ejemplo, las relaciones de igualdad y desigualdad, las de lo común y lo propio, inclusión y exclusión, la determina-

(1) Exposición sumaria de las teorías matemáticas. Algunas consideraciones sobre Filosofía y Enseñanza de la Matemática.

ción é indeterminación, continuidad, discontinuidad, etc., combinadas en distinto grado, producen el inmenso material de finalidades y objetos matemáticos.

Al unir, por ejemplo dos polinomios de cierto grado con cierto número de variables por el signo $=$, establecemos *un* grado de determinación dentro del que el sistema es susceptible de variación, que se puede ir limitando por nuevas relaciones de igualdad. Tendremos un sistema de ecuaciones que llegará á la determinación completa, grado del que no podremos pasar, estableciendo nuevas determinaciones, sino mediante, *condiciones de posibilidad ó de compatibilidad*, que permita la coexistencia de todos los elementos en el todo, análogamente al ensamblaje de un sistema de piezas, ó el ajuste de los elementos que constituyen un mosaico.

La desigualdad es una relación más amplia que la que dió igualdad. Relaciona también dos sistemas de cantidades, pero en regiones distintas, separa é incluye. En el Algebra de la lógica, por ejemplo, corresponde á la idea de inclusión de un dominio en otro dominio. En el Análisis, por lo general, expresa diverso modo de variabilidad, como el diverso grado de crecimiento ó decrecimiento de las funciones, ó separación de dominios: tales son los de la dos clases de números, separados por las secciones de Dedekind.

La distinción entre lo común y lo propio es origen de infinidad de relaciones. Así, tenemos los múltiplos y divisores comunes, la intersección de dominios y de sistemas, en general.

El concepto de lo propio separa. Tenemos los números primos, los sistemas irreducibles., las curvas simples (*indécomposables*), etc.

Continuando esta exposición, veríamos cómo un reducido número de conceptos produce, por sus combinaciones, el sistema inagotable de la Matemática, con arreglo á *puntos de vista* diversos, de la inteligencia creadora.

Las relaciones de igualdad, desigualdad, de intersección ó comunidad, etc., son los objetos ó materiales que los teoremas encadenan. Los teoremas son los eslabones que se encadenan en las teorías, los enlaces por los que se presentan objetos varios, en sus diversos modos de coexistencia. Y de igual modo que en la Química, un ácido desaloja á otro ácido para formar una nueva sal, un término de un teorema se sustituye

por otro término, que le es equivalente; como, por ejemplo, un lado puede sustituir á un ángulo, en el teorema de la determinación del triángulo.

Dejando pues, esta exposición, que nos alejaría de nuestro objeto, observaremos tan solo, que esta multiplicidad en el modo de ser, ha llevado necesariamente á otra de las características de la Matemática, la *compenetración* de los conceptos. Así, en la teoría de los números han penetrado las integrales abelianas, en la Geometría, el Algebra de las formas, en la teoría de las funciones algebraicas, las representaciones geométricas de toda especie, el Análisis infinitesimal en la Geometría, y hasta la Geometría, en la teoría de los números.

Y como último ejemplo de esta compenetración, citaremos la nueva tendencia señalada por Kronecker y Weierstrass, y seguida por los más ilustres matemáticos contemporáneos, la *arimetización*, que conduce á una dirección de la matemática, según la pauta que dan las transformaciones y la equivalencia de las formas en la Teoría de los números.

Este inagotable sistema, que hemos bosquejado tan ligeramente, y que se prestaría á ser objeto de larguísima exposición, se subordina á dos puntos de vista, descritos como arriba se indicó, por los ilustres maestros en la Ciencia, señores Klein y Poincaré.

El desarrollo lógico y la exposición intuitiva, los matemáticos de una y de otra tendencia, caracterizadas por una de las dos finalidades: la demostración y la invención.

La demostración es como una ordenación.

Objetos separados se enlazan, por virtud de términos medios, que establecen su comunicación. Y al desaparecer el andamiaje formado por dichos términos medios, resulta el teorema, como enunciado del enlace entre los términos extremos. Y una serie de teoremas es un modo de ordenar conceptos, distinto de otros muchos que pudieran establecerse.

Lo característico del matemático es el don de discurrir, ya deduciendo verdades unas de otras, ya creando nuevas relaciones ó principios. El talento procede ordenadamente, según la medida de los conocimientos acumulados en la inteligencia, capital que emplea en su propia utilidad para sus fines científicos. El genio también emplea ese capital; pero por cier-

to acto de discontinuidad, enlaza de un modo espontáneo algunos extremos distantes, por una especie de adivinación.

M. Poincaré en su interesante capítulo, *l'invention mathématique (Science et Méthode)* dice que *inventar es elegir*.

«Se concibe, dice, que esta intuición del orden matemático que nos hace adivinar armonías y relaciones ocultas, no puede pertenecer á todo el mundo».

«Unos no poseerán ni este sentimiento delicado y difícil de definir, ni una fuerza de memoria y atención superior á lo ordinario, y entonces se hallan incapacitados para comprender las matemáticas un poco elevadas. Estos solo tendrán dicho sentimiento en un débil grado; pero estarán dotados de una memoria poco común y de una gran capacidad de atención. Aprenderán de memoria los detalles unos tras otros, podrán comprender las matemáticas y aplicarlas algunas veces; pero se hallan fuera del estado de crear. Los otros, por fin, poseerán en más ó menos grado la intuición especial que acabo de citar, y entonces, no sólo podrán comprender las matemáticas, aunque su memoria no tenga nada de extraordinaria, sino que podrán llegar á ser creadores; é inventarán con más ó menos éxito, según el desarrollo de esta intuición».

«La Lógica encadena y subordina una consecuencia á su principio, y establece el orden demostrativo. La heurística aún está en el dominio de la Lógica; da reglas é indicaciones para inventar. Puede afirmarse que la inteligencia, en el transcurso de los siglos, ha seguido, en cierta medida, las reglas de la heurística».

Al seguir la evolución consignada en la Historia de las Matemáticas, se vé cierto orden lógico en la sucesión de los inventos. Parece que los matemáticos dejaron planteados nuevos problemas á sus sucesores; y los inventos han sido desarrollos de ideas anteriormente esbozadas. Unos inventos se explican por los que les precedieron.

Pero simultáneamente con este movimiento, que se aproxima á cierta continuidad de la evolución progresiva, hallamos momentos de discontinuidad que los separan. No basta ordenar, clasificar, ni catalogar. La totalidad cambiará de forma, pero quedará siempre la misma.

Lagrange aplicó el concepto de grupo al problema de la resolución de las ecuaciones, llegando á las funciones seme-

jantes, es decir, que admiten las mismas sustituciones, y á la relación entre el hecho de admitir una función todas las sustituciones de la otra, y á la expresión racional de la primera por medio de la segunda; pero Galois, por la feliz idea de la *adjunción* y del *grupo de una ecuación*, llega á la fecunda idea de la *reducción del grupo*, en que estriba la resolución de las ecuaciones, por medio de radicales.

Gauss había demostrado que las ecuaciones á las cuales conduce el problema de la división del círculo en un número primo p de partes iguales, tienen la propiedad de que cada raíz puede expresarse racionalmente por una cualquiera de las demás; y Abel, partiendo de este resultado, demostró que, si dos raíces de una ecuación irreducible se hallan ligadas de tal modo, que la una puede expresarse racionalmente por medio de la otra, *se puede reducir la resolución de la ecuación á la de otra de grado inferior*.

En estos dos ejemplos se observa una discontinuidad que pudiéramos denominar *rasgo de genio*, mediante la cual los problemas de Lagrange y de Gauss se elevan á una nueva región de los dominios matemáticos.

El concepto de la inversión de las integrales elípticas, debido á Jacobi y á Abel, pone en su verdadero cauce la teoría de las funciones elípticas, bosquejado por Legendre; y el tránsito de valores reales de las funciones á valores reales de las mismas, por el intermedio de las funciones de variables imaginarias, así como el teorema que define las funciones monógenas, fundamento de la teoría de las funciones de variables complejas, son bruscos saltos en el proceso de la Ciencia, que sólo puede realizar la no explicada inspiración del genio, que enlaza, como por arte mágico, extremos dispersos en el vasto campo de la investigación humana. Y, en la obra reciente de Herr Klein *Elementarmathematik*, etc., ya citada, pueden verse numerosos ejemplos de estos puntos críticos de la Matemática, por la que extiende su dominio.

Tenemos pues, que los dos movimientos, lógico é intuitivo de la Ciencia son inversos; éste es de expansión, aquél es de concentración, el uno conquista, el otro afianza y consolida las adquisiciones del primero.

No es por tanto de extrañar, que frente á la tendencia de los matemáticos intuitivos se presente la tendencia de la ló-

gica, de la abstracción escueta, que cuida más de la forma y del rigor demostrativo que de las representaciones.

Sin embargo, la tendencia lógica no carece en absoluto de representaciones. La tendencia lógica tiene un aspecto superior que la pone en contacto con la representativa.

El Algebra de la lógica, según su nombre indica, es la manifestación más amplia de la Lógica en el campo matemático. Encierra, en su organismo, las abstracciones superiores de la Lógica pura ú ordinaria. Tiene su lenguaje, su gramática y vocabulario.

Se distinguen en ella dos momentos. Por el primero, se constituye en un organismo puramente formal, obtenido por la simple combinación de signos de objetos y signos de relación, correspondientes al sustantivo, verbo y adjetivo de la oración gramatical.

Las conjunciones copulativa y disyuntiva corresponden á la multiplicación y á la suma. Aplicar un calificativo á un sustantivo es como multiplicar. El establecer la serie de objetos posibles que expresa la disyunción, es como integrar un dominio total por medio de sus dominios parciales. Y estas operaciones se someten á leyes combinatorias, concordantes con las leyes de las operaciones aritméticas; pero el Algebra de la lógica es un Algebra de las clases, que tiene por este lado cierto contacto con la Lógica aristotélica; aunque su rumbo es matemático, y á las leyes combinatorias de la cantidad debe encaminarse.

Así, en la obra de Mr. B. Peirce *A linear associative Algebra* y en varios trabajos de Cayley, entre otras obras que pudieran ser citadas, lo fundamental es fijar la tabla de multiplicación de los símbolos que caracterizan cada Algebra especial.

El segundo momento del Algebra de la Lógica es la interpretación.

Las leyes combinatorias han establecido relaciones *a priori* que son formas vacías, á la que debe darse un objeto concreto. La interpretación de los símbolos, en el orden algorítmico ha conducido á métodos de integración que ha desarrollado Boole, principalmente, en la teoría de las ecuaciones diferenciales y de diferencias finitas; y, por otra parte, ha originado una Algebra de n unidades complejas, fundada por Weiers-

trass y Dedekind, que reduce el Algebra ordinaria á uno de sus casos más simples.

En el orden geométrico, las interpretaciones de los símbolos ha conducido al extenso dominio de los cálculos vectoriales, entre los que están incluidos las equipolencias, los cuaternios y la Geometría analítica, constituida por el tratado de la extensión de Grassmann (*Ausdehnungslehre*).

Esta tendencia del Algebra de la Lógica ha llevado hacia el esquematismo, que se ha constituido al mismo tiempo, según otras distintas direcciones.

Los geómetras de la escuela de Monge, principalmente Poncelet, se habían esforzado por mantener, como legítimo, el lazo entre las cantidades reales é imaginarias, que establecen las fórmulas ó los resultados de ciertos problemas. Esto equivalía á establecer una conformidad entre los conceptos intelectuales y las relaciones algorítmicas que los traducen, para conservar una *continuidad* en esta correspondencia.

Por otra parte, Riemann había prescindido de la intuición ó representación sensible, al extender la Geometría analítica al hiperespacio.

Tenemos pues, el esquematismo de las fórmulas del Algebra de la lógica, el esquematismo del lenguaje ordinario, que por medio de palabras tales, como *rectas isótropas*, *líneas mínimas*, *contactos ideales*, etc., mantiene la existencia por el intermedio de un *lenguaje convencional*; por último, el esquematismo, ya algorítmico, ya geométrico, establecido, bien por las fórmulas con n variables del Análisis, bien por las representaciones que constituyen el *Analysis situs*.

Es evidente, como dice M. Poincaré, que la intuición no demuestra; que lo que se gana en intuición se pierde en rigor.

«Por largo tiempo, dice, los objetos de que trataban los matemáticos estaban mal definidos; se les creía conocidos, porque se representaban, mediante los sentidos ó la imaginación, pero solo se tenía de ellos una imagen grosera y no una idea precisa sobre la que pudiera efectuarse el razonamiento».

«La idea vaga de continuidad, que debíamos á la intuición, se ha resuelto en un sistema de desigualdades que se refieren á números enteros.....»

«.....Hoy se desechan los elementos empíricos, para conservar los elementos *a priori*.... pero falta probar, que la propie-

dad, que se ha convertido en una definición, pertenece á los objetos reales que la experiencia, nos había dado á conocer y de la que habíamos extraído nuestra vaga noción intuitiva».

(*L'Enseignement mathématique, tome sixième, 1904, página 262*)».

Podemos establecer una escala en la que, por un lado se llegue al último grado de rigor lógico, pero sin significado, cuyos representantes más genuinos son la máquina pensante de Raimundo Lulio ó el piano, ideado por Jevons, para obtener resultados de la lógica combinatoria, ó á una intuición; anticientífica, á la intuición *naïve*, de que trata Herr Klein en *Evaston colloquium*, no á la intuición refinada (*refined*), que ya nos sirve de mero auxiliar en nuestros razonamientos, por más que en ella jamás pueda subsistir el rigor científico, de tal modo, que á las intuiciones en que se fundaban muchos razonamientos de los matemáticos anteriores al siglo XIX, ha sucedido la demostración rigurosa.

Esta tendencia lógica se ha manifestado muy ostensiblemente en la escuela italiana del Sr. Peano, que ha prescindido del lenguaje ordinario en su *Formulario matemático*. En el Congreso internacional de Heidelberg, el profesor Herr D. Hilbert presentó su memoria *Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik*, y publicó también su *Grundlagen der Geometrie*. La *Encyklopadie der Elementar-Mathematik* de los profesores H. Weber y J. Wellstein es una obra modelo de una exposición eminentemente de carácter lógico.

El espíritu de ordenación de compilación y de clasificación matemáticas

La primera idea de compilación se ha realizado, desde los más remotos tiempos, en los tratados.

La reunión de teorías de que consta una ciencia se ha efectuado obedeciendo á un principio de clasificación, conducente á constituir un organismo.

Bajo la idea de número, de ecuación, de figura geométrica y, después, la de diferenciación é integración y la de proyección, se han escrito los tratados especiales que llegaron al siglo XIX, tales son:

El tratado de las propiedades proyectivas de Poncelet, la Geometría de dirección de P. Serret, la Geometría superior de Chasles, la Geometría de la posición de Staudt, los tratados de Geometría analítica, fundados en la idea de la Geometría de Descartes, cuyas últimas manifestaciones son los tratados de Sonnet y Frontera y de Lefébure de Fourcy.

Los tratados de Algebra, condensación de los inventos desde Descartes, hasta Sturm, que se extinguen ante la nueva compilación de Serret, en la cual se contienen ya, los descubrimientos de Abel y de Galois, del mismo Serret y de M. C. Jordán.

Desde el último tercio del siglo XIX, estas compilaciones obedecen á una nueva selección de materiales.

Abel, Galois, Cauchy, Riemann, Fourier, Weierstrass, Cayley, entre otros varios matemáticos, han impuesto sus nuevos puntos de vista, que han llegado á la vulgarización.

Y desde el tratado de Legendre, este cúmulo de tratados se acrecentó con los referentes á las funciones elípticas, abelianas, etc., que desde la publicación del tratado de Briot y Bouquet se han multiplicado, según distintos puntos de vista.

No insistiremos en los nuevos materiales que han hecho cambiar de aspecto las recientes compilaciones de teorías, porque conducirían á un examen excesivamente prolijo.

Cada matemático, al escribir sus obras, ha hecho una especial selección de materias.

En l'abbé Moigno, se observa una predilección exclusiva por su maestro Cauchy; Laurent comparte sus preferencias por Cauchy, con alguna atención hacia las doctrinas de Riemann, y lo mismo puede afirmarse de Houel.

En cambio, los alemanes Durege, Hankel, Neumann y otros, subordinan sus obras, al criterio y doctrina de su compatriota y maestro Riemann.

En Inglaterra, Sálmon, sigue, en su Algebra y Geometría analítica, principalmente las huellas de Cayley, sin olvidar á los alemanes Aronhold, Clebsch y Gordan.

En Italia, Faa de Bruno y Rubini, en sus teorías de las formas homogéneas y Algebra, siguen la influencia preponderante de sus maestros los matemáticos alemanes; el profesor señor Ovidio ha unido sus investigaciones propias á las anteriores de Chasles y á las de Fiedler.

El fin de esta larga etapa se halla en las obras de los matemáticos franceses Mrs. Halphen, Hermite, Borel, Darboux, Hadamard, Goursat, Meray, Painlevé, Picard, Poincaré y otros que sería prolijo enumerar, concernientes á la teoría de las funciones, la de más preponderante desarrollo en la actualidad, enlazada con las funciones analíticas de Weierstrass y la teoría de los conjuntos de Herr Cantor.

Señalaremos en Alemania, los puntos de vista que los descubrimientos de Kummer, Dedekind y Kronecker han conducido al tratado de Algebra del profesor Herr Weber, sin excluir la influencia de Galois y de Abel y, especialmente, á los varios volúmenes acerca de la teoría de los números del profesor Herr P. Bachmann, cuyo magistral trabajo resume las últimas conquistas de esta rama de la Matemática, los tratados sobre cuerpos de números de los profesores Herr Hilbert y Sommer, sobre la teoría de los números que lleva, bajo el predominio de su espíritu intuitivo y originalidad de sus puntos de vista, hacia las representaciones de la *Arithmetik der Zahlen* del malogrado profesor Minkowski y, por último, á la originalísima *Zahlentheorie* del profesor Herr Klein, que, en esta obra como en sus *Elliptischen Modulfunctionen* y sus *Vorlesungen uber die Theorie der Automorphen Functionen*, con la colaboración de Herr Fricke, ha hecho gala de su inagotable facultad representativa de todos los conceptos matemáticos.

Pero, en el momento de haber descendido estas modernas teorías al dominio de la vulgarización y de la enseñanza, otros nuevos desarrollos, hoy todavía contenidos en los elevados dominios de las revistas tales, como el *Journal de mathématiques pures et appliquées*, *Mathematische Annalen*, *Rendiconti del Circolo matematico de Palermo* y otras, dan nuevos materiales para que continúe con más energía este constante fluir de la Ciencia.

Pero no bastan los tratados para contener la Matemática actual. Podemos considerar los tratados escritos para la enseñanza como los grandes triángulos geodésicos ó como las cordilleras de un país que señalan las cuencas hidrográficas, que exigen luego trabajos descriptivos de los detalles.

La Ciencia puede conocerse, bien descendiendo de las ideas generales que contienen en sí las ideas subalternas, ó bien as-

cendiendo de lo particular á la resolución de los problemas y ampliación de las teorías.

En el primer caso, la mirada es más vaga, pero más comprensiva, en el segundo, el terreno es más firme, el campo de investigación más real, pero más reducido.

Tarea vana ó solo realizable para un Gauss ó un Cauchy ó un Cayley, cuyas obras son admirables, tanto por la intensión ó calidad como por la cantidad, el abarcar á la vez el conjunto y el fondo. Su labor fué tan extensa como profunda. Sus inteligencias privilegiadas abarcaban extensísimos horizontes y ahondaban con fuerza, hasta las raíces más profundas de los conocimientos matemáticos.

Bien es cierto que no se trata aquí de lo excepcional. En los siglos anteriores al XIX se podría contar el número de sabios que monopolizaban la Ciencia, cuyo progreso era pausado; pero hoy cambia, extendiéndose y perfeccionándose constantemente, por un general impulso, debido á múltiples actividades que se congregan para esta obra común; y ante una riqueza tan cuantiosa, deben adoptarse procedimientos que impidan la pérdida de tanto esfuerzo colectivo.

Por efecto de la universal concurrencia, se ha impuesto una distribución natural del trabajo, según las varias disposiciones de cada individuo.

Unos, dilatan las fronteras con descubrimientos esencialmente importantes, inventan, introduciendo nuevos conceptos, otros ahondan en los detalles, determinando aquéllo de vago é indefinido que dejaron los inventores, como ocurrió con la oscura memoria de Riemann *Ueber die Hypothesen welcher Geom.*, etc., en que se hallan establecidos los fundamentos del *Analysis situs*, ó con la doctrina concisa de Galois que contenía los gérmenes de conceptos, cuyo desarrollo se ha extendido, tanto por el Algebra, como por la Teoría de los números. La Ciencia se renueva constantemente en el fondo y en la superficie.

Los grandes inventos descienden de las cumbres de lo abstracto á las extensas llanuras de la realidad práctica.

Pero, en los objetos cognoscibles, los hay de órdenes diversos; los unos son vulgares, indiscernibles; tienen un carácter individual, pertenecen á las muchedumbres, son anónimos, impropios para adquirir el sello de lo científico, son sim-

ples detalles que nada suman en lo esencial del contenido de la Ciencia.

Otros objetos son discernibles; brillan sobre el fondo de lo indiscernible ú homogéneo; se destacan más ó menos fuertemente, según la potencialidad que tienen para producir nuevos objetos. Aquéllos forman la parte práctica, éstos las teorías.

Un profesor, en la práctica de la enseñanza, propone á sus alumnos multitud de problemas según un mismo molde, con el fin de fijar las ideas de éstos. Las colecciones graduadas de problemas obedecen á este fin práctico, sin agregar nada á la Ciencia; pero los métodos de Lagrange ó de Laplace para la integración de las ecuaciones diferenciales han sido riquezas importadas á la Matemática que han acrecentado sus dominios; y en mayor grado lo hicieron los descubrimientos citados de Riemann y de Galois; porque éstos tenían la generalidad de la teoría y aquéllos el carácter particular de la práctica. Pero en lo práctico también existe un orden de jerarquías, que da la clasificación de los varios procedimientos y métodos.

Así, al recorrer en las obras de Cayley los extensos cuadros que contienen calculados los diferentes términos de los invariantes y de los covariantes de varias formas homogéneas, las *tablas de las formas cuadráticas binarias para los determinantes negativos, desde 1 hasta 100*, la tabla para las cuárticas binarias, para las séxticas binarias, la de los covariantes de éstas formas, las tablas de los semi-invariantes para los pesos 11 y 12, 13, 14, 15 y 16 y las de los grupos de sustituciones, desde dos hasta ocho letras, todo esto, á lo que podría agregarse mucho más, no sólo de Cayley, sino de otros varios matemáticos, expresa la monumental labor, realizada por éstos, sólo en el dominio práctico, correspondiente al cálculo de formas ó de expresiones algebraicas, pues en el dominio más restringido del cálculo numérico, á parte de las tablas de logaritmos, de funciones especiales, etc., tenemos tablas tales, como las de Bierens de Haan que contienen 8.359 integrales, las de Meier Hirst, etc.

Pero aparte de estos trabajos de cálculo y de enumeración, se hallan otros trabajos de carácter más general, de clasificación, tales como los de las curvas y superficies, en que han sobresalido Newton, Euler, Plucker y Cayley, el más concreto

Katalog mathematische Modelle del profesor W. Dyck, los de la estructura de los grupos de que legó á la Matemática futura Sophus Lie un grandioso monumento, contenido en sus obras sobre los *grupos continuos*. Un fin más general cumple la obra *Repertorio di mathematische superiori* del profesor E. Pascal.

No es necesario continuar esta enumeración que sería interminable. Basta ver someramente cuán inmensa labor se ha hecho en lo teórico y en lo práctico, en el inacabable dominio matemático; porque esta ciencia como sus congéneres la Física y la Química, fijando la subordinación en que deben estar los hechos con la idea, los principios con las aplicaciones, la inteligencia con la realidad externa, se hallan todas en estado de constante formación y de progreso.

Y solo añadiremos que, la obra del *Repertorio de Bibliografía matemática y la Encyclopediae der Mathematik Wissenschaften* pueden considerarse como una detención momentánea de este avance continuo; la primera, como índice del contenido científico hasta fines del siglo XIX, la segunda como una síntesis didáctico-bibliográfica de dicho contenido, que servirá como punto de partida para avances ulteriores.

Como obras particulares que tienden á este fin general, citaremos la obra *Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche* del profesor Sr. Gino Loria, *Über die Entwicklung der Elemental Geometrie im XIX Jahrhundert* del profesor Herr M. Simon, de carácter crítico-bibliográfico y *Führer für die Mathematische Literatur* del profesor Herr F. Muller.

Si la inteligencia desarrolla, desde su centro, teorías que irradian y se dispersan en un fondo sin límite, el mundo externo nos ofrece continuamente algo extraño á nosotros, con su modo de ser, que se nos oculta siempre bajo las apariencias del fenómeno, cuya esencia aspiramos á desentrañar, forjando hipótesis y construyendo provisionalmente teorías que ceden su puesto á otras teorías, cuando hechos excepcionales han derogado las primeras; y así vamos llegando al estado en que nuestra inteligencia se aproxima á la realidad.

Las tablas arriba citadas, nos dan cuenta de los muchísimos resultados prácticos obtenidos, tanto en el cálculo numérico, como en el formal, característico de las fórmulas algebraicas, como en los múltiples aspectos de las curvas y de las su-

perficie que constituyen sus caracteres propios ó genéricos y que nos llevan á sus clases, órdenes y especies.

Sobre el número, que es lo individual, lo absolutamente determinado, tenemos las fórmulas algebraicas ó analíticas, y sobre las fórmulas tenemos las ideas.

Las ideas ciertamente, son los elementos más movibles de toda ciencia, que en la Matemática se fijan en fórmulas ó se estereotipan en figuras. Cada tratado expresa una clasificación de ideas. Y el examen de muchos tratados puede conducir á clasificaciones cada vez más amplias y completas.

La humana labor produjo grandes núcleos de ideas consignadas bajo los nombres de Aritmética, Algebra y Geometría. La compenetración de ideas produjo después la Geometría analítica y los cálculos diferencial é integral.

En los tiempos modernos, se disgregaron algunas ideas hacia los campos de la combinatoria, de los grupos, de la Geometría proyectiva, numerativa, combinatoria, etc.

Todas estas ramas pueden considerarse como nombres sustantivos, cada uno con su contenido propio, que podemos concebir concentrado, como un núcleo en el cual se encierra cuanto puede derivarse ó deducirse de la idea madre ó fundamental, que en último caso, se concentra en las definiciones primeras y en el sistema de axiomas correspondiente.

Podemos considerar á la cantidad bajo el concepto aritmético, el algebraico ó el geométrico, y cada uno concebirlo desde muy varios puntos de vista.

Si consideramos, para mayor claridad, cada uno de los nombres: Aritmética, Algebra, etc., colocados en una línea horizontal, como los multiplicandos de la tabla pitagórica, podemos concebir que cada uno de estos términos se desarrolla en todas sus consecuencias, por un descenso en sentido vertical, análogo al descenso de los principios hacia sus consecuencias, que van constituyendo la cumbre y las bases de la Ciencia.

Cada momento del desarrollo de la idea puede considerarse como si fuera una paralela al eje de la x , que por su intersección con la línea descendente determina un punto, en el sistema cartesiano.

Podríamos considerar, en el puesto de los multiplicadores de la tabla pitagórica, ó en el eje de las y del sistema cartesiano, palabras tales como, por ejemplo: *elementos*, *principios*,

combinatoria, simbolismo, grupos, transformaciones, correlaciones, medios auxiliares, condiciones, etc., ú otras mejor elegidas, que ejercerían las funciones de adjetivos, determinativos de los sustantivos, colocados en la línea horizontal, y podríamos obtener un esquema, que nos facilitara un croquis ó resumen de los conceptos que abarca la Ciencia, y que permitiría llegar fácilmente á una catalogación ó vocabulario de la Matemática, necesario hoy, por efecto de la multiplicidad indefinida y abrumadora á que ha llegado cada una de las teorías matemáticas, como abreviación provisional de la ímproba tarea que supone el extraer del *mare magnum* de las obras existentes cada una de las palabras introducidas por los diversos investigadores con especiales fines.

Bien es cierto, que ya se tiene un primer vocabulario publicado por el profesor Herr H. Muller y que con motivo de haberse anunciado como tema que desenvolver en el Congreso científico de Zaragoza la formación de un vocabulario matemático, el sabio matemático, M. H. Brocard, ofreció galantemente, para contribuir á tal empresa, un gran número de palabras matemáticas que podrían constituir amplia base para tan útil y transcendental proyecto.

Ya, en otro lugar, trato de los conceptos fundamentales que me sirvieron de base ó punto de partida para una somera clasificación, presentada al Congreso científico de Zaragoza, con el título: *Ensayo de clasificación de las ideas matemáticas*, que puede constituir un primer ensayo encaminado á este interesante fin.

En esta pugna existente entre el desenvolvimiento teórico y la imposición brutal de los hechos que amenazan desmenuzar la ciencia en innumerables detalles, haciéndole perder su elevado carácter conceptual, sólo resultará el mutuo engrandecimiento de los dos campos opuestos.

La inteligencia acrecentará sus conquistas. La obra de catalogación, de clasificaciones y la filológica fijarán de un modo permanente estas conquistas. El genio ó el talento aplican de un modo más ó menos feliz unos conceptos á otros. En estos resultados consisten los inventos, en la unión de lo que estaba disperso. La exposición científica cataloga estos descubrimientos, clasificándolos.

La Geometría elemental

Entre las Geometrías de las formas discontinuas, ó sean, las constituídas por puntos, rectas y planos, en número finito, y en ellas podemos incluir las configuraciones y aun las características, debe ocupar un lugar preferente la llamada Geometría elemental, indudablemente porque ha sido el umbral de las demás Geometrías, el fundamento y origen de todas ellas.

La Geometría elemental, en su genuino significado, hoy se completa por lo que Casey llamó *Suplemento á la Geometría euclídea*, que además de la Geometría del triángulo, comprende un conjunto de especiales teorías, tales como la de transversales polígonos armónicos, etc.

Cierto es que Chasles, reunió muchas de estas ramas dispersas, subordinándolas á la relación anarmónica, creando una Geometría analítica proyectiva, sobre los resultados aislados que Euclides obtenía en su célebre teoría de los porismas.

La Geometría elemental quedaba fuera de esta sistematización. Y, en efecto, el primer desarrollo tiene un carácter subjetivo-objetivo.

La inteligencia fija las relaciones objetivas, por acción directa, por un procedimiento uniforme, el *análisis geométrico*. Y, solo más tarde, en posesión de ciertos principios generales, sustituye su acción inmediata por métodos como el arriba citado, ó las formas armónicas de Staudt, el cálculo baricéntrico de Moebius, etc.

Basta enumerar las *cosas buscadas* que cita Euclides en sus libros de los porismas, tales como: *Que tal punto esté situado en una recta dada de posición, que la relación de tal recta á tal otra esté dada, que tal recta pase por un punto dado*, etc.

Esta cuestión es análoga á la de los objetos predicables de un mismo sujeto de la lógica clásica. Los teoremas matemáticos, con sus hipótesis y sus tesis reemplazan al juicio lógico, en el que se unen el sujeto y el predicado.

Podemos hoy ver, en la Geometría elemental, algo análogo

á lo que el filósofo Hámilton y el matemático Boole obtuvieron al cuantificar el predicado, al considerar el número de cosas predicables, ó de considerarse como atributos de objetos dados.

La Geometría elemental puede considerarse desde este punto de vista. En ella, los objetos se presentan aislados. Parece que el calificativo, *elemental*, corresponde á procedimientos aislados, sin conexión previa; que corresponden á la acción intelectual, constituyendo una Geometría subjetivo-objetiva, cuyos enlaces están dados por procedimientos subjetivos, tan solo sometidos á la convención de cierta *equivalencia* objetiva.

Así, al determinar un triángulo por medio de las bisectrices, las alturas, las medianas, las simedianas ó combinaciones arbitrarias de estos datos, se llega, por cierto encadenamiento de términos medios, á un problema en que se determina el triángulo por sus lados ó una de las combinaciones primitivas de lados y de ángulos.

Por ejemplo, construir un triángulo, cuando se dan la mediana Cc y los lados BC y AC equivale á construir un triángulo, cuando se dan Cc' , igual á $2 Cc$ y AC , igual á CB .

Determinar un triángulo ABC , cuyo perímetro y los ángulos B y C son conocidos, equivale á determinar el triángulo ADE , en el que se conocen el lado $DBCE$, igual al perímetro y los ángulos adyacentes D y E iguales, respectivamente, á las mitades de los B y C .

Las figuras que constituyen los datos, enlazados con las construcciones auxiliares, permiten el tránsito del problema primitivo al transformado y, recíprocamente, de éste al primero; y el enlace subjetivo, el *análisis*, se efectúa, hipotéticamente, desde el primer problema al segundo, y, real ó efectivamente, desde el segundo al primero.

Basta sustituir una recta por cierta paralela á la misma ó una circunferencia por otra concéntrica, para sustituir un problema por otro más sencillo ó que se sabe resolver.

Una clasificación ó inventario de estas equivalencias permitiría resolver infinidad de problemas. Y el arte de resolver problemas dependería del conocimiento de los mismos, que da la teoría. Este inventario debería principiarse á formarse en las obras de problemas geométricos.

Podemos imaginar el plano como cubierto por una red de

figuras heterogéneas, ensambladas entre sí, lo que permitiría pasar de las unas á las otras, como las figuras que representan las funciones periódicas ó automorfas nos permiten pasar de una figura fundamental á otra, mediante la relación que tienen entre sí los períodos.

Las teorías de las funciones y de los grupos fuchsianos, de la representación conforme, etc., permiten el tránsito de unos valores de las funciones á otros con homogeneidad, según leyes fijas de transformación. La Geometría elemental, según acabamos de ver, realiza la transición de unas figuras á otras, mediante un enlace subjetivo que recorre una serie de relaciones heterogéneas, estableciendo relaciones de equivalencia entre las condiciones ó elementos, que constituyen encadenamientos de problemas, los cuales pueden ser muy distintos, según cada inteligencia y según la calidad y cuantía de los conocimientos de cada individuo. Así, el proceso de cada problema depende de la particular dirección que sigue cada inteligencia.

Por esto, la clave de los resultados obtenidos, en la Geometría elemental, existe, no en un procedimiento ó método más ó menos eficaz, y profundo, sino en el encadenamiento ideal que ha formado la inteligencia, en la teoría que se desarrolla según varias direcciones, dependientes del impulso intelectual.

En la primera edición de mi *Geometría elemental* (1881), establecí algunas reglas generales, bajo los epígrafes: *Metodología general y crítica de las verdades geométricas*, lo que detallé en mi *Complemento de la Geometría elemental*, examinando la *existencia ó posibilidad*, la *generación*, las *determinaciones*, las *correlaciones*, las *sustituciones*; y, como arriba se indicó, las relaciones de *equivalencia* en dichas sustituciones, mediante las que la Geometría elemental es una ciencia *constructiva*.

Podemos añadir, finalmente, que la *determinación* es el grado perfecto de existencia geométrica, que puede equipararse á una ecuación formada por varias cantidades conocidas, y cada una de ellas en primer grado y lineal.

Si una de ellas, a , por ejemplo, es variable, tenemos un primer grado de indeterminación, lo que, en Geometría, se reduce á un lugar geométrico. Sea $7a + 46 + c = 4d + 3$.

Si permaneciendo a , c y d invariables, varía b , tendremos otro lugar geométrico ó algorítmico, etc.

Las letras $a, b, \dots$, de la ecuación, serán condiciones, en Geometría, por ejemplo, *recta que pasa por un punto, bisectriz de un ángulo*, etc., que son condiciones simples.

La adjunción de una propiedad determina, la supresión, generaliza, como la adjunción de nuevos elementos en un sistema, lo extiende.

Después del grado de determinación perfecta, puede considerarse la superabundancia. Por ejemplo, una recta puede ser tangente á una circunferencia y además, paralela á otra recta, una condición. Dicha figura, implica la otra; y una de ellas puede dar la solución de un problema en una construcción, donde intervenga la otra. Las condiciones superabundantes servirán para resolver un problema ó para demostrar un teorema.

Dicha superabundancia permite una alteración del encañamiento de ideas, conveniente para realizar uno cualquiera de estos dos fines.

En Algebra ó en Análisis, una ecuación sobrante, implica una determinación superabundante, análoga á la superabundancia geométrica; es una *condición* para la posibilidad, que rige el modo de hallarse eslabonados los elementos en el todo, el *ajuste* perfecto de todos ellos.

Al añadir al dominio de los números enteros el de los fraccionarios, extendemos nuestros medios de acción. Al elegir, por ejemplo, los múltiplos de ciertos números, restringimos aquél. Esta extensión y restricción, combinadas, constituyen el resorte de las operaciones matemáticas.

Sea el problema: *Inscribir en un círculo un triángulo, cuyos lados sean paralelos á tres rectas dadas.*

Para resolverlo, trazaremos por un punto cualquiera G de la circunferencia, paralelas á dos de las rectas, lo que es como transportar á la circunferencia dicho ángulo. Pero entre los infinitos triángulos inscritos, cuyos ángulos son iguales al HGI , y cuyos lados opuestos á dicho ángulo son todos iguales entre sí, existe el MPN , con el lado MN , paralelo á la tercera recta. El problema se reduce al siguiente:

Trazar en un círculo dado, paralelamente á una dirección dada, una cuerda de longitud dada, pues dicho triángulo buscado tiene el lado MN , tangente á la misma circunferencia, á que lo es el lado HI . Y, por último, la perpendicular trazada

por el centro O á dicha recta, contendrá el punto de contacto. La recta MN es á la vez, la paralela á la recta AB y la tangente á dicho círculo concéntrico, cuyo radio es la distancia de O á la cuerda HI . Esta superabundancia de condiciones permite obtener la tangente, trazando la paralela á AB .

El círculo dado en este problema es el concéntrico al del problema anterior, tangente á las cuerdas ó lados opuestos á los ángulos inscritos, iguales al HGI . El problema se transforma en: *Trazar á un círculo una tangente, paralela á una recta dada.*

Este problema se reduce á: *Trazar por un punto, que es la intersección de la circunferencia concéntrica á la dada, con la perpendicular á la recta, bajada desde el centro, una paralela á esta recta.*

En el razonamiento anterior hemos procedido por la siguiente

Discusión.—Tenemos, en el plano, todos los ángulos, cuyos lados son paralelos á dos de las rectas dadas en el problema propuesto; y de esta infinidad de ángulos elegimos *uno de los que tienen su vértice en la circunferencia dada.*

Tenemos, *en la circunferencia*, una infinidad de triángulos inscritos con un mismo ángulo y el mismo lado opuesto, que es la cuerda correspondiente. Y, de entre ellos, elegimos el que tiene dicho lado paralelo á la tercera recta, dada en el problema.

En la circunferencia, dada tenemos la serie de cuerdas, desde uno de sus puntos, hasta uno de sus diámetros, á que corresponden respectivamente, todos los ángulos inscritos, desde el ángulo cero hasta el ángulo recto.

En la circunferencia concéntrica, tenemos la infinidad de cuerdas circunscriptas ó tangentes, correspondientes á todas las direcciones posibles, que sucesivamente adquieren, hasta llegar á la posición primitivamente, alrededor del centro.

La correspondencia unívoca se realiza, en todas las posiciones de la figura móvil, entre los ángulos inscritos, sus cuerdas opuestas y las direcciones de éstas, en el plano. *Existe*, pues, el triángulo buscado en el problema, *cuyo tercer lado debe ser paralelo á la tercera recta.*

El problema de que tratamos, equivale á una *deformación* del triángulo propuesto, que forman las tres rectas dadas. Por

el primer cambio, se reduce al *HGI*. A la condición, por satisfacer, de que el triángulo que se busca (hipotéticamente hallado), tenga su tercer lado paralelo á la tercera recta, se ha substituído un tercer lado que no es paralelo á dicha recta; pero en cambio, es cuerda correspondiente al ángulo inscrito. A la condición de paralelismo, hemos substituído *los otros dos vértices en la circunferencia* (de un triángulo obtenido efectivamente). Pero dos vértices ó puntos de la circunferencia implican *equidistancia del centro*. A todos los triángulos inscritos sobre dicha cuerda corresponde un triángulo isósceles (cuyo vértice está en el centro), que es como su representante ó imagen. Cada cuerda tiene pues un triángulo *imagen*. La infinidad de cuerdas dará una infinidad de imágenes, con correspondencia unívoca. De entre estas imágenes, elegiremos la que tiene su base ó cuerda paralela á la tercera recta del problema. A este triángulo imagen corresponde su sistema de ángulos inscritos (todos iguales al de las dos primeras rectas del problema). De entre esta infinidad de triángulos, elegiremos el que tiene uno de sus lados paralelo á una de las dos rectas dadas (que tendrá necesariamente el segundo lado paralelo á la segunda recta).

Vemos, pues, cómo la sustituciones de condiciones, dentro de la correspondencia unívoca, permite determinar la figura individual, que es solución de un problema.

Por esta determinación se practicarán, según convenga, uno de los dos procedimientos opuestos, la *adjunción* ó la *restricción*, para pasar de una clase ó dominio inferior á otro superior, ó viceversa. Y de esto hemos tenido un primer ejemplo, con el triángulo imagen *MON*, que implica infinidad de individuos á él subordinados (todos los ángulos inscritos sobre *MN*) y del cual hemos descendido á elegir el individuo, *MPN* (solución efectiva), *cuyos lados son paralelos á las dos primeras rectas*.

Observación.—Por poderse trazar dos cuerdas paralelas á la tercera recta, el problema admite dos soluciones simétricas, lo que es muy natural, tratándose de figuras referidas al centro de una circunferencia.

VARIANTES Y EXTENSION DEL PROBLEMA.—*Inscribir en un círculo dado un triángulo, en el que un lado pase por un punto dado y los otros dos sean paralelos á dos rectas dadas.*

La condición «*paralela á una tercera recta*» del problema anterior, queda sustituida porque *pase por un punto*, que le es equivalente.

En el problema auxiliar, «el trazado de una *tangente paralela á una recta*», queda sustituido por el de una tangente «*que ha de pasar por un punto*».

Continuando en la idea de reemplazar una condición de paralelismo por otra, consistente en que *uno de los lados* (ó su prolongación) *pase por un punto dado*, tenemos el nuevo problema:

Inscribir en un círculo dado un triángulo tal, que dos de sus lados pasen por dos puntos dados A y B, y el tercero sea paralelo á una recta dada CD.

Empleando el lenguaje de la Geometría moderna, podemos decir que en los dos últimos problemas se ha ido sustituyendo la condición «de encontrarse dos rectas en el infinito», lo que lleva á las simetrías é igualdades que resultan del paralelismo, por «la de encontrarse dos rectas á distancia finita», lo que en el último problema conduce á relaciones de proporcionalidad ó relaciones métricas.

Estos problemas pueden extenderse á un polígono cualquiera. Así, enunciaremos:

Inscribir en un círculo un polígono, cuyo uno de los lados pase por un punto dado y los demás sean respectivamente paralelos á rectas dadas.

En este problema, el tránsito de la figura hipotética, á la efectiva final, se realiza por una simple deformación, ya que la suma de los arcos parciales es constante.

De este problema se pasa al siguiente:

*Inscribir en un círculo un polígono, cuyos lados pasen respectivamente por otros tantos puntos dados, problema en el que mediante la sustitución sucesiva de la condición, *pasar por un punto* por la condición, *ser paralelo*, se transforma este problema en el anterior.*

La Geometría elemental se nos presenta pues, bajo dos aspectos complementarios. El uno es la *síntesis*, la exposición teórica ó doctrinal, el código de las leyes de equivalencias y de sustituciones de los conceptos, expresados por los teoremas.

En esta parte rigen la ordenación sistemática, las clasificaciones, la simetría expositiva. Vemos el edificio en el que

la variedad está perfectamente armonizada á la unidad, según prescribe la Lógica.

El otro aspecto de la Geometría elemental es el *análisis*. En este domina el desorden, propio de la inventiva, la arbitrariedad de las iniciativas individuales, la inconsciencia de la cuestión libremente propuesta, sin conocimiento previo de la conveniencia ó disconveniencia de los términos que se pretende unir en un conocimiento verdadero.

Si la síntesis ordena los conocimientos adquiridos y elevados á la categoría de verdades demostradas, el análisis acumula materiales para el engrandecimiento del edificio.

La acción intelectual es más preponderante en el análisis que en la síntesis; su influencia es capital, comunica su fuerza al objeto, desconcertando, desligando sus elementos, transformándolos, para distribuirlos de nueva manera, conducente á modelarlos según nuevas formas.

Pero el análisis, el arte de resolver problemas, depende del grado de adelantamiento de la síntesis; y si ésta no es suficiente en su estado actual, el análisis tendrá que suplir con nuevos descubrimientos.

La aptitud de *elegir* bien, como dice M. Poincaré, conduce á los inventos, *por la intuición se inventa*, añade.

Poncelet y Steiner, espíritus brillantes, inventaron multitud, no solo de teoremas, sino de métodos nuevos. Como ejemplo, tenemos las construcciones lineales de Steiner, por medio de la recta y la circunferencia.

Y, no solo la aptitud de elegir, sino la aptitud de aplicar esas fecundas ideas que se destacan de la uniforme multitud de las demás, es lo que produce los verdaderos progresos en que se han vinculado los grandes métodos.

Sobre los hechos expresados en ciertas correspondencias, Poncelet fundó sus métodos de las figuras homológicas y de las polares recíprocas, como Chasles y Steiner fundaron las teorías de la correlación y de la dualidad y como Pascal y Brianchon establecieron la teoría de las cónicas sobre la propiedad fundamental del *exagramma mysticum*, y como Chasles sobre el análisis de los porismas de Euclides, fundó en la relación anarmónica, la Geometría analítica proyectiva.

Terminaremos, añadiendo que, al crearse estos métodos fecundos, la Geometría se aparta del clasicismo subjetivo, para

vincular, en el carácter eminentemente objetivo los métodos y teorías modernos. Parece como que la inteligencia delega su función preeminente, en la fecundidad de sus métodos.

ARITMÉTICA

La Aritmética se ha reducido al arte de contar, al cálculo, á la parte práctica por excelencia de la Matemática, al comprobante, á la realización de las ideas, distinta de la teoría de los números, que se eleva sobre el Álgebra.

La numeración es el arte de contar, basado en la agrupación sistemática, según tipos arbitrarios que se llaman sistemas de numeración.

A esta agrupación regular sigue una agrupación irregular que se llama suma. La suma procede con números, como la numeración procede con unidades, para la construcción ó formación de éstos, conforme á las propiedades asociativa y conmutativa, agrupándose unidades de diversos órdenes. Los antiguos números complejos, derogados tiempo ha, por el sistema métrico decimal, no son más que números formados por órdenes irregulares de unidades, distintos de la ley decimal, que solo fué un convencionalismo natural.

La multiplicación es una abreviación de la suma, así como la división es una resta abreviada. Se procede, para formar el producto, con el multiplicando, según el multiplicador, como se procedió con la unidad para formar éste, ofreciendo el primer caso de la proporcionalidad, así como la división es el modelo del método por reducción á la unidad. En la división exacta, el dividendo contiene tantos números iguales al divisor, como el cociente contiene á la unidad. Si al divisor corresponde el dividendo, á la unidad corresponde el divisor.

Pero la multiplicación y la división, además de ser operaciones inversas, tienen otra relación más general.

La multiplicación forma los múltiplos. Produce agrupaciones cada vez mayores, dominios numéricos cada vez más extensos. Y el modo de distribuirse unas agrupaciones en otras, es objeto de la teoría llamada de la divisibilidad, que se funda en los números simples ó primos absolutos, y en los números primos entre sí, en los *elementos* numéricos y en las agrupacio-

nes independientes entre sí, extrañas, irreducibles la una á la otra, como los elementos de la Química.

En el conjunto de los números, consideramos lo que tienen éstos de común y de propio, originándose dominios total ó parcialmente contenidos en otros dominios, ó dominios extraños entre sí.

Estos problemas complejos constituyen la parte teórica de la Aritmética, que pertenece á la *Teoría de los números*, de la que la Aritmética es la ramificación inferior, como las construcciones geométricas lo son de la Geometría.

La multiplicación forma una clase de números, en la Teoría de éstos: la clase de los números congruentes con cero, según uno de su factores; correspondiendo al caso particular de la división exacta. Pero la división, en general, produce las demás clases de números, congruentes con cada uno de los residuos.

Así pues, la multiplicación y la división se funden en la teoría de las congruencias, que contienen á ambas, desde un punto de vista común.

Las relaciones generales de los dominios numéricos se estudian mediante las ecuaciones indeterminadas ó las congruencias, en la Teoría de los números.

La Aritmética, además estudia los números fraccionarios que constituyen la teoría de dominios inferiores, no por la cantidad, sino por la calidad.

La multiplicación pasa de agrupaciones inferiores á otras numéricamente superiores ó en calidad. Siempre, en estas agrupaciones, el elemento es la unidad abstracta. Hay una generación expansiva.

Pero el mismo problema de la división que nos condujo á las clases de números, nos conduce á una generación restrictiva.

Hasta ahora no hemos necesitado considerar más que la unidad como puro concepto intelectual, á que corresponde el símbolo 1; pero, concretando este símbolo en el fondo que corresponde al espacio, y que llamamos extensión, fondo continuo y homogéneo, sobre el que creamos la Geometría, al hacerle perder la homogeneidad, para surcarlo de entes que llamamos figuras geométricas; y, no tomando de este fondo más que la homogeneidad y la composición en partes ó divisibilidad

se construyen, á imagen y semejanza de los sistemas, síntesis de otros sistemas, reducidos según la infinidad de tipos resultantes de dividir la unidad en partes iguales. Basta la ley de proporcionalidad, para establecer la teoría de las fracciones aritméticas, quedando aquí limitada la finalidad de la Aritmética, que se reduce á ser un instrumento de cálculo; á realizar *prácticamente* las conclusiones teóricas del Análisis y aún de la Geometría, en su parte analítica.

(Continuará).

LAS TENDENCIAS DE MI TRATADO DE ANALISIS

Con la publicación de mi *Nueva Enciclopedia Matemática* me proponía publicar una serie de tratados que contuvieran las diversas teorías de esta Ciencia, con el fin de resumir lo más interesante ó de más urgente necesidad.

Dejando para después la publicación de la *Teoría de los números*, la *Teoría de los grupos discontinuos* y la *Aplicación de la teoría de los grupos discontinuos á la teoría de las ecuaciones*, comencé por publicar seis tomos que comprenden, desde el *Cálculo diferencial hasta la Teoría de las ecuaciones diferenciales* (Libro I, *integración clásica*), con el propósito de que siguieran á estas exposiciones los métodos modernos y otros trabajos acerca de las teorías de funciones, etc., viéndome finalmente en la necesidad de dar por terminada mi publicación; porque no era de esperar un éxito inmediato, mientras los planes actuales de enseñanza no comprendieran las varias disciplinas matemáticas que debieran suceder, en los órdenes lógico y didáctico, á las ya publicadas.

Actualmente, ya que suspendí mi labor, siquiera me propongo resumir en pocas páginas el plan que me tracé y las reglas que seguí en la exposición de los diversos tratados.

Hoy, el Análisis matemático, en la cumbre de la Ciencia, es objeto de varios cursos en las Universidades, tales como: Cálculo diferencial é integral, ecuaciones diferenciales, grupos continuos, funciones analíticas, series de Fourier y trigonométricas, funciones de variables reales, funciones elípticas y abelianas, grupos fuchsianos, funciones automorfas y modulares elípticas, conjuntos, variedades ó hiperespacios,

transformaciones y representaciones de varios géneros y múltiples aplicaciones geométricas, fundadas en las teorías analíticas.

Desde luego, es fácil comprender que un tratado, en el cual hubiera de resumirse una variedad tan rica de materias como las incluidas dentro del amplio dominio del Análisis matemático, no podría ser expuesto con la misma unidad y sobriedad en la forma que cualquier otro tratado, referente á teorías más concretas ó especiales, y por otra parte, un dogmatismo exagerado, un riguroso encadenamiento lógico, perjudicaría al fin pedagógico que debe perseguirse. Y todo ello se opondría á esa compenetración actual de las teorías, que se auxilian indistintamente, dentro de la unidad á que todas se subordinan en un organismo cada vez más perfecto y que no cabe en el molde estrechísimo de un curso titulado: *Elementos de cálculo infinitesimal, según el plan vigente*.

Solo con el carácter de *proyecto para una enseñanza del Análisis EN LO FUTURO* puede intentarse tamaña empresa, imposible de realizarse en la práctica, porque á los alumnos matemáticos no les puede satisfacer lo que es suficiente para los alumnos, cuyas aspiraciones se reducen á las licenciaturas en ciencias físicas y químicas.

Pasando á la descripción de mi *Tratado*, comenzaré por observar, que en mi *Cálculo diferencial* se observa una primera compenetración, chocante hace medio siglo, pero actualmente adoptada en la casi totalidad de los tratados modernos, á saber, la simultaneidad del cálculo diferencial y del integral, cuya separación hoy parece tan extraña, como lo sería la de las operaciones inversas de elevar á potencias y de extraer raíces, ó la división de la multiplicación.

Bien es cierto, que hace muchos años, la superior dificultad é importancia de la integración, respecto á la diferenciación, pudiera haber motivado este deslinde de ambos campos, entonces separados en el orden didáctico.

Tal cambio de práctica puede fundarse en muy sólidas razones.

En efecto, por un lado se comprende que, en una exposición rigurosamente sintética de una ciencia, la posibilidad *teórica* se sobrepone á la realización práctica.

En la Matemática, los procedimientos seguidos para la reso-

lución de los problemas, tienen cierta contingencia, dependiente de la habilidad, de los conocimientos, y á veces, de la inspiración de quien los resuelve, mientras que lo importante es la *necesidad teórica* de que existan relaciones especiales y de que ciertos resultados *sean posibles*.

Por otra parte, los progresos recientes de teorías, tales como la de las series, la de las funciones de variables complejas, la de las funciones analíticas y aun el mismo cálculo diferencial, han restado la importancia absorbente del cálculo integral, y, hasta por una conveniencia natural que hoy se siente, se impone una asimilación de estas dos operaciones inversas ó complementarias, que establece una regularidad muy conveniente en el estudio ó en la enseñanza.

Una teoría que se impone, por su desarrollo actual, aunque ha originado varias antinomias tales como las de Burali-Forti, de Zermelo-Konig, y de Richard, analizadas por el señor Poincaré en su obra reciente, *Science et Méthode*, es la de los *conjuntos* de Herr G. Cantor.

Como dice M. Poincaré, Herr Cantor ha introducido en matemáticas, el *infinito actual*, es decir, una cantidad que no es solamente susceptible de exceder á todos los límites, sino que puede considerarse como habiéndolos excedido.

Ciertamente, que el haber provocado la nueva teoría las citadas antinomias y otras que pudiera sugerir, no ha sido obstáculo para que muchos eminentes matemáticos se hayan servido ventajosamente de ella en sus obras, de igual manera que el infinito clásico, á pesar de las múltiples paradojas que ha suscitado, ha prevalecido en la Matemática, con evidentes ventajas para esta Ciencia; y, por lo menos, el cúmulo de cuestiones que ofrece á la investigación es tan útil, como lo fueron siempre los clásicos sistemas filosóficos que, aguijoneando constantemente á la inteligencia humana, la han conducido á no pocos descubrimientos, por el solo hecho de haber sostenido en continua actividad el espíritu de investigación. (*)

El *cantorismo*, según le llama M. Poincaré, propone multitud de cuestiones tales como: si hay más puntos en el espa-

(*) Basta en corroboración de lo expuesto, citar el reciente trabajo del profesor Herr Schoenflies, *Ueber eine vermeintliche Antinomie der Mengenlehre*, en el que rebate la aserción del profesor Herr Richard.

cio que números enteros, si hay más puntos en el espacio que puntos en el plano, etc.

Por otra parte, Du Bois-Reymond, con sus sistemas pantáquicos, ha llegado á investigaciones análogas á las de Herr Cantor. Y la Matemática, en su permanente variabilidad y progreso, por la constante extensión de sus dominios y estado de formación y tendencia á su perfeccionamiento indefinido, tiene que adoptar este nuevo punto de vista, mientras constituye una fuente inagotable de nuevos descubrimientos, pues ciertamente, que el infinito es noción bajo la cual se nos ofrecen las más diversas manifestaciones, que el matemático sujeta bajo ciertas nociones auxiliares, como la de límite, sección, asintotismo, etc., y las diversas especies de conjuntos, por las que distinguimos algunos de sus caracteres.

Los trabajos actuales acerca de los postulados, de la pasigrafía, etc., se imponen como consecuencia del inmenso progreso de la Matemática, tanto, que todos ellos y otros muchos entran en la Crítica y Filosofía matemática, que, no solo deben ser objeto de las enseñanzas universitarias, sino que se necesita imprescindiblemente de una exposición didáctica que se ofrezca como modelo de coordinación de otras tantas nuevas teorías, constitutivas de la parte formal de la Ciencia.

Las antinomias que ofrece la teoría de Herr Cantor son hechos muy naturales, al tratarse de un concepto ultrasensible cual es el del infinito. En este difícil proceso, las reglas de la Lógica se encuentran superadas por el objeto á que se aplican. Las leyes de lo infinito derogan aquéllas á que se somete lo finito. En la teoría de Herr Cantor, se trata como existente y positivo un concepto negativo, que para nosotros supera hasta el orden ideal, pues ni aun imagen adecuada se nos ofrece en estas investigaciones, como no sea su referencia á lo actual y finito, que es lo único accesible á nuestro modo de conocer.

Tan difícil para nuestras inteligencias como lo infinito es lo sustancial, la esencia de cuanto existe, las causas, etc., no ya en la Matemática, sino en la Metafísica; pero no por eso la inteligencia deja de estudiarlo.

El mundo físico evoluciona ante nosotros, que pugnamos por conocerlo, mediante hipótesis, que son los fundamentos de diversas teorías. Estas constituyen ciencias ideales que tienden á aproximarse á la realidad.

Cuando un hecho excepcional perturba el orden científico admitido, nuevas hipótesis reemplazan á las derogadas y nuevos horizontes sustituyen á los antiguos. Y, á pesar de que caminamos con marcha incierta, las teorías que podemos llamar provisionales, nos han servido siempre para explicar numerosos hechos, que son algunos eslabones de la cadena en que todos se unen, ó algunos rayos del foco hacia el que todos tienden á concentrarse.

Así, las antinomias de la teoría de Cantor, como las paradojas del infinito clásico ó posible, no deben, como en el estudio del mundo físico, conducirnos á una demolición de lo admitido y que se sabe.

La teoría de Cantor explica multitud de relaciones existentes en lo más íntimo de la cantidad, así como en sus más amplias expansiones. Y sobre los resultados de los profundos análisis hechos, y de las relaciones conquistadas, debemos seguir edificando, proponiéndonos, por otra parte, explicar las antinomias, corregir algo de lo establecido, y continuar en el camino del progreso científico, confiados siempre en nuevos perfeccionamientos, característicos de la Ciencia, constante en estado de formación, que por un lado nos ofrece sus conquistas y, por otro, una parte determinable que ha de irse sumando á lo ya sólidamente establecido, para formar nuevos núcleos y extenderse por más amplios horizontes.

Esta ya larga digresión puede servir para afianzar, de paso, la exposición somera que sirve de preámbulo al tomo primero, *Cálculo diferencial*, acerca de los conjuntos, al segundo, *Principios generales de la teoría de las funciones*, acerca de los números irracionales y de los límites y de la teoría de las cantidades complejas con n unidades principales, en la que Weierstrass llegó á la singular noción de los *divisores del cero* y, en el tomo tercero, *Aplicación del cálculo infinitesimal al estudio de las figuras planas*, las generalidades, respecto á lo imaginario y lo infinito, en Geometría, donde tienen su lugar oportuno los nuevos conceptos de Cayley y de Klein, sobre la determinación métrica del espacio en conexiones íntimas con la absorbente y colosal doctrina de los grupos de transformaciones de Sophus Lie.

Los preámbulos de los tres primeros tomos de mi *Tratado de Análisis* compendian, en pocas páginas, las humanas con-

quistas acerca de los más transcendentales conceptos de la inteligencia, y hacen ver cómo el espíritu matemático ya con auxilio de esquematismos ingeniosos y profundos, ya con sujeción á los preceptos lógicos, ha construido un mundo ultrasensible, tal que se amoldan las representaciones de la realidad, como la materia á la forma, como el mundo sensible al mundo de las ideas.

Pero, en una exposición destinada á la enseñanza, debe prescindirse de un rigor excesivamente dogmático y sintético. Las ideas deben presentarse, no encasilladas ó como un esqueleto que marque una forma rígida é invariable, sino como algo móvil y elástico, susceptible de modelarse conforme á diversos tipos.

Juntamente con los atildados y sutiles razonamientos que, por ejemplo, hoy conducen á la reversibilidad de las series y de las funciones, según los modernos procesos de un depurado análisis, conviene presentar, para contrastarlos, aquellos procedimientos de carácter más elemental, por los cuales el gran Newton llegaba á tales resultados con el solo auxilio de su portentoso genio.

Así podemos ver las ideas en su generación sucesiva hasta sus más perfectos desenvolvimiento. Así vemos cómo, con auxilio de una ecuación ficticia, llega al desarrollo de las raíces de una ecuación; cómo hace desaparecer sucesivamente los términos de uno de los miembros de una igualdad, para llegar á lo que llamó *método inverso de las series*; y en la teoría de las curvas, por análogos procedimientos, mediante la ingeniosa determinación de las ramas de curva en la proximidad de un punto, ó en el infinito, que ha llegado á su último perfeccionamiento en la teoría de las funciones algebraicas de Puiseux, que dió la ley de permutación de las raíces, alrededor de un punto, y, en los sistemas de lazos fundamentales de Clebsch y Gordan. Todo lo que llega al grado de la sublimidad, cuando Cauchy establece la teoría de las funciones de variables imaginarias, que Riemann perfecciona, bajo la denominación de funciones de variables complejas y de su célebre superficie.

Solo así, continuando los descubrimientos, desde su estado primitivo y rudimentario, hasta sus grados más perfectos, es como se aprende á seguir á la inteligencia en su funcionamiento.

En cuanto á los infinitos, observaremos, que el infinito clásico es como un dominio que excede á todos los dominios que podemos concebir, y en el cual existe una serie de infinitos incomparables entre sí, constituyendo una serie de órdenes positivos y negativos, cuyo centro está representado por las cantidades finitas.

El infinito actual es como un fondo sobre el que se coordinan infinitos también de distintos órdenes tales, que si en uno de ellos se suprimen los de un orden inferior, la potencia no altera como, por ejemplo, cuando en el continuo se suprime la serie infinita de los números enteros ó de los racionales.

Y vemos además, cómo las cuestiones matemáticas se suceden, conservando cierta gradación simétrica. Así, por ejemplo, al reducir una fracción ordinaria á decimal, cuando el denominador de aquélla (se supone irreducible) contiene factores distintos de la base decimal, es decir, cuando se trata de dos dominios irreducibles ó intransformables entre sí, llegamos á las series periódicas infinitas, dentro del dominio de las cantidades finitas y, más generalmente, tenemos la serie de Mac Laurin, para expresar desarrollos funcionales. Y el teorema de Taylor permite desarrollos indefinidos, mediante potencias del incremento de la variable, que constituyen el punto de partida de la vasta teoría de las series, de las que citaremos las de Lagrange, Laplace, Burmann y Stirling.

Pero además de este desarrollo indefinido, hemos de considerar el desarrollo definido que expresan el binomio de Newton y los desarrollos de las potencias de los polinomios. Parece como que se encierran en un molde las cantidades, cuyos términos contienen elementos del cálculo combinatorio, como efecto de la ley de simetría que rige á estos desarrollos.

Y la extensión del teorema de Taylor á funciones de muchas variables se presenta como una extensión del teorema de las potencias de un polinomio, al caso en que los términos de éste se sustituyen por coeficientes diferenciales, figurando en los primeros, los exponentes como en los segundos las derivadas de los diferentes órdenes.

Tenemos pues, los primeros casos de generación de las cantidades, pero, acto continuo el teorema de Leibnitz, nos da un desarrollo de productos funcionales de diferentes órdenes, que permite abordar el complicado problema de las derivadas

de los diferentes órdenes, cuyo fondo está constituido por ecuaciones diferenciales, y que es fundamental en la teoría de la diferenciación implícita y de la inversión de las funciones.

En primer término, el convertir una función implícita en explícita, toca con las fronteras del cálculo integral.

Definida una función F de las variables $x, y, \dots, u$ que se anula en el punto $(x_0, y_0, \dots, u_0)$, que admite derivadas parciales continuas respecto á dichas variables $x, y, \dots, u$, no anulándose la derivada respecto á u , *se puede determinar una función de las variables $x, y, \dots$, definida en el entorno del punto $x_0, y_0, \dots$, que adquiere en este punto el valor u_0 , y que sustituida en vez de u en $F = 0$, la satisfaga idénticamente. Esta función será única, etc.*

Ya entramos por este teorema en la correspondencia biunívoca entre las funciones y sus variables independientes, ó entre los puntos que son sus afijas correspondientes en el plano. Y aparece en esta teoría, por vez primera, la *condición* que expresa el *determinante funcional* de un sistema de funciones.

Además, el problema de las correspondencias se complica. El convertir una función implícita en explícita parece que es *desdoblar* dicha función, despegarla de los elementos extraños que la envuelven. Pero el *cambio de variables* es una especie de traslado de dominios.

Existe, por ejemplo, una relación entre las variables x é y ; y nos proponemos pasar á una nueva relación entre éstas y una nueva variable t , con auxilio de una relación intermedia pudiéndose tratar de varias ecuaciones y mayor número de variables, con el fin de obtener, no solo nuevas funciones, respecto á las nuevas variables, sino las derivadas de las propuestas por medio de otras derivadas, respecto á otras variables; y comenzamos á penetrar en el vasto dominio de las ecuaciones diferenciales, que ha puesto á prueba la energía intelectual de los grandes talentos matemáticos.

Estos primeros preparativos son indispensables para llegar al capital problema de la *integración de las ecuaciones diferenciales*, problema que es como la síntesis de la ciencia matemática; el que conduciría al tránsito general de algunas de las cantidades, en el dominio de ecuaciones dadas al dominio de las demás, á través de relaciones más ó menos complejas,

constituídas por derivadas de diversos órdenes, con relación á las cantidades tomadas como variables independientes.

Estos problemas han ejercitado el esfuerzo de los más eximios talentos, que solo parcialmente los han ido resolviendo, con ciertas limitaciones.

Bien es cierto, que la integración clásica era la integración *formal*, lo que constituye una condición subjetiva ó *a priori*, que generalmente pugna con la naturaleza de los objetos propuestos, de igual manera que la resolución *algebraica* de las ecuaciones implicaba otra condición formal, que solo podían satisfacer las ecuaciones llamadas abelianas, es decir, con la restricción de que sus raíces estén ligadas por una *relación racional*.

Otro problema preparatorio es la *eliminación de constantes y de funciones arbitrarias*. Se sabe que el considerar varias cantidades como pertenecientes á un mismo sistema equivale á hacerlo independiente de las mismas.

Al fijar el valor de uno de los parámetros, las demás cantidades quedan con una variabilidad independiente de éste, que se puede eliminar, y lo mismo puede concluirse, cuando los parámetros son dos, tres, etc. Y al fijarse cada parámetro, se limita la variabilidad del sistema. Pero si derivamos la ecuación que se considera, se obtiene una nueva condición que extiende la variabilidad del sistema. Cada derivación y cada eliminación simultáneas, dejan el sistema con el mismo grado de determinación.

Por otra parte, cada derivación equivale á una constante. Así, la segunda derivada puede considerarse como un límite del límite á que tiende la relación incremental en la primera derivada, y así, sucesivamente.

Es por lo tanto, muy natural que la constante implícitamente introducida, permita eliminar una constante de la ecuación propuesta, dejando al problema con el mismo grado de determinación. Y esto se ve inmediatamente, si se observa que el dar n valores arbitrarios á la función y , juntamente con sus $n-1$ derivadas consecutivas, para un valor arbitrario de x en una ecuación diferencial, equivale á dar las n constantes arbitrarias de su integral correspondiente.

La determinación del verdadero valor de las expresiones singulares es cuestión simplemente práctica, que está resuelta

por la categoría que ocupan los límites de crecimiento en el numerador y en el denominador, ó sea las derivadas respectivas, verdaderos índices de dichos crecimientos. El problema de los máximos y mínimos es un problema particular que se refiere al estado especial de una función, de grado inferior al de las singularidades, pues no afecta á la continuidad.

El tomo cuarto de mi obra, *Cálculo integral*, es el que más directamente corresponde al cálculo diferencial, constituyendo su complemento natural, dentro del desarrollo de la Matemática clásica. Esta parte del análisis es la que ha conservado de un modo más permanente el aspecto formal de dicho desarrollo. Su carácter es eminentemente práctico; los nombres de estas dos ramas lo expresan sobradamente. Es como la Aritmética del Análisis; pero una Aritmética, cuyas operaciones tienen por elementos las derivadas y las diferenciales, cuyas reglas de cálculo son extremadamente complicadas y de gran variación.

Los procedimientos más característicos son: los *cambios de variables* que reducen las funciones á expresiones más simples, las *reducciones recurrentes* también simplifican, por un enlacenamiento de términos, que se determina sucesivamente, desde el último término, el cual es inmediatamente integrable.

Para formar el espíritu matemático ó para educar en este sentido al alumno, el procedimiento más adecuado es seguir la génesis de las ideas, según su orden histórico, que presentan una síntesis rigurosa de los conceptos perfectamente clasificados, pues se trata de estudiar la Ciencia, no constituida, sino en su estado de formación, con las deficiencias propias de cada época, al lado de su perfeccionamiento gradual.

Así, el tomo cuarto contiene resultados debidos á Euler, Poisson, Bertrand, enlazados con los primeros descubrimientos á que conduce la evolución realizada por Cauchy.

Es interesante y provechoso ver con qué ingeniosas transformaciones, los analistas anteriores á Cauchy vencían las dificultades de la integración, lo que constituye un modo de exposición eminentemente práctico y constructivo; pero al lado de estos procedimientos, ya se hallan investigaciones en las que se principia á notar la depuración de los conceptos, la precisión en puntos delicados y difíciles de la Ciencia, tales como el caso en que las funciones, sometidas á la integración, pasan

por valores infinitos ó indeterminados y los en que los límites de la integración se hacen infinitos.

Las teorías del *valor principal*, de las *integrales definidas singulares* y de los *residuos* de Cauchy, los teoremas de los valores medios (des *moyennes*) preparan para este nuevo orden de investigaciones, que conducen de lleno á la moderna representación de las funciones de variables complejas, pues las nociones acerca las integrales elípticas é hiperelípticas y sus transformaciones, especialmente su reducción á la forma canónica, así como el estudio de las trascendentes engendradas por integración lo exigen, de igual manera que son necesarias, previamente, algunas nociones sobre la integración de las ecuaciones diferenciales, que permiten tratar ya, de un modo seguido, otras trascendentes tales como las funciones de Legendre, las Eulerianas, las sinécticas y las periódicas.

Estos desarrollos del moderno análisis justifican el hecho de que á este tomo cuarto preceda el tomo segundo, cuyo título es: *Principios generales de la teoría de las funciones*, cuya reseña vamos á hacer.

Este tomo tiene un nuevo carácter. Es una introducción al moderno Análisis. Las funciones se estudian directamente, en el curso de su variación. Los razonamientos se fundan sobre encadenamientos de desigualdades. Las sustituciones formales que predominan en el cálculo clásico, en virtud de las cuales se reducen los problemas á otros más simples, generalmente por relaciones recurrentes, en el Análisis moderno se reducen á sustituciones de cantidades, dentro de intervalos dados; y la pequeñez de estos intervalos limita cada vez más el decrecimiento de las cantidades, ó bien se sustituyen unas cantidades por otras, que siempre las superan, ó cuyo decrecimiento es más lento. En vez de cuestiones de forma, se trata, con preferencia, de cuestiones de magnitud.

Así, el criterio para la convergencia de las series se reduce á compararlas con otras de términos respectivamente mayores, que sean convergentes.

El estudio de las funciones se reduce al estudio de las series. Y no basta que éstas sean convergentes, lo que es una primera garantía para que puedan expresar las funciones; se pretende que llenen una nueva condición, que asegura la identidad de la función con la serie, en pequeños intervalos, es

decir, que la serie sea *uniformemente* convergente; en cuyo caso, el límite superior de aproximación es el mismo para todos los valores de x , comprendidos en el intervalo que se considera.

Otro ingenioso y útil descubrimiento es el de las funciones mayorantes que, estableciendo íntima analogía entre los polinomios y las series enteras, regularizan el antiguo procedimiento de sustituir series por otras de términos respectivamente más pequeños. En las funciones mayorantes, la relación de superioridad se refiere, no solo á los valores de los módulos de las funciones, cuyos valores numéricos se comparan, sino á los valores de las derivadas respectivas de todos los órdenes.

En esta disección de la cantidad, que se efectúa, estudiándola en todas las fases de su existencia, lo esencialmente importante es la *discontinuidad*. Los accidentes de ésta son las oscilaciones de las funciones, los saltos, las clases de discontinuidad.

Pero la función no se considera solo en sí; se considera según su existencia relativa, como diferencial ó como integral de otra función. Riemann substituyó al clásico, un nuevo concepto de la integral, definiendo las funciones integrales por medio de la suma de los intervalos en los cuales la oscilación excede á un número fijo, cuando aquélla tiende á cero, y por medio del salto finito.

Finalmente, el modo de ser discontinuas y continuar, en ciertos intervalos, la no derivabilidad de ciertas funciones continuas, la condensación de las singularidades, por medio de la que Hankel obtuvo funciones con infinitas singularidades, etcétera, son cuestiones que entran en el dominio de las funciones de variables reales.

Pero además de estas cuestiones puramente cuantitativas, surgen las de orden cualitativo y descriptivo. La moderna teoría de las funciones de variables complejas que vulgarizaron primeramente Briot, y Bouquet y luego Durege, Neumann y otros, comprende otro género de cuestiones. Las múltiples determinaciones, por las que son politropas ó multiformes, originan el estudio de los puntos críticos, los polos, las singularidades esenciales, etc.

Ya los caracteres de las funciones no se reducen á los simples modos de crecimiento ó de decrecimiento. Se definen por sus ceros, sus polos y especies de singularidades. La forma

analítica de las funciones pasa á segundo término, empleándose indistintamente, según los casos, las series, las integrales, los productos infinitos y hasta el algoritmo de las facultades.

No se trata solamente de la constitución numérica, se trata de caracteres cualitativos tales, como el orden de sucesión de los valores, las periodicidades, en sus maneras de ser; y, como instrumentos y auxiliares para facilitar este estudio, se ha constituido el *Analysis situs*, que ofrece como sus bases fundamentales, la superficie de Riemann y los hiperespacios, así como la teoría de las funciones de variables reales suele aportar como fondo, sostén ó sustratum, la teoría de los conjuntos.

Estas materias comprende el segundo tomo de mi *Tratado de Análisis* que comprende, en el *Libro primero*, nociones acerca de los números irracionales y de los límites, en el *Libro segundo*, funciones de variables reales, continuidad y discontinuidad. En el *Libro tercero* series, funciones regulares y analíticas. Integrales y cálculo de los residuos. En el *Libro quinto*, superficie de Riemann, variedades ó espacios.

El *Tomo 3.º, Aplicaciones del cálculo infinitesimal al estudio de las figuras planas*, como su nombre indica, solo tiene un lugar accesorio en un *Curso de Análisis*; tan solo tiene una importancia pedagógica, accidental, dependiente del plan de estudios, según el que puede aparecer, para completar un programa, ó bien puede pasar á otras disciplinas.

En efecto, algunas de las teorías, pertenecen á la Geometría analítica, y se desenvuelven muy naturalmente, al lado de las del Álgebra de las formas; pero, por esa compenetración de los conceptos, característica de la Matemática actual, cabe dentro de un desarrollo analítico, mediante la aplicación del algoritmo infinitesimal.

Al lado de la parte concerniente á las transformaciones existe la parte de *constitución interna* de la cantidad geométrica, cuyo primer elemento es la tangente, á la que corresponde como elemento analítico la derivada ó coeficiente diferencial; y las derivadas son también fundamentales en las teorías de la Hessiana y Jacobiana, y sobre todo, es el núcleo ó centro común de todas las singularidades de las curvas, cuyo estudio entra en la región de la Geometría numerativa.

Todos los desarrollos, en fin, relativos á la polaridad, á los

invariantes, covariantes, etc., se fundan en la consideración de este elemento; y por otra parte, las teorías de los contactos, de las curvaturas, evolutas y el estudio cinemático de las curvas, entran de lleno en el campo del cálculo infinitesimal, y son sus más inmediatas aplicaciones.

La introducción al *tercer tomo* comprende las generalidades acerca de lo imaginario y lo infinito, conceptos que dominan, tanto la Geometría ordinaria, como las Geometrías no-Euclídeas y la Geometría de n dimensiones.

La Geometría diferencial plana, que comprende las cuestiones dependientes de infinitamente pequeños de primer orden y de órdenes superiores; las singularidades de las curvas planas, el estudio sistemático de las mismas, comprendiendo las aplicaciones de las fórmulas de Plücker, las transformaciones planas, cuadráticas é isogonales y la polaridad, invariación, curvas covariantes, conexos, geometría sobre una curva plana y geometría numerativa son las materias tratadas en los tres libros de dicho tercer tomo.

Más amplio campo abarca el *tomo quinto*, *Aplicaciones del cálculo infinitesimal al estudio de las figuras en el espacio*.

El tomo 3.^o constituye una fusión de la Geometría analítica con los principios del cálculo diferencial; el tomo quinto comprende, además del cálculo integral y de las ecuaciones diferenciales, la amplia base de toda la Geometría pura, y hasta de los sistemas no-Euclídeos, complejos, congruencia y Geometría reglada. Tenemos:

Libro 1.^o Líneas y superficies, comprendiendo las propiedades descriptivas y métricas, llegando á las primeras aplicaciones de las fórmulas de Serret ó de Frenet, indicatriz, tangentes conjugadas, líneas de curvatura, asintóticas y geodésicas, de nivel y máxima pendiente y Geometría esférica.

El *Libro 2.^o*, de carácter práctico, tiene por único objeto, la aplicación de las integrales, á las cuadraturas, rectificaciones, curvaturas y áreas.

El *Libro 3.^o Estudio de las curvas en forma paramétrica*, tiene la mayor importancia, y constituye lo característico de la Geometría infinitesimal, bien es cierto que, partiendo de las coordenadas curvilíneas de Gauss, constituye por sí un cuerpo de doctrina, donde se trata de las líneas isotermas, representación conforme, curvatura total de Gauss, curvaturas,

tangencial, geodésica, normal, torsión geodésica y superficies evolutivas, parámetros diferenciales, superficies aplicables, fórmulas de Mainard-Codazzy sistemas triplemente ortogonales.

El tomo 5.^o puede considerarse desde el punto de vista teórico y práctico. Desde el primero, es un resumen de la teoría general de las superficies, en la que se llega hasta las superficies mínimas y, especialmente, las superficies de curvatura constante y los diferentes sistemas geométricos y especies de geometrias. Desde el punto de vista práctico, constituye una extensa ampliación de las teorías de las ecuaciones diferenciales.

El tomo 6.^o, *Teoria de las ecuaciones diferenciales*, comprende tan solamente la *integración clásica*.

Aunque los derroteros de los actuales matemáticos son distintos de los fundadores, Newton y Leibnitz y los que la extendieron, como Bernoulli, Ricatti, Lagrange, Laplace, Monge y Ampère hasta Jacobi, pues los nuevos puntos de vista de Cauchy y de Riemann llevaron la Ciencia á otras regiones más amplias y generales; tienen gran importancia los métodos clásicos, porque con su auxilio se integran muchas ecuaciones, y además, porque constituyen un curso de metodología matemática, muy propio para educar las inteligencias en los procedimientos del cálculo infinitesimal.

Es interesantísimo el seguir, paso á paso, la serie de procesos ideados, desde la separación de las variables y las ingeniosas transformaciones que, simplificando las ecuaciones, las reducen á casos más sencillos y conocidos.

Este tomo constituye la historia de las ecuaciones diferenciales, en la que dejaron huellas de su talento los Euler, Lagrange, Laplace, D'Alembert, Ampère, Monge, Poisson, Pfaff y los modernos, desde Jacobi y Cauchy, hasta Hámilton, Boole y M. Darboux, cuyas numerosas memorias y obras, especialmente sus extensas *Leçons sur la Théorie des surfaces*, constituyen una transición de los métodos clásicos á los modernos, en que tanta influencia ha ejercido la teoría de los grupos continuos de Lie.

Este tomo constituye una aglomeración de métodos, que forman una extensa colección de problemas, juntamente con las teorías en que se funda su resolución. Y muchas veces parecerá que existen redundancias, cuyo objeto es seguir la gé-

nesis de las ideas, por las que el inventor de una teoría ha llegado á su fin, y los nuevos puntos de vista, por los cuales los sucesores la han perfeccionado. El método analítico, combinado con el histórico es eminentemente pedagógico.

La extensa serie de teoremas y de procedimientos, con los que l'abée Moigné resume los resultados obtenidos por su maestro Cauchy, la sucesión de razonamientos, mediante los que Laplace, Monge y Ampère, llegaron á sus métodos para la resolución de las ecuaciones de derivadas parciales, son muy útiles modelos para adquirir el espíritu de investigación, cuando se complementan con los perfeccionamientos aportados por Imschenetsky, Darboux, Goursat, etc.

Estos seis tomos de Análisis formaban parte de la publicación que me propuse llevar adelante, con el título de *Nueva Enciclopedia Matemática*, cuyos tres primeros tomos, inéditos, tenían por objeto la teoría de los números, la de los grupos discontinuos y la aplicación de éstos á la teoría de las ecuaciones algebraicas, y además, esta publicación debiera haber contenido otros trabajos de carácter pedagógico, filosófico, bibliográfico, etc.; pero habiendo sufrido un retraso la implantación de reformas exigidas en nuestra enseñanza, que la hagan pasar del estado, ya casi histórico en que se halla, al del actual desarrollo que hoy tiene en otras universidades, ha sido necesario suspender estas modernas direcciones hasta que llegue el momento favorable para seguir las con éxito y fin inmediatamente útil y provechoso.

No es por lo tanto posible seguir, los ámplios derroteros de las teorías de los grupos, hoy características de los modernos progresos de la Matemática, ni continuar la integración clásica, con los modernos métodos de integración, ni seguir otros desarrollos por los cuales, desde Cauchy, Abel y Galois, hasta Cayley, Weierstrass y Lie han hecho cambiar radicalmente el modo de ser de la Matemática.

Y esto justifica el que, en la reducida extensión de seis tomos nos hayamos visto precisados á resumir lo que es objeto de muchos cursos en las universidades modernas, pues hoy, el Análisis es el alma de la Matemática, la fuerza central que irradia en todas las direcciones, dando vida á todas las demás ramas del antiguo árbol de esta Ciencia.

Comisión internacional de la enseñanza matemática

Resumen del "Rapport préliminaire sur l'organisation de la Comision.,

Bajo la iniciativa del profesor Dav. Eug. Smith de Nueva York, la sección de *Filosofía, Historia y Enseñanza de las matemáticas*, decidió someter al Congreso internacional de matemáticos de Roma, una resolución encaminada á crear una Comisión internacional, encargada de estudiar, en conjunto, los progresos de la enseñanza matemática, en las diversas naciones; y el Congreso, en sesión del 11 de Abril, adoptó la siguiente resolución:

«Habiendo reconocido el Congreso la importancia de un examen comparado de los métodos y de los planes del estudio de la enseñanza matemática en las escuelas secundarias de las diversas naciones, confía á los señores Klein, Greenhill y Fehr el encargo de constituir una Comisión internacional que estudie estas cuestiones y presente un informe de conjunto en el próximo Congreso».

El comité se constituyó en la forma siguiente:

Presidente: Herr. profesor F. Klein G. R. R. de Gottinga.

Vice-presidente: profesor Sir George Greenhill F. R. S. Londres.

Secretario general: Sr. Prof. H. Fehr de Ginebra.

ORGANIZACION DE LA COMISION

I. Las delegaciones

a) La Comisión se ha formado por delegados que representan los países que han tomado parte, por lo menos, en dos de los Congresos internacionales de matemáticos, con un término medio de dos miembros, por lo menos. Cada uno de estos

países tiene derecho á un delegado. Los países que han tenido un término medio de diez representantes, pueden tener derecho á dos ó tres delegados. Sin embargo, en las votaciones y en las discusiones de la comisión, cada país sólo tiene un voto.

Los países llamados *participantes*, y que están indicados para tomar parte en las discusiones de la Comisión, son los siguientes:

Alemania, 2 ó 3 delegados; Austria, 2 ó 3 id.; Bélgica, 1; Dinamarca, 1; España, 1; Estados Unidos de América, 2 ó 3; Francia, 2 ó 3; Grecia, 1; Holanda, 1; Hungría, 2 ó 3; Islas Británicas, 2 ó 3; Italia, 2 ó 3; Noruega, 1; Portugal, 1; Rumania, 1; Rusia, 2 ó 3; Suecia, 1; Suiza, 2 ó 3.

Los países que no cumplen las condiciones indicadas, pero que, por sus instituciones pueden contribuir á los progresos de las ciencias, serán invitados á hacerse representar por un delegado, que seguirá los trabajos de la comisión, sin tomar parte en las votaciones.

Estos países se llamarán *países asociados*. Véase una primera lista, que podrá completarse, si hay lugar:

República Argentina, Brasil, Bulgaria, Canadá, Chile, China, Colonia del Cabo, Egipto, Indias inglesas, Japón, Méjico, Perú, Servia y Turquía.

El órgano oficial de la Comisión es la revista internacional *L' Enseignement mathématique*, dirigida por MM. Laisant y Fehr, que dará cuenta, con regularidad, de los trabajos de la Comisión y de las sub-comisiones. Y estas comunicaciones podrán ser reproducidas por otros periódicos ó por otros medios.

La lista de los delegados, publicada en *L' Enseignement mathématique*, es la siguiente:

Alemania: Sres. F. Klein, P. Staeckel, P. Treutlein.

Austria: Sres. E. Czuber, R. Suppantschitsch, W.

Bélgica: Un delegado sin nombrar todavía.

Dinamarca: Sr. P. Heegaard.

España: Z. G. de Galdeano.

Estados Unidos de América: MM. W. Osgood, Dav. Eug. Smith, W. Young.

Francia: MM. P. Appell, C. Bourlet C. A. Laisant.

Grecia: El Sr. C. Stéphanos.

Holanda: El Sr. J. Cardinaal.

Hungría: Los Sres. M. Beke, G. Rados y un tercer delegado por nombrar.

Islas Británicas: Sir G. Greenhill y otros dos delegados que se nombrarán en breve.

Italia: Los Sres. G. Castelnuovo, Fr. Enriques, G. Vailati.

Noruega: Un delegado por nombrar.

Portugal: El Sr. G. Teixeira.

Rusia: Los Sres. Sonin, Kojalovic, Vogt.

Suecia: Un delegado por nombrar.

Suiza: Los Sres. Fehr y G. F. Geiser.

En cuanto á los países llamados *asociados*, se dará la lista, cuando esté algo completa. Lo mismo se verificará, respecto á las subcomisiones nacionales.

PLAN GENERAL DE LOS TRABAJOS

PRIMERA PARTE

Estado actual de la organización y de los métodos de instrucción matemática.

Capítulo I. Los diversos tipos de las escuelas.—En este primer capítulo se hará una *exposición sucinta* de los diversos establecimientos de instrucción pública, en que se practica la enseñanza matemática, y se indicará el objeto de cada escuela. Se tendrá también en cuenta las escuelas de las jóvenes.—Los establecimientos se repartirán, según la clasificación siguiente:

a) Escuelas primarias, elementales y superiores.—*b)* Escuelas medias ó secundarias superiores) liceos, gimnasios, escuelas reales, institutos de segunda enseñanza, etc.—*c)* Escuelas medias profesionales (Tecnium).—*d)* Escuelas normales para las diversas enseñanzas (seminarios de maestros, «teachers colleges», etc.) Escuelas superiores: Universidades y Escuelas politécnicas.

Será conveniente agregar á esta exposición un *cuadro esquemático* que dé un resumen de conjunto, por el cual se manifieste la sucesión y la correspondencia entre los diversos establecimientos; se indicará también la edad media de los alumnos.

Cap. II. Objeto de la instrucción matemática y ramas de enseñanza.—Se examinará esta cuestión para los diversos tipos de establecimientos arriba mencionados, teniendo en cuenta, si hay lugar, las matemáticas aplicadas, especialmente la mecánica.

No solamente varía *el fin de la instrucción matemática* de un establecimiento á otro, sino que ha sufrido algunas transformaciones en el transcurso del último siglo. Puede ser puramente formal, teniendo en cuenta la intuición; puede también tender á la vez al desarrollo lógico, y considerar el lado utilitario, ó todavía considerar únicamente la práctica. Por otra parte, se puede aspirar principalmente á la cultura de las materias, ó, por el contrario, desarrollar las facultades matemáticas. ¿Cuáles son las *ramas matemáticas* enseñadas en los diversos tipos de escuelas? Se indicará el tiempo que se les dedica y la extensión del programa. ¿En qué medida se tienen en cuenta las relaciones entre estas ramas, y si hay lugar, las relaciones con las matemáticas aplicadas, (comprendiendo la mecánica y la física)?

Cap. III. Los exámenes.—Es incontestable que el sistema de los exámenes tiene gran influencia en el método de enseñanza, en cada categoría de escuelas, y particularmente, los que conducen á los «*certificats de maturité*», á los «bachilleros», etc., y á los exámenes de los candidatos para la enseñanza.

Cap. IV. Los métodos de enseñanza.—¿Cuáles son los métodos seguidos en los diversos establecimientos, desde la enseñanza de iniciación, hasta los estudios superiores?—Material de enseñanza; modelos matemáticos.—Empleo de manuales, libros de texto, colección de ejercicios.—Ejercicios teóricos; problemas tomados de las ciencias aplicadas.—Trabajos prácticos.

Cap. V. Preparación de los candidatos para la enseñanza.—Aquí se considerarán todavía, los diversos tipos de establecimientos y se indicará cuáles son las garantías exigidas por la autoridad escolar: a) desde el punto de vista de preparación teórica; b) respecto á la preparación profesional.

SEGUNDA PARTE

Las tendencias modernas de la enseñanza matemática.

Capítulo I. Las ideas modernas concernientes á la organización escolar.—Reformas de estudio.—Nuevos tipos de escuelas.—La cuestión de la coeducación de los dos sexos.

Cap. II. Las tendencias modernas concernientes al fin de la enseñanza y las ramas de estudios.—Objeto de la enseñanza.—Ramas nuevas ó capítulos nuevos que se han de sustituir á objetos de estudios inútiles, pero conservados por pura tradición ó por rutina.

Dados los rápidos progresos de las matemáticas y de sus aplicaciones, el Comité propone examinar de nuevo, con cuidado, cuáles son las ramas de estas ciencias, más susceptibles de contribuir á la cultura general. Entre los objetos que reclaman actualmente un lugar en los programas elementales, se puede mencionar, por un lado, el cálculo diferencial é integral, la Geometría analítica, ciertas nociones de Geometría descriptiva y un estudio de la física, desde el punto de vista matemático.

Por otra parte, se propone introducir nuevas materias, de un género más especial ó nuevas nociones fundamentales (tales como las nociones de función, de grupos, de conjunto), sería útil que el informe examinase en qué medida se puede tener en cuenta estas exigencias, estableciendo cuál es el mínimo necesario de los elementos de Geometría euclídea, descriptiva y proyectiva, de álgebra, de cálculo diferencial é integral, de trigonometría y de geometría analítica, que forma la base de estudios ulteriores.—La misma cuestión se propone para los establecimientos de orden profesional; ¿cuáles son las ramas útiles para las diversas carreras?

Cap. III. Los exámenes.—Proyectos al estudio que conciernen á la transformación del sistema de exámenes ó á su supresión completa.

Cap. IV. Los exámenes de enseñanza.—Las ideas modernas concernientes á los métodos en los diversos grados de enseñanza y en los diferentes tipos de escuelas.—Los lazos entre las diversas ramas matemáticas y las otras ramas.—Ejercicios y aplicaciones prácticas; modelos é instrumentos.—El uso de los manuales.

Sobre algunos objetos concernientes á este capítulo.—1.—

Desde la época de Pestalozzi, las consideraciones psicológicas han jugado un papel importante en la educación primaria, y después de una generación, son igualmente útiles, en cierta medida, para la elaboración de los programas en los establecimientos secundarios. Habría lugar para examinar cuáles son los resultados de la psicología en la enseñanza de las matemáticas, y hasta qué punto son útiles á la reforma de esta enseñanza. Convendría examinar particularmente el papel de una enseñanza de iniciación y la necesidad de hacer preceder el estudio teórico de las matemáticas por una enseñanza intuitiva.

¿En qué momento, por el contrario, las consideraciones lógicas deberían adquirir un lugar preponderante, por ejemplo, en el estudio de la geometría elemental ó del cálculo diferencial é integral?

2. *Las aplicaciones prácticas.*—Muchas escuelas han consagrado largas discusiones acerca de la parte que se debe atribuir á las consideraciones de orden práctico y experimental.

a) En la enseñanza elemental se puede mencionar, por ejemplo, la plegadura de papel, el trabajo al aire libre, el uso de los instrumentos simples de medida, la geometría de observación, etc. el cálculo práctico y aproximativo (grado de aproximación, logaritmos con un número variado de decimales, uso de la regla de cálculo, etc.); la cuestión general de los gráficos en álgebra, el uso más extendido del papel cuadriculado.

b) Se han discutido, en estos últimos años, los laboratorios matemáticos.

¿Qué se ha hecho en este sentido y cuáles han sido los resultados?—Modelos matemáticos confeccionados por los alumnos. El papel de las colecciones modelos.

¿Cuáles son los medios que permitirán conceder mayor lugar á las matemáticas en la enseñanza popular (extensión universitaria)? Lugar de las matemáticas aplicadas en los Museos. Recreaciones matemáticas.

Con esto existiría un conjunto de medios para reaccionar contra los prejuicios que existen respecto á las matemáticas.

3. *Los lazos entre las diversas ramas matemáticas.* Sería útil examinar en qué medida se puede hacer desaparecer los límites convencionales existentes entre ciertas materias de las matemáticas puras, como el álgebra y la geometría; el álgebra y el

cálculo diferencial é integral, la Geometría de Euclides y la geometría analítica, y la geometría y la trigonometría. No solamente sería preciso examinar la posibilidad de esta reforma, sino que se debería tener en cuenta inconvenientes y peligros que podrían resultar, lo cual es muy importante.

Sería bueno por otra parte, conocer el resultado de las transformaciones siguientes, que han sido propuestas ó examinadas de nuevo en estos últimos años.

a) El lugar de la geometría demostrativa respecto al álgebra.—b) La fusión de la geometría plana y la del espacio. c) La unión más íntima del cálculo diferencial é integral ó la introducción de este último antes que el primero.

4. *Las relaciones entre las matemáticas y las otras ramas.* En el mismo orden de ideas, sería igualmente útil examinar los puntos de contacto que existen entre las matemáticas y las otras ramas; así, las relaciones: 1) con el dibujo (geométrico, técnico y artístico); 2) con las ciencias aplicadas; 3) con las otras ramas científicas (Física, Química, Biología, Geografía, etc.); 4) con la filosofía; 5) con los problemas de la vida ordinaria.

Estos puntos de contacto son importantes para lo que concierne á la educación práctica. No bastaría estudiar simplemente las posibilidades y desiderata generales, es necesario todavía tener en cuenta lo que se hace actualmente con éxito y los riesgos que se corren. Por ejemplo, los que reclaman una relación estrecha entre las matemáticas y la física, deberán establecer exactamente cuáles son las nociones de geometría, de una aplicación directa á la física, y citar los problemas de física elemental que exigen las ecuaciones lineales simultáneas, las ecuaciones de segundo grado, con una ó varias incógnitas, las ecuaciones irracionales y las progresiones.

5. *Las consideraciones históricas.*—Se ha pedido que conceda más extensión al desarrollo histórico de las matemáticas. ¿En qué medida es posible y deseable?

Cap. V. *La preparación de los maestros.*—¿Cuáles son las condiciones que debe llenar una preparación racional de los candidatos á la enseñanza? ¿Cómo organizar los cursos teóricos y la preparación práctica?

Los progresos de la enseñanza dependen directamente de la preparación de los maestros. Es una cuestión de importancia fundamental.

Los estudios y las exigencias varían necesariamente de un país á otro; dependen mucho del número de los candidatos y de las facilidades de que se disponen en materia de educación. El Comité piensa que es útil informarse de las reformas ó proyectos de reforma que se inician actualmente, con objeto de obtener una preparación de los maestros, conforme á las condiciones modernas, y esto, no solamente para el personal de las escuelas primarias y secundarias, sino también para la Universidad.

Esta información podrá hacerse principalmente sobre:

- a) El trabajo matemático que se exige á los candidatos.
- b) Su iniciación para las investigaciones científicas.
- c) El método mejor que tenga por objeto presentar la pedagogía teórica y práctica (considerada como ciencia de educación).
- d) La cuestión de sexo del maestro, en los diferentes años escolares.
- e) Cuestiones concernientes, por ejemplo, al tiempo que debe consagrarse á la historia de las matemáticas, la historia de la enseñanza matemática, el lado recreativo de las matemáticas, y la literatura general, respecto á la educación matemática.

Observación general

En cada uno de estos capítulos, se hará resaltar *de un modo conciso*, por una parte, lo que caracteriza las reformas propuestas, por otra, cuales son los peligros por evitar y cuáles las objeciones y los argumentos que hacen prevalecer los que se oponen á las transformaciones proyectadas. Véanse algunas cuestiones fundamentales que deberán discutirse:

1. El deseo de hacer atractiva la instrucción puede disminuir el carácter serio, resultado que sería desastroso, tanto desde el punto de vista de la ciencia, como el del valor práctico de las matemáticas.
2. Una psicología mal entendida podría conducir á utilizar de un modo exagerado las bases lógicas de las matemáticas, de lo que resultaría para el alumno una continua incertidumbre.
3. El hecho de despreciar el lado abstracto, que parece necesario para grabar en el espíritu de un modo indeleble las verdades matemáticas.

El hecho de darse cuenta de que una rama como la geometría, tal como se concibe actualmente, conduce á resultados de un género distinto de los que da el álgebra, y que una fusión de las dos podría dar, como consecuencia, la pérdida de algunas de las principales ventajas de cada una de estas ramas. Lo mismo para otras materias.

Otros peligros se presentan todavía; y el comité estima que es necesario examinarlos con cuidado, á fin de que sólo se intenten reformas conducentes á progresos efectivos.

Octubre 1908. El comité central.

F. Klein Presidente 3, (Alemania).

Sir George Greenhill, Vice-presidente Londres W. C.

H. Fehr, Secretario general, Ginebra (Suiza).

ARITMÉTICA

(Continuación)

Estas y otras varias ideas informaron mi *Tratado de Aritmética* (1884).

Cuando escribí este tratado, me proponía un programa, que he ido presentando en diversos grados, según las circunstancias. Al señalar las líneas generales de exposición didáctica decía en el prólogo: «Así pues, necesitamos hoy, para terminar esta contienda, en que las antiguas preocupaciones y rutinas se desmoronen al impulso de las modernas ideas, constituir una *filosofía matemática* que exponga el criterio de la verdad matemática, una *literatura matemática* que organice el mundo de lo bello matemático por la exposición de las infinitas armonías del número y del espacio, y una *Pedagogía matemática*, que consagre la exposición científica, armonizada con el modo de ser de nuestra inteligencia; y esto será objeto de nuestras próximas publicaciones, destinadas á consolidar nuestro modo de exposición didáctica».

El índice de las materias contenidas, es el siguiente:

Parte primera.—**Tratado del número abstracto.**—*Sección primera.*—Cálculo del número abstracto.—*Sección segunda.*—Teoría del número abstracto.—*Libro primero.*—Teoría del número-factor.—*Libro segundo.*—Teoría del número-resto,

que comprende las nociones sobre las congruencias y sobre la divisibilidad en cualquier sistema de numeración.

Parte segunda.—Tratado del número concreto.—*Sección primera.*—Cálculo del número concreto conmensurable.—*Libro primero.*—Cálculo del número concreto indeterminado.—*Cap. 1.º* Fracciones ordinarias.—*Cap. 2.º* Fracciones de forma entera.—*Libro segundo.*—Cálculo del número concreto determinado.—*Cap. 1.º* Nociones generales.—*Cap. 2.º* Numeración de los números concretos.—*Cap. 3.º* Cálculo de los números concretos.—*Sección segunda.*—Teoría del número concreto conmensurable.—*Libro único.*—Teoría del número fraccionario.—*Sección tercera.*—Teoría y cálculo del número concreto inconmensurable.—*Libro primero,* teoría del número inconmensurable.—*Libro segundo,* cálculo del número inconmensurable.

(Concluirá).

EL ESTILO MATEMATICO

El estilo matemático no puede ser más que uno, el de la lógica. La Matemática debe conservar generalmente su rigor expositivo, porque tan sólo se dirige á la razón; y su fin exclusivo es demostrar la verdad. Sin embargo, circunstancias especiales pueden modificarlo de un modo transitorio, tal es una de ellas, el carácter del público, otra el estado de la cultura general, otra, el fin que se persigue.

El fin útil exige sobriedad y concisión, ir en línea recta al objeto; como el fin puramente científico puede exigir estas dos condiciones, en un grado adecuado al de ilustración de los lectores, y especialmente á la edad del alumno, si es obra destinada á la enseñanza.

Pero uno de los fines expositivos puede ser la propaganda, la divulgación, á veces, favorecer vocaciones ocultas. La exposición de un profesor puede ser repulsiva, la de otro atrayente y amena. El aligerar la dosis de verdad, facilita su acceso.

En muchas ocasiones, la repulsión depende tan sólo de que el lector ó el oyente no se ha puesto en comunicación con el libro ó con el disertante, como si el uno ó el otro hablasen en idiomas distintos. A veces, la palabra no expresa bien ó no se

emplea suficiente número de términos para llegar al engranaje perfecto de la palabra de un lado, y la idea de otro, que deben amoldarse entre sí. Un libro no puede explicarlo todo, porque podrá llegar á ser extenso en demasía. La interpretación de las palabras no es perfecta en muchos casos.

La educación científica se perfecciona gradualmente. Una inteligencia de 11 años no puede comprender la Geometría, no Euclídea. A veces, los planes de enseñanza no gradúan suficientemente la escala que deben recorrer las ideas, ó un profesor no construye un andamiaje bastante sólido y completo para llegar á formar el edificio.

El simbolismo matemático es una de las causas más decisivas para que no susciten en la inteligencia la idea correspondiente. Desde este momento, su marcha queda en absoluto detenida, si no existe un vocabulario que interprete dicho simbolismo, ó una gramática que enseñe las reglas de este lenguaje.

Entre los matemáticos, debe hablarse, en su pureza, su lenguaje. Sus inteligencias siguen los razonamientos y aún los suplen por la práctica, en el raciocinio. Las ideas abstractas tienen tanta realidad como las ideas concretas, hasta el punto de ser innecesario salir del mundo de la razón, bastando el lazo de la inclusión ó exclusión ó el de la coexistencia y el de las sustituciones por equivalencia, en los tránsitos de unas proposiciones á otras, dentro del encadenamiento lógico, que fija unas por medio de las otras. Así se sujetan las consecuencias á los principios, por la luz de la evidencia. Cuando no existe público matemático, hay que formarlo; y sólo se puede formar, construyendo un puente, medio de unión entre lo abstracto y lo concreto. ¡Cuántas inteligencias bien constituídas habrán pasado sin haber tenido ocasión de ponerse en contacto con la verdad científica!

Preciso es colocar el combustible que produzca la mezcla detonante de la Química. Hay que despertar las inteligencias dormidas, que comunicarles el estimulante para que renazcan á la actividad de su estado de inercia, que simular un tránsito continuo entre lo que es tan diverso, como las representaciones sensibles y la idea, entre la inteligencia y la materia.

Este artificio se ha de emplear en diversas circunstancias. En la educación del niño, los ejercicios agradables, los juegos

de infancia, preparados para hablarles en su lenguaje rudimentario y en su naciente desarrollo intelectual, son los estimulantes para que se desenvuelvan, según su naturaleza intelectual; para que sean un Calderón de la Barca ó un Cauchy, un Ampère, ó un Cervantes, ó un Víctor Hugo.

Al revelarse Sophus Lie, con la doble capacidad filológica y matemática, eligió definitivamente la segunda, y llegó á las más altas cumbres, desarrollando su prodigioso talento.

La literatura científica es un reclutamiento de las inteligencias, donde es necesario constituir y organizar un medio de educación, que siquiera constituye un ambiente favorable para futuras plantaciones, la atmósfera en que han de vivir y desarrollarse las inteligencias científicas.

Pero éstas recorren un camino necesario; primero son impresionadas por las formas sensibles, los colores y demás influencias del mundo de las sensaciones; después viven en un mundo creado por la imaginación, sobre este primer fondo sensitivo, mundo de apariencias, ficciones y creaciones más ó menos fantásticas, donde impera el arte, que hermosea la vida.

Por último, la inteligencia se desprende de estas apariencias agradables que la han satisfecho con halagos, para llegar á una vida más real y más severa, cuyo fondo son las abstracciones, cuyo motor es la razón, cuyo código es la lógica, cuya manifestación son los fenómenos puramente psicológicos; y aún, de este fondo, la Matemática reúne, por cierta selección, lo más puro, lo más inteligible, lo más distante de la sensibilidad, y crea á su vez un mundo, como esqueleto del mundo objetivo y sensible, *el mundo de las relaciones abstractas*. Y ese mundo que, por un lado carece, hasta de representación intelectual, ya que puede reducirse á la simple deducción lógica, regida tan sólo por el mantenimiento del principio de contradicción; por otro lado, exige cierta representación, á lo menos esquemas, que sirvan como hilos sensibles, para el encadenamiento de las verdades, para la constitución de las relaciones; como, por el contrario, en la primera etapa, á las representaciones sensibles, se tenía que unir algún elemento intelectual que les diera cierta unidad, bajo la que son concebidas por la inteligencia. Ya estamos en el mundo matemático: El mundo en que no existe el elemento sensible; y sin embargo, un mundo también bello, con innumerables atractivos; un mundo siem-

pre nuevo y renovable, pero siempre afirmado sobre las anteriores verdades, que le sirvieron de cimiento; un mundo inagotable en la medida que lo son las creaciones del espíritu, bajo las leyes combinatorias, lógicamente posibles.

Pero un mundo que debe mirarse con una vista superior, y cuyas apariencias pertenecen á un sentido superior, que puede desprenderse, en último grado, de todo lo sensible; y que sólo se ayuda de estos recursos aparentes, para facilitar el camino de la razón, como simples medios auxiliares. El matemático, prescinde de las formas literarias, bajo las que los divulgadores de las teorías científicas revisten las ideas. Le basta la armonía propia de las relaciones, para encontrar la belleza científica. La Mecánica celeste de La Place se ofrece á su inteligencia, como un resumen de la inmensa multiplicidad de leyes por la que, se rigen los movimientos de los astros; es un esquema numérico de las magnificencias del Universo.

Lagrange, Cauchy, Jacobi y, en general, los grandes inventores matemáticos, leían por la elevada intuición de sus clarísimos talentos, como se lee en un libro ó como se ve en el mundo sensible, las relaciones intrincadas entre sí, pero visibles inmediatamente por ellos, la red de enlaces y dependencias, según las que las cantidades se hallan combinadas en las ecuaciones diferenciales, sus diversas gerarquías, la preponderancia de las unas sobre las otras; y por eso inventaban, descubrían, es decir, desdoblaban lo que estaba plegado en un sistema complejo, y lo presentaban bajo la luz de la evidencia.

Entre las cuestiones que deberán ser discutidas, señaladas en el *Raport préliminaire sur l'organisation de la commission internationale de l'Enseignement mathématique*, figura la siguiente:

«El deseo de hacer atractiva la instrucción, puede disminuir el carácter serio, resultado que sería desastroso tanto desde el punto de vista de la Ciencia, como el concerniente al valor práctico de las matemáticas».

Lo arriba expuesto, manifiesta cómo en determinadas circunstancias, en lo que pudiéramos llamar *reclutamiento matemático*, y en el período de educación intelectual, puede ser útil el hacer perder á la Matemática su carácter natural; que debe luego conservarse, cuando la vocación del individuo está formada y profesa en dicha comunidad científica, ó, en caso con-

trario, se dirige hacia otros horizontes, más adecuados á su idiosincrasia; pues como dijo Arquímedes al rey de Siracusa: *La Matemática no tiene camino regio.*

También tenemos en dicho formulario:

«Una psicología, mal comprendida, podría conducir á utilizar de un modo exagerado las bases lógicas de las matemáticas, resultando en el alumno una continua incertidumbre.»

Este temor tiene un amplio fundamento. Si, por un exagerado afán de vulgarización, hay riesgo de descender á lo que pudiéramos llamar hacer poesía, es decir, á la fusión de dos términos esencialmente contradictorios, por más que puedan unirse dentro de la armonía universal, en virtud de la que la verdad es bella, prescindiendo de la forma externa, bajo la que se manifiesta; por otra exageración análoga, se puede aspirar á conducir lo que es determinado y absoluto hacia las profundas regiones de las causas y los principios de la Metafísica, de que la Matemática se ha desprendido, para constituir su dominio propio.

Gran papel desempeñan los Descartes, los Wronski y los Comte, en esa contemplación general de la ciencia, que lleva luz hacia sus fundamentos y sus ideas más absolutas y generales; pero esta generalidad debe replegarse hacia el dominio interno, para formar un organismo completo, dentro de ese vehículo general que, como el éter en el mundo físico, rodea á la materia, presentándonos á semejanza de un Océano en que ésta flota, constituyendo el mundo de las puras ideas.

Pero este campo, sobradamente extenso para una finalidad parcial de la ciencia humana, cual es la Matemática, tiene una inestabilidad que, tendiendo hacia los diversos sistemas filosóficos, pugna con la permanencia de las leyes numéricas, que son las primeras leyes para el matemático, según las que modela con precisión y fijeza los sistemas de su ciencia.

Este dominio superior es el de las discusiones acerca de los principios, de los axiomas, de las definiciones etc.; es la parte movible y variable de la Ciencia, la que provoca sus futuros progresos, acumulando problemas sobre problemas, cada vez con más amplios puntos de vista, y que asegura un indefinido porvenir al frente de las ciencias de la Naturaleza; pero no debe descuidarse en reconocer que la dirección para afianzar y robustecer cada vez más sus teorías, de modo que se

ofrezca siempre como el modelo de las ciencias bien constituidas, como el sistema de mayor rigidez, que ha constituido la humana inteligencia.

Por un lado, la abstracción metafísica, por el otro los halagos de la belleza intelectual. Estas son las dos fronteras entre las que se mueve la ciencia matemática, las cuales debe no traspasar, más allá de su justo límite. Los matemáticos son lógicos ó intuitivos, según Mr. Poincaré, es decir, prefieren una de las dos direcciones en su ciencia, con mayor intensidad que la otra; pero ambas son necesarias. Lagrange y Jacobi veían las admirables relaciones que expusieron bajo forma de métodos para la integración de las ecuaciones diferenciales, como Galois veía subordinarse entre sí las soluciones de una ecuación algebraica, bajo la forma arquitectónica, descrita por las diferentes especies de grupos y de subgrupos; en estos momentos les faltaba el esquematismo de que hace gala Riemann con su superficie; pero ciertamente que no les faltaba la representación intuitiva, á la manera de Descartes, que pensaba por encadenamientos de intuiciones.

Los matemáticos tampoco necesitan de los atractivos de las imágenes sensibles. El que es verdadero matemático sigue gustoso el encadenamiento de las ideas, prescindiendo de las falsas ideas de que puede revestirlas una brillante imaginación sólo capaz de hacerlas accesibles al vulgo, como Pitágoras tenía las dos enseñanzas endotérica y exotérica, para los iniciados ó no en la Geometría y la Ciencia de los números.

La parte abstracta de la ciencia, por otra parte, no debe descuidarse. El encadenamiento lógico de las ideas en la Matemática es como los rails que surcan de redes de comunicación de cada una y de todas las naciones, ó como la columna vertebral en el cuerpo humano. Lo mantiene como un todo rígido que sirve de apoyo á las partes musculares móviles y á los órganos en los que se elabora la vida.

Respecto á la diferencia de concepción Geométrica y Algebraica en los resultados y la pérdida de ventajas parciales que produciría una fusión de estas dos ramas, la cuestión ofrece cierta complejidad.

No hay cuidado alguno de un procedimiento absoluto de una rama sobre la otra, al menos en cuanto concierne á su existencia. Las dos recorren, cada una, su camino independiente,

pero se funden necesariamente en el número. Podemos pensar una teoría, bien por su lado geométrico, bien por el lado analítico; por el primero, el punto, la recta y el plano, generan las figuras geométricas. La Geometría de la posición de Staudt es un modelo de perfección geométrica, el resultado de un esfuerzo que tenderá á dar á la Geometría cierta independencia. Desgraciadamente, para la continuidad y la discontinuidad se necesita una representación que sólo pueden facilitarle los algoritmos del análisis; pues ya, desde Euclides, sin el símbolo de la relación numérica y de la proporcionalidad, la Geometría se habría detenido, desde sus primeros pasos. El lenguaje de las figuras es infinitamente más pobre que el lenguaje de los números, colocado en contacto con las ideas. Bien es cierto que á su vez, el espacio presta á la idea de número sus elementos lineales ó superficiales, como primera materia, para los desarrollos continuos y para expresar y definir las especies de discontinuidades.

Y aunque la Geometría ha extendido su vuelo en varias direcciones que comprenden las teorías vectoriales, siempre éstas dependen de las interpretaciones de ciertos lenguajes y de ciertos coeficientes que definen el más ó el menos de las variaciones de los elementos geométricos.

Cada una de las dos direcciones, geométrica ó analítica que hoy siguen preferentemente una ú otra de las dos tendencias matemáticas, no pueden más allá de lo que permita la eficacia de los medios, puestos en juego para realizar estos fines. Y la eficacia preponderará siempre hacia el lado donde exista más espiritualidad ó más predominio del elemento subjetivo.

La cuestión del estilo matemático renace con motivo de estas consideraciones. El estilo de los Monge, Poncelet y Staudt, en el que distinguimos, siquiera dos matices distintos, difiere de los estilos de Chasles, Clebsch, Cayley y de Brill y Noether. Estos, con riesgo de perderse en la inmensa capacidad que ofrece la reciente doctrina del *Analysis situs*, por la que el Análisis llega á envolver á la Geometría. Bien es cierto que esta subordinación de la Geometría al Análisis obedece á la moderna *compenetración de las ideas*, que permite á las más generales y subjetivas, ocupar el campo de mayor densidad que ofrecen las ideas más concretas, á la manera que los fluidos y el

éter de los físicos, envuelven como elementos flotantes á los cuerpos y hasta á los átomos.

Los analistas, al estilo de Riemann, enriquecen los dominios matemáticos con representaciones y esquemas algorítmicos, aliviando á las inteligencias de la falta de objetividad que tienen las puras abstracciones.

Enumeración de las teorías expuestas en mis tratados de Álgebra que pueden introducirse como preliminar de la enseñanza superior

Aunque mi tratado de *Algebra* (Parte primera, Tratado elemental), publicado en el año 1883, no tuvo más vida que la comprendida entre los cursos de 1883 á 1889, en los que la expliqué á mis alumnos, cuando fui catedrático en el Instituto de Toledo; y es un libro, que ha desaparecido, sin dejar casi huella del carácter progresivo en él contenido, creo necesario el analizarlo actualmente, con objeto de establecer la conexión existente entre cierto modo de considerar el Algebra, por entonces, y los actuales puntos de vista, fundados en el considerable desarrollo de esta ciencia, durante los años transcurridos.

La Aritmética trata de la cantidad discontinua, principalmente bajo la forma de número entero; el Algebra se extiende un grado más. Fundándose en los conceptos combinatorio y de orden, recorre una región de la Matemática, para detenerse en los umbrales de la continuidad y de la discontinuidad, expresadas por medio de las funciones, punto de partida de la rama superior, llamada Análisis.

Al definir el Algebra como *la ciencia que estudia las leyes de la combinación y el orden, para aplicarlas á la resolución de los problemas de la cantidad, considerada, en general, es decir, expresada por símbolos generales, en los cuales se prescinde de todo valor numérico*, me propuse el presentar á los alumnos los conceptos más característicos del Algebra, á saber, la *combinación* y la *expresión literal*, como los más salientes y adecuados para grabarse en las inteligencias de los alumnos de 2.^a enseñanza.

Por esta razón, di una preferencia casi exclusiva á la mani-

festación de la combinación y el orden; aquélla, expresada en el LIBRO SEGUNDO, *Teoría combinatoria*, comprendiendo las nociones precisas acerca de las *sustituciones* y de los *determinantes*.

Respecto al orden, la representación geométrica de las imaginarias, que constituyen el aspecto cualitativo de la cantidad, me permitió sostener en toda la exposición de esta rama su carácter formal.

Cierto es que, bajo la sugestiva influencia de Wronski, filósofo, tanto como matemático, adopté su clasificación de los algoritmos teóricos y técnicos, según que se refieren á la *naturaleza* y *generación* de la cantidad ó á su *medida* y *evaluación*.

Desarrollando las nociones sobre las series y progresiones que señalé, con motivo de la división algebráica, después de haber tratado, en la *Sección primera*, los *algoritmos elementales*, expongo en la *Sección segunda*, la *Teoría de las funciones explícitas en los algoritmos derivados*, comenzando, en el Libro primero, con los *Algoritmos técnicos*, que comprenden las series y las *fracciones continuas*, continuando en el libro segundo, con los *algoritmos teóricos derivados*, la *numeración* y las *factoriales*, las funciones *logarítmica* y *seno*, con sus representaciones geométricas y la de la periodicidad, las *correspondencias geométricas de las funciones: exponencial, logarítmica, seno y coseno*.

El LIBRO TERCERO, *Teoría general de las operaciones y de las cantidades*, tiene por objeto condensar y generalizar en una amplia síntesis, los desarrollos anteriores, partiendo del principio de la *permanencia de las reglas del cálculo* de Hankel y de las propiedades generales de las operaciones: *uniformidad, conmutatividad, asociatividad* y *distributividad*, empleando el algoritmo combinatorio de Grassmann, lo que me conduce á una recapitulación, acerca de la *generalización sucesiva del concepto de cantidad*, y, como aplicación á las *cantidades complejas*, en *general* y á los cuaternios, en particular, adoptando el empleo de las birradiales de Hoüel.

La SECCION TERCERA. La *Teoría de las funciones implícitas* trata de las ecuaciones de *equivalencia* y de las de *congruencia*; y tanto en la una como en la otra, predominan las representaciones geométricas, que siguen, en sus diversas fases, á las alteraciones algorítmicas.

En particular, las ecuaciones binomias, resueltas por medio de las funciones circulares, el estudio de las propiedades de

las raíces de la unidad, se prestan á estas consideraciones del *orden y situación*, que se manifiestan en las correspondencias con los polígonos regulares, que expresan su modo de distribuirse cíclicamente; lo que expreso detalladamente, aprovechando algunas consideraciones de Rey y Heredia; y, llevando estos puntos de vista á la teoría de los números, aplico estas consideraciones al estudio de las raíces primitivas de las congruencias, que en mi tratado *de Aritmética* extiendo á numerosos ejemplos de períodos de restos potenciales y la determinación de ciclos.

Con la segunda parte del Algebra (*Tratado superior*, 1886), me proponía importar en la enseñanza gran número de doctrinas que, elementalizadas, contribuirían á la divulgación de la Matemática.

Por entonces, el Algebra superior de Serret era el tratado magistral por excelencia. Este insigne maestro había reunido en cuerpo de doctrina los resultados de Cauchy, de Abel y de Galois, acerca de los grupos que denomina *sustituciones conjugadas* y multitud de resultados, respecto á las congruencias, que ya señalaba la novísima teoría de los cuerpos de números, desde los restos potenciales y el teorema de Fermat, hasta los breves, pero substanciosos resultados de Galois.

Por otra parte, Baltzer se había emancipado de la rutina, publicando sus originalísimos tratados elementales, con lo que, bajo un aparente desorden, concentraba las más dispersas teorías, en reducido espacio.

Salmon, Faa de Bruno y Rubini escribían tratados elementales, principalmente sobre la teoría de las formas homogéneas ó *Algebra de las formas* y M. Camille Jordan había publicado su magistral *Traité des substitutions*, enriquecido con importantes descubrimientos propios.

Pero, como digo en mi prólogo, si tanta variedad de obras importantes habían realizado un gran progreso, desde el punto de vista científico, no lo era tanto desde el didáctico.

Se imponía la necesidad de hacer asimilables á las inteligencias tanta variedad de conocimientos, dispersos en dichas obras, para constituir las en una síntesis compendiosa.

Para realizar este fin, separé desde luego la continuidad, característica de la función algebraica, de los conceptos de orden y combinación, lo cuantitativo de lo cualitativo en las dos

secciones tituladas: *Teoría de la continuidad* y *Teoría de la combinación y el orden*.

En la primera, se trata de la generación de las funciones, del modo de estar constituídas, siendo las teorías de las diferencias y de las derivadas las que cumplen estos dos fines, y las de las series y fracciones continuas, las que expresan formas indefinidas de esta generación, que se complementan con la generación, por incrementos potenciales, conduciendo á las teorías de las factoriales.

Por otra parte, los descubrimientos de Cauchy imponían un nuevo carácter al Análisis, que parte de la definición de las funciones monógenas, monódromas y politropas, de la elevación del concepto de función entera y fraccionaria al de función holomorfa y meromorfa, y tomar como propiedades características los ceros y los polos, la periodicidad, los puntos críticos, sus ramificaciones; y, como medios de representaciones, no solamente los contornos elementales, en el plano de Cauchy, sino la superficie de Riemann, todo lo cual se indica en la primera sección de la obra.

En cuanto á la teoría de la combinación, tenemos como principios, el cálculo combinatorio y la teoría de las sustituciones, y como aplicaciones, las teorías de los determinantes, de la eliminación y de las funciones simétricas y alternadas, como preliminar á la teoría de las formas homogéneas, al algoritmo de la forma. Tales desarrollos eran el precedente natural y necesario para exponer en un nuevo volumen, como indico en el prólogo, las aplicaciones de dichas teorías, primero á la resolución algebraica, según los principios de Lagrange, Abel y Galois, lo que no realicé, por falta de éxito en mis publicaciones, ya que no encajaban estas teorías con los planes vigentes de enseñanza.

BIBLIOGRAFIA

Elementarmathematik vom Hoheren Standpunkte aus Teil I.
Arithmetik, Algebra, Analysis von F. Klein.

Estas lecciones dadas por el ilustre maestro, en el semestre de 1907 á 1908, tienen la originalidad característica de todos sus escritos ó disertaciones, y expresan la variedad de expo-

sición que cabe en las cuestiones matemáticas, bajo el feliz concurso del genio y el talento.

Tres secciones comprende esta primera parte publicada: *Aritmética, Álgebra y Análisis*.

La enseñanza en la escuela debe ser psicológica, no sistemática é intuitiva y, en las clases superiores, abstracta. El concepto de función desempeña un papel intermedio ó central, siendo de gran utilidad el empleo de los métodos gráficos. Hay que unir lo anterior á la moderna cultura. Las representaciones del espacio son de capital importancia, las preliminares del cálculo infinitesimal, tan útil para las ciencias naturales, y el empleo de máquinas matemáticas. Estas líneas resumen el pensamiento que informa la obra de Herr Klein, debiéndose agregar que gusta de las breves consideraciones históricas, por las cuales la ciencia se aprende, según su generación, es decir, que la enseñanza adquiere un carácter filogenético.

Es muy útil el contrastar su modo de exponer con el de los profesores Weber-Wellstein que prefieren el método lógico, por cuanto así la enseñanza no se encierra en el exclusivismo de un solo sistema, y el alumno vé desde puntos de vista distintos un objeto.

Conforme al espíritu moderno, Herr Klein expone, desde luego, las leyes fundamentales del cálculo, cuya alteración con-signa, según las diferentes especies de cálculo, ocupándose de los fundamentos lógicos del cálculo, reseñando el proceso desde Leibniz hasta el profesor Peano; y expone las sucesivas extensiones que ha sufrido el concepto de número, y, por consiguiente, las leyes fundamentales del cálculo, para los números negativos, fraccionarios, irracionales y complejos. Todo lo cual, trata en cuatro capítulos: I. El cálculo con números naturales. II. Las primeras extensiones del concepto de número. III. Las propiedades especiales de los números enteros y IV. Los números complejos.

Definidas las dos direcciones paralelas que sigue y ha seguido la exposición matemática, caracterizada por el desarrollo lógico ó por el representativo, que tiende á presentar la Matemática como un solo conjunto, para cuya distinción basta citar por un lado á Weierstrass y por el otro á Cauchy y Riemann, bastará citar un resumen del sumario de las materias que expone á continuación Herr Klein con su estilo gráfico,

sintético é intuitivo, característico, en todas sus obras, donde hace gala de las representaciones geométricas.

Segunda sección. Álgebra. I. Ecuaciones reales con incógnitas reales. II. Ecuaciones en el dominio de las cantidades complejas. Traduciremos, entre los epígrafes, los siguientes:

1.º La ecuación pura.—Irreductibilidad, imposibilidad de la trisección del arco. 2.º La ecuación del diedro. 3.º Del tetraedro, octaedro, icosaedro. 4.º Continuación: Representación de las ecuaciones normales, la resolución trigonométrica de la ecuación cúbica. 6.º Resolubilidad ó irresolubilidad de las ecuaciones por signos radicales.—Vuelta á las ecuaciones generales y á la ecuación normal.—Teoría de la ecuación de quinto grado.

Tercera sección. Análisis I. Logaritmo y función exponencial.—Algunas consideraciones sobre las tendencias en la escuela.—Modernos puntos de vista de la teoría de las funciones.

II. Teoría de las funciones goniométricas.—1.º Teoría de las funciones goniométricas. 2.º Valores tabulares goniométricos. 3.º Aplicaciones en las funciones goniométricas. A. Trigonometría. B. Pequeñas oscilaciones, especialmente las del péndulo. C. Representación de las funciones periódicas por series de funciones goniométricas.

III. Lo característico del cálculo infinitesimal.—1.º Introducción general. 2.º Verificaciones especiales acerca del teorema de Taylor. 3.º Consideraciones históricas y pedagógicas.

Complemento I. Transcendencia de e y π .

II. Tratado de los conjuntos.—1.º La potencia de un conjunto. 2.º Ordenación de los elementos de un conjunto. 3.º Sobre el significado y fin del Tratado de los conjuntos.

Die enwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten von Arthur Schoenflies, Zweiter Teil (B. G. Teubner, Leipzig, 1908) (*).

Las materias contenidas en este segundo tomo son las siguientes:

Cap. I. Tratado general de los conjuntos. Entre otras materias, trata de los teoremas de los profesores Zermelo y König y de las paradojas lógicas.

(*) El primer tomo se publicó en el *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Band. VIII.

Cap. II. Conjuntos ordenados.—Trata de los diferentes tipos de conjuntos ordenados, de la construcción del continuo de Veronese, del axioma de Arquímedes, de las pantaquias infinitas, de los tipos pantáquicos de Hausdorff.

Cap. III. Teoría general de los conjuntos de puntos.—Entre otros puntos, discute el teorema de Heine-Borel.

Cap. IV. Representación de los conceptos fundamentales.—Considera el autor la representación de un conjunto puntual por medio de una *figura poligonal aproximada* y empleando multitud de representaciones geométricas, trata de los continuos cerrados, de las conexiones, de los dominios y de su estructura, del dominio de existencia de una función analítica uniforme, asuntos en que se enlazan las investigaciones actuales de los más distinguidos profesores.

Cap. V. Representación de los invariantes geométricos.—Trata ante todo la uniformidad invertible (*umkehrbaren. Eindeutigkeit*), con el aditamiento de la continuidad, en un continuo lineal, objeto de nuevas investigaciones y problemas, los puntos límites y las conexiones, los teoremas de las curvas de Jordan y de la curva límite de Klein-Poincaré.

El invariante más sencillo del grupo G de las transformaciones invertibles uniformes y continuas del plano ó grupo estricto (engere) formado por todas las transformaciones uniformes y continuas es también un invariante de las operaciones inversas de este último grupo.

Citaremos la invariación de las curvas cerradas y de la ordenación, la de los dominios, la exposición acerca de teorema de la curva de Jordán, la del alcanzamiento (*Erreichbarkeit*), el restablecimiento (*Herstellung*) de la representación, y por fin, de la extensión al espacio.

Cap. VI. Las curvas continuas. La curva de Peano, que llena una área, tiene gran importancia en esta exposición, donde se trata de la representación de los segmentos y de la alcanzabilidad.

El objeto de este capítulo es la convergencia uniforme de los polígonos de aproximación, de la representación continua y uniforme del dominio límite de las curvas, y superficies continuas, considerando los dominios complementarios y la ordenación, de los tipos de curvas continuas, de los puntos múltiples, definición de la longitud de un arco, los puntos de vista

de Jordán-Scheeffer y Lebesgue, con numerosas representaciones gráficas.

Cap. VII. Los conjuntos de curvas y el espacio funcional.

No es posible actualmente tratar una teoría, sin referirse á las investigaciones actuales de los matemáticos acerca de la misma. Por esta esta razón se impone el tratarla y discutir los resultados de los matemáticos Ascoli, Arcelá, Bolzano, Fréchet, Hilbert, Volterra, Weiertrass, etc., que han dedicado sus talentos á dilucidar cuestión de tanto alcance y trascendencia, como la de los conjuntos; y de todos ellos trata el profesor Herr A. Schoenflies, en este capítulo, como en el resto de la obra, emitiendo mucha luz sobre tan difícil asunto.

Beitrag zur Theorie der linearen Transformationen als einleitung in die algebraische invariantentheorie, von W Scheibner. (L. B. G. Teubner, Leipzig, 1907).

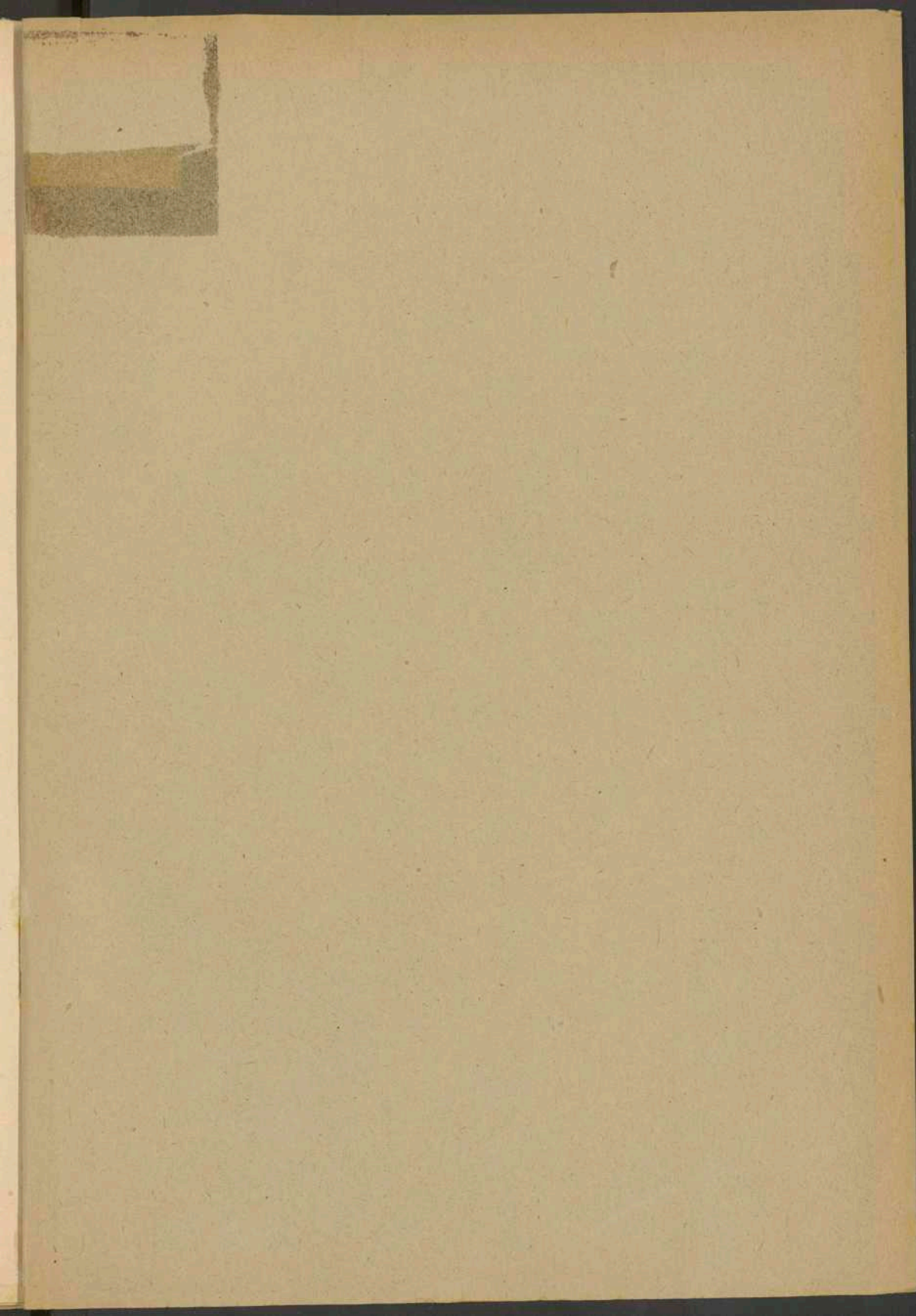
Las materias contenidas en esta obra son:

- I. Las transformaciones lineales de las funciones enteras.
- II. Aplicaciones á la teoría de las ecuaciones algebraicas.—
- III. Aplicaciones á la reducción de las diferenciasles elípticas.
- IV. Sobre las ecuaciones de quinto y de sexto grado.—V. Sobre la transformación circular.—VI. Sobre la teoría de la transformación de Tschirnhaus.—VII. Sobre la resolución de la ecuación del icosaedro.—*Apéndice.*—Sobre las transformaciones lineales de las funciones Theta y las funciones modulares elípticas.

Gruppen und Substitutionen-theorie von Prof. Dr. Eugen Netto (1908) G. J. Goschen'sche Verlagshandlung. Leipzig.

Capítulo 1. Concepto fundamental de la teoría de los grupos. *Cap. 2.* El cuadrado Cayleyano. *Cap. 3.* Divisor de un grupo, Isomorfismo. *Cap. 4.* Transformación é inversión. *Cap. 5.* Composición de los grupos. *Cap. 6.* Grupos abelianos. *Cap. 7.* Teoremas de Sylow y de Frobenius. *Cap. 8.* Grupos resolubles. *Cap. 9.* Grupos de sustituciones. Transitividad. *Cap. 10.* Grupos de sustituciones, Primitividad. *Cap. 11.* Grupos de sustituciones. Grupos del mayor orden para un grado dado. *Cap. 12.* Representación analítica de las sustituciones. El grupo lineal.





R

16116