ESTUDIOS

DE

Crítica y Pedagogía Matemáticas

POR EL DOCTOR

D. Zoel García de Galdeano

EX-CATEDRÁTICO POR OPOSICIÓN DEL INSTITUTO DE CIUDAD-REAL

CATEDRÁTICO POR CONCURSO DE LA UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

CORRESPONSAL DE LAS REALES ACADEMIAS DE CIENCIAS DE MADRID Y LISBOA

BIBLIOTECA PROVINCIAL LOGROÑO

ZARAGOZA

Imprenta de la Vda. de C. Ariño, Coso, 100

1903

NO SE PRESTA

LECTURA
EN
SALA

Gobierno de La Rioja
BIBLIOTECA CENTRAL
10000227484

1036. Z.
t. 95999
1036
R
16122

ESTUDIOS

DE

CRÍTICA y PEDAGOGÍA MATEMÁTICAS

POR EL DOCTOR

DON JOSÉ G. DE GALDEANO

CATEDRÁTICO DE LA UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA



BIBLIOTECA PROVINCIAL LOGROÑO

Z 103. 443

ZARAGOZA

Imprenta de Vda. de Ariño, Coso, núm 100

1900

A la memoria

de mi Madre.

Ezcl G. de Galdeano y Yanguas

ENSAYO DE CRÍTICA Y DE PEDAGOGÍA MATEMÁTICA

INTRODUCCION

§ I.º Los conceptos fundamentales.

Desde tiempos remotos los filósofos han tratado de clasificar las ideas más simples y generales, que pueden servir para definir las demás, sin ser ellas susceptibles de definición, es decir, las *categorías* de la razón.

Las categorías de Aristóteles han sido las exclusivamente respetadas por los filósofos hasta los tiempos modernos; estas son diez: sustancia, cantidad, cualidad, relación, lugar, tiempo, situación, posesión, acción y pasión. Estos principios, que en el sistema de este filósofo tienen su origen en la experiencia, constituyen el inventario de todos los datos ó postulados, sin los que la demostración y el razonamiento son imposibles.

Kant, por el contrario, considerando las categorías formadas en nuestra inteligencia como nociones *a priori* del entendimiento, presenta una clasificación de las mismas, correspondientes á las funciones lógicas en todos los juicios posibles, á saber: la categoría de *cantidad*, que comprende los conceptos de unidad, pluralidad y totalidad, la de *cualidad* que comprende los de realidad, negación y limitación; la de *relación* que comprende los de substancia y accidente, causalidad y dependencia y reciprocidad; la de *modalidad* que comprende los de posibilidad é imposibilidad, existencia y no existencia, necesidad y contingencia.

El cuadro de las categorías de Renouvier es el siguiente:

CATEGORÍAS	TESIS	ANTÍTESIS	SÍNTESIS
Relación	Distinción	Identificación	Determinación
Número	Unidad	Pluralidad	Totalidad
Posición	Punto	Espacio	Extensión
Sucesión	Instante	Tiempo	Duración
Cualidad	Diferencia	Género	Especie
Llegar á ser	Relación	No-relación	Cambio
Causalidad	Acto	Potencia	Fuerza
Finalidad	Estado	Tendencia	Pasión
Personalidad	Yo	No-yo	Conciencia

No es objeto del presente trabajo hacer el examen comparativo de estos sistemas diversos de clasificación de los conceptos; pero bueno es presentarlos para hacer ver la importancia que tienen en un estudio crítico de la ciencia matemática, que será el objeto de los capítulos siguientes.

§ 2.º Los sistemas matemáticos.

Sistema positivista. Augusto Comte en su *Cours de philosophie positive,* al establecer su sistema matemático, reconoce que desde luego es preciso descubrir relaciones precisas entre las cantidades coexistentes en un fenómeno estudiado, consistiendo el preliminar necesario de todos los trabajos analíticos en la formación de la ecuación de cada fenómeno estudiado. Observa que los progresos de la parte abstracta han sido siempre determinados por los de la parte concreta. Distingue las funciones *abstractas,* analíticas, de las funciones *concretas,* pudiendo solamente las primeras entrar en las verdaderas *ecuaciones,* de modo que se definirá exacta y con suficiente profundidad una *ecuación* como *una relación de igualdad entre dos funciones* ABSTRACTAS *de las magnitudes consideradas.*

Llama funciones abstractas á las que expresan un modo de dependencia que solo puede concebirse entre números, sin ser preciso indicar ningún fenómeno en el que se halla realizado; mientras que las funciones *concretas* son aquéllas para las que el modo de dependencia expresado, no puede definirse ni concebirse sin asignar un caso físico determinado, geométrico, mecánico ó de otra naturaleza, en el que se verifique.

La mayor parte de las funciones, añade, aun las más abstractas, han comenzado por ser concretas.

Reconoce cuán difícil es establecer las *ecuaciones* de los fenómenos, el tránsito de lo *concreto* á lo *abstracto* que estriba en la escasez de elementos analíticos de que disponemos, por cuya mediación hemos de expresar todos los diversos fenómenos naturales.

Distingue en la solución completa de toda cuestión de cálculo dos partes: por la primera, *cuestión algebraica*, se ha de hacer evidente el modo de formación de las cantidades desconocidas, mediante las conocidas, por la segunda, *cuestión aritmética*, es preciso evaluar las fórmulas obtenidas, es decir, determinar inmediatamente el valor de los números buscados, de manera que el *Algebra es el cálculo de las funciones* y la *Aritmética el cálculo de los valores*, siendo el campo de la Aritmética mucho más limitado que el del Algebra, quedando relegadas al dominio de la Aritmética la resolución *numérica* de las ecuaciones, que no pueden resolverse *algebraicamente*, y aun el cálculo de las integrales definidas, cuyas integrales generales se desconocen. La evaluación de un número le hace entrar en el sistema regular de la *numeración*, consistiendo la evaluación en una simple transformación, de manera que toda cuestión aritmética es susceptible de poner bajo la forma

$$a + b\beta + c\beta^2 + \ldots + p\beta^m$$

una función abstracta cualquiera de diversas cantidades, que se supone tienen ya, cada una, una forma semejante; y el cálculo de las funciones tiene por objeto inmediato, ya la resolución de las ecuaciones inmediatamente establecidas entre las cantidades que se considera (cálculo de las funciones directas ó Algebra), ya entre cantidades indirectamente ligadas á las del problema, por cantidades intermedias, diferenciales, derivadas, etc. cuyas relaciones mutuas son más sencillas que las de las cantidades primitivas, y cuya eliminación permite deducir de sus relaciones las ecuaciones correspondientes á dichas cantidades primitivas, todo lo que se halla incluído en el *análisis transcendente*, conocido con las denominaciones de cálculo infinitesimal, de las fluxiones y fluentes, etc.

Respecto á la Geometría, la considera Comte como una verdadera ciencia natural, más simple y perfecta que ninguna otra, perfección debida á la aplicación del análisis matemático; lo que origina á su parecer, la ilusión de algunos que la admiten como ciencia puramente racional, independiente de la observación.

Por el contrario, Comte presenta el concepto de espacio como una abstracción, adquiriendo así las especulaciones geométricas, más sencillez y generalidad. Concibiendo por esta abstracción, la extensión no en los cuerpos sino en el espacio, el espíritu humano puede considerar todas las formas imaginables.

El objeto final de la Geometría, en el sistema de Comte, es la medida de la extensión, entendiendo por medida la evaluación de las relaciones que tienen entre sí magnitudes homogéneas cualesquiera, reduciendo todas las comparaciones de superficies ó de volúmenes á simples comparaciones de líneas, y la medida de las líneas curvas á la de las líneas rectas, á transformar las cuestiones relativas á la magnitud de las curvas en cuestiones relativas á líneas rectas.

La Geometría no se limita á considerar las formas más simples que le ofrece inmediatamente la Naturaleza, incluyendo la geometría abstracta como casos particulares las formas reales, que el mundo exterior puede presentar; pero es preciso prepararse para facilitar las aplicaciones, por un estúdio general, que comprenda todas las formas rigurosamente concebibles, campo abarcado por la Geometría racional.

En fin, para dar una idea exacta y suficientemente extensa de las investigaciones geométricas cuyo objeto es la *medida* de toda clase de líneas, superficies y volúmenes, considera que esta medida es el objeto invariable, algunas veces *directo*, y más frecuentemente *indirecto* de todos los trabajos geométricos, pues el estudio de las diversas propiedades de cada línea ó superficie es indispensable con frecuencia para la solución de cuestiones relativas á la medida, siendo también indispensable el conocer el mayor número posible de propiedades de cada forma geométrica, para poder referir á los diferentes tipos abstractos, con una aproximación suficiente, las líneas ó superficies reales, objeto de nuestro estudio.

No nos detendremos en seguir este sistema en la geometría especial, ó de los antiguos, ni en la geometría general ó analítica, fundada sobre la transformación de las consideraciones geométricas en consideraciones analíticas, ni en el modo de exponer las otras ramas de la Matemática, desde el punto de vista de la filosofía positiva. Creemos suficientes las indicaciones hechas para dar idea de este desarrollo matemático, según el criterio positivista.

Otro desarrollo matemático, según un criterio puramente idealista, es el expuesto por Wronski.

Sistema Wronskiano. Parte de la distinción, en la Naturaleza,

de dos objetos: la *forma* ó manera de ser, el *contenido* ó la esencia de la acción física.

El origen de esta dualidad la hace consistir Wronski en la dualidad de las leyes de nuestro saber, y especialmente en la diversidad que se encuentra entre las leyes transcendentales de la sensibilidad (la espontaneidad ó actividad de nuestro saber).

La *forma*, la manera de ser de la naturaleza del mundo físico es el objeto general de las Matemáticas, y su *contenido*, su esencia es el objeto general de la Física.

Dos puntos de vista considera Wronski en la filosofía de las Matemáticas, el subjetivo referente al *saber*, el objetivo referente á la *ciencia*, según se trate de las leyes que sigue el saber del hombre, aplicado al objeto general de las Matemáticas ó de las leyes que sigue este objeto general en la aplicación del saber del hombre.

Las leyes subjetivas comprenden el *contenido* y la *forma* de nuestro saber matemático. El contenido presenta las diferentes partes esenciales de nuestros conocimientos matemáticos, los diferentes objetos particulares, distintos y necesarios en las matemáticas, constituye la *Arquitectónica de las Matemáticas*.—La forma presenta las diversas maneras de contemplar los objetos particulares, los diferentes modos intelectuales de su conocimiento, constituye la *Metodología de las Matemáticas*. En cuanto á las leyes objetivas, constituyen la Metafísica de las Matemáticas.

La Algorítmia y la Geometría tienen por objetos respectivos el *número* y la *extensión*. El objeto del Algebra es las *leyes* de los números, el de la Aritmética los *hechos* de los mismos, y análogamente lo son de la Geometría general y particular, respectivamente.

En cuanto á la consideración subjetiva, una cantidad puede tomarse según dos puntos de vista, su *naturaleza* ó su *medida*. Por ejemplo,

$$\log (x\ y\ z...) = \log x + \log y + \log z$$

corresponde al primero, y

$$\log x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - ...$$

corresponde al segundo punto de vista, á saber, *lo que es*, fundado en la especulación, ó lo que es *preciso hacer*, que se refiere á la acción, fundamento de las dos divisiones generales en *teoría* y

técnia; y al considerar, bien los elementos de todas las operaciones matemáticas, bien su reunión sistemática, considera Wronski la teoría y la tecnia elemental y sistemática, siendo los algoritmos elementales primitivos y esencialmente opuestos, la *sumación,* en la que las partes de la cantidad son discontinuas y extensivas, teniendo el caracter de la agregación por *juxta positionem* y la *graduación,* cuyas partes se consideran como continuas teniendo el carácter del crecimiento por *intus susceptionem* con dos ramas, progresiva y regresiva, la *adición* y *sustracción* las *potencias* y *raices.* Estas funciones algorítmicas, heterogéneas é irreducibles se fundan respectivamente en las leyes constitutivas del entendimiento y en las leyes reguladoras de la razón. Hallando Wronski la neutralización de estas dos funciones ó de sus algoritmos elementales correspondientes, en la función intermedia, la facultad del juicio, á la que corresponde el algoritmo de la reproducción con las dos ramas progresiva y regresiva, *multiplicación* y *división.*

La combinación de los algoritmos primitivos de la reproducción y de la sumación da el algoritmo de la numeración, cuyo esquema es

$$A_0 \varphi_0 x + A_1 \varphi_1 x + A_2 \varphi_2 x + \ldots\ldots$$

la combinación de la reproducción con la graduación conduce al algoritmo de las *facultades,* cuyo esquema es

$$\varphi_0 x \,.\, \varphi_1 x \,.\, \varphi_2 x \,.\, \ldots\ldots$$

La transición de la numeración á las facultades

$$\varphi x_1 + \varphi x_2 + \ldots\ldots = \varphi(x_1 \,.\, x_2 \ldots\ldots)$$

y la transición de las facultades á la numeración

$$\varphi x_1 \,.\, \varphi x_2 \,.\, \varphi x_3 \ldots\ldots = \varphi(x_1 + x_2 + \ldots\ldots)$$

se realizan mediante la determinación de la función φ que es el nuevo algoritmo elemental *logaritmo* que implica en su expresión exponentes infinitos, ó el algoritmo *seno* que implica el concepto de lo imaginario, por lo que estos algoritmos, dependientes de la aplicación de la razón á las funciones del entendimiento, son transcendentes.

§ 3.º Los críticos matemáticos

Independientes de todo sistema filosófico, encontramos varios críticos matemáticos. Entre ellos se distinguen los eminentes geó-

metras Carnot y Poncelet, que se ocupan principalmente de las correspondencias entre el Algebra y la Geometría, estableciendo el primero las correspondencias directa, inversa y compleja de sistemas de figuras variables, y el segundo el *principio de continuidad*, á cuyo mantenimiento concurrió, introduciendo las *figuras ideales* en correspondencia con las reales, en su teoría de las cónicas suplementarias (*) y empleando los elementos en el infinito.

Cournot en su obra, *De l'origine et des limites de la correspondence entre l' Algèbre et le Géométrie*, aparte de otras obras que salen ya del campo matemático, Vallés en sus *Etudes philosophiques de la science du calcul* y en su obra *Des formes imaginaires dans l' Algèbre*, al desarrollar la teoría de las cantidades imaginarias sobre el concepto establecido por Argand, Lacroix en sus *Essais sur l' enseignement*, Chasles con su monumental *Aperçu historique des méthodes en Géométrie*, Duhamel con su obra, *Des méthodes dans las sciences de raisonnement* han aportado importantes materiales á la crítica matemática.

Posteriormente, el inmenso caudal de nuevos conocimientos constitutivos de teorías recientes, creadas por los matemáticos del siglo XIX, han exigido un trabajo de análisis de los conceptos fundamentales de cada una y un estudio de los métodos y procedimientos empleados; pues, cada vez precisa más el coordenar, clasificar y discutir tanto material acumulado, que de otro modo no podría ser abarcado en su conjunto por las inteligencias.

Aparte de las investigaciones de los cultivadores del Algebra de la lògica y de las disquisiciones que ha originado la Pangeometría, el estudio crítico de la ciencia se ha impuesto, aunque paulatinamente y de una manera casi inconsciente al tratarse de perfeccionar cada una de las doctrinas matemáticas.

La obra del *Formulario matemático*, continuada con perseverancia por los matemáticos italianos, bajo la dirección del señor Peano, ha motivado un análisis de los conceptos, hasta el punto de llegar á un estudio de las definiciones y los axiomas, que puede ser de gran utilidad para la organización de algunas ramas de la ciencia especialmente de la Geometría, en cuya labor, han intervenido los Sres. Pasch, Peano, Pieri, Bettazzi, Segre y otros.

También son de importancia, en este terreno, la inmensa labor del historiador de la Matemática Sr. Moritz Cantor y del señor Loria; á esto debemos agregar la influencia predominante de la

---

(*) Véase mi *Geometría general*.

Bibliografía matemática que analiza las obras, entrando en el examen de los conceptos desarrollados por cada autor.

La introducción de nuevos conceptos tales como los de lo infinito, lo imaginario, los números ideales, los conjuntos ó los hiper-espacios han sido fuente inagotable de discusiones y base de nueva forma de exposición didáctica, habiendo dedicado algunos trabajos los Sres. Klein, Picard y Poincaré al examen crítico de muchos de ellos.

El prodigioso avance de la teoría de las funciones se ha realizado bajo el espíritu de crítica que la hace presentarse según nuevos aspectos desde los descubrimientos de Weierstrass, buscándose métodos cada vez más perfectos que las estudien en sus singularidades, así como por otra parte la Geometría con el concepto de proyectividad ha conducido al estudio de multitud de correspondencias, que se extienden también á la Algoritmia, llevando así á una unificación de los conceptos matemáticos, á una organización cada vez más perfecta de esta ciencia.

Hemos pues llegado al verdadero desarrollo crítico de la Matemática, tal cual debe ser dentro de su dominio propio é independiente de los sistemas filosóficos, que examinan sus conceptos en un dominio externo, es decir en el dominio general, que abarca todo lo existente, más no cada ciencia particular, que por su parte, sólo es el desarrollo del objeto propio de la misma.

CAPÍTULO I

LA CIENCIA REAL Y LA CIENCIA IDEAL

La Matemática depende, como todas las ciencias, inmediatamente de la madre de todas, la filosofía, en sus fronteras recibe la influencia de los conceptos metafísicos, no sólo en cuanto concierne á la materia sino á la forma. Tiene el privilegio de poder ser un desarrollo *a priori*, fundado en cierto número de postulados y definiciones, poseyendo el doble caracter de ciencia constructiva, y de tener la comprobación de sus verdades y principios en la experiencia.

El principio lógico á que somete incesantemente sus conclusiones, es el principio de contradicción. Esto la permite elevarse desde el campo de la realidad intuitiva al mundo puramente conceptual de la razón y generalizar indefinidamente las definiciones basadas en el mundo real ó fenomenal.

Sus definiciones parten de éste, en él son tomadas. Lo fenomenal se traduce en concepto. Las definiciones constituyen la primera materia. La combinación de objetos definidos origina relaciones, que se traducen en el lenguaje bajo la forma de teoremas, cuya verdad se halla incluida en la de las nociones primeras, mezcla de postulados y de definiciones.

La Geometría también resulta de combinaciones de sus primeros elementos: el punto, la recta y el plano. Análogamente podríamos decir de las demás ramas de la Matemática; pero nos limitaremos á decir que, tanto en las abstractas, como en las más concretas, tales como la Mecánica y la Física, en las generalizaciones que sucesivamente obtienen las verdades y las teorías, deben unas veces respetarse los principios lógicos y otras las exigencias de la realidad concreta ó fenomenal.

Hay que distinguir el mundo real del conceptual, uno y otro tienden á asimilarse, á ponerse en concordancia ó correspondencia íntima; esto origina la ciencia ideal de nuestros conceptos *a priori,* frente á la ciencia real de los conceptos *a posteriori,* basados en la experiencia; y, el contraste de ambos resultados, algunas veces ha motivado, por cierta divergencia, una revisión de los axiomas, de los postulados y de las definiciones. La Matemática, sin esta conformidad con lo real, sería un sistema de relaciones vacías de fondo sin valor alguno.

La Matemática no es un conglomerado de ciencias como ha indicado su denominación en plural. Es una sola ciencia con perfecta unidad. El número, la extensión, posición, mutación, combinación, etc., son elementos que concurren simultáneamente á la formación del conjunto. En realidad, la combinación como elemento subjetivo y el número, como elemento objetivo son los elementos primordiales que se aplican á los otros de caracter más objetivo para amplificar el dominio matemático.

Dos generaciones debemos admitir de la Matemática: la usual, que procede por generalizaciones sucesivas y la lógica, inversa de la anterior, y que se desarrolla *a priori.*

Nuestras intuiciones nos han elevado del número absoluto á las diferentes especies de números, amplificando los conceptos de número y de operación; y del dominio de lo real se ha pasado al dominio ideal, del cálculo ordinario al cálculo formal, en el que se prescinde de lo particular para respetar la ley combinatoria. Las fórmulas nada expresan por sí, mientras sus elementos no tengan una significación en la realidad. Y el encadenamiento de las relaciones mantendrá en cada transformación algorítmica el valor que tenía la relación original, siendo dicho encadenamien-

to el enlace que establece la relación primitiva con la relación final, y por la que ésta tiene el mismo valor lógico que la primera.

El número se pone en correspondencia con otras entidades concretas, tiempo, fuerza, espacio, movimiento, etc., y definida cada una de las entidades que resultan refiriéndola á la realidad externa, y en conformidad con ella, para constituir una ciencia real, establece el concepto de *su medida*, lo que enlaza la realidad con la conceptualidad del número; y luego cada ciencia particular, sea Mecánica, Física, Astronomía es un desarrollo sistemático de los conceptos fundamentales, que sin embargo han de ser con frecuencia contrastados con el mundo externo, para mantener la correspondencia ideal con la real.

Pero en un dominio más abstracto, aún el número se pone en correspondencia con un fondo que le da cierta realidad intuitiva. Así los números los referimos á puntos; y en un caso particular, el de estar contenidos en un plano, conduce á la importante representación de las funciones de variables complejas, y mediante esta representación, las relaciones algorítmicas se ofrecen como figuras geométricas.

Esta correspondencia se extiende al espacio, y llegamos por una generalización á espacios de n dimensienes, cada uno con su geometría, generalización de la ordinaria, constituyendo la característica de estos espacios la propiedad de reducirse á n determinaciones de magnitud la determinación de un punto.

Como dice M. Poincaré, *(Analysis situs, 1895)*. «la Geometría de n dimensiones tiene un objeto real, lo que nadie duda actualmente, los seres del hiperespacio ordinario; y si no podemos representárnoslos, podemos concebirlos y estudiarlos. Si pues la Mecánica de más de tres dímensiones debe rechazarse como desprovista de objeto, no sucede lo mismo con la Hipergeometría. La Geometria, en efecto, no tiene por única razón de ser la descripción inmediata de los cuerpos que impresionan nuestros sentidos: es ante todo el estudio analítico de un grupo.

Pero ¿por qué se dirá, no conservar el lenguaje analítico y reemplazarlo por un lenguaje geométrico que pierde todas sus ventajas desde que los sentidos no pueden intervenir? Esto se justifica por la concisión del nuevo lenguaje y porque la analogía con la Geometría ordinaria puede crear asociaciones de ideas fecundas y sugerir generalizaciones útiles.»

Además de la Hipergeometría tenemos una Hiperálgebra, ó álgebra simbólica ó de n unidades complejas, cuyos fundamentos desarrollaron Weierstrass y Dedekind. Las variedades de la

Geometría son en el Álgebra conjuntos definidos por las propiedades de que la suma, diferencia, producto y cociente de varios elementos pertenezcan también al conjunto y les sean aplicables las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva.

Esto conduce á considerar diferentes especies de álgebras, no sólo en el dominio de la abstracción ó de las leyes combinatorias por las que se construyen, sino á crear especies distintas de álgebras geométricas, de las que son casos particulares la Geometría de Grassmann y los cuaternios de Hamilton, lo que conduce á la clasificación de las álgebras geométricas, según lo han hecho Cayley y Clifford,

Vemos, pues, cómo en todas las abstracciones y generalizaciones de la Matemática, se busca la correspondencia entre los conceptos de pura razón, con las intuiciones ó representaciones sensibles que los legitiman.

CAPÍTULO II

LA FORMACIÓN DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS

La Matemática puede considerarse como ciencia positiva, correspondiéndole muy legítimamente el lugar preminente entre las ciencias de la naturaleza, no porque sea ciencia experimental, sino porque tomando su primera materia de la experiencia, despues de haberla conceptualizado, para hacerla entrar en el dominio puramente racional, tiene el privilegio de aplicar las leyes elaboradas en la inteligencia á los más variados dominios de la realidad externa. Y esta amplia correspondencia matemática, es la más importante de las correspondencias, puesto que es el criterio de la realidad de nuestros conocimientos.

El número y las figuras geométricas tienen su origen en nuestras intuiciones. La actividad de nuestro espíritu aplicada á las primeras intuiciones, forma otras nuevas y crea, ó mejor dicho, construye la materia sobre que se ha de ejercer el raciocinio. En este proceso, la forma es la misma, la materia cambia por combinaciones sucesivas. La Matemática es una serie de combinaciones de la materia primera.

Los teoremas expresan siempre la identidad de lo que se agrega con lo que da una nueva naturaleza del objeto; es decir que el objeto resultante es un nuevo complejo de los elementos anteriores y de los elementos agregados; sigue, después de la modifi-

cación, existiendo identidad entre las tesis y las hipótesis modificadas. En el problema se busca por el contrario el complemento de un teorema parcialmente enunciado; el exceso de elementos en el enunciado, produce el absurdo, que á su ver enuncia este desequilibrio ó desigualdad; la falta de elementos conduce á la indeterminación.

La Matemática es una serie indefinida de construcciones. Los teoremas son su expresión verbal, auxiliada por otra expresión artificial, que es el lenguaje matemático, abreviación del lenguaje ordinario, cuyos símbolos son de objetos y de actos, de cantidades y de operaciones.

La combinación de unidades da el número, que es un nuevo elemento, por cuyas combinaciones surgen sucesivamente la suma, la multiplicación y la potenciación, y luego las operaciones inversas. Nuevas operaciones producen nuevos algoritmos: las progresiones, logaritmos, las fracciones continuas, etc.

Pero cuando nuestra actividad combina, los resultados de cada combinacion son construcciones donde permanece la huella del trabajo combinatorio. Esta huella es susceptible de varias distribuciones ó agrupaciones de elementos tales, que los unos formen la hipótesis y los otros la tesis de diversos teoremas. De entre lo supérfluo hay que elegir lo que es necesario y suficiente para la existencia de todo lo demás.

Construídos los objetos por combinaciones legítimas (lo que en Aritmética, por ejemplo, constituye las operaciones directas), nuestra actividad puede proponer algo incompatible con las esencias de los objetos formados, por ejemplo, dividir por 3 el número 7, (*) ó extraer una raiz de cierta expresión previamente formada, lo que conduce á una incompatibilidad con la definición primitiva de la división y de la radicación. Estas incompatibilidades entre lo propuesto por la inteligencia y lo constitutivo del objeto, tiene siempre su huella en los signos algorítmicos, y por lo menos da origen á seres de razón que podemos emplear en nuestros razonamientos y someterlos á nuevas operaciones. (**)

(*) El proponer esta división implica la falta de haber elegido dos números que no se corresponden con el carácter mutuo de producto y factor, así 15 y 5 son dos números correspondientes, 15 y 4 no lo son.

(**) Los signos $\frac{7}{3}$, 4—9 permanecerán cemo huella de esta relación imposible en el dominio de los números aritméticos enteros, pero que tendrán existencia en un nuevo dominio que neutralice, por alguna de sus propiedades, la imposibilidad relativa de que se trata. Agregar el dominio de los números fraccionarios, es agregar las divisiones por todos los números, ó un nuevo sistema de productos.

También estos seres de razón se forman en la Geometría, por adjunción, para extender los dominios geométricos, unas veces porque ciertas entidades conservan, en especiales combinaciones, sólo parte de sus propiedades primitivas como, por ejemplo, la recta paralela á otra que sólo conserva, en la posición de paralelismo, la propiedad de la dirección; otras veces, nuestras combinaciones hacen salir al objeto del dominio de la intuición sensible, para nó conservar más que propiedades puramente racionales, como, por ejemplo, en la extensión de la Geometría á espacios superiores; otras completamos entidades particulares con nuevas propiedades, para hacerlas entrar en dominios más extensos y estudiar en un mismo dominio entidades de dominios diferentes, tal como la circunferencia, que se puede considerar como una cónica, adjuntando los puntos circulares del plano.

Otra amplificación de grandísima importancia es la que resulta al pasar del estudio exclusivo del objeto al estudio en su relaciòn con el sujeto.

Primeramente, la discusión de los problemas hace ostensible aquéllo que puso el sujeto, aparte de las condiciones propias del objeto, y explica las incompatibilidades de ambos extremos en ciertos casos ó los absurdos resultantes.

El predominio de la acción intelectual sobre el objeto se nota especialmente en el cálculo simbólico, que crea formas vacías, que luego llenan ciertos objetos, según se ve en el trabajo de Cayley, *On multiple Algebra*.

Esta distinción de los dos dominios subjetivo y objetivo, se acentúa más en la Pangeometría, pues si hasta Lobatschewsky la Geometría era un desarrollo dogmático, realizado en la inteligencia como fondo permanente, sobre el que se dibujaba toda la variedad geométrica, bajo la rigidez de un encadenamiento de relaciones que se sustituían, conservando la equivalencia de los elementos en una mutación indefinida, hoy la Geometría deja de ser un estudio puramente objetivo, al considerar que, aparte de ese estudio dogmático de la Geometría euclídea, existen otros desarrollos, en los que el espacio con sus propiedades características, independientes de nuestra inteligencia, puede ser objeto en una ciencia subjetivo-objetiva.

Seguimos en el estudio de la Matemática el proceso histórico. Analizamos sucesivamente las dificultades que encontraron los antiguos matemáticos para formar el edificio; parece que este es el método más adecuado para dejar honda huella en la inteligencia. Se puede decir que cada individuo, al estudiar la Matemática, la crea por *yuxta-positionem*. Las partes de la ciencia apare-

cen heterogéneas, unas veces se compenetran, otras se apartan, confundidas en sus fronteras; con frecuencia no se sabe lo que es propio ó ajeno de cada una. Se pretende edificar una de ellas con independencia de las demás, y pronto se ve que necesita de su auxilio. No parece posible comenzar por una síntesis matemática inversa del análisis histórico, porque siendo la Matemática ciencia que se construye, necesitamos comenzar por construir la variedad de sus objetos, y en esto precisamente consiste la ciencia matemática.

Hemos visto cuan difícil es agrupar los conceptos en el orden lógico, por la compenetración de los mismos en cualquier objeto ó sistema de objetos, y aunque ningún resultado se haya conseguido hasta ahora en este trabajo, no deja de tener importancia el exámen de las diversas cuestiones matemáticas, para el más acabado conocimiento de la ciencia.

Más fácil será ver cómo la ciencia se ha construído á través de las diversas épocas, agrupándose á los antiguos conceptos otros nuevos.

Principiaremos por examinar el estado de la Matemática á comienzos de este siglo.

Con citar los nombres de Euclídes, Arquímedes, Apolonio, Pascal, Fermat, Descartes, Newton, Leibnitz, Euler y Lagrange, hallamos el resúmen de la Matemática en todas sus manifestaciones circunscritas á la ciencia pura, pues dichos nombres son los esquemas de los descubrimientos capitales hasta el siglo XIX.

El método lógico de Euclídes, subordinado principalmente al principio de contradicción; el método de exhaución de Arquímedes, que por vez primera refiere lo indefinidamente decreciente y aun el concepto de infinito, á lo finito; Apolonio, que importa los primeros elementos de la teoría de las curvas que se enlazan con otros descubrimientos parciales de la misma, Pascal y Desargues, por no citar otros varios en esta breve reseña, que estudian la perspectiva; Descartes, que une el número á la extensión; Newton y Leibnitz, que llegan á la generación inmediata de la cantidad, mediante el elemento infinitesimal; Fermat, que inicia la teoría moderna de los números; Euler, el último de los continuadores y perfeccionadores del nuevo análisis, Lagrange, que se desvía hacia el Algebra con su concepto de derivada y con su análisis sobre las ecuaciones.

Este largo período es el del predominio exclusivo del método analítico ó de investigación inmediata, individual. Se aglomeran con cierta independencia los materiales para el edificio. Principalmente debe conocerse cada objeto en sí; las correspondencias

surgen rara vez; no se han descubierto todavía las analogías que incluyen objetos aparentemente distintos en otros más generales. La idea de género y especie es á lo más rudimentaria. Los números sordos, imaginarios, eran seres extraños en las investigaciones legítimas, en los resultados rigorosos.

Otro período podremos considerar durante los dos primeros tercios de este siglo.

La creación de la Escuela politécnica de París influyó, desde comienzos del siglo, en el desarrollo matemático. Los *Comptes rendus de l' Académie des Sciences* comenzaban á reflejar los progresos matemáticos; le *Journal de l' Ecole polytecnique* y el *Journal de Crelle*, principalmente, contribuían á constituir un nuevo orden de cosas. El progreso individual se iba reemplazando paulatinamente por el progreso colectivo.

Gauss, con su teoría de los números, importando los conceptos de congruencia y clases de números y más tarde Cauchy con su teoría de las funciones devariables, imaginarias, monodromas, monogenas y sinécticas, abrieron amplios y nuevos horizontes. Debe notarse el impulso debido á Riemann, que al concebir el plano de varias hojas ó superficie de su nombre y la teoría de las conexiones de las superficies, unido esto al concepto de variedades de n dimensiones, creó la nueva teoría, *Analysis situs*.

Por otra parte, la teoría de las sustituciones avanzaba, y servía de base al perfeccionamiento debido á Abel y Galois, de la teoría de las ecuaciones algebráicas, y además, Lobastchewsky, Riemann, Bolyai, Beltrami y Helmholtz, creaban la geometría general ó Pangeometría. En Geometría, la escuela de Monge, que comenzó en la Geometría descriptiva, se desarrolló como Geometría proyectiva con Poncelet, como Geometría superior, fundada en la relación anarmónica, con Chasles, y como Geometría pura, basada en las formas armónicas, con Staudt.

Todos estos descubrimientos al principio quedaban relegados á las grandes revistas y memorias de las Academias. Los libros destinados á difundir la ciencia, apenas reseñaban los principios más fundamentales de estas nuevas ramas.

Legendre, modificando á Euclides en la exposición, era el modelo que sirvió á los tratados elementales hasta los dos tercios del siglo, y el tratado de los Sres. Rouché y Comberouse, ha sido su continuación, aumentado con la doctrina de Chasles.

Olivier, Leroy, Lagournerie, Tresca y otros, se limitaban á exponer la Geometría de Monge, Lacroix era el libro más divulgado para la enseñanza clásica, Bourdon, Cirodde, Lefebure de Fourcy tan sólo llegaban al Algebra de los Descartes, Lagrange,

Rolle y Sturm. La Geometría analítica, escrita por algunos de estos autores, que entonces prevalecían, se limitaba á una exposición de las cónicas y superficies de segundo orden, tratados por los sistemas cartesiano y polar.

Desde mediados de este siglo, confundiéndose con la terminación del anterior período, comienza otro nuevo.

Las doctrinas de Gauss, que se habían amplificado por Dirichler, Dedekind y Kummer, ya tienen cabida, aunque con reservas, en los tratados elementales.

Baltzer ha sido uno de los que con más originalidad, separándose de la pauta general, hermanó las teorías clásicas con las modernas.

Las congruencias de Gauss y las determinantes, el baricentro de Moebius, y elementos de Geometría proyectiva, son nuevos materiales que descienden á la enseñanza elemental.

Un autor poco conocido, Bourget, introduce en el Algebra elemental el importante empleo de las determinantes.

Además de que Serret, en su Algebra superior, importa á la enseñanza las teorías de Abel y de Galois, con su preliminar, la de las sustituciones y la extensión de las congruencias á la teoría de las funciones, con desarrollos originales del mismo, aparece Salmon que es el vulgarizador del nuevo algoritmo de las formas, en su Algebra y tratados de Geometría analítica. Hoüel, por otra parte, no sólo propaga las teorías de Riemann y las de Cauchy, en su *Théorie élémentaire des quantités complexes*, presentando una reseña del cálculo simbólico, concretado en la teoría de los cuaternios, sino que en su *Cours de calcul infinitésimal*, abandonando la pauta de los antiguos tratados de cálculos diferencial é integral ó infinitesimal, da cabida en su obra á la teoría de las funciones, según Riemann y Cauchy, trata ya la cuestión de los ceros y de los infinitos ó de los puntos singulares, ofreciéndose su trabajo como una vulgarización de la magistral obra de los Sres. Briot y Bouquet, sobre las funciones elípticas, que también expuso Beltrand en su magistral obra de cálculo integral. Es muy importante notar, como Mr. Painvin dió una extensión. hasta entonces desconocida, á la Geometría analítica.

Mientras se adaptaban á la enseñanza elemental las nuevas teorías arriba indicadas, las Revistas superiores, órganos de los altos centros y corporaciones sabias preparaban nuevos contingentes.

Entre los matemáticos más eminentes del último periodo, citaremos á Weierstrass, Beltrami, Schwartz, Lie, Klein, Poincaré, Clifford, Grassmann, Cantor, Laguerre, Hermite y Darboux.

Este periodo está caracterizado por la teoría de los grupos, en la que puede considerarse incluída la amplísima generalización de la Geometría y la sistematización y generalización de la teoría de las funciones, bajo la doble influencia de la extensión del concepto de espacio al de variedad y de la teoría de los grupos.

En la Aritmética general de Stoltz se ve esa compenetración de diversas teorías; la Aritmética, el Algebra, la teoría de las diversas funciones se confunden, simultaneando en la eficacia de sus recursos, expuesta con gran desarrollo la teoría de las cantidades complejas, en sus representaciones gráficas, va el autor hasta exponer la teoría de las operaciones, segun los principios de Grassmann, y esta parte combinatoria de la obra llega hasta las cantidades compuestas de n unidades complejas, según la teoría de Weierstrass.

Los conceptos combinatorios descienden también al dominio elemental en la *Teoria delle Grandezze* del Sr. Bettazzi, y la Aritmética y Algebra del Sr. Schroeder, ésta última con ciertas reminiscencias del Algebra de la lógica.

El Algebra ordinaria, ya considerada en sí, ya en sus conexiones con la Aritmética general, se estacionó algún tiempo en la enseñanza.

Tan solamente el notable tratado del profesor Chrystal, con extraordinario caudal analítico y no muy apreciable carácter combinatorio, apareció como una innovación. El dinamarqués Sr. Petersen exponía en ella la teoría de las sustituciones. Por lo demás, la original doctrina de los conjuntos del Sr. Cantor, juntamente con algunos opúsculos del Sr. Dedekind, hacían avanzar la teoría de los números, y suministraban materia para otras obras didácticas, tales como las teorías de las funciones, de los Sres. Tannery y Dini, y preparaban el avance importante dado en estos últimos años por varios autores, entre ellos el señor Weber, con su *Lehrbuch der Algebra*, donde, además de fundir con las teorías clásicas las de Abel y de Galois, importa novísimos materiales á esta rama, que parecía rezagarse y recordar épocas pasadas, en que los matemáticos ilustres dejaron huellas de su ingenio en sus tentativas, nunca coronadas por un éxito definitivo, para resolver generalmente las ecuaciones; y sobre estas obras aún citaremos el magistral tratado *A Treatise on universal Algebra*, cuyo primer tomo ha publicado Mr. Alfred North Whitehead, que aplica los principios combinatorios del Algebra de la lógica á las variedades, especialmente al sistema de Grassmann y á las geometrías elíptica é hiperbólica. La Geometría elemental ha realizado la fusión de la plana con la del espacio.

La Geometría analítica, como se ve en las magistrales obras de Salmon y de Clebsch, no se limíta ya á las secciones cónicas, y queda enriquecida con nuevos sistemas de coordenadas, propios para asimilarla al Algebra de las formas por un lado, y por otro para introducir los conceptos de dualidad, polaridad y algunos, de la Geometría proyectiva, siendo el modelo más acabado de esta doble tendencia, las *Leçons de Géométrie* de Clebsch.

Las antiguas obras de cálculo diferencial é integral, quedan absorvidas en las más amplias de Analisis, tales como las de los Sres. Laurent, Jordan, y Picard.

El cálculo resulta lo que debe resultar, un instrumento, y como aplicación, la riquísima teoría de las funciones, asociada al desenvolvimiento geométrico, que á veces se encuentra y se combina con el desenvolvimiento algorítmico.

Los antiguos tratados de Cálculo diferencial é integral, se disgregan en tratados especiales, acerca de las ecuaciones diferenciales, tales como los de los Sres. Goursat, Painlevé, Fortsyth, y en obras como la *Theory of functions of a complex variable*, de este último, donde, adoptándose la exposición riemanna, se estudian detenidamente las singularidades esenciales, las perioricidades simple y doble de las funciones, y las funciones pseudo-periódicas, la conectividad de las superficies, la representación conforme, los grupos de las sustituciones lineales, comprendiendo los grupos fuchsianos y kleinianos, las funciones automorfas, los grupos poliedrales y la conexión entre las funciones automorfas con las ecuaciones diferenciales.

Para terminar esta enumeración, citaremos las magistrales obras: *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen*, de los Sres. Klein y Fricke y *Theorie der automorphen Functionen*, del Sr. Fricke y *Analytich-Functionen theoretische*, del mismo que con los varios tomos publicados por el malogrado Lie, sobre los grupos de transformaciones, expresan el proceso de los conceptos matemáticos hasta los tiempos actuales.

CAPÍTULO III

LA ENUMERACIÓN DE LOS CONCEPTOS

Difícil es una clasificación de los conceptos, y por consiguiente las de las ramas de la Matemática dependientes de éstos; pero siquiera podemos hacer su enumeración para fijar la distribución

de las diversas teorías y hacer manifiesta su variedad é importancia relativas.

Ya que en una ciencia de puro razonamiento, como la Matemática, debe predominar la parte intelectual ó conceptos lógicos, preciso es hacer intervenir muy diversas categorías, para constituirla en su integridad.

Desde luego interviene la causa en sus manifestaciones, acto, potencia y fuerza, lo que da una importancia capital á la combinatoria, como rama la más abstracta y general de la Matemática, de la que todas las demás dependen.

El número es el primer resultado de nuestra actividad y la primera materia de la Matemática, sobre el que se edifica la Aritmética que lo forma, lo combina y lo relaciona, deduciendo sus propiedades.

Pero el número, siendo tan sólo la expresión de la cantidad, queda subordinado al concepto cuantitativo en sus variedades unidad, pluralidad y totalidad, que dominan el campo matemático con una tendencia puramente lógica. Primeramente hemos de considerar la estructura de todo razonamiento matemático, cuyo elemente es el teorema, donde la extensión de la hipótesis queda subordinada á la extensión de la tesis, en general, pero que por la virtualidad de la coexistencia de los objetos que constituyen la materia del teorema, por ejemplo, lados y ángulos de un triángulo, también la tesis se subordina á la hipótesis. originando la reciprocidad y deduciendo de un caso de la igualdad de triángulos todos los demás.

Este carácter de subordinación, supraordinación y reciprocidad, desde que Boole creó el Algebra de la lógica, ha dado orígen á una rama superior á todas las demás, ya con esta denominación, ya con la más amplia de *combinatoria, cálculo formal* ú otra que pudiera ser más adecuada, que traduzca y represente fielmente el nuevo estado de la Matemática: pues sin penetrar todavia en el vasto conjunto de la parte clásica, hallamos un organismo que domina á todos los demás por su amplitud, que comprende las clases lógicas, de las que forman tan sòlo una reducida especie, las clases de la Matemática clásica, subordinadas tan sólo al número y á la extensión; pues aquéllas comprenden además de los objetos en general, que pueden no ser números, tales como operaciones, ó resultados de diversas construcciones, dependientes de leyes combinatorias, variedades sometidas tan sólo al criterio de respetar el principio de contradicción, ó la *permanencia de las leyes formales del cálculo,* según la expresión de Hanckel, y entran en el vastísimo dominio creado en todas

las ramas por el procedimiento de la *adjunción*, que permite extender sucesivamente las especies de entidades, como en Análisis se asciende desde la especie de los números enteros á las de los números racionales, reales, ideales, imaginarios, como en Algebra la adjunción de entidades, ya sean irracionales ó transcendentes diversas, permiten resolver las ecuaciones de grados superiores, como en Geometría la adjunción de entes ideales, ya sean los puntos circulares, las rectas isótropas, las correspondencias de las más variadas naturalezas, dan amplitud y unidad á los conceptos y facilidades para su sistematización.

La crítica matemática, cuyo boceto aspiramos á presentar, debe hacer una detenida exposición de la rama combinatoria de la Matemática, para preparar al estudio concreto de las modernas teorías que entran tan de lleno en la misma.

Cabrá el pretender hacer una síntesis después de realizado el análisis, de conocer el objeto en toda su variedad; y éste es precisamente el objeto de la *Crítica matemática*. En posesión de la materia, podremos darle forma y buscar el sistema más perfecto de distribución de los objetos en un organismo que abarque cuanto hoy comprende la Matemática, y puesto que la empresa es difícil, al menos indicaremos algo de lo que puede servir de preliminar para facilitar su realización más ó menos completa y más ó menos remota.

Ya se vió al exponer los principales cuadros de las categorías, los conceptos á que se reducen todos los demás y de los que se forma la ciencia. Estos conceptos primeros tienen diversa importancia en cada una de las ciencias.

En la Matemática, el concepto de relación prevalece, hasta el punto de subsistir ésta cuando el objeto desaparece en su totalidad ó en alguna de sus partes.

Se forma el número por los modos distintos é irreducibles (*), que se llaman algoritmos fundamentales, y por otros algoritmos derivados de éstos; y se nota inmediatamente la necesidad de extender los conceptos de número y de operación. El sistema de los números enteros se amplifica con los de los racionales algebraícos y transcendentes de diversos géneros. Se refieren los unos á los otros, como imágenes, que en nuestra inteligencia corresponden á los sistemas de objetos, según hace el profesor Georges Cantor en su teoría de los conjuntos, y esta proyectividad

(*) Aunque en sus orígenes la multiplicación se reduce á la suma y la potenciación á la multiplicación, en la acepción general no puede conservarse este modo de ver que restringiría el carácter propio de cada uno de los algoritmos fundamentales.

subsiste lo mismo entre conjuntos numéricos, que entre conjuntos de elementos geométricos.

La extensión se combina con el número, formando un todo que se distingue con la denominación de cantidad compleja, y sin formar una entidad como en este caso, pueden referirse uno á otro tan sólo desde el punto de vista de la correspondencia, cuyo caso más sencillo es la unívoca, puesto que esta correspondencia puede ser múltiple de diversas maneras, y aún dejar de existir, en cuyo caso se entra en el estudio de las singularidades ya analíticas, ya geométricas.

El número y la extensión reales, como objetos, no bastan para satisfacer las exigencias combinatorias; pero la adjunción de nuevos conceptos, dando generalidad y amplitud á los dominios, hace desaparecer las imposibilidades relativas (que no provienen de absurdos como las imposibilidades absolutas.)

Los objetos, cualesquiera que sean, poseen varios caracteres á los que, en cada uno, se aplican las diversas categorías, es decir, son unos, están en el espacio y en el tiempo, son efecto ó causa, etc. Esto ocurre con los objetos matemáticos. No podemos decir que tal categoría sea superior á las demás, sino que á tal ó cual damos preferencia sobre las otras.

Si consideramos la de relación, podemos ascender desde las cualidades que determinan una entidad cualquiera: triángulo, cuadrilátero, etc. hasta los sistemas más complicados; si la acción, tendremos las relaciones de nuestra inteligencia, como fuerza creadora, con los objetos creados ó construídos, su conveniencia ó disconveniencia, que llega á la incompatibilidad ó al absurdo; si la correspondencia entre el concepto y el signo tendremos el lenguaje.

Además, la Matemática es constructiva. Es una serie de métodos que surgen de cada nuevo concepto. No bastando el número como instrumento de nuestro razonamiento, se emplea el símbolo. Esta nueva forma de razonar simbólica, se llama Algebra. No bastando el Algebra para satisfacer las necesidades combinatorias de la inteligencia, llegamos al cálculo formal y aún al lógico, si entran en nuestras combinaciones las operaciones de nuestra inteligencia.

El cálculo infinitesimal es un instrumento superior al Algebra, que tiene su simbolismo, y además emplea sistemas de cantidades auxiliares. El método proyectivo es otro instrumento superior que sustituye unos sistemas por otros, para aplicar los razonamientos á aquel que más convenga, y demostrar para sus proyecciones lo que se ha probado para el sistema original.

El método de la adjunción ó de los símbolos de pura razón, es otro instrumento el más superior, pues por la adjunción, por ejemplo, de lo imaginario, lo infinito, etc., se abrevian los razonamientos ó engloban los particulares en un sólo razonamiento general.

Se podría demostrar toda la geometría por razonamientos elementales; pero se abrevia, empleando razonamientos cada vez más comprensivos, más sintéticos ó eficaces.

La brevedad está en razón directa de la generalidad del método. Cada método superior, es una condensación de métodos más elementales; aquéllos son abreviaciones de éstos.

El empleo de la relación anarmónica evita un andamiaje confuso de triángulos y de proporciones ó razones simples. Los métodos de coordenadas son caminos abreviados, desde que se justificaron las relaciones fundamentales por el teorema de Pitágoras, ú otra relación fundamental que permita además el tránsito de unos sistemas á otros.

Cada sistema, sea aritmético, algebráico, geométrico, analítico, simbólico, penetra en otro y se diluye en él, sin dejar línea divisoria como en un todo homogéneo, que los comprende por igual y que es la ciencia en su integridad, que es tan sólo determinacion expresa de lo que antes existió informe y en potencia.

En el espacio, existen potencialmente todas las relaciones geométricas, en la sucesión de los instantes todas las relaciones numéricas, más las que adjuntamos mediante el concepto de continuidad; pero es preciso que esas relaciones surjan del caos en que se hallan. La inteligencia las hace surgír, primero aisladas, individuales, formando unos encadenamientos sencillísimos. Combinaciones sucesivas introducen nuevos enlaces, y los encadenamientos ó tramas de las relaciones y de las propiedades se hacen cada vez más espesos, como imitando á la continuidad con que se nos presenta la Naturaleza. El caos primitivo queda surcado por infinidad de huellas que son las determinaciones reales dadas por nuestra inteligencia á lo que estaba determinado en potencia.

Aparecieron los números llamados sordos (hoy irracionales), los imaginarios, etc., por antagonismos entre los conceptos y los objetos ó la realidad; pero estos antagonismos se convirtieron en armonías ó correspondencias legítimas. Resultaba pobre el campo de las investigaciones, ya numéricas, ya geométricas. El poder combinatorio de nuestra inteligencia creó nuevas entidades complejas, modeladas de la más varia manera, llegándose, como ocdə Boole, á dar la importancia capital á las leyes combinato-

rias, decreciendo en igual medida la del objeto susceptible de ser ya número, figura, fuerza, movimientos ó combinaciones diversas de estas entidades.

La naturaleza de nuestras investigaciones permanece siempre la misma; siempre consisten en las relaciones, sean sencillas ó complejas, de coexistencia entre los elementos que integran un objeto ó entre varios objetos. El individuo, como sistema de los elementos que lo forman, y de los que, distribuyéndose de varias maneras complementarias, constituyen las hipótesis y las tesis de los teoremas; los sistemas cuyas correspondencias son relaciones de coordinación ó de subordinación, según sean equivalentes ó de diversa generalidad, es decir, la parte sistemática de la ciencia, (si convenimos en llamar individuos á los sistemas más simples), con lo que hallamos una vez más el carácter relativo de las determinaciones matemáticas, dependientes, en lo que afecta al *quantum*, de la unidad ó sistema de referencia adoptado, y en lo que afecta á la forma, de los conceptos elegidos para la clasificación.

Y así como los números se determinan por su relación con la unidad, y se clasifican, interviniendo el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor, también varias clases se refieren á la máxima clase contenida en todas ò á la mínima que las contiene.

Las clases se forman según criterios en número infinito. Nos elevamos desde la clase de los números enteros ó desde el espacio de una dimensión; y vamos hallando clases sucesivas, cada vez más ricas en individuos, y la operación empleada, repetida al producir todos los individuos, crea lo que se llama grupos. Y los criterios para formar grupos, se llaman grupos de transformaciones, que sirven, para recorrer todos los individuos de un grupo, y volver al origen de la transformación.

Lie en sus *Vorlesungen über differential gleichungen*, considera los grupos de traslación y de rotación en el plano, el grupo de las transformaciones afines, el de todos los movimientos del espacio y otros varios de que nos ocuparemos más adelante; al hacer una reseña de elta rama superior de la Matemática.

CAPÍTULO IV

Necesidad de la Crítica matemática, su objeto.

El conjunto de la ciencia matemática es hoy tan considerable, que se hace imposible para una individualidad el abarcarlo en

todos sus detalles. Una sola rama matemática casi es suficiente para ocupar largos años de vida en un trabajo continuo. Pero no es preciso que cada uno sepa todo cuanto ha acumulado la humanidad por un trabajo perseverante de siglos; basta que tan inmensa labor se distribuya entre todos los que colaboran en el afianzamiento y extensión de la ciencia. Cada cual elige, según todas sus preferencias, el campo que debe cultivar.

Sin embargo, para todos es conveniente una rápida ojeada de conjunto, con el fin de poder escoger una dirección en el *mare magnum* de las ideas, y conocer el enlace de cada rama con las demás.

Por otra parte, el edificio cambia de aspecto. Las ramas del árbol se enlazan cada vez más, lo heterogéneo adquiere el aspecto de lo uniforme, la tendencia á la unificación se acentúa, cada teoría pierde su carácter originario para fundirse en las demás.

Clasificar los conceptos es hacer una síntesis matemática.

Los conceptos fundamentales: relación, combinación, orden, número, continuidad, tiempo, espacio y causa, envuelven todos los demás. En la relación entra todo cuanto existe en el dominio matemático, especialmente la comparación, y derivadas de ésta la igualdad y la desigualdad, la subordinación y la supraordinación, y muy especialmente la proyectividad, correlación, etc.

En la combinación y en el orden entran el grupo, la permutación y sus especies, la sustitución, la probabilidad.

En el número, todas las especies de éstos, y todas las especies de funciones, y toda cantidad desde el punto de vista de su medida ó determinación. En el espacio y tiempo, la continuidad.

La causa envuelve la variación, el sistema, el movimiento y las entidades mecánicas y físicas.

Las ramas matemáticas correspondientes son:

Dependientes del concepto combinatorio; Algebra-lógica, teoría de los grupos y de las probabilidades, del número: Aritmética y Algebra, del espacio: Geometría; del espacio y número: Geometría analítica, en todas sus variedades; de la cantidad en todas sus acepciones: Análisis matemático; del espacio, número, tiempo y causa: la Mecánica, Física y Astronomía.

Pero los límites de estas ramas no están determinados, como tampoco el modo de aplicarse los diferentes conceptos.

Debemos distinguir en la Matemática el desarrollo cronológico ó histórico y el desarrollo lógico.

En el primero predomina el análisis, que ha ido construyendo la ciencia; en el segundo la síntesis que ordena los conceptos adquiridos por el análisis.

El análisis procede definiendo cada objeto y extrayendo todas las propiedades contenidas de las definiciones de los diversos objetos. El procedimiento sintético puede prescindir de muchas definiciones secundarias, empleando tan sólo las indispensables para formar el conjunto ó síntesis.

La Matemática se ha desarrollado según las necesidades de cada época y las condiciones individuales de los científicos. El objeto ha sido continuamente la resolución de problemas particulares. La teoría brotó al lado de la práctica; los conceptos se formaban sobre intuiciones inmediatas; cada generalización resultaba de numerosos hechos aislados, que tardaban á reunirse en cuerpo de doctrina. Ya cada objeto bosquejaba una rama, Aritmética, Geometría, Astronomía, etc.

Ha sido necesario un trabajo de varios siglos para aumentar la ciencia en un reducido número de ramas. Los nombres de Descartes, Newton y Leibnitz, son esquemas de estas conquistas. Entonces, todavía enmedio de su acrecentamiento, la Matemática conservaba el sello de la individualidad y de su carácter meramente objetivo.

La enseñanza, teniendo presente el estado intelectual de los alumnos, ha roto siempre el conjunto, con ciertas restricciones convencionales, que facilitan llegar al objeto.

Pero hoy las cosas han cambiado. La ciencia ha entrado en el periodo de la síntesis.

No solamente se ha aumentado el número de los conceptos, sino el de las ramas. La teoría de los números, la Geometría proyectiva, el Algebra de las formas, la de la lógica, el *Analysis situs*, la Teoría de las funciones, la Geometria enumerativa, etc.

Al lado de numerosas ramas, tenemos que considerar numerosos y nuevos conceptos de naturaleza objetiva y subjetiva. El número, la extensión, la figura, el algoritmo en sus variedades que llenan el cuadro de las ciencias que se destacan del conjunto de la Matemática, son objetos; pero la combinatoria, la sección, la adjunción, la abstracción, la determinación, la deducción, la subsumción, etc., son operaciones que modifican los objetos y crean otros nuevos, aumentando el campo de las investigaciones.

Es preciso, pues, en este momento en que la ciencia se ha cambiado tan considerablemente en su materia y en su forma, hacer un nuevo estudio que pueda envolverla en su conjunto, que reuna sus partes separadas algunas veces y otras aunadas por necesidades eventuales, por la razón de que las ramas se entrelazan algunas veces, por falta de distinción en los conceptos.

Hasta el presente el objeto ha tenido un predominio casi abso-

luto y ha conservado la división clásica de las ramas matemáticas. En ciertas ocasiones el número ha penetrado en la Geometría, para llegar al descubrimiento ó demostración de propiedades de las figuras, otras veces la teoría de las funciones ha tomado como objeto la resolución de ecuaciones, la representación geométrica de las funciones les ha dado nuevos rasgos y las ramas entrelazadas han hecho perder á cada una su caracter primitivo.

Es preciso al presente, invertir los procedimientos. Es cierto, que para la enseñanza se necesita seguir todavía la marcha señalada por las divisiones clásicas, agrupar las teorías bajo los conceptos fundamentales, número, extensión, etc., es decir, estudiar la Aritmética, el Algebra, la Geometría; pero es necesario también completar la adquisición de la ciencia por aspectos generales que faciliten la comprensión del conjunto.

La nueva ciencia *Crítica matemática* se dirijirá á sus fundamentos, á su constitución, analizará sus conceptos estudiará sus clasificaciones, subordinará los objetos de las diversas ramas á la comunidad de la idea que las comprende. Veremos cómo un sólo concepto reune diversos objetos y procedimientos para subordinarlos á las ramas actuales ó clásicas. Veremos las partes comunes, donde hay compenetraciones comprendidas en un todo superior, la ciencia una.

La Aritmética y la Geometría no son más que formas de un mismo razonamiento aplicadas á objetos distintos y subordinadas á un mismo método. Pero es preciso distinguir conceptos con frecuencia superpuestos ó confundidos.

La combinación ni el orden existen sin número, la continuidad sin extensión, el número sin relación, la relación sin número.

Debemos considerar muchos sistemas distintos relacionados entre sí por enlaces numerosos. Algunas veces dos sistemas objetivos constituidos por propiedades análogas, otras veces sistemas muy heterogéneos, por ejemplo, nuestra actividad intelectual con objetos que ella construye *a priori* por la combinación de nuestros conceptos ú objetos elegidos.

Aplicaremos los conceptos de subordinación y supraordinación, y aparecerá el Algebra de la lógica; y algunos procedimientos lógicos formarán la estructura del razonamiento, tanto geométrico como algorítmico. La materia cambia, la forma permanece. El encadenamiento de los razonamientos es como un tejido que contiene, ya el número, ya la extensión, ya la combinación, como materias distintas, separadas ó combinadas en cierta medida.

Los conceptos combinatorios, bajo una forma, son las propiedades conmutativa, asociativa, distributiva, aplicadas á todas las ramas matemáticas. La subordinación ó supraordinación constituyen reunidas la reciprocidad de los razonamientos, que conducen de uno á otro extremo de una serie de teoremas ó problemas.

Nuestra actividad crea á menudo seres nuevos, une lo posible á lo imposible, lo real á lo imaginario, los conceptos sin intuición á las intuiciones reales, pero dejando una huella en las fórmulas ó en la alteración de ciertos sistemas matemáticos.

Aplicamos las leyes de nuestra inteligencia al número y á la extensión, y creamos objetos; producimos desde luego los algoritmos, y el mundo de los seres numéricos queda formado. Pero frecuentemente no podemos, á la inversa, aplicar un procedimiento opuesto á objetos ya existentes, y nos vemos conducidos á seres ideales que pueden existir en sistemas más amplios, mediante el procedimiento de la adjunción. Podemos hacer construcciones geométricas; pero no faltar á las leyes de determinación de su existencia.

Podemos referir entre sí sistemas diversos; pero encontramos algunas veces falta de correspondencia, y los símbolos de imposibilidad, de incompatibilidad ó de absurdo se imponen, y con frecuencia son nuevos objetos que llevan el sello de la falta de correspondencia, y en muchos casos las imposibilidades desaparecen por procedimientos que las neutralizan.

Consideremos ahora los dos extremos de nuestra actividad; el que parte de nuestras combinaciones puramente intelectuales y el que comienza en nuestras intuiciones del mundo exterior. La Matemática llega á la armonización de los dos extremos, entre los que se organiza como ciencia subjetivo-objetiva. Ella toma del mundo externo los primeros conceptos y los postulados que se imponen, y prosigue sin obstáculo alguno sus deducciones. Entonces la ciencia ideal, subjetiva, se construye con firmeza en cada una de sus ramas, según el grado de abstracción.

CAPÍTULO V

La crítica en la Arimética

La Aritmética trata de formar y combinar los números. El procedimiento natural es la formación de los números sucesivos. La sola ley es la agregación sucesiva de la unidad. Los números ya formados se combinan mediante los algoritmos fundamental

les. Las reglas á que están sometidos dependen de un análisis en el que se emplean las leyes combinatorias, asociativa, conmutativa y distributiva.

Las primeras propiedades se refieren al número como factor, distinguiéndose especialmente los números primos que son los elementos irreducibles, y la ley fundamental en esta teoría es la *de no poderse descomponer un número de dos maneras distintas en factores primos.*

Pero el número divisible por otro ó que da en su división por resto cero, es un caso particular de la división; y pronto hallamos la teoría de la divisibilidad subordinada á la teoría más general de las congruencias, en la que se clasifican los números por tener restos iguales en la división por un divisor dado (módulo). Esto conduce á la amplísima teoría que distribuye los números en clases y á la de las formas que contienen, cada una, infinidad de números; y sus relaciones y propiedades constituyen una parte importante de la teoría de los números.

Los teoremas de Fermat y de Euler, expresados por las congruencias:

$$a^{p-1} \equiv 1 \text{ (mód. } p.) \qquad a^{\varphi(n)} \equiv 1 \text{ (mód. } n.),$$

representando en la primera p un número primo, y a un número no divisible por él, y en la segunda el exponente el número de números inferiores á n y primos con él, son fundamentales en la teoría de la divisibilidad, puesto que dan los periodos de restos potenciales, y en ellos se fundan las propiedades interesantes de las raíces de las congruencias binomias, especialmente las primitivas que, como las de las ecuaciones algebraicas, tienen la propiedad de reproducir por medio de sus potencias, todas las demás.

Además de estas congruencias, hallamos de extraordinaria importancia las de segundo grado, cuya teoría se debe á Gauss, que resolvió el problema de la representación de los números, mediante dichas formas y el de la equivalencia de dos formas, es decir, que se contienen recíprocamente, y por consiguiente, contienen los mismos números, representando

$$a^2 + 2bxy + cy^2 \qquad \text{y} \qquad D = b^2 - ac$$

una forma cuadrática y su determinante, en el caso de que siendo éste negativo ó positivo, se tenga respectivamente

$$c > a > 2\,[6] \text{ ó } \left(\frac{-b+\sqrt{D}}{c}\right) > 1, \frac{-b+\sqrt{D}}{c} < 1$$

la forma se llamará *reducida*, y además, siendo una forma *(a b c) contigua á la derecha* de una forma *(a' b' c')*, cuando las dos tienen la misma determinante, y además, $c'=a$ y $b+b'$ es divisible por a, Gauss estableció el teorema siguiente: *La condición necesaria y suficiente para que dos formas reducidas con la misma determinante positiva, sean equivalentes, es que pertenezcan al mismo período*, constituyendo este período el conjunto de todas las reducidas contiguas á derecha y á izquierda, de la forma propuesta y de las reducidas formadas.

La teoría de los *números complejos* de Gauss condujo á importantes generalizaciones y á la introducción de nuevos números, pues Dirichlet demostró que las proposiciones generales sobre la composición de los números primos subsisten en el dominio de los números complejos enteros de Gauss, pues representando

$$u+vi, \quad u-vi \quad \text{y} \quad u^2+v^2$$

dos números conjugados y su norma, se puede elegir un número *entero* q, tal que la norma de

$$w-q \quad \text{sea} \underset{=}{<} \frac{1}{2},$$

pues tomándose $w=\frac{z}{m}$, se podrá obtener $z=qm+r$, siendo q y r números complejos, de modo que la norma de r sea menor que la de m.

Una nueva generalización se debe á Dedekind. Partiendo de la noción de número algebráico, que es todo el que satisface á la ecuación

$$\theta^n + a_1\theta^{n-1} + a_2\theta^{n-2} + \ldots\ldots \quad + a_{n-1}\theta + a_n = o;$$

y si dado un número algebráico θ, raiz de una ecuación irreducible de grado n, se forman todos los números

$$\varphi(\theta) = x_o + x_1\theta + x_2\theta^2 + \ldots\ldots \quad + x_{n-1}\theta^{n-1}$$

donde los coeficientes son números racionales cualesquiera, los números así obtenidos, forman un *cuerpo* Ω.

Este cuerpo de números se llama *cuerpo finito de grado* n.

Los cuerpos $\Omega, \Omega', \Omega''\ldots$ engendrados por todas las raices $\theta, \theta', \theta''\ldots$ de una ecuación irreducible de grado n, se llaman *cuerpos conjugados.*

Dos números enteros algebráicos a *y* b *se dicen primos entre sí,*

cuando existen otros dos números enteros algebráicos x, y, *tales que*

$$\alpha\xi + \beta\eta = 1$$

y *dichos números tendrán un divisor comun* d *representable por la forma*

$$\delta = \alpha\xi + \beta\eta$$

Un número algebráico se dice *indescomponible*, cuando no admite divisores distintos de la unidad y de los números con él asociados, ó *primo*, cuando los números del cuerpo, no divisibles por dicho número, dan siempre un producto indivisible por él.

Solamente para cuerpos especiales tales como, por ejemplo, para el de los números racionales y para el *cuerpo cuadrático de los números complejos racionales* son equivalentes las dos definiciones de números *primos* é *indescomponibles*.

Si para un cuerpo Ω los dos conceptos equivalen, entonces *todo número descomponible puede representarse* DE UN SOLO MODO *como producto de un número finito de factores indescomponibles (admitido que dos números asociados no se consideren como diversos); en otro caso tal descomposición de un número en factores indescomponibles puede hacerse de varios modos.*

Para hacer desaparecer esta singularidad, Kummer introdujo el concepto de números *ideales*, con cuya introducción se restablecen las leyes de la divisibilidad, y Dedekind el concepto de *un ideal*.

Por otra parte, la necesidad de introducir nuevos números no existentes, pero á cuya determinación se tiende indefinidamente por un número ilimitado de operaciones, ha conducido al concepto de número inconmensurable, cuya determinación se ha realizado por la descomposición de todos los números racionales en dos clases ilimitadas que los contienen, por exceso ó por defecto, con aproximación indefinida, como *secciones* de estas clases; y se llega á formular los resultados de las operaciones con estos números, como se hizo con los números racionales, y aplicando las reglas del cálculo á combinaciones algorítmicas cualesquiera, se llega á extender las reglas del cálculo á las funciones algebráicas.

Citaremos finalmente la doctrina de Dedekind que relaciona objetos ó elementos a de un cuerpo A con objetos ó elementos a' de un cuerpo A' según exije la ley $a' = ya$ que deduzca del cuerpos A el cuerpo A', como su *imagen ó representación;* de manera que si aplicando las operaciones racionales á números cuales-

quiera u, v, w,... del cuerpo A, se engendra un número t, se obtendrá, por las mismas operaciones aplicadas á las imágenes u', v', w',... la imagen t' de t, subsistiendo las relaciones

$$(u\,v)' = u' + v',\ (u - v)' = u' - v',\ (u, v)' = u',\ v',\ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'}{v'}$$

y, en general, aplicando una sustitución f á un cuerpo A, se obtiene otro cuerpo A', que es su imagen.

Vemos pues, cómo la teoría de los números penetra en otra rama superior de la Matemática, el Álgebra, con la que se enlaza y de la que toma su generalidad.

§ 2.º La crítica en la Geometría

Hemos visto que en la Aritmética ó Teoría de los números solo existe un método, el análisis inmediato del objeto, auxiliado por el método *ad absurdum*. La Geometría nos ofrece un objeto externo para nosotros, cuyo fondo en el espacio no se presta á una intuición tan inmediata como la del número, creado por nosotros, que por esto tiene un carácter eminentemente subjetivo; y esta circunstancia la distingue profundamente de la Aritmética. La Geometría nos ofrece desde su origen multitud de métodos y de procedimientos: el método de superposición, el de igualdad de figuras, los procedimientos de giro, de rebatimiento, traslación, y el empleo de construcciones auxiliares que sirven de términos medios entre la hipótesis y la tesis de cada teorema; y sobre todo el método *ad absurdum*, ó de demostración indirecta de partes de una preposición, de la que se conocen el enunciado directo y el recíproco ó el directo y el contrario.

En cuanto á la crítica de las verdades geométricas, diremos desde luego que, consistiendo el objeto geométrico en construcciones de un objeto exterior á nosotros que no tiene la evidencia que da la intuición directa, como acontece en la teoría de los números, es preciso ante todo demostrar la *existencia* del objeto, según ocurre desde luego con la propiedad de perpendicularidad y paralelismo, para luego exponer las diversas condiciones de *determinación* de cada figura, y establecida la determinación, se pasa á la *generación* de las figuras que puede considerarse como una sucesión de determinaciones que forman un sistema geométrico, en general llamado *lugar*, consistente en contener todos los elementos, puntos, líneas ó superficies que poseen una misma propiedad.

Los métodos empleados, de sustituciones sucesivas, de lugares

geométricos, de construcciones auxiliares, etc., no son más que modos diversos de establecer encadenamientos de cuestiones equivalentes que enlazan los extremos de cada cuestión. Así, por ejemplo, la obtención de una tangente común á dos circunferencias se reduce al trazado de una tangente á un círculo de radio igual á la suma ó diferencia de los radios de los círculos dados; la intersección de lugares geométricos, á construir una figura que tenga simultáneamente las propiedades de cada uno de los lugares. Las construcciones auxiliares agregan nuevos elementos unidos á los de la cuestión, que conducen á encadenamientos de determinaciones por las que se llega á la determinación final, mediante eliminación de términos medios, método empleado generalmente en el Álgebra; y por último el método *ad absurdum*, deduce de un teorema directo y su recíproco ó contrario, el contrario ó recíproco de su recíproco, es decir, se establecen relaciones de reciprocidad ó de oposición entre los elementos que forman las proposiciones, y se llega á la conclusión final, en virtud de la relacion que determinan unos por medio de otros. Las magnitudes proporcionales son casos particulares de una dependencia general algorítmica que traduce relaciones geométricas de órdenes superiores, en general de distinta naturaleza: segmentos de distinta dirección entre sistemas de paralelas, arcos y ángulos, dimensiones y áreas ó volúmenes etc. El enlace estriba en la correspondencia de los elementos de cada una de las especies y en la suma de dos pares de elementos.

La Geometría elemental resulta pues, un encadenamiento de construcciones determinadas que enlazan dos extremos tomados al principio y al fin del encadenamiento, y que unidos en una proposición, constituyen un teorema.

Como continuación ó complemento de los *Elementos de Geometría*, debe citarse el nuevo desarrollo llamado *Geometría del triángulo ó reciente*, que tiene el mismo carácter particular y determinativo que aquélla que determina la paralela, la perpendicular, el triángulo y mediante éste las figuras más complejas, las áreas, etc.

A las medianas que concurren en un punto se agregan las simedianas, rectas simétricas á aquéllas respecto á las bisectrices, que también concurren en un punto, llamado primitivamente *centro de las medianas anti-paralelas*, punto *simediano* y finalmente punto de *Lemoine*, en honor á este geómetra, que desarrolló sobre la consideración del mismo los primeros fundamentos de la nueva geometría. Las tres paralelas trazadas por el punto de Lemoine á los tres lados del triángulo, cortan á sus lados en

seis puntos pertenecientes á un mismo círculo, el *círculo de Lemoine*, determinando el exágono de Lemoine. A su vez las antiparalelas á los lados del triángulo determinan el *segundo círculo de Lemoine*.

Los puntos *isotómicos* ó puntos *recíprocos*, respecto á una recta, son los puntos equidistantes del medio de ésta, y de su consideración resulta la figura transformada de otra *por puntos recíprocos* ó *inversos*.

Dado un triángulo DEF inscrito en otro ABC, hallándose D en BC, F en AB y E en AC, de modo que $\angle D = \angle B$, $\angle F = \angle A$, $\angle E = \angle C$, las circunferencias BDF, AFE, CED concurren en un punto.

Además existe otro punto, centro de semejanza de ABC y de los triángulos inscritos semejantes, cuyo vértice correspondiente á A se halla sobre el lado AC. Estos dos puntos son los *puntos de Brocard*.

Los ángulos formados por el punto de Brocard y los lados del triángulo (siguiendo el mismo orden) son iguales entre sí y son los *ángulos de Brocard del triángulo*.

Continuando el desarrollo de esta Geometría, hallamos los círculos de Tucker, Taylor y de Brocard, de Feuerbac, Neuberg, de M'Cay, de Gergonne, de Nagel, de Tarry y de Steiner, cónicas como la elipse de Steiner, la hipérbola de Kiepert, hipérbola de los nueve puntos, elipse de Brocard, hipérbola de Jerabek, elipse de Simson, parábola de Mandart, grupos de puntos tales como los de Nagel y Gergonne, rectas como las de Brocard, Euler, Lemoine, Longchamps, etc.

Todo esto hace ver cómo la Geometría del triángulo estudia multitud de *figuras notables* del plano del triángulo.

Pero aunque la Geometría elemental podría conducir por aumento indefinido de sus construcciones y procedimientos á las teorías superiores; aparecen nuevos métodos que en realidad son el euclídeo, pues en él se fundan y de sus procedimientos elementales se componen. El primero que debemos considerar es el de Chasles, fundado en la relación anarmónica (*) que es una doble razón. Esta doble razón formada por cuatro segmentos en línea recta, determina un punto para cada valor de aquélla. Así pues la relación anarmónica introduce el concepto de función en la Geometría. Es una función de la posición de un punto.

Desde este momento en que poseemos un instrumento tan po-

(*) Esta tiene su origen en los porismas de Euclides. (Véase nuestra *Geometría elemental y general*.

deroso, la Geometría elemental queda relegada á segundo término; las teorías de la homología y de la involución, que como se sabe, son correspondencias de relaciones anarmónicas conducen á establecer las teorías de las curvas y superficies de todos los grados; y por efecto de haberse introducido el fecundo concepto de dualidad y de polaridad que enlazan entre sí elementos heterogéneos, punto y recta, (en el plano) punto y plano, (en el espacio) también de todas las clases.

La Geometría de posición, debida á Staudt, esencialmente no difiere de la de Chasles, pues el concepto fundamental de la forma armónica implica la relación anarmónica. Es una representación más geométrica de la relación anarmónica, que permite el empleo directo de los elementos geométricos sin intermediario numérico, pero ambos métodos conducen á los mismos resultados. Constituyen la misma ciencia según dos métodos paralelos, la Geometría llamada *proyectiva*.

En la Geometría proyectiva aparece un nuevo método, el empleo de los elementos en el infinito y de los elementos imaginarios, cuyo origen se halla en las obras de Poncelet que los empleó para establecer el *principio de continuidad*. La consideración de estos elementos facilita los razonamientos y da generalidad á los enunciados.

Las tentativas para demostrar el postulado de Euclides condujeron á la nueva Geometría de Lobatschewsky que es una exposición rigurosa hecha independientemente de la verdad ó no verdad de dicho postulado y que conduce á la admisión de dos paralelas, geometría que tiene su representación en las superficies de curvatura constante negativa, así como una nueva Geometría sin paralelas resulta, conforme la exposición de Riemann, en las superficies de curvatura constante positiva.

En resumen: El estudio de los postulados de la Geometría, tales como el de la conservación de la distancia de dos puntos, la infinitud ó no infinitud de la recta y la existencia ó no existencia de la paralela á una recta ha conducido á las tres clases de Geometría, parabólica, hiperbólica y elíptica.

Una nueva generalización debemos considerar: la Geometría de más de tres dimensiones.

Citaremos las proposiciones fundamentales para la Geometría de cuatro dimensiones expuestas por Herr Max Brückner.

Axioma I. *Un espacio divide á una variedad de cuatro dimensiones en dos partes separadas.*

Axioma II. *Un plano que tiene tres puntos con un espacio, está contenido en él.*

Axioma III. *Por cuatro puntos de un espacio de cuatro dimensiones, que no se encuentran en un mismo plano, solo es posible un espacio de tres dimensiones.*

Axioma IV. *Una recta que tiene común con un espacio solo un punto, queda dividida por éste en dos partes,* y si tiene con él dos puntos comunes, está totalmente en el mismo.

Corolario. Un plano E que solo tiene con un espacio una recta común G, queda dividido por ésta en dos partes separadas; pues una segunda recta G' trazada en E, encuentra á G en un punto P. (Dos rectas de un plano tienen siempre un punto común), la recta G' quedará dividida en dos partes por dicho punto. Habrá pues, á ambos lados del espacio de tres dimensiones puntos de E, que quedará separado por dicho espacio.

Teorema I. *Dos espacios R y R' tienen siempre un plano común,* pues desde luego tienen algo común, en virtud del primer axioma. Sea el punto M.

Tracemos por M en R dos rectas G y G' que, en virtud del axioma IV quedan divididas por R' en dos partes separadas G en A y B, G' en C y D, hallándose A y C, por ejemplo, á un mismo lado de R'. Unamos un punto de A con un punto de D por una recta que se hallará totalmente en R, y también se hallará en R' puesto que une dos puntos á distinto lado del mismo espacio. Tiene, por consiguiente, un punto común N con R', que por hallarse también en R es un punto común de los dos espacios. Tenemos pues la recta MN común con los dos espacios (axioma IV).

Falta demostrar que, si dos espacios tienen una recta G común, también tienen un plano común. Para ello, tracemos por G, en R, dos planos, que quedarán divididos en dos partes separadas por R' *(Axioma IV, corolario).*

Unamos con una recta un punto de un plano con un punto de la parte del otro plano separada por R'; dicha recta se hallará totalmente en R y pasa por R', es decir, tiene con éste otro punto común; por consiguiente R y R' tienen tres puntos comunes y por consiguiente un plano.

Teorema II. *Un espacio y un plano tienen siempre una recta común,* pues el plano E se haya en un espacio R y por tener R y R' un plano común E', y cortarse E y E' en una recta G, ya que se hallan en un mismo espacio, tenemos que G se halla en E' y E' en R', luego G se halla en R'; luego E y R' tienen común la recta G.

Teorema III. *Un espacio y una recta (que no se halla totalmente en él) tienen siempre un punto común.* Supongamos que G está en R. Vamos á demostrar que otro espacio R' tiene con G un punto común M.

Teniendo R y R' un plano E común (teorema I), se hallan E y G en un mismo espacio R teniendo un punto M común, que por hallarse en E, se halla también en R', que es el único común de G y R', pues si G tuviese con E dos puntos comunes, se hallaría totalmente en E, y por consiguiente en R', lo que es contra la hipótesis.

Análogamente se demuestran los teoremas IV: *Dos planos de dos espacios distintos tienen siempre un punto común*, V. *Un plano y una recta que no pertenecen á un mismo espacio, no tienen nada común.* VI. *Dos rectas en un espacio de cuatro dimensiones, en general no tienen nada común.* VII. *Por dos rectas que se cruzan en dos espacios distintos es posible siempre trazar un espacio, de tres dimensiones.* VIII. *Tres espacios se cortan, dos á dos, en un plano y los tres planos de intersección pasan por una recta.* IX. *Cuatro espacios tienen siempre un punto común.*

Designando por R, R', R'', R''' los cuatro espacios, vemos que R' y R tienen un plano E común, E y R'' tienen una recta G común, G y R''' un punto M común, que es el único común de los cuatro espacios. Además, estos tienen comunes los seis planos RR', RR'', RR''', etc. las cuatro rectas R R' R'', R R' R''', etc.

Rectas paralelas son las que tienen igual dirección. Dos planos paralelos son los que tienen comunes dos direcciones; tienen como elemento en el infinito una recta impropia común y una orientación común.

Dos espacios son paralelos entre sí, cuando tienen comunes dos orientaciones, es decir, cuando tienen comunes tres direcciones, que no pertenecen á una misma orientación.

Una recta perpendicular á tres rectas de un espacio, que se cortan en un punto, es perpendicular á todas las que pasan por éste en dicho espacio.

Dos espacios perpendiculares á la misma recta, son paralelos.

En general, el límite de un cuerpo de n dimensiones es una figura de $n - 1$ dimensiones; si esta es divisible, su límite será otra figura de $n - 2$ dimensiones y así se llegará hasta la *enèsima* indivisible, el punto.

Por cada punto de un espacio de n dimensiones pasan figuras de $(n - 1)$ dimensiones que gozan de las propiedades siguientes: (*)

1. Por cada punto del plano de $(n - 1)$ dimensiones, se pueden trazar planos de $(n - 2)$ dimensiones, por cuyo reposo aun es posible el movimiento del espacio.

(*) Killing. Die Nicht-Euclidischen Raumformen.

2. Por este movimiento se llega á una posición, por la que el plano de $(n - 1)$ dimensiones, como un todo, llega á coincidir con su posición primitiva, mientras sus puntos han invertido su posicion.

3. En cada plano de $(n - 2)$ dimensiones existe una figura de $(n - 3)$ dimensiones, por cuyo reposo el plano de $(n - 1)$ dimensiones puede moverse en sí, describiendo cada punto una figura cerrada. Ya insistiremos de nuevo en estas generalizaciones.

CAPÍTULO VI

Crítica del Álgebra

El Álgebra tiene por objeto el problema de la resolución de las ecuaciones *algebráicas*, que es un caso muy particular del problema de la resolución de ecuaciones, tratado en toda su extensión por el cálculo infinitesimal.

Las cantidades que considera el Álgebra son las construidas por los tres algoritmos fundamentales

$$A + B, \quad A.B, \quad A^B$$

y sus inversos.

Resolver una ecuación, ó sea hacer explícito el valor de la incógnita ó incógnitas, es resolver el problema inverso de la Algoritmia, en general. Para ello se exigen conocimientos de combinatoria y de teoría de las funciones.

Como decía Descartes: «Todas las ciencias que tienen por objeto el orden y la medida se refieren á las matemáticas; no importa que sea en los números, las figuras, los astros, los sonidos ú otro objeto, donde se busque esta medida; debe haber una ciencia general que explique todo lo que se puede hallar sobre el orden y la medida, y ésta tiene un nombre propio.... las matemáticas, porque contiene todo aquéllo, por lo que las demás ciencias forman parte de las matemáticas. *(Recherche de la verité).*

Participando de estas ideas Poinsot, en sus *Reflexions sur la théorie des nombres*, dice «Las matemáticas, no solamente son la ciencia de las relaciones, esto es, el espíritu no tiene presente tan solo la *proporción* ó la *medida*, puede considerar el *número*, el *orden* y la *situación* de las cosas, sin ninguna idea de sus relaciones, ni de las distancias mayores ó menores que las separan.

«Así la Aritmética nos ofrece desde luego la Aritmética ordinaria, que no es más que el arte de la numeración; pero los números, considerados en sí, tienen propiedades que no dependen

de la manera de representarlos ó de operar con ellos. Así, hay números que no pueden ser divididos por otros, y que se llaman *primos* ó *simples;* porque de ellos se componen todos los demás por multiplicación; existen diferentes *potencias* de los números, que se producen multiplicándolos diversas veces por sí, y una multitud de otros formados por diversas leyes; ahora bien, todos estos números y sus propiedades permanecen siempre los mismos en todos los sistemas posibles de numeración, resultando un género de especulaciones y de verdades que constituyen esta aritmética transcendental que se llama *teoría de los números.*»

«Si consideramos el Álgebra, vemos igualmente dos partes distintas, desde luego el Álgebra ordinaria, que puede llamarse *Aritmética universal,* que es una Aritmética generalizada; pero existe una Álgebra superior que se funda en la teoría del orden y de las combinaciones... Si se trata de la Geometría vemos desde luego la Geometría ordinaria, que estudia las figuras desde el punto de vista de las relaciones de magnitud; pero existe todavía una ciencia nueva que Leibnitz entrevió denominándola *Geometría de situación...* Así pues las matemáticas nos ofrecen, por un lado, la *magnitud* ó la *cantidad,* es decir, la *proporción* ó la *medida* de las magnitudes; por otra, el *número,* el *orden* y la *situación* de las cosas, sin ninguna idea de medida ó de cantidad.»

Estas ideas de Descartes y de Poinsot, no solo se han afianzado, sino que han adquirido una superior amplitud en su desenvolvimiento, merced á nuevas teorías que tienen por objeto exclusivo el orden y la combinación.

Los modos diversos de pasar de una permutación de objetos á otra, ó sea las sustituciones, constituyen una teoría que forma la esencia del Álgebra. Las sustituciones constituyen á su vez el primer grado de la amplísima teoría de los grupos de transformaciones.

Además de desarrollarse el Álgebra bajo la influencia de la teoría de las sustituciones que constituye su parte formal, toma como elemento la función, es decir, que en cierta medida penetra en la teoría más general de las funciones.

El Algebra clásica elaborada por los Descartes, Rolle y Lagrange, necesitó tomar como base el concepto de función para descender al caso de la ecuación, que constituye estados especiales de la función para los valores de las raíces de ésta.

Pero la resolución numérica de las ecuaciones no constituye el verdadero problema del Algebra. Hoy se reconoce que solo es un problema resuelto mediante la aplicación de varias propiedades de las funciones, especialmente la continuidad de las funciones

algebráicas. Así se pudieron deducir las reglas relativas á los signos de las raíces, el importante teorema de Rolle, que sirvió en ciertos casos para separar las raíces, los métodos de Newton y de Lagrange etc.

Pero entre las propiedades de las ecuaciones, la de descomponerse en factores binomios ha sido la de más transcendentales resultados, pues aparte de servir también para el problema de la resolución numérica, al dar la estructura de cada ecuación, expresando los coeficientes en función de las raíces, condujo al problema más amplio de la resolución algebráica. Desde luego hallamos los problemas de la formación de ecuaciones, cuyas raíces son funciones racionales de las raíces de otras. Cuestiones que conducen á la teoría de las funciones simétricas para depender de ellas, la cual resuelve el problema de la determinación de estas funciones por medio de los coeficientes.

Desde este momento nos hallamos en el punto de partida de dos desarrollos algebráicos distintos, de gran importancia cada uno.

El uno se funda en la propiedad *invariantiva* de las formas homogéneas, que constituye la importantísima teoría, el *Álgebra de las formas*, el otro, el *Álgebra ordinaria* en su genuino desenvolvimiento. La propiedad fundamental la hallamos en el teorema de Lagrange acerca de las funciones semejantes, es decir, las que permanecen invariables por las mismas sustituciones, á saber:

Dadas dos funciones semejantes de n *variables* x, u, z,..., *cada una de ellas puede expresarse en función racional de la otra, en la que los coeficientes son funciones simétricas de las* n *variables,* ó también:

Dadas dos funciones de n *variables*

$$V = F(x, u, z, \ldots) \qquad y = f(x, u, z, \ldots),$$

si la función y *admite todas las sustituciones de la funcion* V, *será expresable por una función racional de* V, *en la cual los coeficientes son funciones simétricas.* Lo que demuestra Lagrange formando la ecuación

$$\psi(V) = (V - V_0)(V - V_1) \ldots (V - V_{\nu-1})$$
$$= V^{\nu} + P_1 V^{\nu-1} + \ldots + P_{\nu} = 0$$

correspondiente á los ν valores distintos que pueda adquirir la función V por las sustituciones de las variables $x, u, z,\ldots$ y aplicando dichas sustituciones á la función simétrica

$$V_0^m y_0 + V_1^m y_1 \ldots + V_{\nu-1}^m y_{\nu}$$

para los valores $o, 1, \ldots (\nu - 1)$ atribuidos á m, lo que da ν ecuaciones de las que se deduce el valor de una cualquiera de las y, igualando á cero los coeficientes de las demás, etc.

De esta demostración deduce Lagrange el método para *calcular una función de las raíces de una ecuación, cuando se conoce otra función cualquiera de las raíces.*

Este análisis conduce al teorema siguiente, que demostró Galois:

Si f (x) = o *es una ecuación cualquiera de grado* n, *que no tiene raíces iguales, y*

$$V = \varphi (x_o, x_1, \ldots . x_{n-1})$$

es una función racional de las n *raíces de dicha ecuación, de tal modo elegida, que los* 1. 2. 3... n *valores que adquiere, por las sustituciones de las raíces, son todos diferentes, se podrán expresar estas* n *raíces en función racional de* V.

Siendo

$$V_o , V_1 , \ldots V_{\mu-1}$$

los 1. 2... $(n - 1)$ valores que adquiere V por la sustitución de las $n - 1$ raíces

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1},$$

se tendrá una ecuación V del grado μ.

$$(1) \qquad (V - V_o) (V - V_1) \ldots (V - V_{\mu-1}) = o,$$

cuyos coeficientes serán funciones simétricas de las raíces

$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ de la ecuación $\dfrac{f(x)}{x - x_o} = o,$

pudiéndose escribir la ecuación (1) bajo la forma

$$F (V, x_o) = o,$$

que quedará satisfecha por la sustitución de V_o, y por consiguiente

$$F (V_o , x) = o \qquad (2)$$

quedará satisfecha por $x = x_o$; de modo que la ecuación $f(x) = o$ y la (2) tendrán una raiz común, que se obtendrá haciendo las operaciones para hallar el máximo común divisor, é igualando á cero el residuo de primer grado en x.

Esto condujo á las investigaciones de Galois para resolver las ecuaciones; por medio de radicales.

Siendo f (x) *una ecuación de grado* n *cuyas raíces*

$$x_o\ ,\ x_1,\ \ldots\ x_n - 1$$

son desiguales, existe siempre un grupo de sustituciones G *tales que:*

1.° *Toda función racional de las raíces, cuyo valor numérico es invariable por las sustituciones de* G, *es expresable en función racional de las cantidades conocidas,* y

2.° Recíprocamente: *toda función racional de las raíces, expresable racionalmente por las cantidades conocidas, conserva el mismo valor, cuando se le aplican todas las sustituciones del grupo* G.

Siendo

$$V = \alpha_o\, x_o + \alpha_1\, x_1 + \ldots + \alpha_n - 1\, x_n - 1$$

una función racional de las raíces

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,\ x_n - 1$$

de la ecuación $f(x) = o$, que adquiere valores siempre desiguales por las sustituciones de las raíces y

$$\mathbf{F}\ (V) = o \quad \text{y} \quad F\ (V) = o$$

respectivamente la ecuación de grado $N = 1.\ 2...\ n$ cuyas raíces son los valores de V para todas las sustituciones, y un divisor irreducible de la primera, y siendo las raíces de la ecuación

$$F\ (V) = o,\quad V_o\ ,\ V_1,\ \ldots\ V_v - 1,$$

las raíces de la ecuación $f\ (x) = o$ se podrán representar por

$$\begin{array}{llll} \psi_o\ (V_o) & \psi_1\ (V_o) & \ldots & \psi_n - 1\ (V_o) \\ \psi_o\ (V_1) & \psi_1\ (V_1) & \ldots & \psi_n - 1\ (V_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ \psi_o\ (V_v - 1) & \psi_1\ (V_v - 1) & \ldots & \psi_n - 1\ (V_v - 1) \end{array}$$

donde cada línea horizontal representa las n raíces, siendo

$$1,\ S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_\nu - 1$$

el grupo G de sustituciones.

Consideremos una función racional de las raíces

$$\Omega = \Phi\,[\,\psi_o\,(V),\ \ldots\ \psi_{n-1}\,(V)],$$

que será una función racional de V_o, que suponemos invariable por las sustituciones de las raíces, de modo que

$$\Omega = \Psi\,(V_o) = \ldots = \Psi\,(V)_{\nu-1}$$

y

$$\Omega = \frac{1}{\nu}\left[\Psi\,(V_o) + \Psi\,(V_1) + \ldots + \Psi\,(V_{\nu-1})\right]$$

que, siendo función simétrica de las raíces de $F\,(V) = o$, será expresable en función racional de las cantidades conocidas

La función V se llama función resolvente y también la ecuación $F\,(V) = o$ función resolvente. Además el grupo G es el *grupo propio de la ecuación* $f\,(x) = o$.

Otro nuevo concepto interviene en la teoría de Galois, el de la *adjunción*. Una ecuación irreducible puede hacerse reducible por la adjunción de raíces de otra ecuación, y en la serie de teoremas que constituyen su método emplea este concepto. Así, *siendo* G *el grupo de una ecuación* $f\,(x) = o$ *de grado* n, *á la que pueden adjuntarse varias irracionales, si se le adjunta una raíz* z' *de una ecuación auxiliar* $\varphi\,(z) = o$ *de grado* m, *cuyos coeficientes son conocidos racionalmente, si después de la adjunción, el grupo* Γ' *de la ecuación* $f\,(x) = o$, *solo contiene una parte de las sustituciones, las* $m = p\,q$ *raíces de la ecuación* $\varphi\,(z) = o$ *se dividen en cierto número* p *de grupos compuestos de* q *raíces, de modo que al adjuntarse raíces de un mismo grupo, el grupo de la ecuación propuesta no cambiará, y además los* p *grupos*

$$\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_{p-1}$$

que se convierten en los propios de la ecuación, cuando se adjunta una raíz de los grupos sucesivos, serán semejantes, y se deducirán del primero mediante una misma sustitución en los ciclos que componen las diversas sustituciones de éste.

Con estas indicaciones debemos añadir que el método de Galois para resolver las ecuaciones, por medio de radicales, consiste en adjuntar á la ecuación dada sucesivamente radicales, que reduzcan el orden del grupo propio de la misma, hasta llegarse al grupo de orden 1, cuando la ecuación quede resuelta.

Pocas palabras diremos acerca de los descubrimientos de Abel, quien después de haber demostrado la imposibilidad de resolver

en general las ecuaciones superiores al 4.º grado, observó que cuando dos raíces de una ecuación irreducible pueden expresarse la una racionalmente por medio de la otra, se puede reducir la resolución de la ecuación á la de ecuaciones de grados inferiores, lo que conduce á la teoría de las *ecuaciones abelianas,* de las que el caso más sencillo es el de las ecuaciones binomias.

Expuestas las indicaciones, suficientes para formarse idea de la circunscripción propia del Álgebra ordinaria, preciso es tratar, aunque someramente, de las generalizaciones de esta ciencia que constituyen Álgebras de un orden superior.

Las investigaciones sobre el Álgebra simbólica comienzan en los trabajos de Morgan sobre el Álgebra de varias unidades y la *Linear Associative Algebra* de Benjamín Peirce, que expone una clasificación de las Álgebras, según la naturaleza de las unidades que se combinan ó *extraordinarias,* conforme con la denominación de Cayley.

Los cuaternios y la Geometría de Grassmann son casos de aplicación de dos especies de Algebras geométricas, de cuya clasificación trató Clifford *(Mathematical Papers),* y Cayley desarrolló esta cuestión en su memoria *On multiple Algebra,* haciendo una reseña á la par que una exposición interesantísima de todas estas Algebras.

«Si x, y representan cantidades ordinarias (reales ó imaginarias), susceptibles de adición y multiplicación, y estas operaciones son para aquéllas, conmutativas y asociativas, entonces podremos considerar un símbolo múltiple $(x, y,...)$ susceptible de adición y multiplicación, según determinadas leyes

$$(x, y) + (x', y') = (P, Q), \qquad (x, y)\,(x', y') = (X, Y)$$

donde P, Q, X, Y son funciones dadas de x, y, x', y'

Para mayor sencillez la ley de adición se supone ser

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

de modo que en la adición los símbolos múltiplos son conmutativos y asociativos. Pero esto no acontece en la multiplicación, según la forma de las funciones X, Y; por ejemplo, si

$$(x, y)\,(x', y') = (xx' - yy', xy' + xy'),$$

entonces respecto á la multiplicación, los símbolos son conmutativos y asociativos. Y si

$$(x, y, z)\,(x', y', z') = (yz' - y'z, zx' - z'x, xy' - x'y),$$

los símbolos son asociativos, pero no conmutativos.

Supongamos que, para una cantidad analítica ordinaria m se tenga

$$m\,(x, y,...) = (mx, my,...)$$

entonces, como una consecuencia de esta hipótesis y de la ley de adición, tendremos

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z)\\ &= x\,(1, 0, 0) + y\,(0, 1, 0) + z\,(0, 0, 1)\end{aligned}$$

y empleando las letras i, j, k para los símbolos múltiples (1, 0, 0) (0, 1, 0), (0, 0, 1), tendremos

$$(x, y, z) = xi + yj + zk$$

donde las letras i, j, k se llaman *extraordinarias*. Cada símbolo ordinario puede multiplicarse por un extraordinario, y la multiplicación es conmutativa, así $xi = ix$. La multiplicación de las extraordinarias determina la de los primitivos símbolos múltiples. De modo que si

$$(x, y)\,(x', y') = (xx' - yy', xy' + yx'),$$

entonces

$$(ix + jy)\,(ix' + jy') = i\,(xx' - yy') + j\,(xy' + yx')$$

y por consiguiente

$$= i^2\,xx' + ij\,xy' + ji\,xy' + j^2\,yy'$$

cuyas expresiones quedan satisfechas, si, y únicamente si $i^2 = i$, $ij = j$, $ji = j$, $j^2 = -i$, es decir:

	i	j
i	i	j
j	j	$-i$

Los términos x, y pueden escribirse en distinta forma, por ejemplo, podemos aplicar al símbolo $\left|\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right|$ la ley de combinación

$$\begin{vmatrix} x, & y \\ z, & w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x', & y' \\ z', & w' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x + x', & y + y' \\ z + z', & w + w' \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x, & y \\ z, & w \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x', & y' \\ z', & w' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} xx' + yz', & xy' + yw' \\ zx' + wz', & zy' + ww' \end{vmatrix}$$

multiplicación que no es conmutativa.

Estas y otras consideraciones sirven á Cayley de preliminar para varias interpretaciones. Así para los cuaternios se tiene la tabla de multiplicación

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

ó sea

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i = jk = -kj,$$
$$j = ki = -ik, \quad k = ij = -ji$$

y el producto de dos cuaternios

$$(w + ix + jy + kz)\ (w' + ix' + jy' + kz')$$
$$ww' - xx' - yy' - zz' + i(wx' + xw' + yz' - y'z)$$
$$+ j(wy' + yw' + zx' - z'w) + k(wz' + zw' + xy' - x'y)$$

En el sistema de Grassmann, las extraordinarias son

$$\varepsilon_1^2 = 0, \quad \varepsilon_2^2 = 0, \quad \varepsilon_3^2 = 0, \quad \varepsilon_2\varepsilon_1 = -\varepsilon_1\varepsilon_2,$$
$$\varepsilon_3\varepsilon_2 = -\varepsilon_2\varepsilon_3, \quad \varepsilon_1\varepsilon_3 = -\varepsilon_3\varepsilon_1.$$

El producto de dos puntos

$$x = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_3 \qquad y = y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + y_3\varepsilon_3$$

es

$$xy = (x_2y_3 - x_3y_2)\,\varepsilon_2\varepsilon_2 + (x_3y_1 - x_1y_3)\,\varepsilon_3\varepsilon_1 + (x_1y_2 - x_2y_1)\,\varepsilon_1\varepsilon_2$$

que depende de las nuevas extraordinarias

$$\varepsilon_2\varepsilon_3, \quad \varepsilon_3\varepsilon_1, \quad \varepsilon_1\varepsilon_2$$

La mayor generalización á que se ha llegado en estas investi-

gaciones se halla en dos memorias de Weierstrass y Dedekind, tituladas *Zur Theorie der aus* n *Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen.* La cuestión se reduce á establecer un Algebra *fundada en la consideración de* n *unidades principales ó símbolos abstractos que hagan las veces de claves,* como en el Algebra ordinaria 1 y $\sqrt{-1}$, así en este último caso, una relación entre cantidades imaginarias equivale á dos relaciones entre cantidades reales.

Weierstrass considera que todas las cantidades ó elementos, a, $b, c, \ldots$ constituyen un conjunto y que satisfacen á las condiciones:

1.ª La suma, diferencia, producto y cociente de dos elementos pertenecen al conjunto.

2.ª Los teoremas conmutativo, asociativo y distributivo rigen para estos elementos, que tienen la forma

$$\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots\ldots + \xi_n e_n$$

Un elemento no puede ser nulo si no lo son todas su coordenadas y la igualdad de dos elementos implica la de sus coordenadas de igual lugar. El producto $e_p e_q$ debe regirse por la ley de ser expresable en unidades lineales. Así

$$e_p e_q = \varepsilon_{1pq} e_1 + \varepsilon_{2pq} e_2 + \ldots\ldots + \varepsilon_{npq} e_n$$

La división merece especial examen, exigiéndose que el cociente

$$c\,\frac{a}{b} \text{ sea tal, que } cb = \frac{a}{b}\,b = a$$

y forme parte del conjunto.

Esta operación se reduce á determinar las coordenadas del elemento c por la condición $cb = a$, ó

$$(\gamma_1 e_1 + \ldots\ldots)(\beta_1 e_1 + \ldots\ldots) = \alpha_1 e_1 + \ldots\ldots + \alpha_n e_n$$

Efectuando las multiplicaciones, y sustituyendo los productos $e_p e_q$ en función de ε_{1pq}, se obtiene un sistema de ecuaciones

$$\gamma_1\,\varepsilon_{111}\,\beta_1 + \ldots\ldots) + \gamma_2\,(\varepsilon_{121}\,\beta_1 + \ldots\ldots) + \ldots\ldots = \alpha_1 \quad \text{etc.}$$

Si las coordenadas del factor b no anulan á la determinante de este sistema de ecuaciones, *se obtendrá, cualquiera que sea el dividendo, un sistema único y determinando de coordenadas* γ, y por consiguiente un valor *único y determinado de* c. Cuando a sea nulo, es decir:

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \ldots\ldots$$

Con estas proposiciones se define el producto como predicado y la suma como sujeto.

Suma de dos conceptos a y b es el concepto mínimo que contiene á a y b, se expresa con $a + b$, y se lee a ó b.

Producto de dos conceptos a y b es el concepto máximo contenido en a y b, se exprese $a \times b$, y se lee a y b.

Citaremos las proposiciones:

Si se tiene

$$x \overset{(}{=} c \text{ con } x \overset{(}{=} a,\ x \overset{(}{=} b \qquad \text{será} \quad x \overset{(}{=} ab$$

$$c \overset{(}{=} x, \text{ con } a \overset{(}{=} x,\ b \overset{(}{=} x \qquad a + b \overset{(}{=} x$$

Las leyes conmutativa, asociativa y distributiva rigen á las operaciones del cálculo lógico. Citaremos el teorema tautológico.

$$aa = a \qquad a + a = a$$

Este permite la reducción de las expresiones. Así

$$abcaaabdca \quad \text{y} \quad a + b + c + a + a + b + d + a$$

se reducen á

$$abcd \qquad \text{y} \qquad a + b + c + d$$

Citaremos los teoremas

$$a \,.\, 1 = a,\quad a \,.\, o = o,\quad a + o = a,\quad a + 1 = 1$$

Respecto al signo de la negación, tenemos

$$aa_1 = o \qquad a + a_1 = 1 \qquad (a_1)_1 = a$$

Cuando en un producto ó en una suma hay factores ó sumandos que son las negaciones de otros, son respectivamente 0 ó 1. Así

$$abc \,.\, ab_1 \,.\, cd_1 = 0 \qquad a + b + c_1 + a_1 + d_1 = 1$$

Siendo a y b dos dominios, se tiene

$$1 = ab + ab_1 + a_1b + a_1b_1$$

En general se tiene:

$$(a\,b)_1 = a_1 + b_1 \qquad | \qquad (a + b)_1 = a_1\,b_1$$

La negación de un producto es la suma de las negaciones de los factores.

Una suma de negaciones es la negación del producto.

La negación de una suma es el producto de las negaciones de de los sumandos.

Un producto de negaciones es la negación de la suma.

Estos teoremas permiten descomponor una expresión en factores. Así de

$$y = ab + ac + ad + bcd + e$$

resulta

$$\begin{aligned} y_1 &= (a_1 + b_1)(a_1 + c_1)(a_1 + d_1)(b_1 + c_1 + d_1)\, e_1 \\ &= a_1 b_1 e_1 + a_1 c_1 e_1 + a_1 d_1 e_1 + b_1 c_1 d_1 e_1 \\ &= (a + b + c)(a + c + e)(a + d + e)(b + c + d + e) \end{aligned}$$

Tenemos los siguientes teoremas

si $a \overset{(}{=} b$, será $b_1 \overset{(}{=} a_1$; si $a \overset{(}{=} b$ y $a_1 \overset{(}{=} b_1$, será $a = b$

Es decir; si se verifica un teorema se verificará el contrario del recíproco. Si se verifica un teorema y su contrario) se verificará dicho teorema con su recíproco.

También tenemos que

si $ab = o$, $a \overset{(}{=} b_1$, ó $b \overset{(}{=} a_1$ si $a + b = 1$, $a_1 \overset{(}{=} b$ ó $b_1 \overset{(}{=} a$.

Es decir que si, por ejemplo, no verificándose que un punto esté en la perpendicular á una recta en su punto medio y diste desgualmente de los extremos de la recta, se verificará, que si está en la perpendicular levantada en el punto medio, distará igualmente de los extremos ó que si no dista igualmente de los extremos de la recta, no estará en la perpendicular levantada en su punto medio, etc.

Estos ejemplos hacen ver la importancia del Algebra de la lógica en el conocimientò de la estructura de los razonamientos.

Una subsumción equivale á una deducción en la que el primer miembro es la hipótesis y el segundo la tesis. La afirmación simultánea será un producto lógico.

Siguiendo la notación empleada en el *Formulario matemático*, las fórmulas

$$a \,.\, a \supset b : \supset : b, \quad a \supset b \,.\, b \supset c : \supset : a \supset c$$

significan respectivamente: Si a es cierta y de a se deduce b, entonces b es cierta. Si de a se deduce b y de b se deduce c, de a se deduce c.

El producto lógico

$$a \supset b \,.\, b \supset c \,.\, c \supset d \,.\, d \supset e \,.\, e \supset f$$

es un encadenamiento de deducciones ó un sorites (polisilogismo).

La proposición

$$a \supset b \,.\, c : \supset : a \supset bc$$

se lee: si de a se deduce b y es cierta la proposición c, entonces de a se deduce bc, es decir, que: *se puede multiplicar la tesis de una deducción cierta por una proposición verdadera.*

Las expresiones

$$a = b : \supset : a \supset b \,.\, b \supset a, \qquad a \supset b \,.\, b \supset a : \supset : a = b$$

expresan que de a equivalente b, se deduce que de a se deduce b y de b se deduce a, é inversamente.

Las expresiones

$$a \supset b \,.\, = \,.\, -b \supset -a, \qquad -(a\,b) = -a \smile -b$$

indican que: Toda deducción equivale á la contraria de la recíproca, y que la negación de un producto equivale á la suma de las negaciones de los factores.

Las expresiones

$$a \supset b \,.\, a \supset c : = : a \supset bc, \qquad a \supset c \,.\, b \supset c : = : a \smile b \supset c$$

indican que

el producto lógico de dos ó varias deducciones que tienen la misma hipótesis, es equivalente á la deducción que tiene la misma hipótesis y por tesis el producto de las tesis de las deducciones dadas.

el producto lógico de dos ó varias deducciones que tienen la misma tesis, es equivalente á la deducción que tiene la misma tesis y por hipótesis la suma de las hipótesis de las deduccciones dadas.

Bastan estas indicaciones para manifestar cómo el Algebra de la lógica es un análisis, muy útil, de los procedimientos de la inteligencia en el razonamiento deductivo, aplicable á las cuestiones matemáticas, bien al tratarse de las dependencias lógicas de las proposiciones, ya de las relaciones de las clases de objetos, en cuanto concierne á su subordinación, supraordinación ó equivalencia.

Terminaremos por citar, como ejemplo de la notación simbólica empleada en el *Formulario de matemáticas*, el siguiente:

$$x, y, z \in \mathrm{N} \,.\, xy \in \mathrm{N}z \,.\, \mathrm{D}(x, z) = 1 : \supset : y \in \mathrm{N}z$$

que se lee: *Si un producto es múltiplo de un número* z, *y uno de los factores es primo con* z, entonces, *el otro factor es un múltiplo de* z.

CAPÍTULO VIII

La Crítica en la Geometría Analítica

La aplicación del cálculo á la Geometría condujo á Descartes á una nueva ciencia, la Geometría analítica, que se reducía á traducir en coordenadas rectilíneas ortogonales ú oblícuas las condiciones del problema por resolver ó de la propiedad por demostrar. El cambio de coordenadas no era más que un procedimiento útil para simplificar las ecuaciones, la eliminación otro procedimiento indispensabie para obtener un lugar geométrico. El sistema de coordenadas polares es otro modo de representación de los lugares geométricos, mediante las líneas trigonométricas, que sirve para la determinación angular y las relaciones de perpendicularidad y paralelismo, que entran en dicha determinación. La definición de la tangente depende de la noción de derivada, que aparece en la Geometría, sirviendo para establecer otras relaciones, tales como las que caracterizan el centro y los diámetros, etc.

Según esta pauta se desenvolvió la Geometría analítica, casi exclusivamente hasta los dos tercios de este siglo. Pero los descubrimientos, que se habían ido acumulando por la continuada labor de los geómetras, no tardaron en renovar su aspecto y su constitución.

Por una parte, la teoría proyectiva, por otra el nuevo algoritmo de las formas homogéneas, habían de extender los dominios de esta ciencia.

La relación anarmónica y el principio de dualidad contribuyeron primeramente á estos resultados.

El concepto de dualidad permitió desde luego el considerar el punto en la recta y la recta en el punto, es decir, el punto trasladándose en una recta determinada por dos puntos, y la recta girando al rededor del punto determinado por otras dos rectas. El valor de la relación anarmónica, determinada por un punto variable con otros tres fijos, ó de una recta variable con relacion á otras tres también fijas, corresponde á cada una de las posiciones del punto ó de la recta móvil, y da la correspondencia proyectiva de dos formas, que por efecto de la nueva representación, mediante las coordenadas tangenciales, permite además la correspondencia dualística; y también la introducción de las coordenadas trilineales, que constituyen la representación natural de las formas homogéneas, al realizar la fusión de la Geometría con

el Algebra de las formas, especialmente en la Geometría, ha dado un importante instrumento á la transcendental teoría de la polaridad.

En una palabra, la Geometría analítica tiene ya todos los recursos suficientes para representar la Geometría sintética, sobre todo, cuando por la adjunción de los elementos *impropios* ó en el infinito y del concepto de *imaginarismo*, al completar, sin excepción, la correspondencia proyectiva de las diferentes formas, también hace entrar los puntos circulares ó la cónica del infinito en el dominio de la Geometría métrica al introducir, una figura fundamental ó lo *absoluto*, según la denominación de Cayley.

Las rectas y los planos isótropos, el cono imaginario bitangente á la superficie de 2.° grado que se corresponde con el círculo imaginario, las desarrollables isótropas, etc., introducen entidades ficticias que dan unidad á la ciencia y sencillez en los razonamientos.

Por ser tan considerables los progresos de la Geometría analítica, merced á la importación de tantos conceptos como acabamos de enumerar, aun nos resta el ocuparnos de la capital influencia que ha ejercido en esta rama el Algoritmo de las formas homogéneas que, no solo le ha proporcionado un lenguaje ó medios de representación, sino que en sí contiene el gérmen de nuevas propiedades y de métodos con que amplificar los dominios de la Geometría.

El concepto de *invariación* es fuente inagotable de propiedades algorítmicas, que se traducen inmediatamente en propiedades geométricas. El procedimiento de la transformación líneal es base de relaciones variadísimas, que luego trascienden á nuevas transformaciones.

Las transformaciones lineales expresan, ya cambios de sistemas de coordenadas ó bases de referencias de las figuras, ó bien relaciones proyectivas ó afinidades lineales de figuras distintas, referidas á una misma base.

Las invariantes ó covariantes igualadas ó cero, expresan propiedades de las figuras, independientes de la elección de ejes coordenados. La anulación de la discriminante corresponde á una degeneración de una curva en otros sistemas más simples. Propiedades tales como las de contacto, osculación, sobreosculación, la polaridad, las singularidades, las transformaciones de cualquier especie, tienen su representación en la teoría de las formas.

La teoría de las formas binarias tiene su representación geométrica en el conjunto de elementos dependientes de una variable, tales como las *series de puntos* y los *haces de rayos*. La teo-

ría de las formas ternarias es idéntica con la Geometría plana proyectiva y la cuaternaria con la del espacio. Tenemos pues, las Geometrías *binaria, ternaria* y *cuaternaria.*

En la Geometria binaria los *elementos* de referencia son dos. Una forma binaria de grado n, igualada á cero, representa un sistema de n puntos en línea recta.

Por medio de las ecuaciones

$$\rho\,\xi_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \qquad \rho\,\xi_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

asociamos á cada punto de una recta otro punto de la misma recta; establecemos una *afinidad lineal.*

La correlación proyectiva está caracterizada por el hecho de que la relación anarmónica de cuatro puntos correspondientes de las dos series tiene el mismo valor

$$\frac{(\mu_1 - \mu_3)\,(\mu_4 - \mu_2)}{(\mu_3 - \mu_2)\,(\mu_1 - \mu_4)} = \alpha$$

que, sustituyendo á cada parámetro la relación de las coordenanadas, se reduce á

$$\alpha = \frac{(xz)\;(yt)}{(xt)\;(yz)}$$

relación anarmónica que permanece constante, cuando en los puntos (x_1, x_2) (y_1, y_2) (z_1, z_2) (t_1, t_2) se sustituyen las correspondientes de la afinidad lineal.

Otra representación de las series puntuales proyectivas es la siguiente:

$$a_x + \lambda b_x = o,$$

y sustituyendo en la forma

$$f = a_x{}^n, \quad x_1 = y_1 + \lambda z_1 \quad x_2 = y_2 + \lambda z_2,$$

la ecuación $f = o$ se reduce á

$$o = a_y{}^n + \frac{n}{1}\lambda\, a^{\,n-1}_{\,y}\, a_z + \ldots\ldots + \lambda^n a_z{}^n$$

y la ecuación

$$a^{\,n-r}_{\,y}\, a_z{}^r = o$$

expresa las relaciones de los sistemas polares.

Sobre la transformación lineal hallamos la *transformación*

cuadrática, que manifiesta la posibilidad de una relación no lineal existente, con reciprocidad, elemento con elemento entre dos planos, expresadas por las ecuaciones

$$\rho x_1 = y_2 y_3 \quad \rho x_2 = y_3 y_1 \quad \rho x_3 = y_1 y_2$$

y sus inversas: *á las rectas de uno de los planos corresponden en el otro cónicas que pasan por tres puntos fijos.* A las rectas, en número doblemente infinito de un plano, corresponde el conjunto de cónicas doblemente infinito de una red con tres puntos fundamentales fijos. A las cónicas que pasan por un punto de uno de los planos corresponden las rectas que pasan por un punto del otro, á cada punto de uno de los planos, corresponde, por consiguiente, la intersección de dos rectas del otro plano, y recíprocamente.

Por generalización de esta idea se llega á la *transformación racional* ó *transformación Cremona.*

Sea una transformación racional reversible:

$$\rho y_1 = f_i\,(x_1, x_2, x_3) \qquad (i = 1.\ 2,\ 3)$$

y admítamos que á cada punto y se asocia un punto x, mediante las ecuaciones

$$\sigma x_i = \varphi_i\,(y_1, y_2, y_3)$$

Debemos notar en este momento que el tomar como *forma fundamental* una forma ternaria, cuya anulación representa la curva de que se trata, el estudio de las invariantes, covariantes y formas mixtas de esta forma fundamental, se presenta como idéntico con el estudio de las propiedades proyectivas de dicha curva y de las figuras que de ella se deducen; pero además el Algebra estudia formas fundamentales que comprenden varias series de variables, coordenadas-puntos ó coordenadas-líneas, pudiéndose reducir el estudio de estas formas al estudio de un sistema simultáneo de formas, de las que cada una contenga solamente una serie de coordenadas-puntos, ó una serie de coordenadas-líneas. Juntamente pues, con la curva, considerada como figura puntual ó tangencial, se ofrece la figura representada por la anulación de una forma mixta, que se designa con el nombre de *conexo*, si

$$f(x, u) = a_x^m u_y^n = 0$$

es una ecuación que contiene de una manera homogénea las coordenadas de un punto (x) móvil y de una recta (u) también mó-

vil, esta figura es un conexo de emésimo orden y de enésima clase. A toda recta u corresponden, en general, un número infinito de puntos x, que forman una curva de emésimo orden, y á todo punto x una infinidad de rectas u que envuelven una curva de enésima clase; y presentándose simultáneamente el punto y la recta, se considera como *elemento* (x, u) *toda combinación de un punto* x *de un plano con una recta* u *del mismo.*

Otro concepto interviene actualmente en la Geometría llevándola al mayor grado de amplificación, el de *grupo.*

En el mero hecho de producir dos transformaciones consecutivas

$$x_1 = \lambda_{11}x'_1 + \lambda_{12}x'_2 \qquad x'_1 = \mu_{11}x''_1 + \mu_{12}x''_2$$
$$x_2 = \lambda_{21}x'_1 + \lambda_{22}x'_2 \qquad x'_2 = \mu_{21}x''_1 + \mu_{22}x''_2$$

el mismo efecto que la transformación resultante, vemos que estas transformaciones forman un *grupo de cuatro parámetros finito y continuo.*

Otra noción, que con la anterior vemos importada de la célebre *A sixt memoir upon Quantics* de Cayley por M. Andoyer á la enseñanza en sus *Leçons sur la théorie des formes* es la de *distancia,* definida mediante el *producto por una constante* m *del logaritmo neperiano de la relación anarmónica, determinada por los elementos* a_1 *y* a_2 *que forman lo absoluto* y *por dos elementos* (y), (z) *cualesquiera,* distancia que se define prescindiendo de un múltiplo de $2\,i\,m\,\pi$.

CAPÍTULO IX

Geometría numerativa

En la Geometría numerativa domina el concepto combinatorio. Se propone el siguiente problema. Determinar entre los ∞^r entes definidos, el número de los que satisfacen á un número de condiciones equivalentes á r condiciones simples. Esta cuestión se transforma en la investigación del número de soluciones de un sistema de ecuaciones dotadas de singularidades cualesquiera.

El desarrollo de la Geometría numerativa, en rigor, comienza con Chasles, al establecer este geómetra su principio *de correspondencia,* cuyo enunciado es como sigue:

Si se tiene en una recta una afinidad (correspondencia) en virtud de la que á un punto x *corresponden* n *puntos* ξ, *y á cada*

uno de estos puntos ξ, m *puntos* x, *sucede* m + n *veces que un punto* x *coincide con un punto correspondiente* ξ.

Relativamente á un sistema de curvas, dos números llamados *característica del sistema*, tienen especial importancia, á saber: μ el número de las cónicas del sistema que pasan por un punto fijo cualquiera, y ν el número de cónicas del sistema tangentes á una recta fija dada.

Estas características fueron introducidas por Chasles, que ha creado esta teoría, desarrollada después por Jonquières, Cayley, Salmon y Zeuthen.

Entre los trabajos concernientes á esta cuestión, citaremos «Théorèmes généraux concernant les courbes géométriques planes d' un ordre quelconque» de Jonquières, donde se establece la noción de una serie de curvas de índice N, considerando las curvas de orden n que satisfacen á $\frac{1}{2} n (n+3) - 1$ condiciones, entonces N expresa cuántas de estas curvas pasan por un punto arbitrario dado, y se dice que el índice de la serie es N.

Chasles en la memoria «Détermination du nombre des sections coniques qui doivent toucher cinq courbes données d'ordre quelconque, ou satisfaire à diverses autres conditions» establece la noción de las dos características (μ, ν) de un sistema de cónicas que satisfacen á cuatro condiciones.

Salmon en «On some Points in the Theory of Elimination» y en «On the Number of surfaces of the Second Degree which can be described to satisfy nine Conditions» establece la noción de la representación casi-geométrica de las condiciones por medio de lugares en el hiper-espacio.

Zeuthen escribió acerca de esta cuestión «Contribution to the Theory of Systems of Conics which satisfy four conditions». El método empleado depende de la determinación de los pares-líneas de los pares-puntos y de los coeficientes numéricos por los que éstos deben multiplicarse en los diversos sistemas de cónicas que satisfacen á cuatro condiciones de contacto con una curva ó con curvas dadas.

De Jonquières escribió «Mémorie sur les contacts multiples d' ordre quelconque des courbes du dégré r qui satisfont à des conditions données de contact avec une courbe fixe du degré m; suivi de quelques réflexions sur la solution d' un grand nombre de questions concernant les propriétés projectives des courbes et des surfaces algébriques» que contiene una fórmula general del número de curvas C^r que tienen contactos de órdenes dados a, b, c, ... con una curva dada U^m, y también escribió la memoria

«Recherches sur les séries ou systèmes de courbes et de surfaces algébriques d'ordre quelconque».

Cayley escribió «Sur les coniques determinées par cinq conditions d'intersection avec une courbe donnée» y su notable y extensa memoria «On the courbes which satisfy given Conditions» donde trata de las memorias anteriormente citadas.

«Una condición impuesta acerca de un objeto se refiere á relaciones entre los parámetros de éste. Un objeto que satisface á condiciones dadas, puede llamarse por brevedad la solución de la condición. Una condición puede en varios casos quedar satisfecha de varios modos, y en cierta manera puede considerarse como ordinario y propio uno de ellos, entonces, los demás son *especiales* ó *impropios*. Una serie de un número n de parámetros puede considerarse como las coordenadas de un espacio de n dimensiones, y si los parámetros están unidos por una simple, doble, triple ó *m-upla* relación, el punto está en simple, dobles, triple ó *m-uplo* lugar. A la relación compuesta de dos ó más relaciones corresponde el lugar intersección ó lugar común de los lugares correspondientes, respectivamente, á las relaciones componentes.

«El orden de un sistema de puntos es igual al número de puntos, considerándose los coincidentes, cada uno, con su propio número de veces.

«Una *k-upla* ó *l-upla;* ..... relación, equivalentes reunidas á lo menos á una $(k + l + ...)$ upla relación, no son independientes.

«Si se imagina una curva de orden dado cuya ecuación contiene n parámetros arbitrarios, para fijar las ideas, se puede suponer que estos entran racionalmente en la ecuación, de modo que, dados los valores de los parámetros, la curva quede determinada.

«Considerando el caso general en que la condición, y por consiguiente el lugar es *k-uplo*, cada solución corresponde á un punto del *k-uplo* lugar.

«Supongamos que las condiciones por satisfacerse en una curva son una *k-upla* condición, una *l-upla* condición etc. de una variedad total $= n$. Si las condiciones son *completamente* independientes, tenemos un *k-uplo* lugar, un *l-uplo* lugar, que no tienen más lugar común que el sistema-punto de intersección y el número de curvas que satisfacen á las condiciones dadas».

Otras varias proposiciones preliminares establece Cayley, que es inutil transcribir, pues con las indicadas basta para dar una idea del caracter de la Geometría numerativa.

Muchos matemáticos podríamos citar que han escrito posteriormente de este asunto, tales son Cremona, Hirst, Dini, Brill, Humbert, Spottiswoode, Fouret, etc. citados en la interesante

obra *Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche* del Sr. Gino Loria. La enumeración de las obras citadas seria larga.

Debe citarse muy especialmente al geómetra Sr. Schubert, que además de varias memorias sobre esta teoría, ha publicado su importante obra: *Kalkül der Abzählenden Geometrie* que trata del *simbolismo de las condiciones, fórmulas de incidencias* (es decir, figuras comunes á dos elementos distintos, tales como, por ejemplo *punto* y *recta*, cuando el punto se halla en la recta, *plano* y *rayo* cuando el rayo se halla en el plano, etc.). Las *fórmulas de las coincidencias. El cálculo de la enumeración de las degeneraciones. Las coincidencias múltiples. La teoría de las características etc.*

CAPÍTULO X

Crítica de la teoría de las funciones

Puede considerarse como una época de profundas creaciones la que comienza con la memoria de Cauchy sobre las *cantidades geométricas.*

Cauchy observa que una cantidad geométrica $w = u + vi$ debe considerarse como función de otra cantidad geométrica variable $z = x + yi$, siempre que el valor de z determine el valor de w, ó más geométricamente, siempre que la posición del punto z determine la posición del punto w, para lo que bastará que u y v sean funciones determinadas de x é y. Como dice Cassorati en su obra *Teoria delle Funzioni de variabili complesse*, esta definición puede implicar puramente la dependencia del valor de w del de z; y si bien Cauchy continuaba tácitamente admitiendo el *substratum* de una expresión analítica, se podía notar en esta definición la tendencia de los progresos del Analisis y de la Física matemática á establecer los principios de una teoría general de las funciones, independientes de la suposición de expresiones analíticas.

La función de $z = x + yi$, que tiene una derivada independiente del valor de $\frac{dy}{dx}$, conocida con el nombre de *monógena*, la función de z que adquiere el mismo valor en un mismo punto del plano ó de una región designada de éste, ó sea la función *monodroma* y la función *sinéctica* que es finita, continua, monógena y monodroma, constituyen la base del estudio de las funciones de variables complejas, desde que Cauchy las dió á conocer en su célebre memoria de que nos ocupamos.

Además en su memoria *sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires*, define la integral

$$\int_{x_0+y_0 i}^{X+Yi} f(z)\,dz \qquad \text{ó} \qquad \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$$

como el límite hacia que tiende la suma

$$(z_1 - z_0) f(z_0) + (z_2 - z_1) f(z_1) + \ldots + (Z - z_{n-1}) f(z_{n-1})$$

cuando los puntos

$$z_0, z_1, z_2, \ldots Z,$$

que aumentan en número al aproximarse unos á otros, tienden á formar una curva, ó sea el *camino de la integración*, demostrando que el valor de la integral de $f(z)\,dz$ no cambia, al cambiar el camino de la integración, mientras este no atraviese ningún punto singular, propiedad capital en la nueva teoría de las funciones. Con los descubrimientos de Cauchy se enlazan los de Puiseux, expuestos en su memoria *Recherches sur les fonctions algébriques.*

Partiendo del teorema demostrado por Cauchy, á saber, que los valores de w dados por una ecuación algebráica $f(w, z) = 0$ varían de una manera continua al mismo tiempo que z, obtiene que el valor final de w permanece constante, al deformarse el camino de z, mientras éste no pase en sus deformaciones por puntos en que w sea infinita ó igual otra raíz de la ecuación, determina las sustituciones circulares de las raíces iguales correspondientes á un mismo punto a, al girar z al rededor de éste, y da la expresión de dichas raíces en serie ordenada según las potencias ascendentes de $z - a$, considerando el camino total descompuesto en *contornos elementales.*

Cauchy, continuando sus investigaciones, llega á su teorema fundamental en la teoría de las funciones: *Para que una función sea desarrollable en serie ordenada, según las potencias enteras y positivas de la variable, y convergente en un círculo cuyo centro es el punto-cero, es necesario y suficiente que la función sea sinéctica en dicho círculo.*

A esta expresión por series de una función compleja añade Cauchy la expresión por series de las integrales de las ecuaciones diferenciales.

Si las letras T, X, Y, Z, ... *representan funciones de las variables* t, x, y, z, ... *que permanecen finitas, monodromas y monógenas en la proximidad de los valores* τ, ξ, η, ζ, *y sujetamos á*

x, y, z, ... *á la doble condición de verificar, para cualquier valor de* t, *á las ecuaciones diferenciales*

$$\frac{dt}{T} = \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} = \ldots\ldots$$

y de reducirse á $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ *para* $t = \tau$. *Si* T *no se anula para*

$$t = \tau, \quad x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta, \ldots\ldots$$

entonces se demuestra que es posible satisfacer, mientras el módulo de $t - \tau$ *no exceda de cierto límite, á las dos condiciones enunciadas con valores de* x, y, z, ... *desarrollados en series convergentes, y que representen las integrales de las ecuaciones diferenciales propuestas.*

Entre los descubrimientos de Cauchy hallamos el *cálculo de los residuos*, que si bien se definieron como coeficientes de $\frac{1}{c-z}$ en el desarrollo de una funcíón en serie ordenada, según las potencias de $z - c$, definió como *residuo* de una función w monógena y monodroma, relativo á un valor c de z, el valor de la integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int w\,dz$$

tomado á lo largo de un camino cerrado que gire una sola vez al rededor de c y que no comprenda otros puntos-valores de z para los que w sea infinita; siendo el *residuo integral de* w *relativo al área* S el valor de dicha integral tomado á lo largo del contorno de S.

También debemos citar el célebre teorema de Cauchy acerca del número de raices de una ecuación $w = 0$ contenidas en el interior de un contorno, cuando la derivada w' es continua y finita.

Los analistas Briot y Bouquet en sus memorias *Recherches sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles* y *Sur l'intégration des équations différentielles au moyen des fonctions elliptiques*, expusieron las propiedades de una función mediante la ecuación diferencial

$$\frac{dw}{dz} = f(w, z)$$

y, además, su *Théorie des fonctions elliptiques* constituye una magistral síntesis de lo descubierto hasta entonces acerca de las

funciones de variables complejas; formando el resumen de los grandes descubrimientos que Abel y Jacobi habían hecho acerca de las funciones elípticas, que creó Fagnani dando origen á la primera obra de esta teoría escrita por Legendre; y á estos trabajos hay que agregar los descubrimientos de Hermite y de Liouville sobre las funciones doblemente periódicas, especialmente la representación de la doble periodicidad, que dió este último por medio de paralelógramos, y el haber demostrado el Sr. Hermite que *el residuo integral de cualquier función doblemente periódica monógena y monodroma, relativo al área de un paralelógramo es nulo.*

De inmensa trascendencia fueron los descubrimientos de Riemann que hoy figuran en las mejores obras acerca de la teoría de las funciones. Su célebre superficie, por la que se estudian las funciones polítropas como monótropas, y su teoría de las conexiones, que es la base de la moderna teoría denominada *Analysis situs,* constituyen un cuerpo de doctrina, que se presentó como una modificación ventajosa y una amplificación de la doctrina de Cauchy.

Todos estos descubrimientos contituyen el núcleo sobre que se han desarrollado todos los ulteriores progresos, y en rigor á ellos debemos agregar los nuevos puntos de vista del insigne analista Weierstrass, que funda la teoría de las funciones en el desarrollo en series enteras, de la que haremos las indicaciones siguientes:

En cuanto á los números *reales,* su expresión es

$$\xi = \sum_r \frac{1}{m_r} \qquad \text{ó} \qquad \xi e = \sum \frac{e}{m_r}$$

según no se exprese ó se exprese la unidad principal con la que están formados.

Los números no bastan para resolver todos problemas del Análisis, pues en particular, no resuelven el problema expresado por la ecuación

$$x^2 + 1 = 0;$$

pero con números formados mediante dos unidades,

$$a = \xi e + \xi' i$$

se puede formar una Aritmética análoga á la Aritmética ordinaria, especialmente, si se quiere conservar para la multiplica-

ción las leyes características, existiendo en el campo de estos números complejos dos números e, i sin relación real y tales que

$$ee = e, \quad ei = i, \quad ii = -e$$

Más generalmente, sean

$$x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_n$$

n letras escritas en un orden determinado, de las que cada una puede tomar todos los valores reales, desde $-\infty$ hasta $+\infty$. El conjunto de todos los valores que se pueden dar á dichas letras constituye una variedad n veces infinita ó de n *dimensiones*, y un sistema de valores atribuidos á las n letras se llama *lugar* ó *punto* en la variedad n veces infinita; á dicho sistema de valores corresponde un *lugar* en la variedad. Dado un lugar (a)

$$(a_1, \ a_2, \ \ldots, \ a_n),$$

el conjunto de lugares

$$a_1 - \delta_1 \ y \ a_1 + \delta_1'; \ a_2 - \delta_2 \ y \ a_2 + \delta_2'; \ \ldots; \ a_n - \delta_n \ y \ a_n + \delta_n$$

se llama un *entorno* del lugar (a).

Cuando para δ suficientemente pequeño existen siempre lugares en un entorno, los lugares definidos forman *un continuo*.

Teorema fundamental—*Si en una variedad de una dimensión existen infinitos lugares que satisfacen á una definición común, existirá en dicha variedad, por lo menos, un lugar que tenga la propiedad de que para cualquier entorno suyo, por pequeño que sea, existan siempre infinitos lugares que satisfagan á dicha definición* y en general: *si en una variedad de* n *dimensiones se tienen infinitos lugares que satisfacen á una definición comun, que indicaremos con* (x'), *existirá siempre en dicha variedad, por lo menos, un lugar* (X) *que tenga la propiedad de que en cualquier entorno de* (X), *por pequeño que sea, existan infinitos lugares* (x').

Si una cantidad variable, real ó compleja, está ligada á otra variable real ó cómpleja x, de modo que á cierto valor de x corresponden, entre ciertos límites, uno ó varios valores determinados de y, se dirá que ésta es una función de aquélla, en la acepción más general, y análogamente diremos de y para todos los sistemas de variables

$$x_1, \ x_2, \ \ldots\ldots, \ x_n$$

Una función será continua en el campo de una variedad representada por dichas variables, si

$$f(x_1', x_2', \ldots\ldots, x_n') - f(x_1^0, x_2^0, \ldots\ldots, x_n^0) < \varepsilon$$

Pero observa Weierstrass que la definición de *función analítica* no puede establecerse *a priori*, para conseguirlo, añade, se comenzará por estudiar las propiedades de las funciones formuladas con las operaciones directas más sencillas de la Aritmética (adición y multiplicación) en número finito, después se pasará á las funciones que se presentan como una primera generalización de éstas, que estarán formadas de las mismas operaciones, en número infinito, después combinaremos á su vez un número finito ó infinito de veces las funciones formadas con tales expresiones, y conseguiremos hallar como propiedad fundamental y característica de las funciones analíticas el desarrollo en serie de potencias ó desarrollo de Taylor.

Si con $\varphi_n(x)$ se representan infinitas funciones racionales, se podrá definir una función $f(x)$ con la condición de que el valor de $f(x)$ esté dado, para todo valor x_0 de x, por la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_0),$$

y la condición necesaria y suficiente para que esta suma tenga el significado indicado anteriormente, es que sea finita y determinada la suma.

$$\sum_{1}^{\infty} |\varphi_n(x_0)|$$

de los módulos de los términos. El conjunto de valores de x para los que se verifica dicha condición, es el *campo de convergencia de la suma ó serie* f(x).

Una suma de infinitas funciones racionales

$$\Sigma \varphi_r(x)$$

es *convergente en igual grado*, dentro de cierto campo, si tomado un número ε suficientemente pequeño, existe un número N correspondiente tal, que para todos los valores $n > N$, se tenga

$$\left| \sum_{r=1}^{\infty} \varphi_r(x) - \sum_{r=1}^{n} \varphi_r(x) \right| < \varepsilon$$

Una suma de infinitas funciones racionales convergente, en igual grado, dentro de cierto campo, representa una función continua.

Establecidas las condiciones de convergencia de las series de potencias, llega Weierstrass al concepto de función analítica.

Dada una serie de potencias $f(x \mid a)$ convergente dentro de un círculo de centro a y radio r que determina una función de caracter racional entero, tomándose otro punto b en el interior de dicho círculo, se puede deducir de la serie primitiva otra $f(x \mid a \mid b)$ respecto al punto b, que tendrá un círculo de convergencia de radio r', que puede extenderse fuera del círculo (a, r): esta serie será la *continuación* de la serie definida por $f(x \mid a)$, para los puntos del círculo (b, r'), exterior al círculo (a, r).

Todas infinitas series $f(x \mid a \mid b \ldots.)$ que pueden deducirse de una serie dada, sea inmediata ó mediatamente, constituyen los *elementos de una función analítica*, y la serie $f(x \mid a)$ será el *elemento primitivo* ú *originario*. El conjunto de los elementos da la *función analítica* en toda su extensión. El conjunto de valores de x, para los cuales, del elemento originario se puede tener una serie deducida, se llama *campo de validez* y los valores de x, no pertenecientes al campo de validez, *puntos singulares*.

Un analista cuyas investigaciones han coincidido con las de Weierstrass es M. Meray, quien desde 1868 se hallaba en posesión de las ideas fundamentales acerca del papel que desempeñan en la teoría de las funciones las potencias enteras y positivas de las variables.

Para M. Meray la idea del desarrollo en serie de Taylor es algo de primordial y exclusivo. La idea de número le basta, las series enteras le son suficientes para entrar en el fondo del asunto. Establecida la teoría de las series enteras, que considera como constituyendo exclusivamente la materia de todas las teorías que se refieren al Análisis infinitesimal, llama *olótropa* á la función $f(x, y, \ldots.)$, cuando

$$f(x_0 + h, \quad y_0 + k, \quad \ldots..)$$

es desarrollable en serie entera con relación á $h, k, \ldots.$, y expone la generación de las funciones por *prolongación, continuación, (cheminement).*

La teoría de los índices de Cauchy condujo á la proposición:

Si f(z) *es una función uniforme en todos los puntos de una área* A, *y si es continua y diferente de cero, también en todos los puntos de esta área, excepto en un punto* c, *donde puede ser nula ó infinita* (de primera especie), *esta función podrá, en toda la extensión del área, ponerse bajo la forma*

$$f(z) = (z - c)^m E(z)$$

siendo E (z) *una función uniforme continua y diferente de cero, en cada punto de* A, *sin excepción, y* m *un número entero, positivo, negativo ó nulo, según que* f (c) *sea nulo, infinito ó finito diferente de cero.*

La teoría de los ceros y de los polos, se completa con la de los *puntos singulares esenciales,* cuyo estudio sistemático se debe á Weierstrass. En la proximidad de éstos, la función *se aproxima tanto como se quiere á cualquier valor dado,* es decir, que dado un número ε, tan pequeño como se quiera, y un número A cualquiera, existirá siempre, en el interior de un círculo cuyo centro es a y un radio tan pequeño como se quiera, puntos z para los que

$$|f(z) - A| < \varepsilon$$

Así, la función (1) $e^{\frac{1}{z}} = A$, en la que A es una constante cualquiera diferente de cero, haciendo

$$A = Re^{\alpha i} \qquad \frac{1}{z} = p + qi$$

se deduce

$$z = \frac{1}{\log R + (\alpha + 2K\pi)\, i}$$

que tiende á cero, cuando k aumenta indefinidamente, resultando que la ecuación (1) tiene una infinidad de raíces en la proximidad de $z = 0$.

Weierstrass aplicó á las funciones uniformes continuas F (z) en todo el plano el teorema fundamental del Álgebra, demostrando que *se puede formar una función entera* F (z) *cuyas raíces sean las cantidades*

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots\ldots \quad a_n$$

tales que

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{a^n} = 0$$

y solamente dichas cantidades, deduciendo, enseguida que *una función* f (z) *uniforme en todo el plano y que no tenga más que polos á distancia finita, puede ponerse bajo la forma de un cociente de dos funciones enteras* F_1 (z) y F (z).

Una teoría que ha adquirido gran desarrollo é importancia en los tiempos modernos es la de los *conjuntos* del profesor G. Can-

tor fundada en el concepto de *número cardinal* ó *potencia*, que es la idea general que se deduce, por medio de nuestra facultad de pensar, de un conjunto M de objetos, haciendo la doble abstracción de la naturaleza de sus elementos y de su orden, siendo una especie de imagen intelectual ó proyección en nuestra inteligencia de dicho conjunto.

La potencia sirve de criterio para relacionar entre sí dos conjuntos, por correspondencia *unívoca* y *recíproca* en cuyo caso tienen la misma potencia.

En primer lugar, considera los conjuntos *enumerables* E, cuyos elementos pueden colocarse en una serie

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \ldots\ldots \quad u_n, \ldots\ldots,$$

análoga á la de los números enteros. Haciendo

$$u_{\alpha_1} = v_1, \ldots\ldots u_{\alpha_n} = v_n, \ldots\ldots$$

en un conjunto u_α, lo que pondremos bajo la forma

$$v_1, \quad v_2, \ldots\ldots v_n, \ldots\ldots,$$

veremos que es enumerable. Lo mismo podremos hacer, considerando un número finito de conjuntos enumerables; y refiriéndonos á tres ejes de coordenadas, podemos poner en correspondencia el elemento

$$u_{m_1 m_2 m_3} \quad \text{con el punto de coordenadas} \quad m_1, m_2, m_3,$$

y obtendremos todos los puntos cuyas coordenadas son todos los números enteros positivos. Este conjunto contiene una infinidad de puntos, y una esfera cualquiera contiene un número limitado de ellos, resultando que tiene la misma potencia que E, es decir, que es enumerable (*)

Al comparar los conjuntos enumerables con otros conjuntos, resulta que un *conjunto infinito* A', *que se obtiene suprimiendo de otro conjunto* A *también infinito un conjunto enumerable, tiene la misma potencia que* A, resultando ser los conjuntos enumerables con relación á otros conjuntos, como los infinitamente pequeños respecto á las cantidades finitas.

Uno de los conjuntos no enumerables es el de *los números reales comprendidos entre* 1 *y* 0, lo que se demuestra observando que, dado un conjunto enumerable

$$u_1, \quad u_2, \ldots\ldots u_n, \ldots\ldots$$

(*) Véase *Leçons sur la théorie des fonctions* par *E. Borel.*

existen números comprendidos entre 0 y 1 que no forman parte de este conjunto. Los conjuntos de igual potencia que el conjunto C de los números comprendidos entre 0 y 1, se dice que tienen la *potencia del continuo,* por ejemplo, el conjunto de los puntos interiores al cuadrado cuyos lados tienen por ecuaciones

$$x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = 1.$$

Conjunto derivado de otro es el conjunto de los puntos tales, que en la proximidad de cada uno de ellos se encuentra una infinidad de puntos del conjunto dado, y *punto límite* del conjunto A es un punto a', tal que siempre existe un punto a cuya distancia á a' sea inferior á una cantidad tan pequeña como se quiera; y un conjunto idéntico con su derivado, será un *conjunto perfecto;* y será *denso* en un intervalo $a, b,$ cuando todo intervalo, tan pequeño como se quiera, contenido en $a, b,$ contenga puntos del conjunto.

Otro concepto interesante es el de la *prolongación analítica.*

Dadas dos series P (x — a), P (x — b), *si sus círculos de convergencia tienen una parte común, y si las series tienen el mismo valor, así como sus derivadas en un punto interior á esta parte común, tienen la misma suma en todos los puntos en los que las dos son convergentes,* y cada una de ellas es una *prolongación analítica inmediata de la otra.*

Dada una serie P $(x - a)$, si tiene prolongaciones analíticas inmediatas, las obtendremos tomando diversos puntos en el interior de su círculo de convergencia y formando el desarrollo de Taylor; procederemos igualmente con las nuevas series, y continuando indefinidamente, obtendremos los elementos de la función analítica que pueden deducirse del elemento dado y que constituyen con él una *función analítica,* tal es la definición más general dada por Weierstrass de una *función analítica.*

Además de la función analítica hay que distinguir la *expresión analítica,* es decir, toda expresión cuyo valor se puede calcular por medio de operaciones analíticas conocidas: adición, multiplicación, división, integración definida ó indefinida, etc. Para definir una función analítica en todo su dominio de existencia, es necesaria una infinidad de elementos. El problema que se ofrece en este momento es el de la posibilidad de encontrar una expresión analítica *que converja en todo punto del dominio natural de existencia de la función,* problema resuelto por los señores Runge y Painlevé.

Una *función entera* es una función analítica que no admite ninguna singularidad á distancia finita, y está caracterizada

las ecuaciones del sistema son compatibles, cuando b no sea cero, se tendrá $bc = 0$, *sin ser cero ninguno de los factores*. Tenemos pues la célebre teoría de los *divisores de cero* de Weierstrass, propiedad que caracteriza al sistema de n unidades complejas, cuyo cálculo es una generalización del cálculo ordinario al que aquél se reduce, en el caso de ser

$$n = 2, \quad e_1 = 1, \quad e_2 = \sqrt{-1}$$

siendo en este, por el contrario, la condición para que un producto sea cero, que lo sea por lo menos uno de sus factores.

CAPÍTULO VII

El Algebra de la lógica.

Según el filósofo Hamilton, la lógica es la ciencia de las leyes del pensamiento, abstracción hecha de la materia del conocimiento, de la que solo conserva la forma común y universal.

Las leyes generales que considera son las de identidad, contradicción y exclusión. 1.° Una cosa es igual á sí misma. 2.° Dos proposiciones de la que una afirma y otra niega, no pueden ser pensadas simultáneamente. 3.° El principio de disyunción, á saber: de dos atributos contradictorios, si el uno es afirmado el otro debe ser negado.

Al pensar en un objeto, le hacemos entrar en una noción. El predicado es pensado con una cantidad igual á la del sujeto. La *cuantificación del predicado* es el principio esencial de este sistema lógico. Esto conduce á admitir 8 especies de proposiciones: *toto-totales, toto-parciales, parti-totales y parti-parciales* y las correspondientes negativas, por ejemplo: Todo triángulo es todo trilátero, todo triángulo es alguna figura, alguna figura es todo triángulo, algunas figuras equiláteras son algunos triángulos etcétera.

Si el predicado de toda proposición tiene una cantidad determinada, y si esta cantidad es precisamente igual á la del sujeto, sujeto y predicado son en las proposiciones afirmativas, como los dos miembros de una ecuación. De esta manera se deduce el silogismo á una serie de ecuaciones.

$A = B$, $B = C$, luego $A = C$ es el principio de la analítica de Hamilton.

Boole extendió la potencia de la lógica deductiva. La operación deductiva es la eliminación de un término medio en un sistema de términos.

Este filósofo-matemático generalizó el problema en la forma siguiente: Dado un sistema de un número cualquiera de términos, eliminar tantos medios como se quiera, y determinar todas las relaciones implicadas por las premisas entre los términos que quedan, ó: Dadas ciertas condiciones lógicas, determinar la descripcion de una clase bajo estas condiciones.

Considera como pricipio matemático que *la validez del análisis algebraico depende, no de la interpretación de los símbolos, sino de las leyes de combinación.*

La Matemática abstracta toma como objeto *las operaciones independientes de la materia* á que puedan aplicarse, y prescindiendo de esta materia, quedan ciertas propiedades expresadas por las igualdades siguientes:

para $a = a'$, $a + b = a' + b$;

$a + (b + c) = (a + b) + c$, $a + b = b + a$, $a + 0 = 0 + a = a$

Con el fin de construir el álgebra de la lógica, Boole emplea tres clases de símbolos: 1, 0, x, y, z,... para representar las cosas, $+$, $-$, $\times$ para las operaciones, $=$ para la identidad.

El signo 1 representa *todo*, el 0 *nada*. Triángulo equilátero, rectángulo podrá expresarse por $x\ y\ z$.

Los símbolos lógicos tienen la propiedad conmutativa

$$xy = yx$$

Si de un grupo de seres extraemos todos los x, y repetimos la misma operación sobre la clase obtenida, obtendremos todavia la misma clase, así $xx = x$ ó $x^2 = x$.

Podemos reunir en un todo partes diferentes ó separar de un todo sus partes, y tendremos $x + y$, ó $x - y$.

Los símbolos lógicos tienen la propiedad distributiva

$$z\,(x + y) = zx + zy$$

En cuanto á los símbolos 1 y 0, tenemos que $0y = 0$, $1y = y$. Si 1 es la totalidad de los seres, $1 - x$ representará la clase complementaria de x.

Siendo

$$x^2 = x, \text{ resulta } x - x^2 = o, \quad x\,(1 - x) = o$$

que expresa el principio de contradicción, es decir que la clase de individuos que son á la vez x y $1 - x$ es nula.

En las proposiciones disyuntivas «las cosas que son x ó y» se

tendrán símbolos de cosas que son x y *no* y, y de cosas que son y y *no* x:

$$x(1-y)+y(1-x)$$

Si x é y pueden coexistir, se tendrán todas las alternativas posibles:

$$xy+x(1-y)+y(1-x)$$

Para constituir el cálculo lógico se sigue esta regla capital:

Prescindir de la interpretación lógica de los símbolos en la ecuación dada, convertirlos en símbolos cuantitativos, susceptibles solamente de los valores 0 y 1, someterlos á los procedimientos requeridos por la solución, y dar al fin la interpretación lógica.

Toda función $f(x)$ en la que x es solamente susceptible de los valores 0 y 1, puede desarrollarse bajo la forma $ax+b(1-x)$. Para $x=1$ se tiene $f(1)=a$, para $x=o$, $f(o)=b$, y sustituyendo en la primera ecuación, resulta el desarrollo

$$f(x)=f(1)\,x+f(0)\,(1-x)$$

Para $f(x, y)$, considerándola primero como función de x sola, se tendrá:

$$f(x, y)=f(1, y)\,x+f(0, y)\,(1-x)$$

y desarrollando enseguida $f(1, y)$ y $f(0, y)$, resulta el desarrollo

$$f(x, y)=f(1, 1)\,xy+f(1, 0)\,x(1-y)$$
$$+f(0, 1)\,(1-x)\,y+f(0, 0)\,(1-x)\,(1-y).$$

Como interpretación citaremos la siguiente: sea y hombres, x seres mortales. Para interpretar la expresión: Hombres inmortales no existen, escribiremos:

$$y(1-x)=o,\ y-yx=o,\ yx=y,\ x=\frac{y}{y}.$$

Desarrollando el segundo miembro, tendremos

$$x=y+\frac{0}{0}(1-y)$$

es decir que los mortales (x) están constituídos por los hombres (y) y un número indefinido de seres que no son hombres.

De las muchas obras que se han publicado acerca de esta cien-

cia, citaremos las magistrales obras: *Volesungen über die Algebra der Logik* y *Logique der relative* del profesor Schroeder.

De la primera extractaremos alguna idea que sirva para formar una idea general de esta nueva doctrina.

Los juicios categóricos se presentan bajo la forma de teoremas que unen un sujeto á un predicado, el enlace es la cópula «es».

Los juicios categóricos son aquéllos en los que el sujeto está subordinado al predicado ó es idéntico con él. Las expresiones

$$a \subset b, \quad a = b, \quad a \overset{\subset}{=} b$$

representan las proposiciones:

Todo a es b pero no todo b es a; todo a es b y todo b es a; la tercera representa la reunión de las dos primeras.

Podemos tomar como elementos de una variedad los puntos de una recta, de un plano ó del espacio para aplicarles las reglas del cálculo lógico.

Los principios fundamentales se expresan por las subsumciones:

$$a \overset{\subset}{=} a; \quad \text{si } a \overset{\subset}{=} b \text{ y } b \overset{\subset}{=} c \quad \text{será } a \overset{\subset}{=} c.$$

La definición de la igualdad idéntica se reduce á

$$\text{si } a \overset{\subset}{=} b \text{ y } b \overset{\subset}{=} a, \quad \text{será } a = b.$$

En toda subsumción se puede sustituir á un sujeto, un sujeto de éste y á un predicado, un predicado del mismo.

El nulo y el uno idéntico se definen por las subsumciones

$$o \overset{\subset}{=} a, \quad a \overset{\subset}{=} 1,$$

es decir que el 0 está subordinado á todo predicado y el 1 es predicado de todo sujeto, *el* 0 *está contenido en cualquier dominio de la variedad y el* 1 *es un dominio en el que está contenido cualquier dominio de la variedad.*

La *multiplicación* y la *suma* son las operaciones más importantes para deducir de dos dominios un tercero, ó de dos clases una tercera, discrepan de las operaciones aritméticas, y son independientes entre sí.

Una tercera operación es la *negación*.

Cuando para dominios dados a, b, c *resulta que*

$c \overset{\subset}{=} a$ y $c \overset{\subset}{=} b$	$a \overset{\subset}{=} c$ y $b \overset{\subset}{=} c$
será $c \overset{\subset}{=} ab$	será $a + b \overset{\subset}{=} c$

porque su desarrollo mediante la fórmula de Taylor tiene un radio de convergencia infinito.

Una función está perfectamente conocida cuando se conoce su modo de variar al moverse z en su plano. Así se conocen las funciones e^z, *cos z, sen z* y otras.

Desde luego podemos citar como proposición preliminar para el desarrollo de una función entera en serie el teorema siguiente, debido á Cauchy: *Una función* F (z) *no puede permanecer finita sin reducirse á una constante.*

El teorema de Weierstrass: *En la proximidad de un punto singular esencial, una función uniforme puede aproximarse tanto como se quiera á todo valor dado* condujo á M. Picard á demostrar el siguiente teorema: *Una función entera* F (z) *tal, que las ecuaciones*

$$F(z) = a, \quad F(z) = b, \qquad (a \neq b)$$

no tienen raíces, se reduce á una constante.

Observamos de paso que todas las funciones enteras son reducibles á la forma

$$F(z) = e^{G(z)}$$

siendo G (z) una función entera y que: *de todas las funciones enteras que no tienen ceros, la más sencilla es* e^z.

Un importante resultado de Weierstrass nos falta mencionar, á saber, que: *Dada una serie infinita cualquiera de números, cuyos módulos crecen indefinidamente, es posible formar un producto de factores primarios, de los que cada uno se anula por uno de estos números. Este producto es absoluta y uniformemente convergente en todo dominio finito y representa, por consiguiente, una función entera.*

Una de las correspondencias más importantes es la *representación conforme.* Se puede establecer una correspondencia entre dos planos

$$X = P(x, y), \qquad Y = Q(x, y)$$

La condición necesaria y suficiente para que esta transformación *conserve los ángulos,* es

$$dX^2 + dY^2 = \lambda (dx^2 + dy^2)$$

y en este caso la representación de un plano sobre el otro es una representación conforme. La sustitución

$$\left(z, \frac{az + b}{cz + d}\right)$$

transforma en sí mismo el semi-plano situado sobre el eje de las x. Una serie indefinida de sustituciones de esta forma, en la que a, b, c, d son reales y $ad - bc = 1$ forma un *grupo discontinuo* en el semi-plano. Estos grupos, cuya teoría ha establecido M. Poincaré se llaman *grupos fuchsianos.*

Dada una área simple A limitada por un contorno, en el plano de la variable z, y un círculo en el plano de la variable Z, se demuestra que puede obtenerse una función analítica uniforme $Z = f(z)$ tal, que á cada punto de A corresponda un punto del círculo, y que inversamente, á cada punto del círculo corresponda un solo punto de A.

M. Poincaré establece la teoría de los grupos fuchsianos considerando las figuras *congruentes,* es decir, las transformadas entre si por una sustitución real

$$\left(z, \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}\right) \quad \text{ó} \quad [z, f_i(z)] \quad \text{ó} \quad f_i(z)$$

Consideremos una infinidad de estas y supongamos que formen un grupo. Todas las sustituciones de la forma

$$f_1^{\alpha}(f_2^{\beta}(f_3^{\gamma}(\ldots(f_1^{\lambda}(f_2^{\mu}(z)\ldots)$$

pertenecerán al grupo. Los grupos que no contienen ninguna sustitución infinitesimal se llaman discontinuos. M. Poincaré reserva el nombre de *grupos fuchsianos* á los grupos discontinuos formados por sustituciones reales. Esto sentado, el problema de los grupos fuchsianos se reduce á *subdividir de una manera regular el plano, ó una parte del plano, en una infinidad de regiones congruentes entre sí,* entendiéndose que la división de un plano en infinidad de regiones es *regular,* cuando deformándose estas regiones de una manera continua, se puede hacer coincidir el nuevo modo de división con el antiguo, de manera que cada región de la nueva división venga á coincidir con una región de la antigua, y que una región dada cualquiera del nuevo modo de división venga á coincidir con una región *dada igualmente cualquiera* del antiguo modo.

La región correspondiente á la sustitución $[z, f_i(z)]$ se representa por R_i, los puntos

$$z, \quad f_1(z), \quad f_2(z)\ldots\ldots, \quad f_i(z)\ldots\ldots$$

se llaman *correspondientes.*

Dichas regiones se definen por la condición de que, cada una

no tenga *más que un solo* punto correspondiente á un punto z dado.

Descompongamos el plano en regiones correspondientes á un grupo G. La obtención de las infinitas descomposiciones posibles, por medio de una de ellas, se efectúa mediante lo que llama M. Poincaré *polígono generador* del grupo G. *Ciclo* es el conjunto de sus vértices que se corresponden entre sí, repartiéndose todos los vértices en cierto número de ciclos.

Para terminar estas indicaciones diremos, que el género de una superficie cerrada es el número máximo de ciclos cerrados, separados, que se pueden trazar en la superficie, sin subdividirla en dos regiones distintas. Así una superficie cerrada en la que se hubieran hecho p agujeros sería del género p. Un grupo fuchsiano está completamente determinado, cuando se conocen sus sustituciones fundamentales, que es preciso combinar de todas las maneras posibles para obtener todas las sustituciones del grupo.

El primer ejemplo de grupo discontinuo formado por sustituciones lineales es el que se encuentra estudiando el módulo k de una función elíptica (notación habitual) ó el módulo J (notación de Klein) considerados como funciones de la relación de los períodos.

Basta añadir que en las obras de Análisis de los Sres. Laurent y Jordan contienen algunas de estas novísimas teorías y especialmente las de los Sres. Picard y Forsyth se trata de todas ellas, dando también considerable desarrollo á la teoría de la superficie de Riemann, y la de M. Picard además contiene detallada exposición acerca de la teoría de los grupos, según Lie.

Falta completar estas indicaciones con la exposición breve de la teoría más general de las funciones tratadas por M. Poincaré en su obra: *Analysis situs*.

Un sistema de n variables

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots\ldots, \quad x_n$$

se llama un punto.

Sea el sistema formado por p igualdades y q desigualdades

$$\begin{array}{ll} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 & \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0 \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 & \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0 \quad (1) \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ F_p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 & \varphi_q(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0 \end{array}$$

Las funciones F y φ se suponen uniformes y continuas, así co-

mo sus derivadas y las determinantes formadas tomando p columnas cualesquiera de las derivadas primeras de las funciones F, respecto á las variables, no han de ser nulas.

El conjunto de puntos que satisfacen á las relaciones (1) forman una variedad de $n - p$ dimensiones. Si $p = 0$, habrá una variedad ó parte del *espacio* de n dimensiones.

Sea el sistema de relaciones

$$F_\alpha = 0, \quad \varphi_\beta = 0, \quad \varphi_\gamma > 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots . \varphi) \qquad \beta \gtrless \gamma$$

que se compone de $p + 1$ igualdades y $q - 1$ desigualdades.

Cuando existan puntos que las satisfagan, formarán una variedad de menos de $p - n$ dimensiones.

El conjunto de puntos que satisfagan á uno de los q sistemas de relaciones

$$(2) \begin{cases} F_\alpha = 0 & \varphi_1 = 0 & \varphi_\gamma > 0 & \gamma \gtrless 1 \\ F_\alpha = 0 & \varphi_2 = 0 & \varphi_\gamma > 0 & \gamma \gtrless 2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ F_\alpha = 0 & \varphi_q = 0 & \varphi_\gamma > 0 & \gamma \gtrless q \end{cases}$$

se llama *frontera completa* de la variedad definida por las condiciones (1).

Cunado no exista ninguna variedad de $n - p - 1$ dimensiones que satisfaga á uno de los q sistemas (2), la variedad definida por las condiciones (1) será *ilimitada*. Si una variedad es á la vez finita, continua é ilimitada se llama *cerrada*.

Sea la sustitución.

$$x'_i = \varphi_i (x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

si se resuelven las ecuaciones respecto á las x, se tendrá

$$x_k = \varphi'_k (x'_1, x'_2, \ldots,, x'_n) \qquad (k = 1, 2, , \ldots, n)$$

El conjunto de las sustituciones que satisfacen á estas condiciones forma un grupo, este grupo es uno de los más generales que se pueden imaginar. La ciencia cuyo objeto es el estudio de este grupo se llama *Analysis situs*. Una sustitución de este grupo transformará una variedad de m dimensiones en una variedad de m dimensiones, que será continua, finita é ilimitada si la variedad dada lo es.

Sean dos variedades de igual número de dimensiones V y V', definidas respectivamente por las condiciones:

$$(3)\quad \begin{cases} F_\alpha = 0 & (\alpha = 1, 2, \ldots, p) \\ \varphi_\beta > 0 & (\beta = 1, 2, \ldots, q) \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} F'_\alpha = 0 & (\alpha = 1, 2, \ldots, p') \\ \varphi'_\beta > 0 & (\beta = 1, 2, \ldots, q') \end{cases}$$

Supongamos que se pueda hacer corresponder un punto de la variedad V á un punto de la variedad V', de modo que se tenga

$$(5)\qquad x'_k = \psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

Consideremos el dominio D, definido por las desigualdades

$$F_\alpha > -\varepsilon, \quad F_\alpha < \varepsilon \quad \varphi_\beta > 0$$

La variedad V está contenida en este dominio D.

Supongamos que *en el dominio* D las funciones ψ_k son finitas, continuas y uniformes, con derivadas continuas, sin ser su determinante funcional nula.

Resolviendo las ecuaciones (5), tendremos

$$(6)\qquad x_k = \psi'_k(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) \quad (k = 1, 2, \ldots n)$$

Consideremos el dominio D' definido por las desigualdades

$$F'_\alpha > -\varepsilon, \quad F'_\alpha < \varepsilon \quad \varphi'_\beta > 0$$

y supongamos que en el dominio D' las funciones ψ'_k son finitas, continuas y uniformes, así como sus derivadas, sin ser nula su determinante funcional.

De estas hipótesis resulta que á todo punto de V corresponde un punto de V', y uno solo, é inversamente. A toda variedad W contenida en V corresponderá una variedad W' de igual número de dimensiones, contenida en V'; si W es continua, finita ó ilimitada, lo mismo sucederá á W' é inversamente.

En este caso las dos variedades son *homeomorfas*.

Se puede dar una representación geométrica de las variedades.

Consideremos en el espacio ordinario cierto número de poliedros

$$P_1, \quad P_2, \ldots, \quad P_n$$

Y supongamos que exista en el espacio de cuatro dimensiones cierto número de variedades de tres.

Sea F_1 una cara del poliedro P_1 y Φ_1 el conjunto de puntos de la frontera de Q_1 correspondientes á los diversos puntos de F_1, y sean F_2 una cara de P_2 y Φ_2 la *imagen* de esta cara en la frontera de Q_2. Si Φ_1 coincide con Φ_2, las dos variedades son contiguas, y se pasa del interior de la una al interior de la otra franqueando Φ_1. En este caso las caras F_1 y F_2 son conjugadas.

Se concibe que el conocimiento de los poliedros P_i y el modo de su conjugación nos dan, en el espacio ordinario, una imagen de la variedad V, y esta imagen basta para el estudio de sus propiedades, desde el punto de vista del *Analysis situs*.

En el estudio de las variedades hay que considerar el *grupo fundamental* y las *equivalencias fundamentales*.

Los grupos fuchsianos, correspondientes á diversas superficies de Riemann, con el mismo orden de conexión, son isomorfos. Esta teoría tiene conexiones son los grupos fuchsianos, que no podemos exponer aquí, pues bastan estas indicaciones para formarse una idea general de la teoría de las variedades.

CAPÍTULO XI

Geometría cinemática

Podemos considerar dos clases de geometría infinitesimales: La geometría de movimiento ó cinemática y la geometría diferencial.

La *Geometría cinemática* tiene por objeto el estudio del movimiento, independiente de las fuerzas, del tiempo y de todo elemento arbitrario extraño á la figura móvil. *La Geometría cinemática estudia las propiedades intrínsecas de las mutaciones de las figuras.*

Esta geométrica se apoya en la consideración del centro instantáneo de rotación. Así tenemos como proposición fundamental que: *Dadas en un plano dos figuras iguales, tales que se pueda colocar la una sobre la otra por resbalamiento en el plano, se las puede hacer coincidir por una simple rotación.* En el caso de una mutación infinitamente pequeña, el centro al rededor del que se verifica el giro, se llama *centro instantáneo de rotación*, de manera que: *Para una mutación infinitamente pequeña de una figura en su plano, las normales á las trayectorias de los puntos de esta figura pasan por el centro instantáneo de rotación.*

El método de las normales es fundamental. Si en vez de una mutación infinitamente pequeña, se trata de una mutación continua, la proposición anterior puede enunciarse así: *Para una posición cualquiera de una figura plana, que se mueve de una manera continua en su plano, las normales trazadas por los diferentes puntos de la figura á las trayectorias de estos puntos, pasan por un mismo punto.*

Las *curvas polares* tienen gran importancia. Así: *todo movimiento de un sistema plano, en su plano, que no consiste en una simple traslación, puede engendrarse por la rodadura de una curva del plano móvil sobre una curva del plano fijo.* Esta es la curva polar.

Hemos admitido que el sistema σ se mueve en el plano fijo σ'. Si imaginamos ahora un observador invariablemente unido al sistema σ, para él el plano σ' se moverá en el plano σ. El movimiento de σ' en σ se llamará movimiento *inverso ó indirecto.*

En cuanto á la Geometría cinemática del espacio, nos bastará citar las proposiciones siguientes: *La mutación infinitamente pequeña de un punto sobre su trayectoria, puede obtenerse por una rotación alrededor de una recta cualquiera del plano normal á la trayectoria descrita, siempre que no pase por este punto. El plano normal se traza por el punto, en la posición que ocupa en el momento de la mutación,* y se le llama *plano normal relativo al punto.– Los planos normales á las trayectorias de todos los puntos de una recta se cortan según una misma recta. – Los planos normales á las trayectorias de todos los puntos de un plano pasan por un mismo punto.—La mutación infinitamente pequeña de una figura de magnitud invariable puede obtenerse de una infinidad de maneras por dos rotaciones.*

Estas proposiciones bastan para formarse idea del carácter de la Geometría cinemática que es una geometría infinitesimal pura, es decir, independiente del algoritmo infinitesimal.

CAPÍTULO XII

Geometría diferencial

La Geometría diferencial comprende desde luego todo lo que se conoce con la denominación de *Aplicaciones del cálculo diferencial,* á saber, el estudio de las tangentes, normales de las curvas planas, asíntotas, planos tangentes y normales, arco de una

curva, puntos singulares, radio de curvatura, curvas osculatrices, círculo y planos osculadores, evolutas y evolventes, envolventes, curvas alabeadas, curvas trazadas sobre una superficie y la vasta teoría de las superficies.

El origen de estas disquisiciones se halla en la definición de tangente, debida á Descartes, como límite de la posición de la secante.

Las obras más notables acerca de este asunto, que podemos citar, y en las que se han basado todos los desarrollos ulteriores son: *Disquisitiones generales circa superficies curvas* de Gauss, *Application de l' Analyse à la Géométrie* de Monge, *Développements de Géométrie* por Ch. Dupin, *Sur les coordonnées curvilignes* y *Leçons sur les fonctions inverses des trascendantes*, de Lamé.

El concepto más importante desarrollado en la obra de Gauss es el de curvatura de las superficies. Considera un elemento de superficie, cuyas coordenadas son los puntos

$$x,\quad y,\quad x+dx,\quad y+dy,\quad x+\delta x,\quad y+\delta y$$

cuyo doble del área es $dx\delta y - dy\delta x$, y determina la *imagen esférica*, cuyo doble del área es $d\mathrm{X}\delta\mathrm{Y} - d\mathrm{Y}\delta\mathrm{X}$, de manera que la medida de la curvatura es

$$k = \frac{d\mathrm{X}\delta\mathrm{Y} - d\mathrm{Y}\delta\mathrm{X}}{dx\delta y - dy\delta x}$$

que también Gauss expresa por el enunciado siguiente: *La medida de la curvatura, en cada punto de una superficie, es igual á una fracción cuyo numerador es la unidad y cuyo denominador es el producto de los dos radios de curvatura extremos en las secciones por planos normales.*

Otro concepto muy notable es el de la *aplicabilidad* de las superficies que resulta de la igualdad de los elementos diferenciales, resultando que las superficies aplicables tienen la misma curvatura. De manera que si se considera una superficie como un sólido flexible é inextensible, de la que se ha anulado una dimensión, las propiedades de la superficie dependerán, en parte de la forma particular que puede tomar por efecto de una flexión, y en parte serán absolutas é invariables, para cualquier forma, refiriéndose á estas últimas la medida de la curvatura y la teoría de las líneas geodésicas; así pues, las superficies planas ó desarrollables, sean cónicas ó cilíndricas, etc., se consideran como esencialmente idénticas. Citaremos también el notable teorema si-

guiente: *Si una superficie curva se aplica á otra superficie curva, el producto de los dos radios de curvatura principales, en cada punto, queda invariable.*

L' Application de l' Analyse à la Géométrie de Monge, es un modelo en su género, donde se da capital importancia á la teoría de las superficies desarrollables y de las envoltentes, sirviéndole la consideración de las *características* para la integración de las ecuaciones diferenciales.

Dupin con sus *Développements de Géométrie* se propuso escribir una continuación á la Geometría descriptiva-analítica de Monge. Su objeto principal es la curvatura de las superficies. Consigue demostrar los teoremas entonces conocidos sobre la curvatura y los contactos por consideraciones geométricas y sin ningún cálculo, agregando, no solo teoremas, sino teorías propias tales como la de las *tangentes conjugadas* que son la tangente á una línea de la superficie y la arista correspondiente de la superficie desarrollable circunscrita, y sobre todo la teoría de la *indicatriz*, curva trazada en el plano tangente, cuyos diámetros conjugados representan en dirección todos los sistemas de tangentes conjugadas, curva asi denominada, porque *indica* por su naturaleza el sentido de las dos curvaturas principales de la superficie en cada uno de sus puntos, y los dos ejes de la indicatriz son las tangentes á las líneas de mayor y de menor curvatura. Además, siendo para un mismo punto de la superficie, el radio de curvatura de cada sección normal, proporcional al cuadrado del diámetro de la indicatriz, que se encuentra en el plano de esta sección, resulta que según la indicatriz es una elipse ó una hipérbola, la suma ó la diferencia de los radios de curvatura de las secciones correspondientes á dos tangentes conjugadas, es una cantidad constante igual á la suma ó á la diferencia de los dos radios principales, uno de estos radios se hace infinito, y la curvatura desaparece en un sentido, cuando la indicatriz se cambia en una parábola. En el caso de ser la indicatriz una elipse, las dos curvaturas en el punto considerado tienen el mismo sentido, y opuesto cuando es una hipérbola. Considera los puntos en que la indicatriz es un círculo, puntos ya dados á conocer por Monge con la denominación de *umbílicos;* pero Dupin considera otros umbílicos por los que no pasan más que una ó tres líneas de curvatura, y en fin trata de las *superficies trayectorias ortogonales.*

Las *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications* y *Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes et les surfaces isothermes* de Lamé tienen gran importancia en la historia de la Geometría infinitesimal.

Se propone el estudio de la Geometría desde el punto de la Física matemática.

«No se trata de estudiar las propiedades de una línea ó de una trayectoria, plana ó de doble curvatura, ni las de la superficie que limita un cuerpo y de las líneas trazadas sobre esta superficie individual. Es preciso considerar á la vez, en el espacio ó en la extensión de tres dimensiones, sea una familia de superficies, reunidas por una propiedad común, sea varias superficies dividiendo un volúmen en poliedros curvilíneos».

«Cuando un fluído está en equilibrio, á cada punto corresponde una presión, que se ejerce normalmente y con la misma intensidad, sobre todos los elementos planos de que este punto forma parte. La misma presión pertenece á todos los puntos de cierta superficie que se llama *superficie de nivel*. La ciencia de la Hidrostática tiene por objeto estudiar la forma de estas superficies, y la ley que rige la variación de la presión, cuando se pasa de una de estas superficies á otra».

«Según la ley de atracción universal, si, para cada punto del espacio, se compone la suma de todas las masas de todas las moléculas materiales del universo, respectivamente divididas por sus distancias á este punto, se obtiene la función que ha recibido el nombre de *potencial*. El potencial tiene el mismo valor para todos los puntos de cierta superficie, que se llama todavía superficie de nivel y que goza de la propiedad de ser por todo normal á la resultante de las atracciones. El espacio es el lugar geométrico de una infinidad de superficies de igual naturaleza, que componen una familia de superficies de igual potencial».

«En la teoría analítica del calor, cuando en el estado estático, la temperatura se halla estacionaria en cada punto del cuerpo sólido homogéneo que se considera, ésta temperatura tiene el mismo valor para todos los puntos de cierta superficie que se llama *isoterma*».

«Si la hidrostática y la teoría potencial han introducido las familias de las superficies de nivel, la teoría del calor las de las superficies isotermas, la de la luz la de ondas, la teoría matemática del equilibrio de elasticidad de los cuerpos sólidos, ha introducido la consideración de tres familias conjugadas y ortogonales».

«El estudio de las familias de superficies y de los sistemas ortogonales constituye una nueva rama de la Geometría analítica. A esta rama de la Geometría analítica corresponden las diversas ramas del cálculo integral. La integración de las ecuaciones diferenciales ordinarias ó de las funciones de una sola variable, es

el estudio clásico de las curvas planas y de doble curvatura. La integración de las ecuaciones de diferencias parciales de las funciones de dos variables solamente, es el estudio de las superficies individuales, ó análisis aplicado de Monge, completado por trabajos numerosos de Gauss, de Liouville y de otros geómetras. En fin, la integración de las ecuaciones de diferencias parciales de las funciones de tres variables, corresponde al estudio de las superficies reunidas en familias, de las superficies isotermas, de nivel, de ondas, y de las superficies isostáticas ú ortogonales».

Las palabras de Lamé indican suficientemente el objeto de su obra. También son dignas de estudio las obras de l'abée Aoust sobre las coordenadas curvilíneas.

Entre las obras modernas podemos citar las *Lezioni di Geometría diferenziale* del Sr. Bianchi, que contiene, además de los conceptos fundamentales debidos á Gauss, Monge y Dupin, otros más recientes. Emplea las coordenadas curvilíneas que son, en una superficie cualquiera análogas á las rectilíneas de Descartes en el plano.

Si se establece una correspondencia entre los puntos P y P' de dos superficies S y S', de modo que á cada punto de la una corresponda un punto de la otra, y que si P se mueve con continuidad sobre S, se mueva con continuidad P' sobre S', se establecerá *una representación de una de las superficies sobre la otra*; y si se conservan los ángulos en esta representación, entonces será una *representación conforme*.

Al establecer la relación entre las tangentes de los ángulos correspondientes de las dos figuras y la igualdad entre los mismos, resultan las relaciones

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \pm \frac{\partial y'}{\partial y}, \qquad \frac{\partial x'}{\partial y} = \mp \frac{\partial y'}{\partial x}$$

que determinan á $x' + iy'$ como función de $x + yi$. De manera que *la representación más general conforme, de un plano sobre otro, se obtiene igualando la variable compleja de uno de los planos á una función arbitraria de la variable compleja del otro.*

Los trabajos de Lobatschewsky de Bolyai y de Riemann, que habían creado las geometrías hiperbólica y elíptica al lado de la de Euclides, ó parabólica, había conducido á un desarrollo de la elíptica en las superficies de curvatura constante positiva; y Beltrami había realizado la representación de la geometría hiperbólica en las superficies de curvatura constante negativa. Todos estos resultados se hallan ámpliamente desarrollados en la obra del Sr. Bianchi, que expone la *geometría de una superficie*,

consideranda como una capa sumamente sutil, conforme á la idea de Gauss, flexible é inextensible; perteneciendo á su geometría aquellas propiedades que no alteran por la flexión de dicha superficie, resultando la aplicabilidad, de la igualdad de sus elementos lineales correspondientes, y establecido el teorema de Gauss: *La curvatura total de una superficie no cambia por cualquier flexión de la superficie,* ó bien que: *si dos superficies son aplicables, en dos puntos correspondientes, tienen la misma curvatura;* y en fin, el principio de *superposición* de las figuras es válido, como en el plano y la esfera, para las superficies de curvatura constante.

El plano es la superficie de curvatura constante nula, al que son aplicables las superficies desarrollables; las superficies de curvatura constante positiva son aplicables sobre la esfera, las superficies de curvatura constante negativa ó pseudo-esféricas son objeto de especial estudio en la obra del Sr. Bianchi, en sus tres tipos: parabólico, elíptico é hiperbólico, y también por el señor Darboux en sus *Leçons sur la théorie générale des surfaces,* que considera la superficie engendrada por la revolución de una catenaria al rededor de su base, ó sea el *catenoide* ó *aliseide* y el *helicoide alabeado de plano director*, aplicables entre sí, y tambien las superficies de revolución aplicables sobre la esfera.

Otra rama de la Geometría digna de especial consideración es la que admite, como elemento generador del espacio la recta, cuya idea pertenece á Malus y que desarrolló después Plücker con el nombre de *complejos-lineales,* á la que agregaremos la Geometría cuyo elemento generador es el círculo.

Plücker, para conservar la doble noción de espacio puntual y tangencial, empleó un doble sistema de coordenadas, que definieran la línea recta, y el Sr. Klein ha continuado en este orden de ideas, fundando sus investigaciones en la transformación de las seis coordenadas homogéneas de la línea recta por una ecuación de segundo grado. Por otra parte, Lie relacionó la existencia de un complejo con una ecuación de derivadas parciales, é introdujo esta dualidad empleando las transformaciones de contacto.

En la Geometría reglada un *par* es un conjunto de un punto y un plano que pasa por dicho punto. Cuatro pares

$$(a,\alpha),\quad (b,\beta),\quad (c,\gamma),\quad (d,\delta),$$

situados en una recta, están en *relación anarmónica,* cuando hay igualdad entre dos relaciones anarmónicas

$$(a, b, c, d)\quad \text{y}\quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$$

que puede reducirse á *relación armónica.*

Un par en una recta se define por dos coordenadas z y u, que definen respectivamente el punto y el plano. Un par sobre una recta depende pues, de dos condiciones. Cada condición á que satisface un par se traduce por una ecuación entre z y u. El conjunto de pares que satisfacen á una misma condición forma una *correlación.*

Dado el plano de un par al que corresponden m pares de la correlación y el punto del par al que corresponden μ pares, se dirá que la correlación

$$\Gamma_{\mu}^{m} \text{ es de } m^{simo} \text{ orden y de } \mu^{sima} \text{ clase.}$$

Cuatro pares de una misma correlación de primer grado y de la primera clase están en relación anarmónica y recíprocamente, *los pares que, situados en una recta, están en relación anarmónica con tres pares fijos de esta recta, engendran una correlación de primer orden y de primera clase.*

La correlación de primer orden y de primera clase es una *correlación anarmónica,* y *los pares formados por un punto de una superficie alabeada y el plano tangente en este punto, que están situados en una misma generatriz rectilínea, engendran una correlación anarmónica.*

Designando los coeficientes a, b, p, q de las ecuaciones

$$x = az + p, \quad y = bz + q$$

las coordenadas de la recta, referida á tres ejes, la condición de su intersección se expresa por la anulación de la forma fundamental de segundo grado.

$$dadq - dbdp$$

Como solo se trata de hacer indicaciones generales acerca de esta doctrina geométrica, no es preciso insistir en las correlaciones superiores, en las redes y series lineales, congruencias, representación lineal de las superficies, etc.

La noción de *espacio circulado* tiene su origen en una memoria de Enneper.

Los círculos en el espacio dependen de seis parámetros. Se pueden formar sistemas indeterminados de círculos análogamente que para la recta. Después de Laguerre, los Sres. Demartres, Stephanos y Cosserat han trabajado en esta teoría.

Este último en su memoria *Sur le cercle consideré comme élé-*

ment générateur de l'espace, se propone constituir una teoría análoga á la dada por M. Koenigs para el espacio reglado, fundada en la existencia de la forma fundamental.

La proposición fundamental en la *Geometría de las esferas* es la siguiente:

Dadas cinco esferas

$$s_i \equiv (x - \alpha_i)^2 + (y - \beta_i)^2 + (z - \gamma_i)^2 - R^2_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots 5)$$

la ecuación de toda esfera del espacio se expresa por

$$s \equiv s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3 + s_4 x_4 + s_5 x_5 = 0,$$

siendo las x, cantidades dependientes de la esfera considerada. Las cinco cantidades x pueden considerarse como *coordenadas homogéneas* de una esfera del espacio. Las cinco esferas dadas son las *esferas fundamentales* del sistema de coordenadas.

Considerándose la *esfera* como elemento de un espacio, *el conjunto de todas las esferas constituye un espacio* LINEAL *de cuatro dimensiones.*

M. Darboux estableció la condición para que las cinco esferas sean ortogonales dos á dos, y la que han de satisfacer las x para que el radio de una esfera sea nulo, *punto-esfera*. Dado un círculo en el espacio, por este círculo se puede hacer pasar dos esferas de radio nulo, á cuyos centros llama *focos* M. Darboux.

Estas consideraciones llevan á establecer las propiedades infinitesimales del espacio circulado.

Podemos considerar, en fin, la *Geometría intrínseca*, es decir, aquélla que emplea el método infinitesimal, prescindiendo de sistemas de coordenadas, y estudia las propiedades de cada figura deducidas directamente del examen de ésta.

CAPÍTULO XIII

La teoría de los grupos de transformaciones

Puede afirmarse que la síntesis matemática se ha realizado por el colosal esfuerzo del eminente Sophus Lie al publicar sus inmortales obras sobre los grupos de transformaciones.

La Matemática hasta principio de este siglo tenía cierto carácter de individualidad; prevalecía en sus procedimientos y en su

constitución el método analítico, el examen parcial de cada objeto, con el fin de llegar inmediatamente á las aplicaciones prácticas. Predominaba el problema. Los problemas incesantemente propuestos conducían á la teoría, que se organizaba sobre la base de la resolución de aquéllos.

Las teorías combinatorias, que podemos decir comenzaron en los trabajos de Wandermonde sobre las sustituciones, desarrolladas sucesivamente por Lagrange, Cauchy, Abel y Galois, al aplicarlas á la teoría de las ecuaciones, los métodos proyectivos auxiliados por el algoritmo de las formas, el cálculo simbólico y, por otra parte los innumerables descubrimientos hechos en la teoría de las funciones, encaminaron á los matemáticos hacia la síntesis matemática, al predominio de la forma sobre la materia.

No nos extenderemos en estas consideraciones, por haber ya hecho una exposición de los progresos de la Matemática en sus diversas ramas, durante el siglo actual, lo que nos permite entrar en materia desde luego.

La teoría de los grupos de transformaciones lo abarca todo. Por el movimiento los individuos de cada especie constituyen los sistemas, ya discontinuos, ya continuos. El algoritmo infinitesimal permite estudiar la variación continua de los sistemas y establecer el tránsito de lo infinito á lo finito. Las relaciones

$$x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

representan una transformación entre las variables x y x', para cuya resolubilidad se necesita que la determinante funcional

$$\sum \pm \frac{df_1}{dx_1} \cdots \frac{df_n}{dx_n}$$

no se anule idénticamente.

Si dichas ecuaciones se resuelven respecto á las x, las ecuaciones

$$x_k = F_k(x'_1 \ldots, x'_n) \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

también representan una transformación, siendo *ambas transformaciones inversas*. De esta definición resulta, que si se efectúan sucesivamente las dos transformaciones inversas

$$x'_i = f_i(x_1 \ldots, x) \qquad x''_i = F_i(x'_1 \ldots x'_n) \qquad (i = 1 \ldots n)$$

se obtiene la *transformación idéntica*

$$x''_i = x_i \qquad (i = 1 \ldots, n)$$

Si verificamos sucesivamente dos transformaciones

$$x'_i = f_i(x_1 \ldots x_n), \quad x''_i = g_i(x'_1 \ldots x'_n) \quad (i = 1 \ldots n)$$

obtendremos una transformación

$$x'' = g_i(f_1(x) \ldots f_n(x) \qquad (i = 1 \ldots n)$$

que, cuando es indiferente el orden de las transformaciones, ó sea cuando se tiene

$$g_i[f_1(x) \ldots f_n(x)] \equiv f_i[g_1(x) \ldots g_n(x)] \quad (i = 1 \ldots n)$$

las transformaciones

$$x'_i = f_i(x_1 \ldots x_n) \quad \text{y} \quad x'_i = g_i(x_1 \ldots x_n) \quad (i = 1 \ldots n)$$

son permutables entre sí.

Una serie finita ó infinita de transformaciones entre las x *y las* x' *se llama un* GRUPO DE TRANSFORMACIONES, *cuando cada dos transformaciones de la serie, verificadas sucesivamente, producen una transformación que pertenece también á la serie.*

Un grupo de transformaciones es *discontinuo*, cuando contiene un número discreto de éstas. Tales son los grupos correspondientes á la teoría de las sustituciones. Los grupos *continuos* de transformaciones contienen un número infinito de éstas.

Un grupo *finito* y *continuo* de transformaciones se representa por un sistema de n ecuaciones

$$x'_i = f_i(x_1 \ldots x_n, \quad a_1 \ldots a_r) \quad (i = 1 \ldots n)$$

en las que las f representan funciones analíticas y las a, parámetros arbitrarios.

Pero cuando la serie de transformaciones está definida por un sistema de ecuaciones diferenciales

$$W_k\left(x'_1 \ldots x'_n, \ \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial^2 x'_1}{\partial x_1^2} \ldots\right) = 0 \quad (k = 1 \ldots n)$$

dependiendo las soluciones del sistema, no de un número finito de constantes arbitrarias, sino de elementos arbitrarios de orden superior, tales por ejemplo como funciones arbitrarias, el conjunto de todas las transformaciones correspondientes á dichas ecuaciones diferenciales constituye un grupo *infinito* y *continuo*.

Entre las transformaciones citaremos las de contacto. Sea una transformación

$$(1) \qquad x_1 = X(x, y) \qquad y_1 = Y(x, y)$$

en la que x, y, x_1, y_1 representan las coordenadas rectangulares de un punto en un plano. Mediante esta transformación se pasa de uno de los dos puntos del plano al otro. Por este procedimiento se puede pasar de todos los puntos de la curva

$$y - \varphi(x) = 0 \quad \text{á los de} \quad y_1 - \varphi(x_1) = 0$$

A cada punto (x, y) de la una corresponde un valor del coeficiente diferencial, y al punto correspondiente de la tranformada corresponde otro valor del coeficiente diferencial. Para puntos infinitamente próximos, la segunda de las ecuaciones

$$dy - y'dx = 0, \quad dy_1 - y'_1 dx_1 = 0$$

es la transformada de la primera. Expresando x_1 é y_1 en función de x é y mediante las ecuaciones (1), obtendremos

$$d\mathrm{Y} - y'_1 d\mathrm{X} = \left(\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x} - y'_1 \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y} - y'_1 \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y}\right) dy = 0$$

Podemos establecer la relación

$$\left(\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x} - y'_1 \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y} - y'_1 \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y}\right) dy = \rho\,(dy - y'dx)$$

que conduce finalmente á

$$(2) \qquad y'_1 = \frac{\dfrac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x} + y' \dfrac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y}}{\dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial x} + y' \dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial y}} = \mathrm{P}\,(x, y, y')$$

y que con las ecuaciones (1) representa una transformación de tres variables x, y, y', la *transformación prolongada.*

Siendo las ecuaciones de la tangente de la curva $y - \varphi(x) = 0$ y de su transformada, respectivamente,

$$(3) \qquad \eta - y = y'(\xi - x), \quad \eta - y_1 = y'_1(\xi - x_1)$$

en la segunda de las que se obtiene el valor de y'_1 por la ecuación (2), resulta: *Todas las curvas que tienen común con la curva* $\mathrm{y} - \varphi(\mathrm{x}) = 0$ *el punto* (x, y) *y la tangente, se transforman en las curvas que tienen comunes con la curva* $\mathrm{y}_1 - \varphi_1(\mathrm{x})_1 = 0$ *los puntos* $\mathrm{x}_1 = \mathrm{X}$, $y_1 = \mathrm{Y}$ *y la tangente correspondiente,* ó bien: *La transformación* (1) *transforma las curvas del plano, tangentes entre sí, en curvas también tangentes.*

El conjunto del punto (x, y) y de la tangente (3) trazada por él, constituye el *elemento lineal*, cuyas coordenadas son x, y, y'; de modo que la transformación considerada es una transformación *elemento-lineal* del plano, en contraposición de la transformación puntual.

Sentados estos preliminares, podremos enumerar algunas de las transformaciones consideradas por Lie.

En las *Vorlesesungen über Differentialgeicheungen*, comienza la exposición de las transformaciones puntuales, por las de los grupos de *traslaciones* de uno y de dos parámetros.

$$x_1 = x + a, \quad y_1 = y; \qquad x_1 = x + a, \quad y_1 = y + b,$$

que constan respectivamente de ∞^1 é ∞^2 traslaciones distintas y el de las rotaciones

$$x_1 = x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha, \qquad y_1 = x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha$$

que contiene ∞^1 *rotaciones;* y tanto en éstos como en todos los demás, considera la *curva trayectoria* (Bahncurve) y la curva invariante, que en estos casos citados son, respectivamente, las paralelas al eje de las x y las circunferencias cuyo centro es el origen.

Sigue el grupo de las *transformaciones afines*, caracterizado por las ecuaciones

$$x_1 = mx, \quad y_1 = y$$

por la que las abscisas crecen ó disminuyen de un modo proporcional, y el grupo de *todos los movimientos del espacio.*

Ya que á un cuerpo rígido, por traslación y rotación, se le hace pasar de una posición A á otra A_1, y de ésta á otra tercera, movimientos que pueden reducirse á uno solo, que lleve directamente al cuerpo de A á A_2, *todos los movimientos del espacio forman un grupo*, que depende de seis parámetros, existiendo, por consiguiente, ∞^6 movimientos.

Una transformación con dos variables se representa por dos ecuaciones de la forma

$$x_1 = \varphi\,(x, y), \qquad y_1 = \psi\,(x, y)$$

Por esta transformación cada punto (x, y) del plano puede pasar á otro punto (x_1, y_1). Cuando las ecuaciones contienen un parámetro

$$x_1 = \varphi\,(x, y, a) \qquad y_1 = \psi\,(x, y, a)$$

tomando éste todos los valores desde $-\infty$ hasta $+\infty$, se obtiene una serie de ∞^1 transformaciones.

Las ecuaciones

$$x_1 = X(x, y, z, a_1, \ldots a_r) \quad y_1 = Y(x, y, z, a_1, \ldots a_r)$$

$$z_1 = Z(x, y, z, a_1, \ldots a_r)$$

que suponemos se pueden resolver respecto á x, y, z, en las que $a_1, \ldots a_r$ expresan números determinados, representan *una transformación de los puntos del espacio*, y las ecuaciones representan una serie de ∞^r transformaciones.

Las ecuaciones

$$x' = x + \xi(x, y)\,\delta t + \ldots \quad y' = y + \eta(x, y)\,\delta t + \ldots$$

representan una transformación infinitesimal.

Un grupo de un parámetro del plano, cuyas transformaciones se corresponden dos á dos inversamente, contiene solo una transformación infinitesimal.

En la *Theorie der transformationgruppen* considera:

Los tres tipos de grupos de una variable representados por el grupo de las *traslaciones*, el *lineal general* y el *proyectivo general*, cuyas ecuaciones son:

$$x' = x + a, \qquad x' = a_1 x + a_2 \qquad x_1 = a\,\frac{a_1 + a_2 x}{1 + a_3 x}$$

Divide á los grupos del plano en *primitivos* é *imprimitivos*, demostrando que existen sólo tres tipos de grupos primitivos: el grupo *lineal especial*, el *lineal general* y el *proyectivo general*.

En el espacio distingue tres tipos de grupos primitivos de igual denominación que los anteriores, y entre los imprimitivos;

1.° los grupos que dejan invariante una familia de ∞^1 superficies, pero ninguna familia de ∞^2 curvas, por las que se engendran estas superficies.

2.° los grupos que dejan invariante una familia de ∞^2 curvas pero ninguna familia de ∞^1 superficies engendradas por estas curvas.

3.° Todos los demás.

Además estudia los grupos proyectivos primitivos é imprimitivos etc.

En el tercer tomo de su obra, *Theorie der Transformationsgru-*

ppen, después de tratar del espacio ya ordinario, ya de *n* dimensiones en su relación con los grupos de transformaciones, especialmente del grupo de seis parámetros de todos los movimientos euclídeos, de todas las transformaciones proyectivas, que dejan invariante la cónica del infinito y de obtener los grupos proyectivos, que dejan invariantes en el espacio ordinario, ya una superficie, una curva ó un punto, da dos soluciones al problema de Riemann-Helmholtz relativo al espacio, que formula en los siguientes términos: *Pueden obtenerse propiedades tales que pertenezcan, tanto á la serie de los movimientos euclídeos como á las de los no-euclídeos, y por las que se distingan estas tres series de todas las demás series de movimientos posibles en una variedad numérica.*

Basándose en el estudio de los espacios de curvatura constante, en los que puede moverse una figura sin alterar sus longitudes, y considerando estos movimientos, que para el espacio de tres dimensiones dependen de seis parámetros, llegó Lie á resolver dicho problema, introduciendo el nuevo concepto de libre movilidad infinitesimal *(im infinitesimalem)* que se refiere á puntos infinitamente próximos; de modo que *un grupo real finito del espacio de tres dimensiones tiene libre movilidad infinitesimal en un punto real* P, *cuando permaneciendo fijo dicho punto y un elemento lineal cualquiera trazado por él, aun es posible un movimiento continuo, y si por el contrario, se fija además de* P *y de aquel elemento lineal un elemento superficial cualquiera que pase por ellos, ningún movimiento continuo es posible.*

Y cuando un grupo real continuo de tres dimensiones tiene, en un punto real, libre movilidad infinitesimal, es de seis parámetros y transitivo, siendo, por una transformación puntual y real semejante, ya al grupo de los movimientos euclídeos de este espacio, ya con ambos grupos de movimientos no-euclídeos (de Riemann y Lobatschewsky) *de este espacio, ya con el grupo proyectivo real continuo de seis parámetros que deja invariable la superficie imaginaria*

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0$$

ó con el grupo continuo real proyectivo de la superficie no reglada

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0.$$

Si un punto real, y_1^0, y_2^0, y_3^0, en posición general, se halla fijo, entonces todos los puntos x_1, x_2, x_3 con los que puede coincidir un punto x_1^0, x_2^0, x_3^0, satisfacen á una ecuación de la forma:

$$W(y_1^0, y_2^0, y_3^0;\ x_1^0, x_2^0, x_3^0;\ x_1, x_2, x_3) = 0,$$

que no queda satisfecha por

$$x_1 = y_1^0, \quad x_2 = y_2^0, \quad x_3 = y_3^0$$

y que representa una superficie real, que pasa por el punto x_1^0, x_2^0, x_3^0.

Además, al rededor del punto y_1^0, y_2^0, y_3^0 puede obtenerse una región de tres dimensiones tal, que al fijarse el punto y_1^0, y_2^0, y_3^0, otro punto cualquiera x_1^0, x_2^0, x_3^0 de dicha región puede, por mutación contínua, coincidir con cualquier otro punto de la misma que satisfaga á dicha ecuación $W = 0$, y que se halle unido al primero por una serie contínua de puntos, y á estas condiciones satisfacen, el espacio ordinario ó euclídeo y los dos espacios no-euclídeos, ó sea los espacios en los que el grupo de los movimientos posibles es el grupo proyectivo que transforma en sí misma una de las dos superficies:

$$x^2 + y^2 + z^2 \pm 1 = 0.$$

Lie, pues, desarrolla el pensamiento de Helmholtz determinando una función invariante, que corresponde á ese *algo* que se llama la distancia de dos puntos, que subsiste durante su mutación en el espacio, y establece las propiedades exclusivas á los movimientos euclídeos y no-euclídeos, que los distinguen de los demás movimientos posibles.

La obra *Vorlesungen über continuierliche Gruppen* es una continuación de *Vorlesungen über Differential gleichungen*. Comienza por las transformaciones proyectivas de la recta y el plano, tratando de la doble razón ó relación anarmónica, que conduce á la transformación proyectiva de la recta, á la transformación proyectiva de los puntos (x, y) del plano E en los puntos (x_1, y_1) del plano E_1 representadas por las ecuaciones

$$x_1 = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_3 x + b_3 y + c_3} \qquad y_1 = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_3 x + b_3 y + c_3}$$

que originan ∞^8 transformaciones proyectivas diferentes, representando un grupo continuo de transformaciones, que se corresponden inversamente dos á dos.

Siendo, para la transformación idéntica

$$a_1 = 1 \quad b_1 = o, \quad c_1 = o; \quad a_2 = o, \quad b_2 = 1, \quad c_2 = o,$$
$$a_3 = o, \quad b_3 = o, \quad c_3 = o,$$

para la transformación infinitesimal será

$$a_1 = 1 + \alpha_1 \delta t, \quad b_1 = \beta_1 \delta t, \quad c_1 = \gamma_1 \delta t, \quad a_2 = \alpha_2 \delta t,$$
$$b_2 = 1 + \beta_2 \delta t \quad etc.$$

de la que resulta la fórmula de las transformaciones infinitesimales.

CAPÍTULO XIV

El concepto de imaginarismo.

La palabra, *imaginario,* que en su origen expresó simplemente la no existencia de un objeto, hoy solo sirve de expresión á casos especiales de correlación de objetos ó de conceptos; y esto explica lo indistintamente que se trata, ya lo real, ya lo imaginario, en las diversas cuestiones matemáticas, siguiendo en el uso de estas dos palabras, cuya acepción no es tan absoluta, como cuando se emplearon en un principio.

Debe observarse que cada objeto tiene solamente los caracteres que expresa su definición, y cuando aquéllos se alteran, debe alterarse en igual medida ó correlativamente ésta. Así ha sucedido con los conceptos de cantidad y de operaciones, que se han alterado á medida que se pasó del concepto del número entero, sucesivamente al de fraccionario, irracional, algebráico y complejo.

Cada uno de estos números forma una clase cuya extensión es distinta. Así los complejos comprenden á los números reales, los racionales á los enteros, etc. Las operaciones que se tratan de ejecutar en las clases inferiores se convierten en imposibles cuando se combinan números especiales que solo pueden combinarse en su clase respectiva.

La extracción de las raices de grado par de las cantidades negativas se halla en este caso, no existiendo números negativos entre las potencias de grado par de las cantidades reales.

Las cantidades imaginarias salieron del dominio puramente algorítmico para adquirir un carácter geométrico, la operación del giro de un cuadrante fué la interpretación natural del símbolo $\sqrt{-1}$

Pero, por otra parte, el Algebra ó más generalmente, el Análisis matemático, que podríamos designar con el nombre de Algoritmia, es un sistema formado mediante operaciones regidas por

las leyes combinatorias, y aplicadas á objetos creados ó construídos por definiciones, que les dan su existencia, unas veces efectiva, por corresponder á la realidad, y otras veces puramente conceptual, por consistir en meras relaciones dependientes de leyes combinatorias; y aún estos objetos son resultados de operaciones algorítmicas.

La Algoritmia es un lenguaje á la par que un sistema científico, que se ha de aplicar á multitud de objetos. Análogamente ocurre con la Geometría. Esta construye sistemas de figuras sometidas á reglas ó leyes especiales.

Tanto en un caso como en el otro puede no existir conformidad con la realidad de los hechos, entre los sistemas algorítmicos y las construcciones geométricas; y en tal caso uno de los indicios de esta discordancia ó disconformidad es lo imaginario.

La resolución de un problema algebráico, cuya expresión esté dada por una ecuación de grado superior al primero, puede dar con las soluciones reales otras soluciones imaginarias. En las cuestiones geométricas, la ley general de existencia de las entidades puede modificarse en algunos casos especiales de las figuras; algunas entidades reales han pasado á ser imaginarias.

Estas consideraciones inducen á conservar en las relaciones, tanto algorítmicas como geométricas, toda su generalidad, y admitir simultáneamente lo real con lo imaginario, constituyendo sistemas completos en los que tengan igual validez, puesto que lógicamente la tienen como dependientes de leyes generales de formación, y sólo pueden alterarla por circunstancias accidentales ó fortuitas.

Así por ejemplo, las raíces imaginarias de una ecuación binomia tienen la misma validez que las reales, y el sistema completo forma todos los radios que dividen la circunferencia en un número de partes iguales.

Lo imaginario se ha fusionado con las figuras geométricas, dando origen á la teoría de las funciones de variables complejas, que se reduce á una geometría analítica en coordenadas polares.

Las relaciones, ya sean algorítmicas, ya geométricas, pasan por varios grados de generalización que impone la necesidad de unificar los conceptos, haciendo depender los particulares de los más generales; y esto se consigue por la adjunción de nuevas entidades. Así, la necesidad de aplicar las leyes de la divisibilidad á los números complejos, motivó la introducción del concepto de *ideal* de Kummer ó de los *números ideales* de Dedekind.

La necesidad de asimilar los progresos de la Geometría á los del Análisis, ha conducido á la admisión de lo imaginario, unas

veces para caracterizar la no existencia, en determinadas circunstancias, otras, para reunir varios hechos dispersos bajo una ley general.

Así, Monge introdujo el método consistente en considerar una figura, de la que se ha de demostrar alguna propiedad general, en circunstancias de construcción general, para el caso de facilitar la demostración la presencia de ciertos puntos, rectas ó planos, que en otras circunstancias serían imaginarios, y en aplicar el teorema ya demostrado, á los casos en que dichos puntos rectas ó planos sean imaginarios, método fundado, según manifiesta Chasles, en que las condiciones generales de la construcción prevalecen, apesar de que algunas de sus consecuencias *contingentes* ó accidentales, de reales han pasado á ser imaginarias, como ocurre respecto á los puntos de intersección, por ejemplo, de una superficie con una recta que constituyen una de las relaciones contingentes ó accidentales del sistema formado por la recta y la superficie. Estas consecuencias contingentes unas veces son reales, otras pasan á ser imaginarias. En la aplicación del Análisis á la Geometría, como dice Chasles, los teoremas son independientes de las propiedades contingentes ó accidentales de las figuras, que pueden ser indiferentemente reales ó imaginarias.

La asimilación de las propiedades de las elipses á las de las hipérbolas homotéticas, condujo á Poncelet á admitir dos puntos comunes imaginarios en el infinito para aquéllas y aun de dichos puntos para todos los círculos de un plano, con lo que éstos quedan asimilados á las cónicas, al quedar determinados por cinco puntos; y si las hipérbolas homotéticas y concéntricas tienen una secante común de contacto en el infinito, las elipses tendrán una secante ideal también en el infinito y las parábolas serán tangentes en el infinito.

A Staudt se debe la teoría de los elementos imaginarios, establecida de una manera puramente geométrica.

Una involución elíptica representa dos elementos imaginarios conjugados que tienen por base la de la involución; y hallándose ésta determinada por dos pares de elementos correspondientes, dichos dos pares AA_1, BB_1 podrán representar los dos elementos imaginarios.

Staudt distinguió los dos elementos imaginarios, asociando á la forma ABA_1B_1 el sentido determinado de sucesión ABA_1 ó A_1BA de los elementos que contiene; de manera que la forma (ABA_1B_1), á la que asociamos el sentido ABA_1, representa un elemento imaginario, y la forma (A_1BAB_1), con el sentido A_1BA, re-

presenta su conjugado. $(A B A_1 B_1)$ y $(A_1 B A B_1)$ son los grupos representativos de los dos elementos imaginarios. De esto resulta que un elemento imaginario tiene una infinidad de grupos representativos; dos de estos grupos definen la misma involución, siendo el mismo el sentido de la sucesión de los elementos.

Chasles define *dos puntos imaginarios* en una recta, por dos *elementos*, á saber, su punto medio y el rectángulo ó producto de sus distancias á un origen común, es decir, que cuando las raíces de la ecuación

$$Ma^2 - 2M\alpha \cdot Ma + \nu = 0$$

son imaginarias, los dos puntos representados por las expresiones

$$Ma + Ma' = 2M\alpha \quad \text{y} \quad Ma \cdot Ma' = \nu$$

son imaginarios, subsistiendo tan solo por esta representación, que permite llegar á relaciones reales tales como la siguiente: *El producto de las distancias de dos puntos imaginarios á un punto real, tomado sobre la misma recta es siempre real y positivo*, pudiendo tener dos puntos imaginarios relaciones reales, por ejemplo, con dos puntos reales. Así resulta de la ecuación de la relación armónica de cuatro puntos a, a', e, f en la que α expresa el punto medio de a y a', O el medio de e y f,

$$ma \cdot ma' + me \cdot mf = 2m\alpha \cdot mO$$

y podrán expresarse las dependencias existentes entre dos puntos imaginarios y partes reales de una figura, no conteniendo más que los *elementos* de dichos puntos, por relaciones generales que convienen al caso de los puntos reales, y en las que dichos elementos no aparecen explícitamente, debiéndose considerar los segmentos que entran en dichas relaciones como *símbolos*, por medio de los cuales nos referimos al caso en que los puntos son reales.

Análogamente, Chasles considera determinadas dos rectas imaginarias por el producto de las cotangentes de sus inclinaciones respecto á un eje fijo y la recta conjugada armónica de este eje con relación á las dos rectas, y llega al teorema siguiente para definir los puntos dobles de una involución, en el caso de ser éstos imaginarios:

Si al rededor de un punto P *como vértice, se hace girar un ángulo* (A, A') *de magnitud constante, sus dos lados señalan, en una transversal fija, dos divisiones homográficas que tienen siempre los mismos puntos dobles* (imaginarios), *cualquiera que sea el ángulo* (A, A').

Cuando este ángulo es recto, nos hallamos en el caso de la involución elíptica, es decir, cuyos puntos dobles son imaginarios.

Plücker también se sirve de los puntos imaginarios del infinito para definir los focos de las cónicas, como los puntos reales de intersección de las dos tangentes imaginarias que pasan por dichos puntos.

Laguerre obtiene la expresión

$$(AB) = \frac{\log a'}{2\sqrt{-1}}$$

del ángulo de una figura, siendo a' la relación anarmónica de los dos lados del ángulo (A', B') de la otra figura, homográfica con la primera, y de las dos rectas trazadas por el vértice de este ángulo á los dos puntos imaginarios del infinito. El foco de una curva plana es un punto desde el que se le pueden trazar dos tangentes isótropas. Si

$$f(\xi, \eta, \zeta) = 0 \quad \text{ó} \quad P + \sqrt{-1}\, Q = 0$$

es la ecuación de la curva, entonces

$$f(\sqrt{-1}, 1, -\beta - \alpha\sqrt{-1}) = 0$$

expresará que la recta isótropa

$$y - \beta + (x - \alpha)\sqrt{-1} = 0$$

es tangente á la curva.

Y las ecuaciones $P = 0$, $Q = 0$ determinarán los dos focos.

Siendo

$$ayz + bxz + cxy + (ax + by + cz)\ (x + my + nz) = 0$$

la ecuación de un círculo cualquiera, si se corta éste por la recta del infinito

$$ax + by + cz = 0 \quad \text{ó} \quad x \operatorname{sen} A + y \operatorname{sen} B + z \operatorname{sen} C = 0$$

se obtiene el mismo resultado que cortando la circunferencia

$$ayz + bxz + cxy = 0$$

por la misma recta, eliminando z se obtendrán las coordenadas de los puntos cíclicos

$$\frac{y}{x} = e^{(A+B)\sqrt{-1}} \qquad \frac{z}{x} = e^{-(A+C)\sqrt{-1}}$$

Cayley, á su vez consigue presentar la geometría métrica como una parte de la geometría descriptiva, considerando en geometría esférica *lo absoluto* como la cónica, intersección de la esfera con la esfera concéntrica desvanecida

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

que en geometría plana degenera en un par de puntos, los de la intersección de la recta del infinito con el círculo desvanecido, es decir, los dos puntos circulares del infinito.

El Sr. Klein, desarrollando la teoría geométrica de Cayley, por la que éste reduce la geometría métrica á un caso de la descriptiva, al admitir como lo *absoluto* la cónica del infinito, establece la correlación de las tres geometrías parabólica, elíptica é hiperbólica.

Para determinar la distancia de dos puntos, generalizando la idea de Cayley, considera los otros dos puntos en que la recta que los une corta á la superficie fundamental, y *el producto del logaritmo de la relación anarmónica que forman estos cuatro puntos, por una constante arbitraria es la distancia de dichos puntos.* El ángulo de dos planos será análogamente, el producto por una constante del logaritmo de cierta relación anarmónica que forman dichos dos planos con los planos tangentes trazados á la superficie fundamental por la intersección de los primeros.

Con estos precedentes da el Sr. Klein una representación sensible de las tres especies de Geometría, basándose en la determinación métrica de Cayley.

La imagen de la parte planimétrica de la Geometría elíptica es la Geometría sobre la esfera, ó más generalmente sobre las superficies de curvatura constante positiva, teniéndola la Geometría hiperbólica en las superficies curvatura constante negativa.

Dados dos puntos en el espacio, determinan, por la intersección con la *superficie fundamental* de segundo grado, otros dos puntos, determinando su distancia, según se ha dicho, el logaritmo de la relación anarmónica, multiplicado por una constante arbitraria, y análogamente resulta para dos planos.

Se llega á una Geometría métrica de igual naturaleza que la Geometría *parabólica* ordinaria, cuando la superficie fundamental se cambia en una sección cónica imaginaria, si en particular esta cónica es el círculo imaginario del infinito, se obtiene la Geometría métrica ordinaria.

Se llega á una Geometría métrica correspondiente á la Geometría *elíptica*, tomando una superficie fundamental imaginaria.

Entonces ninguna línea tiene puntos en el infinito, de modo que la recta es como una curva cerrada de longitud finita.

Se obtiene una Geometría correspondiente á la Geometría *hiperbólica* tomando una superficie fundamental real no reglada.

Estas consideraciones hacen ver cómo el empleo de entidades imaginarias conduce á generalizar las teorías y estudiarlas con toda generalidad, sin restricciones que perjudiquen á la unificación de los conceptos y á su sistematización en la ciencia.

CAPÍTULO XV

El infinito en la Matemática.

El concepto de lo infinito subsiste, y ha penetrado á pesar nuestro en la ciencia, desde los tiempos más remotos, desde los pitagóricos, que habían sentado el principio de que todo está concontenido en la unidad infinita, causa suprema de cuanto existe.

Este concepto penetró muy pronto en la Matemática, desde que se tuvo la noción del punto como elemento de la recta, y especialmente lo vemos aparecer en el método de exhaución de Arquímedes, al determinar el área del círculo y referir una serie indefinida de figuras rectilíneas á una figura curvilínea. Por este procedimiento siempre nos encontramos en lo indefinido, pero siempre concebimos más allá de lo indefinido, el límite al que no llegamos nunca en la realidad, el infinito. Queremos llenar el espacio comprendído entre dos puntos de una recta, y siempre aparecen nuevos espacios susceptibles de nuevas divisiones, y nunca se agota el concepto que tenemos de una divisibilidad sin fin.

Es el concepto de infinito de los que nunca tienen una representación intuitiva, un concepto racional que nos sirve de guía en nuestras investigaciones y que da rigor á nuestros razonamientos. Intervine, como el de lo imaginario, cuando relacionamos entidades que tienen cierta incompatibilidad, en el caso de lo imaginario la incompatibilidad era de existencia ó no existencia. En virtud de ciertas leyes, algunas entidades desaparecían del sistema que las contenía, otras eran incompatibles, como las cónicas suplementarias de Poncelet. En lo infinito las entidades coexisten siempre, pero ninguna de las dos llegan á identificarse ni en calidad ni en cantidad. Siempre la serie de paralelógramos que se aproximan á los paralelógramos mixtilíneos de una área son figuras de distinta naturaleza que éstos, como los triángulos que se acumulan sobre un polígono regular, para integrar el área

del círculo son distintos de la figura curvilínea; son entidades de naturaleza incompatible, la recta y la curva.

La Arithmetica infinitorum de Wallis, las obras *Methodus fluxionum* y *Serierum infinitarum* de Newton, el *Methodus differentialis* de Leibnitz son el origen y fundamento de la teoría del infinito matemático, bien que esta teoría vemos iniciarse en las obras de Arquímedes.

Pero si el infinito cuantitativo como gérmen de la cantidad finita aparece y se desarrolla desde este momento, el infinito aparece bajo otro punto de vista en los tiempos modernos con el carácter extensivo, como una totalidad que envuelve el mundo de lo finito *numérico* y *extenso*.

En lo infinitamente pequeño la cantidad decrece indefinidamente y siempre está en el dominio de lo finito, siendo siempre menor que cualquier cantidad asignable en el campo de nuestras intuiciones; pero llega un momento en que del mundo de lo relativo vamos á pasar á lo absoluto, al *salto* que distingue el uno del otro, el momento en que por ejemplo la secante á una curva pasa á ser tangente, y entonces del dominio de la intuición pasamos al de la razón; pues de igual manera en el dominio de lo grande, las magnitudes se extienden más allá de toda limitación, quedando siempre limitadas nuestras intuiciones por otras nuevas, el espacio y el número siempre dilatándose; pero llega un momento en que otro salto nos conduce al límite que nuestra razón vislumbra y nos conduce al infinito; la concepción de límite en lo pequeño y en lo grande lleva la huella de lo infinito del que no nos podemos sustraer, porque lo llevamos en la esencia de nuestra naturaleza intelectual. Sin lo infinito la ciencia no sería ciencia racional, no nos permitiría contrastar lo contingente, lo relativo con lo necesario, lo absoluto, aquéllo que se presenta como norma invariable de lo mutable del mundo de los fenómenos.

En el dominio matemático, donde prevalece la relación, caminamos por encadenamientos de verdades enlazadas por una dependencia lógica, que es lo esencial, sin que algunas contingencias hagan aparecer ó desaparecer la existencia real de algunos seres, merced á ciertas incompatibilidades de los elementos que se combinan en la sucesión de las relaciones.

El número entero es el primer elemento de nuestros encadenamientos, el número fraccionario, si queremos prescindir de nuestras intuiciones, al mirarlos como compuesto de unidades sub-alternas, aun puede subsistir, como admiten algunos, por un conjunto de dos números, (a, b) pues todas las relaciones de esta clase de números aparecen en este sistema, fácilmente reducible

al ordinario, como se reduce á otro un sistema de coordenadas.

Del sistema de los números aritméticos pasamos á un sistema más amplio, el de los números calificados. La adición algébrica se define por el símbolo

$$(a, b) + (a' b') = (a + a',\ b + b')$$

La adjunción del cero en el sistema conduce á la relación

$$(a, b) + 0, 0) = (a, b) \qquad A + 0 = A$$

La suma de los pares simétricos á

$$(a, b) + (b, a) = (a + b, a + b) = (0, 0)$$

Los números calificados (positivos ó negativos) se podrán igualar á la uma ó diferencia de cero con un número positivo

$$(a, 0) = (0, 0) + (a, 0) \qquad \text{ó} \qquad a_p = 0 + a_p$$
$$(0, b) = (0, 0) + (b, 0) \qquad \text{ó} \qquad b_n = 0 - b_n$$

siendo el + y — signos calificativos.

Los números irracionales se definirán como séries infinitas de números racionales (Cantor y Weierstrass) ó como intermediarios entre dos clases infinitas de números racionales (Dedekind y Tannery).

El conjunto de los números racionales es ilimitado y *conexo*, según la denominación de Cantor (zusammenhängend), es decir, que la diferencia de dos números consecutivos de este conjunto puede hacerse menor que cualquier cantidad dada; pero no puede afirmarse que sea *continuo*, porque admite infinidad de lagunas infinitamente pequeñas que se llaman *cortaduras* (coupures), y los números irracionales, llenando estas cortaduras lo transforman en un conjunto continuo.

En estos conceptos se funda la teoria de las operaciones de los números irracionales, análoga á la de los números racionales, llegándose hasta la teoría de las funciones, como lo hacen los señores Dini y Tannery.

Este método de construcción de las ideas matemáticas es *analitica* y *á priori* puesto que crea los símbolos, considerados como séres de razón y deduce de las definiciones sus propiedades, mientras que el cálculo algebráico los ha producido *a posteriori*, como resultado de la discusión de las ecuaciones.

Un número algebráico entero es cualquier raíz de una ecuación algebráica con coeficientes enteros. Todo número que no es

algebráico es transcendente. Existe infinidad de números irracionales que no son raíces de ninguna ecuación algebráica con coeficientes racionales. El conjunto de los números algebráicos reales no es pues *continuo*, puesto que admite infinidad de *cortaduras*, correspondientes á los números irracionales transcendentes, es simplemente *conexo* como el conjunto de los números racionales que de él forma parte.

El conjunto de los números, enteros, el de los racionales y el de los algebráicos tienen la misma potencia (la primera), todo conjunto *continuo* tiene una potencia superior (la segunda).

El conjunto de los números transcendentes se escapa del dominio del Algebra, no pudiéndose deducir de ninguna combinación aritmética ó algebráica de un número finito de términos.

Los números transcendentes completan el conjunto de los números que da solo el Análisis, que á la estabilidad de los números aritméticos y algebráicos sustituye el estado de variabilidad, característico de la teoría de las funciones.

Los números, no solo tienen una existencia abstracta como creaciones intelectuales por combinaciones sucesivas; se aplican al orden concreto identificándose con entidades tales como la masa, el tiempo y el espacio, representado por magnitudes geométricas, líneas, y superficies. Los números positivos y negativos se presentan con una cualidad más que los números aritméticos, el *sentido*, y los complejos por otra cualidad más, la *dirección;* y la cualidad se reduce á relaciones de magnitud que expresan esta dirección, orden ó posición. Cada clase de números adquiere realidad y validez, desde que pueden representar nuevas magnitudes, ó bien cada clase de números entra en un dominio más amplio por la adjunción de nuevas cualidades que han extendido el dominio anterior.

De igual manera un nuevo número, el *número infinito*, se ofrece al principio en los problemas algebráicos como un símbolo de imposibilidad, como una solución absurda ó falsa, como algo ininteligible.

Lo infinito aparece en las cuestiones geométricas representado por una relación de paralelismo, por una recta que determinaba en otra, á partir de un punto dado, un segmento finito que, en un caso especial, deja de existir por la posición de paralelismo. En el dominio de la realidad, el segmento será siempre mayor que cualquier segmento asignable, en la posición límite, la cantidad como finita deja de existir. La posición especial corresponde á un nuevo número que sale del dominio de la intuición sensible para existir en el dominio de la pura razón y para ser símbolo de algo

real, la posición de paralelismo, con lo que se sigue manteniendo la correspondencia que existía en todos los casos, dentro de la realidad, sin excepción alguna. La razón nos ha permitido pasar al caso límite único en el número, como en la posición de la recta, y mantener la correspondencia unívoca.

El punto en el infinito es necesario para completar la recta indefinida y hacerla perfectamente continua. La introducción de los elementos impropios completa el sistema de relaciones geométricas que subsisten, sin excepción, adjuntando á lo finito y lo intuitivo, lo que la razón concibe con plena claridad, como complemento de lo relativo, que nunca llega á satisfacer las exigencias de esta facultad.

Las reglas del cálculo, aplicadas á lo infinito, además de ser distintas de las correspondientes á las cantidades finitas (así la agregación de una cantidad finita á un infinito no lo altera, la relación de dos segmentos infinitos, tomados en una recta, á partir de un punto cualquiera, fijado en ésta, es igual á la unidad), tienen mayor extensión, que se ríge por el concepto de comparabilidad, ó mejor, el hecho de admitir ó no admitir una relación. Las cantidades finitas forman un solo grado de la cantidad, y podemos reducirlo al de las cantidades racionales. El infinito se presenta en sistemas distintos, que son los infinitos de los diversos órdenes. Al referir lo finito á lo infinito como dos entidades complementarias, hemos de entender que referimos á un solo sistema, que en general es el sistema de los infinitos principales, una infinidad de sistemas, los de todos los órdenes positivos y negativos, pudiéndose considerar el de las cantidades finitas como de orden cero; y siendo así, es preciso saber el orden del infinito.

La ley de las correspondencias entre los infinitos está dada por la relación finita entre un infinito dado y cierta potencia del infinito principal, lo que constituye uno de los principios fundamentales del cálculo infinitesimal. Por esta relación existente entre los infinitos, según su orden, las expresiones

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\times\infty,\ \infty^0,\ 0^0,\ 1^\infty.$$

exigen ser interpretadas en cada caso.

No hay para qué insistir en esta idea del infinito, ya que ha sido objeto y lo será de varios capítulos de esta obra.

El tratar de ella no ha tenido otro objeto que completar el sistema de conceptos que intervienen en la organización de la Matemática.

CAPÍTULO XVI

La unificación de los conceptos matemáticos (*)

Así como el siglo XVII fué un periodo de creación, respecto á la ciencia matemática, nuestro siglo será, sin duda, la época de la sistematización de los conceptos de esta ciencia, por más que sea muy considerable el número de nuevas verdades y teorías originales en esta rama de los conocimientos humanos.

Desde la época de Descartes, Pascal, Fermat, Leibnitz y Newton, á la que agregamos los nombres de Euler y de Lagrange, viene la época de Gauss, Cauchy, Abel, Jacobi, Riemann, Lobatschewsky, Boole, Cayley, Weierstrass y otros que podríamos citar, y cuyos nombres tendrán un lugar en este trabajo.

Sobre la base de las Matemáticas en el siglo XVII, vemos durante el actual extenderse todas las ramas y crearse otras nuevas, con tendencia á reunirse en un tronco, formando una sola ciencia, la Matemática.

La teoría de las cantidades imaginarias penetró en el campo fecundo de las aplicaciones á la teoría de las funciones, cuando Cauchy, conforme á la interpretación geométrica debida á Argand y Buée, publicó sus memorias: *Sur les quantités géométriques;* y cuando Riemann, en virtud de sus originales puntos de vista, fijó los nuevos rumbos que después ha seguido la escuela alemana.

Por otra parte, el Algebra avanza, apoyada en la teoría de las sustituciones, en cuyo desarrollo tomaron parte principal, Lagrange, Abel, Galois y Jordan.

Citaremos todavía el Algebra de las formas con sus principales fundadores, Boole, Cayley y Sylvester.

Las funciones elípticas, á pesar de hallarse contenidas en la teoría general de las funciones, parece que forman una ciencia, merced á los considerables incrementos, obtenidos durante estos últimos años, desde la época de su creación por Fagnano, Legendre, Abel y Jacobi.

La teoría de los números progresa también desde la síntesis realizada por Gauss, hasta los trabajos de Dirichlet, Dedekind, Kummer y otros.

(*) Esta memoria, cuyo resúmen se publicó en *Werhandlungen der ersten interantionalen Mathematiker-Kongresses in Zürich*, fué presentada á dicho Congreso en 26 de Julio de 1897.

El Algebra de la lógica llega, hasta la vasta síntesis hecha por el Sr. Schroeder en sus fundamentales *Vorlesungen über die Algebra der Logik.*

La Geometría, enriquecida por Monge con el método de proyección, toma grandes vuelos, cuando Poncelet añade los fecundos conceptos de lo imaginario y lo infinito, con auxilio de sus proyecciones y su teoría de las cónicas suplementarias, las secantes y las tangentes ideales, método transformado por Staudt, al emplear las formas armónicas, y que Chasles había reducido á la unidad bajo el concepto de la relación anarmónica, emanada de los lemas de Pappus y de los porismas de Euclides, que implícitamente contienen las teorías, desarrolladas por el geómetra francés, de la homografía y de la involución.

Aparte de estos desarrollos de Geometría pura, vemos extenderse la Geometría analítica con auxilio del método proyectivo y de la teoría de las formas y mediante la adquisición de las coordenadas trilineales ú homogéneas y las tangenciales, que la han puesto en posesión del fecundo concepto de la dualidad.

Para terminar estos preliminares, que hacen referencia á los progresos de la Geometría, citaremos todavía las ramas debidas á Grassmann y Hamilton, que constituyen los desarrollos más notables de la Geometría vectorial, así como el cálculo baricéntrico de Moebius, las Geometrías cinemática é infinitesimal y otros desarrollos que podrían citarse, pero que omitimos, por brevedad, que completan esta enumeración juntamente con el acontecimiento inaugurado por Lobatschewsky y Riemann en la historia de la Geometría, que colocaron las geometrías no-euclídeas frente á la euclídea, conduciendo á la del hiper-espacio, y con el trabajo unificador debido á Lie, bajo el fecundo concepto de los grupos de sustituciones, de las teorías geométricas, trabajo que llega hasta la consideración de las familias de los movimientos no-euclídeos en una varidad de n dimensiones.

Expuesto en pocas palabras lo que constituye el conjunto de modernos descubrimientos realizados en la Matemática, y que van á constituir la materia de nuestro trabajo, vamos á ver, cómo en éstos existe una tendencia hacia la unificación de los muy varios conceptos con que se ha enriquecido esta ciencia y que van á agruparse actualmente en una gran síntesis.

Podríamos seguir este trabajo de unificación, bien en el conjunto de obras publicadas, bien en la acción de nuestra inteligencia, que posesora de los nuevos conceptos, reunidos por tantos esfuerzos continuados, los hace brotar, ordenados, desde el fondo donde residen las categorías directoras de nuestra razón.

Vemos que la Matemática obra en sus procedimientos por una serie de proyecciones. Ante todo, la categoría de la razón, llamada *cantidad*, se proyecta bajo la forma de combinación dirigida por nuestra actividad, que procede sometida á las reglas de la dialéctica.

Los conceptos de igualdad, desigualdad, sucesión, orden, número, posición, continuidad, discontinuidad, etc., que corresponden á esta categoría, aplicados y combinados con repetición entre sí producen todo el edificio matemático.

La primera aplicación de estos conceptos produce el juicio de subordinación (Unterordnung, subordinatio), supraordinación (Überordnung, supraordinatio) é igualdad; y la traducción de los conceptos en el lenguaje, forma el Algebra de la lógica, cuyas dos operaciones fundamentales son la adición y la multiplicación que corresponden á las conjunciones disyuntiva y copulativa, rama de la ciencia, cuya exposición más completa hallamos en la obra ya citada del Sr. Schroeder.

Hallaremos enseguida la Combinatoria, desarrollada en la teoría de las sustituciones, y también de una manera más concreta, en la Teoría de los números.

Pero la Aritmética universal, creando los números por procedimientos directos, exige acto continuo un nuevo desarrollo, cuyo problema característico es la resolución de las ecuaciones, que es el problema general del cálculo, y todavía el Algebra exige otro desarrollo más extenso que constituye la teoría de las funciones, y que se halla subordinado al problema aun más general de la integración de las ecuaciones diferenciales.

Omitimos el tratar ahora de la Geometría, en atención á la brevedad.

Los innumerables descubrimientos realizados durante el siglo XIX han producido su generalización gradual que ha influído en la contextura de los libros destinados á la enseñanza, y por consiguiente en la formación de las nuevas generaciones de matemáticos; y esta generalización ha contribuído á la unificación de los conceptos.

Así, la Aritmética, subordinada al algoritmo de la numeración, llegó ya á las principales propiedades de los números y se enriqueció por efecto de la influencia de Fermat, Lagrange, Euler y Legendre; pero cuando experimentó una evolución trascendental, fué cuando Gauss unificó esta rama empleando el algoritmo de la congruencia, extendiéndola al establecer las clases de números, especialmente la de los complejos.

Frente á la ecuación de equivalencia apareció la ecuación de

congruencia, cuyas conexiones mostró Poinsot en sus *Réflexions sur la théorie des nombres,* haciendo destacarse el concepto de orden como característico del Algebra.

Podremos agregar á la unificación importada por Gauss la que obtuvo el Sr. Dedekind con el concepto de *cuerpo finito de grado* n, y desarrollando la teoría de los *ideales* que sustituyó á los *números ideales* de Kummer, para generalizar las propiedades de los números reales.

A este trabajo de unificación y de generalización podemos agregar el que efectuó Herr G. Cantor bajo el concepto de *potencia* ó de *número cardinal* en su teoría de los conjuntos, cuyo procedimimiento general consiste en establecer la correspondencia unívoca de los conjuntos que se comparan entre sí, y análogamente el Sr. Dedekind considera la imagen ó proyección de un elemento *s* de un conjunto obtenida mediante la operación φ (s) que transforma un sistema en otro sistema.

Las obras: *Sur la théorie des nombres entiers algébriques, über die anzahl der Idealclassen und den verschiedenen ordnungen,* sus notas en la obra de Dirichlet *Vorlesungen über Zahlentheorie* y opúsculos *Stetigkeit und irrazionale Zahlen, Was sind und was sollen die Zahlen* constituyen un resúmen de los puntos de vista del señor Dedekind, que colocan su nombre entre los de Kummer, Kronesker y Cantor.

Estos nuevos conceptos han alterado el carácter de las obras destinadas á esta rama de la enseñanza. Entre ellas citaremos preferentemente las de los Sres. Tannery y Dini: *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable, Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali.*

Esta última se halla inspirada en los puntos de vista de los Sres. Schwarz, Heine, Bois-Reymond, Darboux y Cantor, y contribuye poderosamente á unificar un género de conceptos matemáticos. Así, podemos citar la descomposición de los números racionales en dos clases A_1 y A_2, conforme con la idea de Cantor y Dedekind; y la introducción sucesiva de los números en las dos clases, aproximándose indefinidamente al número cuya determinación se busca, y de que se trata, permite extender á los números irracionales las propiedades de las operaciones aritméticas.

Esta idea de estrechar los números buscados en dos séries, ascendente y descendente, conducen al importante concepto de grupos, correspondientes á los grupos de números y á la definición de *puntos-límites* y de grupos ó conjuntos derivados de los diversos órdenes.

Expuesto el caráter de esta obra, añadiremos solamente que

contiene desarrollos muy sutiles sobre los conceptos de límite; mediante el de *punto-límite*, acerca de la manera de aproximarse á ellos las afijas de las funciones, de la amplitud de las oscilaciones, de los casos de valores infinitesimales ó infinitos de las funciones. Todo lo que conduce al estudio profundo de la continuidad y de la discontinuidad, de las derivadas y de las séries, empleando minuciosas consideraciones respecto al principio de la condensación de las singularidades de Hankel, á la existencia de las derivadas de las funciones y á las integrales definidas, lo que hace interesantísima la obra del Sr. Dini.

La obra de M. Tannery, *Introduction á la théorie des fonctions d'une variable* ha contribuído también á afianzar el nuevo sistema de conocimientos algorítmicos, escrita con análogo objeto que la del Sr. Dini.

Los números irracionales son intermediarios entre dos clases infinitas de números racionales que tienen su lugar en la escala de los números y dando lugar á lagunas infinitamente pequeñas ó *cortaduras* que forman el conjunto de los números racionales, según la expresión del Sr. Dedekind, en su opúsculo *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, lo que conduce á la consideración de séries convergentes de números racionales y á las propiedades fundamentales de las operaciones sobre tales séries y al teorema de Weierstrass acerca del valor-límite de un conjunto de elementos distintos y en número infinito, y á la correspondencia unívoca, tan importante en todas las ramas de la Matemática, y particularmente en los desarrollos seguidos por M. Tannery, que emplea la representación ya citada del Sr. Cantor, estableciendo la teoría de las séries y de los productos infinitos, de las derivadas y de las integrales definidas.

Al lado de las obras de los Sres. Dini y Tannery puede citarse la *Teoria delle Grandezze* del Sr. Bettazzi que expresa el espíritu de abstracción y de correspondencia de los conceptos, referidos á objetos coexistentes, cuyas propiedades no envuelven contradicción y que constituyen los postulados de la ciencia de los números. Define la igualdad y la desigualdad según el punto de vista de Grassmann, fundándose en la exclusión de los dos conceptos, cuya arbitrariedad queda limitada por leyes características, sin necesidad de definir los seres en sí, ni de conocer su verdadera naturaleza, sino solamente su igualdad y su desigualdad, cuya verificación basta para dar á un objeto correspondiente á un nombre, su existencia como cantidad. La operación se reduce al paso de un grupo á otro grupo, ó bien á la correspondencia de un número de seres con un grupo de seres dados. La

igualdad del resultado de una operación sobre seres que difieren solamente por su orden, conduce á la propiedad conmutativa; y una operación conmutativa y asociativa servirá para establecer la igualdad de los conceptos, cuando el resultado sea el mismo, independientemente del orden de éstos.

En esta obra se hace el estudio sistemático de las clases de magnitudes, hasta la de *n* dimensiones.

En la segunda parte se establece la correspondencia entre cada magnitud y su número, y se hace el estudio de éste por medio de las propiedades de aquélla. Se estudian así las clases referidas á la magnitud *unidad* ó á partes alícuotas de la unidad.

Se establece también una correspondencia univoca entre las magnitudes de una clase y las de otras clases para llegar á la *correspondencia mètrica*, haciendo corresponder todas las magnitudes unidades y todas las equimúltiplas y equisubmúltiplas de la unidad y de sus partes.

Otros trabajos del Sr. Bettazzi pueden incluirse entre los que citamos en esta reseña, tales son: *Fundamenti per una teoria general dei gruppi, Sulle catena di un ente in un gruppo* etc.

Las obras *Elemente der Arithmetik und Algebre de* Fr. Meyer y el muy importante *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra* del señor Schroeder, en conformidad con los principios del Algebra de al lógica y con las investigaciones de Grassmann, Hankel, Cantor contribuyen al perfeccionamiento de estas ciencias, así como la obra *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik* del Sr. Stolz.

Todas estas obras muestran cómo se ha realizado la unificación de los conceptos en la teoría de los números, y ofrecen analogías con otras ramas matemáticas por el predomio de la idea de correspondencia unívoca.

Terminaremos esta reseña citando la importante *Théorie général des fonctions* de Bois Reymond cuyo punto de vista sobre el argumento de las funciones, la distribución de los puntos sobre la extensión del argumento, la división de éste, la distribución de los puntos sobre la repartición de los sistemas de puntos pantáquicos, los sistemas de puntos apantáquicos y generalmente, las profundas consideraciones filosóficas esparcidas en la obra, iluminan las cuestiones fundamentales del Análisis.

Citaremos todavía los originales *Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitèsimal* de M. Meray, que reconociendo lo eventual de la continuidad, sustituye á ésta y otros conceptos como el de la monogeneidad, etc. la *propiedad de las funciones analíticas de ser desarrollables en sèries enteras*, coincidiendo con los nuevos puntos de vista de la doctrina de Weierstrass y nueva dirección cuyo origen

puede hacerse remontar á la célebre memoria de M. Darboux: *Sur les fonctions discontinues.*

Dirigiéndonos de nuevo al Algebra, podemos decir que al incluir en su vasta extensión la teoría de los números, tiene su dominio especial en la *teoría de las ecuaciones,* que comprende el problema inverso de la Aritmética general.

En este problema inverso hallamos relaciones de coexistencia de los coeficientes con las variables que forman un todo unido, cuyas partes se hallan implícitamente constituídas conforme con la naturaleza de este todo. Según esto, la cuestión se reduce á conocer la dependencia mútua de estos elementos constitutivos, lo que consigue realizar la teoría de las funciones simétricas, que hace del Algebra una ciencia combinatoria, dependiente de la teoría de las sustituciones.

Este desdoblamiento de la parte que forma la incógnita en función de lo conocido, debe obtenerse en toda la extensión que comprende los diversos estados posibles de la cantidad, lo que pertenece á la Aritmética general y á la teoría de las funciones, en las que los conceptos de igualdad, desigualdad, continuidad, discontinuidad dominan; bien que la continuidad y la discontinuidad, según las teorías de Cantor y Dedekind se reducen á una correspondencia unívoca de términos de diversas séries, es decir, á posición en estos conjuntos que definen los intervalos.

La teoría de las ecuaciones prescinde de estas consideraciones, para no atender más que á los enlaces entre los elementos que forman las ecuaciones. Es preciso reunir aquí los resultados obtenidos por Lagrange, Abel y Galois; y hallaremos cierta comunidad de estructura y de naturaleza con la teoría de los números, es decir, la correspondencia de las funciones que tienen ciertas relaciones con las verdaderas incógnitas y los grupos de sustituciones.

Pero una nueva rama se entrelaza con ésta, que constituye lo que se llama *Algebra de las formas*, caracterizada por el concepto de *incariación,* así como el Algebra común lo estaba por la relación entre dos clases de elementos, que es preciso expresar en forma explícita.

Vemos edificarse un expléndido organismo sobre el concepto de invariación, que toma sus materiales de unas ramas, y penetra profundamente en otras, formando una sólida edificación.

Hallamos un elemento de carácter combinatorio, muy importante en varias ramas de la Matemática, que tiene su origen en una relación de simetría entre los coeficientes de los sistemas de ecuaciones lineales, que desde Leibnitz y Cramer se conoció, em-

pleándose después por Gauss en sus disquisiciones aritméticas.

El enlace de esta rama con las demás es necesario, desde el momento en que vemos que la propiedad de invariación de ciertas funciones tiene lugar al hacerse transformaciones lineales de las variables. Así, estas transformaciones se emplean en el problema de la transformación y equivalencia de las formas cuadráticas, correspondientes en Geometría á cambios correlativos de los sistemas de referencia ó de coordenadas.

En pocas palabras, diremos que la nueva Algebra ha dotado á la Geometría analítica del principio general que le faltaba, mediante las teorías de invariantes y de covariantes. Es preciso recordar especialmente, cómo las determinantes, discriminantes, contravariantes, emanantes, etc. tienen, cada una, su correspondiencia geométrica, según vemos en los excelentes tratados de Salmon y de Clebsch y en las quinta y sexta memorias: *Upon Quantics* de Cayley, donde se traducen las relaciones anarmónicas, de homografía y de involución en el lenguaje del Algebra de las formas y donde se establece la Geometría métrica proyectiva, referida á *lo absoluto*, después de haber referido las de una y de dos dimensiones á las cuádricas binarias y ternarias.

Siguiendo la enumeración de las analogías que conducen á la unificación de los conceptos, hallamos que las propiedades que quedan invariantes para una clase cualquiera de transformaciones, dependen del carácter del grupo de éstas, es decir, del conjunto de las transformaciones que se reproducen mediante una cualquiera de sus combinaciones, lo que hemos visto en otras ramas. También vemos, análogamente á lo que se ha hecho en otros dominios, prolongarse el campo de un grupo de transformaciones continuo y finito, adjuntando las derivadas de ciertas variables, lo que forma las invariantes diferenciales.

Las transformaciones mútuas de las formas, ó el problema de la equivalencia, extendido á los haces de estas formas, la representación de éstos, con auxilio de un conjunto de haces elementales, la transformación en sí misma de una forma, la reducción de las formas á la forma tipo, son cuestiones que muestran cómo ha contribuído á la unificación de la ciencia, el concepto de grupo de sustituciones.

Análogamente á lo que hemos visto en la teoría de los grupos de sustituciones, propios de ciertas ecuaciones algebráicas, vemos que es preciso considerar los sub-grupos, para estudiar la invariación de ciertas formas.

Las transformaciones de las formas binarias permitió al señor Frobenius fundar un algoritmo fecundo, cuyas operaciones ofre-

cen ciertas analogías con la multiplicación de los números complejos.

El problema de la transformación de las formas, enlazado con la igualdad de ciertas invariantes y covariantes, conduce á una correspondencia entre los grupos finitos y las formas, y á los movimientos en el espacio. Así, en particular, se pueden considerar los grupos de rotaciones que conducen á sí mismos á los cinco poliedros regulares, consideraciones geométricas que han llevado al Sr. Klein á establecer una teoría general de las ecuaciones de 5.º grado en sus *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grades*, y prosiguiendo sus investigaciones ha obtenido los grupos que contienen las resoluciones de las de sexto y séptimo grado.

Esta Algebra, construída por Cayley en sus memorias *Upon Quantics*, enriquecida por Sylvester, Aronhold, Clebsch, Hermite, Gordan, Brioschi y otros, tiene su desarrollo más amplio en las obras de Lie y en algunos trabajos del Sr. Klein.

La cuestión de obtener un dominio finito para el conjunto de las formas deducidas por operaciones invariantes de ciertas formas, ó de fijar un *número finito* de tipos cuyas potencias y productos reproducen cualquiera otro tipo del mismo dominio, tienen sus análogas en otras ramas matemáticas, y ofrecen un ejemplar notable del avance en la unificación de los conceptos, en la época actual.

El problema de hallar el sistema de formas fundamentales de un dominio se ha puesto en evidencia por el Sr. Gordan, fundándose su método en la representación simbólica de las invariantes y covariantes de la forma, con auxilio del procedimiento designado *Faltung*, ó generalización simbólica de la composición (*Überschiebung*), de manera que cada forma del conjunto pueda expresarse en función entera y racional de las formas del sistema.

Clebsch estableció que las formaciones invariantes de una serie lineal ó cuadrática de formas binarias gozan de la propiedad de reducirse á cierto número de tipos, que es finito, habiendo demostrado el Sr. Peano que este número queda finito para todas las formas, cuando el número de éstas aumenta indefinidamente.

Para terminar estas consideraciones, añadiremos que el excelente *Lehrbuch der Algebra* del Sr. H. Weber realiza hoy de una manera perfecta este trabajo de unificación, proseguido en el siglo XIX entre las teorías de la invariación, las de la Aritmética general y de las ecuaciones algebráicas, así como en la primera

mitad de dicho siglo, M. Serret había logrado, en su notable *Traité d'Algèbre* unificaciones en las teorías de las congruencias y de las ecuaciones algebráicas, juntamente con su interesante exposición de la teoría de las sustituciones.

En la Geometría el trabajo de síntesis y de unificación comenzó en la escuela de Monge, desarrollándose la idea de proyectividad.

Carnot realizó su tentativa de establecer la correlación de las figuras en su *Géométrie de position*; Poncelet insistió preferentemente en su *Traité des propriétés projectives des figures* y en sus *Applications d'Analyse et de Géométrie*, en establecer el principio de continuidad, empleando los conceptos de imaginario é infinito.

El propósito de unificación se completó con la extensión de los conceptos mediante el principio de la teoría de la polaridad, germen de la dualidad y de la correlación.

Chasles restableció los porismas de Euclides é hizo surgir de ellos las modernas teorías de la involución y de la homografía.

Esta unificación se mostrò aun de un modo más brillante en el sistema de Staudt, el más riguroso de la Geometría por su método y razonamientos, donde se hace abstracción de las figuras, para no seguir más que el encadenamiento lógico de las ideas, independientemente de las contingencias de la representación sensible.

En este sistema se ve dominar más que en ningún otro la idea de proyección, transformándose las figuras por los dos procedimientos recíprocos de la proyección y sección, contribuyendo á dar unidad al conjunto el empleo de los elementos impropios.

Plücker definió los focos como intersecciones de las tangentes imaginarias al círculo del infinito, y habiendo fundado su teoría de las cónicas con relación á los puntos imaginarios del infinito, amplió también este fundamento para su clasificación de las curvas de tercer orden.

La consideración del círculo imaginario en el infinito conduce á muchas propiedades de las cónicas esféricas homofocales y de los conos de revolución, tales como las siguientes: *Todos los conos de revolución del mismo vértice tienen un doble contacto con el cono asintótico de una esfera descrita desde su vértice como centro. Todos los conos de revolución con el mismo vértice tienen por bases, sobre un plano cualquiera, cónicas que tienen un doble contacto con un círculo imaginario, etc.*

Podemos citar todavía como ejemplo de la fecundidad de estas ideas la obra de M. Darboux: *Sur une classe remarquable des courbes et des surfaces algébriques et sur la théorie des imaginai-*

res, en la que el estudio de estas superficies y curvas está fundado en la consideración del cono circunscrito á la esfera ó el círculo imaginario del infinito.

Los focos de una curva plana son los puntos para los que dos de las tangentes trazadas á la curva tienen $+i$ y $-i$ por coeficientes angulares, es decir, pasan por los dos puntos I y J, etc.

La correspondencia unívoca entre dos puntos se establece; y las rectas que encuentran al círculo del infinito se transforman en rectas que encuentran al mismo círculo; las superficies desarrollables formadas por estas rectas se transforman en superficies desarrollables etc.

Estos conceptos se relacionan con la teoría de Cauchy de las rectas isótropas, de las que hizo Laguerre indicaciones interesantes en su memoria: *Sur l'emploi des imaginaires en Géométrie*, empleando la ecuación de una curva en coordenadas isótropas y obteniendo los extremos de los segmentos representativos de puntos situados sobre la curva, á partir de un punto tomado arbitrariamente en el plano, y llegando á la representación de un punto real ó imaginario situado sobre una curva dada por un *solo punto real* de su plano, que está situado en una recta isótropa; lo que conduce á representar la mutación de un punto sobre una curva por la curva que traza en el plano su *punto representativo*.

Estos conceptos tienen gran desarrollo en los trabajos de Cauchy, Riemann, Clebsch y Cremona.

Cauchy establece la correspondencia entre las funciones y los puntos de un plano, considerando dos puntos cuyas afijas son la variable compleja y una función de ésta, y Riemann emplea para esta correspondencia la superficie múltiple.

Otra correspondencia es la que establece el Sr. Cremona entre dos puntos que se mueven en dos planos P y P', de manera que á un punto x corresponda un solo punto x' bien determinado y recíprocamente; y cuando x recorre una recta en P, x' describe una curva algebráica φ', de orden n en P', de manera que se verifiquen las relaciones:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \varphi'_1 : \varphi'_2 : \varphi'_3 \quad \text{y} \quad x'_1 : x'_2 : x'_3 = \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3$$

Lo que conduce á una correspondencia, punto por punto, que produce redes geométricas, conduciendo á una correspondencia *birracional* entre los puntos de dos planos y entre grupos de curvas y de puntos. Y las relaciones

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 : \varphi_4$$

expresan que en dos espacios de tres dimensiones, á un punto

del uno, que no sea común á las cuatro superficies $\varphi = 0$, no corresponde más que un solo punto determinado del otro, con reciprocidad, lo que conduce á la *superficie homaloide*, ó representable punto por punto en un plano, y al sistema homaloidal, que establece correspondencias entre puntos, curvas y superficies.

Citaremos, en fin, las relaciones unideterminativas que cambian una curva $f(x) = 0$ en otra $F(y) = 0$ mediante una transformación

$$\varrho x_1 = \varphi_1(y), \quad \varrho x_2 = \varphi_2(y), \quad \varrho x_3 = \varphi_3(y)$$

y el importante teorema de Riemann sobre *la conservación del género de una curva en todas las transformaciones unideterminativas*, así como las constantes ó *módulos* de que depende la posibilidad de la transformación unideterminativa de dos curvas, la reducción de una curva á la curva normal, con el empleo de las curvas adjuntas y la consideración de los grupos de puntos por los que pasa una multiplicidad de curvas adjuntas.

Como ejemplo notable de la adjunción de lo imaginario y lo infinito, para conservar la idea de correspondencia, tenemos al lado de *A sixt Memoir upon Quantics* de Cayley, que establece la proyectividad de la Geometría métrica, la memoria del Sr. Klein *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, que estudia los sistemas geométricos en relación con los grupos de transformaciones y las equivalencias entre las teorías del Algebra de las formas y la Geometría proyectiva y la síntesis realizada por Lie, fundándose en el concepto de grupo de transformaciones.

Esta unificación en las ramas superiores de la geometría la podemos realizar en la Geometría elemental, porque la admisión de una paralela única establece una correspondencia unívoca entre las posiciones de una semi-recta que gira al rededor de un punto y los puntos de una recta del plano, que no pase por dicho punto, pudiéndose demostrar inmediatamente los teoremas concernientes á las magnitudes de los lados y ángulos de un triángulo; la transformación de una oblícua en otra mediante un coeficiente (lo que entra en el dominio de la Trigonometría) y la reproducción de estos hechos en cada banda de igual anchura en que podemos dividir el plano, conduce á la homotecia y á la semejanza, permitiendo establecer las demás proposiciones fundadas en la idea de medida, ó á todas las relaciones métricas.

Citaremos la obra *A sequel to the first six books of the elements of Euclid* de M. Casey que contiene una *Introducción* á la Geometría del triángulo, cuyo título expresa el concepto de esta ra-

ma complementaria de la Geometría elemental, llevando á mayor altura el problema de la determinación geométrica.

Otras evoluciones importantes son las que han originado las geometrías no-euclídeas y la hiper-geometría, en que han colaborado Lobastchewsky, Bolyai, Helmholtz, Beltrami, Frischauf, Tilly, Flye Ste. Marie, Killing, Gerard, Neuberg y otros, y citaremos, como las más recientes, las obras: *Die Nicht-Euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung* y *Nicht-Euclidische Geometrie* de los Sres. Killing y Klein y la *Theorie der homogenen zusammengesetzten Raumgebilde* del Sr. Schlegel que da la proyección de los poliedros regulares de cuatro dimensiones en el espacio ordinario y en fin la obra de M. Poincaré *Analysis situs*.

Sobre el algoritmo creado por Newton y Leibnitz que se presentó en sus orígenes con un carácter eminentemente práctico se ha organizado la teoría de las funciones. Desde Cauchy esta rama cambia de carácter, en lo que influye la representación geométrica de las cantidades complejas, adoptada y desenvuelta por este egregio talento y el descubrimiento de las funciones elípticas.

La obra de Cauchy, en la que á las funciones de variables imaginarias se unen las originales teorías de los resíduos y de los índices se completa con las *Recherches sur les fonctions algébriques* de Puiseux, á quien se debe la importante doctrina acerca de la distribución de las raíces de una ecuación algebráica al rededor de los puntos críticos, que posteriormente ha servido de base á la teoría de los puntos singulares de las curvas. Las investigaciones de Liouville y Hermite, además de conducir á una representación geométrica de la doble periodicidad, contribuyen al avance de las teorías de las funciones elípticas. Riemann sigue nuevos rumbos basados en el descubrimiento de la superficie de su nombre y en la teoría de las conexiones, creando la nueva rama *Analysis situs*, Weierstrass funda la teoría de las funciones en su desarrollo, por medio de series enteras y en su *prolongación analítica*.

La *Théorie des fonctions elliptiques et double périodiques* de Briot y Bouquet y *Teorica delle funzioni di variabili complesse* de Cassorati influyen primeramente en la vulgarización de estas doctrinas, á las que sigue la *Théorié élémentaire des quantités complexes* de Hoüel.

Las obras recientes revelan los últimos progresos del Análisis tales como los tratados de los Sres. Jordan, Laurent, Harnack y Picard, incluyéndose en la de este último profesor los principios de la teoría de los grupos de Lie, que recuerda la teoría de Galois, para enlazarla con la reciente teoria de los *grupos continuos*.

Partiendo M. Picard del teorema fundamental de Lagrange acerca de la dependencia racional de una función por medio de otra y de sus funciones simétricas y de la invariabilidad de la primera por las sustituciones de su grupo, extiende el teorema de Galois acerca de la expresión racional de una raíz por medio de otras á las ecuaciones diferenciales, y expone las analogías descubiertas por M. Vessiot, con las ideas de Galois al tratarse de una función racional de un sistema fundamental de integrales

$$F\left(y_1, y_2, \ldots y_n, \frac{d_n}{dx}, \ldots\right)$$

cuyos coeficientes son funciones de x, pertenecientes al dominio de racionalidad, y F una segunda función racional de las integrales que permanecen invariables por la sustitución del grupo G_1 contenido en el grupo G, etc., lo que Lie llama *una descomposición normal* del grupo G en una serie de sub-grupos, con auxilio de un teorema análogo de M. Jordan.

Citaremos, para completar esta reseña de los descubrimientos que han contribuído á la unificación de los conceptos matemáticos, el riquísimo conjunto de ideas contenidas en *The Evanton Colloquium* del Sr. Klein, que trata de la Geometría de la esfera de Lie, con respecto á su grupo característico, cuyo elemento es la esfera, que desarrolla M. Darboux en su memoria: *Sur les surfaces cyclides* y en su obra, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques* donde define la cíclida por la propiedad de tener al círculo del infinito por línea doble y las superficies de tercer orden que contienen este círculo.

El Sr. Klein agrega á esto, correspondencias con la Geometría de Plücker cuyo elemento es la recta, de modo que á dos esferas tangentes corresponden dos líneas que se cortan, siendo recíprocamente transformables por sustituciones lineales, y obtiene una correlación entre el hiperboloide de una hoja y la cíclida de Dupui. Recuerda el nuevo aspecto que adquirió el problema general de las ecuaciones, desde que M. Hermite las resolvió por funciones elípticas, así como Kronecker y Brioschi, mientras que el señor Klein simplifica el procedimiento por la ecuación del icosaedro

$$\frac{H^3 \eta}{1728 f^5(\eta)} = z$$

cuyas 60 raíces pueden expresarse en funciones lineales de η, exponiendo la representación conforme del plano z sobre el plano η

ó sobre la esfera, asignando esta representación, á cada raíz una región, que equivale á la perfecta separación de las raíces, y obtiene la reducción de la ecuación general de quinto grado, apoyándose en que el grupo de Galois es isomorfo con el de las 60 sustituciones lineales de la ecuación del icosacdro, formulando el tratamiento de este problema bajo la consideración del problema normal, es decir, el que contiene el número más simple de variaciones, entre los que contienen grupos isomorfos.

Entre los trabajos de otro carácter, pero cuyo espíritu de síntesis y de unificación de concepto es notable, citaremos á los señores Lemoine y Study: *La règle des analogies et transformation continue* y *Altere und neuere Untersuchungen über systeme complexer Zahlen*, relacionándose en este último los métodos de Grassmann con la teoría de los grupos,

Citaremos, para concluir, la notable obra *Synopsis hoheren Mathematik* de Herr Johann G. Hagen, que realiza una apreciabilísima síntesis, los trabajos dirigidos por el Sr. Peano en el *Formulaire des sciences mathématiques*, subordinados al lenguaje del Algebra lógica, las revistas *Bulletin des sciences mathématiques*, dirigido sucesivamente por los Sres. Hoüel, Darboux, Resal y Tannery, y *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* del Dr. Lampe, entre otras obras ó revistas publicadas con el mismo objeto, y sobre todo la loable empresa dirigida por la *Commission permanente du Répertoire bibliographique des sciences mathématiques*, que contribuirá poderosamente á realizar la síntesis matemática, que exige reformar la antigua organización sobre bases más ámplias, sometiéndola preferentemente á los conceptos combinatorios, á los de la correspondencia y de los grupos, que han conquistado puesto tan principal en el conjunto de la ciencia.

CAPÍTULO XVII

Recapitulación.

En la imposibilidad de hacer una crítica detallada de cada rama de la Matemática, nos hemos limitado á hacer breves indicaciones de algunos puntos esenciales ó cuestiones culminantes, con objeto de presentar un diseño de lo que debe ser la crítica en la enseñanza, cuyo carácter exclusivamente dogmático debe transformarse en discursivo, consistente en agregar á la doctrina teórica la discusión, comparación, generación y transformaciones, ya lógicas ya históricas de las diversas teorías ó cuestiones

matemáticas, lo que puede hacerse y se hace ya en las escuelas alemanas durante cada curso; y esto no impide que también, como resúmen general, haya un curso especial de estudios crítico-matemáticos, sobre todo en aquellas universidades, como en las nuestras, donde se hayan de neutralizar los efectos del excesivo dogmatismo. A lo expuesto en los anteriores capítulos agregaremos un resúmen de las ideas en ellos contenidos.

La probabilidad es un grado de posibilidad de verificarse los hechos. Esta posibilidad pasa del estado potencial al acto como consecuencia de las combinaciones que entran en el sistema general de causas y entes reales á aquéllas sometidos, del que solo conocemos una reducidísima parte, y del que algo se ha descubierto. La Matemática solo conoce de esto la relación entre los casos posibles y los existentes en cuestiones particulares. Las correspondencias reales de los hechos (que constituyen un sistema reducidísimo frente á la posibilidad) están determinadas por las ciencias experimentales, á las que en muchos casos se aplica la matemática, es decir, aplica las leyes numéricas á los hechos, é idealiza las ciencias experimentales, cuyas hipótesis tienen como criterio la conformidad con la realidad.

Tenemos pues dos sistemas: el de lo posible y de lo real, como el caso superior que cabe considerar, y que se halla sobre el sistema particular de nuestros conceptos, que solo se refieren á realidades intelectuales (*) creadas por nosotros, que forman la ciencia matemática. En esta hallamos, después de este grado superior, construído por la combinatoria aplicada á la posibilidad de la realización de los hechos, la aplicación á la posibilidad de combinarse diversos atributos en un sujeto ó diversos fenómenos en un acto, es decir, las alternativas del Algebra de la lógica, que se presentan como materia y resultado de las operaciones: inclusión, exclusión, subordinación, supraordinación, disyunción, copulación etc.

Descendiendo en la serie, hallamos otra operación combinatoria, la *sustitución*, que en el Algebra es la teoría de los grupos finitos discontinuos con sus estructuras, por medio de ciclos, con sus estados de ser regulares, primitivas ó imprimitivas, con sus relaciones, de ser cambiables, permutables, con sus propiedades de ser transitivos è intransitivos, isomorfos, etc.

Las aplicaciones al Algebra constituyen las teorías de las ecuaciones abelianas y de Galois.

La determinación de los puntos, líneas ó superficies de especie

(*) Aquéllas que podemos referir á objetos existentes.

dada que satisfacen á condiciones dadas, depende del concepto de grupo de sustituciones. El sistema de ecuaciones que expresa aquélla, conduce á una ecuación final, cuyo grupo está contenido en el de otra función, deducida de las relaciones geométricas existentes entre las soluciones de dichas ecuaciones.

Así la ecuación de noveno grado que determina los puntos de inflexión de una curva de tercer grado, se resuelve por una ecuación de cuarto grado y tres de tercero, *hallándose los nueve puntos de inflexión situados, tres à tres, sobre doce rectas que se cortan cuatro á cuatro,* y otras cuestiones análogas pudieran citarse que se se encuentran resueltas en el *Traité des substitutions* de M. Jordan, tales como la de las «rectas situadas en la superficie de cuarto grado de cónica doble», «los puntos singulares de la superficie de Kummer», «las rectas situadas en las superficies de tercer grado» etc.

Estas cuestiones entran en el orden superior de la determinación de los sistemas.

En general, el problema de la Matemática se reduce á establecer la equivalencia de condiciones de diversa naturaleza que pueden sustituirse en las proposiciones y en los razonamientos.

Así, en Geometría tendremos respecto á las cónicas:

condición simple	pasa por un punto
	es tangente á una recta
	á una dirección asintótica dada
	á sus direcciones principales dadas
	es semejante á una cónica dada
condición doble	tiene por centro un punto dado
	» un foco dado
	» » vértice »
	tiene asíntota »
	» directriz »
	» tangente en un vértice dado
	» es homotética á una cónica dada (*)

Uno de los principios más fecundos es el de *correspondencia* de Chasles, cuyo enunciado se halla en las *Leçons sur la Géométrie* par A. Clebsch, p. 261.

Debe procederse á las clasificaciones de las cuestiones. Si se trata por ejemplo de lugares geométricos puntuales ó tangencia-

(*) Longchamps *Géométrie analytique* 1884.

les, se clasificarán según la *cualidad geométrica* del punto I y de la recta δ (*), ya sea aquél un centro, un foco, un vértice, etc., ó ésta una directriz, una cuerda focal principal etc,; y tendremos un problema de centros, de focos, etc.

La base de esta clasificación será las analogías que conducen particularmente, á demostraciones paralelas de teoremas de Geometría plana y del espacio; y nos bastará citar del cuadro de analogías principales dado por M. de Longchamps, (**) las siguientes:

A un *punto a* corresponde	una *recta* A, ó un *punto* en otros casos
A una *recta* δ »	un *plano* Δ, ó una *recta* en otros casos
A *dos rectas paralelas* δ y δ'	dos *planos paralelos* Δ y Δ, ó dos *rectas paralelas*

El Sr. Moritz Pasch en sus *Vorlesungen über neuere Geometrie* establece un nuevo sistema de postulados, así como el Sr. Peano en su obra *I principii de Geometria logicamente esposti* y el señor Pieri en su trabajo: *Della geometria elementare como sistema ipotetico-deduttivo*, de cuyas investigaciones ha publicado un resúmen comparativo el Sr. Padoa en *El Progreso Matemático*, con el título de: *Un nuevo sistema de definiciones para la Geometría euclídea*. Este trabajo versa acerca del *menor* número posible de ideas primitivas, mediante las cuales todas las demás pueden ser definidas, reduciendo á cuatro las del Sr. Pasch: *punto, segmento, plano, se superpone á;*
á tres las del Sr. Peano: *punto, segmento, movimiento*;
á dos las del Sr. Pieri: *punto y movimiento,* proponiéndose el señor Padoa sustituir esta segunda idea primitiva por *una relación entre un número finito de puntos.*

Merece también especial mención la nueva obra del profesor de la universidad de Gottinga, Sr. Hilbert: *Grundlagen der Geometrie*, en la que reduce los axiomas á cinco grupos: el de la *unión* (Werknüpfung), el de la *correspondencia* (Anordnung), el de las *paralelas* (axioma *Euclídeo)*, el de la *congruencia* y el de la *continuidad* (de Arquímedes).

Ocasión oportuna se nos presenta de ver cómo la Geometría elemental se reduce á una serie de transformaciones de propieda-

(*) Longchamps *Cours de problèmes de geómétrie analytique* (t I pág. 45).
(**) *Id* (t. III pág. 4).

des, cuya variedad consiste en sustituciones de elementos determinados. Esto lo vemos, comenzando por los casos de determinación del triángulo, que en un caso particular se reduce á una recta cortada por dos paralelas. Los casos de desigualdad pueden examinarse por variación sucesiva y continua, observando cómo una recta que gira alrededor de un punto, al encontrar á otra, aumenta, variando en el mismo sentido, á partir desde la perpendicular (que es un eje de simetría); pudiéndose observar: que la permanencia del valor angular al rededor de un punto, se extiende al caso de considerarse rectas paralelas: que las relaciones de igualdad se extienden á relaciones de semejanza, por igual división del plano mediante fajas formadas por rectas paralelas: que combinando con el giro, se obtienen, por deformación, los diferentes tipos del triángulo cuyos elementos se determinan por las relaciones subsistentes entre los lados y ciertas funciones angulares, que inmediatamente se deducen y que son las líneas trigonométricas, que extienden las relaciones á los triángulos homotéticos y semejantes, lo cual permite su determinación por las tablas trigonométricas, resultando ser por esto la Trigonometría un capitulo de la Geometría.

Respecto á la Aritmética, citaremos la *Teoria de le grandezze* del Sr. Bettazzi que da un carácter *combinatorio* á su exposición, y la teoría de los *conjuntos* del Sr. Cantor que establece cierta *proyectividad* entre los conjuntos, al relacionarlos entre si.

Citaremos en Algebra el teorema fundamental de la teoría de ecuaciones á que consagraron sus esfuerzos d'Alembert, Euler, Foncenex, Lagrange, Laplace, Gauss, Argand, Mourey y Cauchy, de las que hace un estudio concienzudo y detallado el señor Loria en el tomo I de la *Rivista di Matematica.*

Materia para una obra de gran extensión proporcionaría el tratar de los conceptos fundamentales del cálculo infinitesimal, por esto nos limitaremos á citar la *Métaphysique du calcul infinitesimal* de Carnot, *Les méthodes dans la science de raisonnement* de Duhamel, la *Métaphysique du haut calcul* de Freycinet, como obras que tratan de los principios de esta rama superior y otras como la *Théorie des fonctions* de Bois-Reymond y *de l' infini mathématique* de M. Couturat, donde se estudia el concepto de infinito á que tantas obras han dedicado metafísicos y matemáticos.

En esta región de la ciencia no encontramos el concepto de determinación de una manera tan directa como en las demás ramas. La función es la cantidad *variable;* la tenemes que estudiar en la sucesión de sus modos de ser en el caso general, por variación continua. Pero dentro de este variar continuo, muchas veces

susceptible de cierta arbitrariedad, como ocurre en el caso de las funciones de variables complejas, cuyas mutaciones se verifican según contornos ó caminos diversos, hallamos algo fijo y determinado que es lo esencial, el *límite* y aun las *singularidades* de cualquier especie que sean, pues aun en este último caso, apesar de la indeterminación del concepto de infinito, estas singularidades se presentan como modos de ser de la función en ciertos momentos de su variación que la caracterizan, determinándola como tal función, sea algebráica ó trascendente en tal ó cual grado. Y aun si fijamos el sistema de valores de la variable ó variables, la función queda reducida á una entidad determinada, cuyo esquema ó representación es una figura geométrica; y de análoga manera que en Geometría elemental sustituimos unos elementos por otros, para obtener un encadenamiento de teoremas, consecuencias, ó mejor dicho, variantes unos de otros, y en Geometría proyectiva referimos unas á otras diversas formas, mediante su proyectividad, en Análisis, las funciones se sustituyen ó representan por expresiones diversas ya sean series, productos infinitos, integrales, ó por procedimientos diversos, como la prolongación analítica, la adjunción, etc.

Estos puntos de vista generales, al permitir el clasificar las ideas, según su orden de subordinación, coordinación y equivalencias, conduce á reducir cada teoría á lo esencial y característico, prescindiendo de todo lo que resulta inmediatamente como corolario ó consecuencia implícitamente contenida en sus principios. Y este debe ser el objeto de la *crítica matemática*, que debiera constituir una asignatura complementaria en los planes de estudios matemáticos de las facultades de Ciencias.

Antes de terminar, creemos de gran importancia el consignar que esta tendencia á la crítica se ha manifestado ostensiblemente en el *Congrès international de Philosophie* celebrado en París desde el 1 al 15 de Agosto último con la asistencia de numerosos y distinguidos matemáticos.

Los Sres. Moritz Cantor y Milhaud (de Montpellier) trataron de los *orígenes del cálculo infinitesimal*, el primero insistiendo en su orígen científico y en la filiación histórica de las teorías y de de los descubrimientos; el segundo dedicándose principalmente á descubrir las raíces filosóficas del Análisis, y buscando hasta en los filósofos y geómetras griegos el origen de las *ideas* infinitesimales.

Herr Günther de Munich, trató de los *orígenes de la gravitación*, presentando los progresos paralelos de la filosofía y de la ciencia.

La lógica algorítmica estaba representada por los Sres. Mac Coll, Johnson, Poretsky, Schröder y Peano.

El Sr. Mac Coll (de Boulogne-sur-Mer) hizo aplicaciones de su sistema lógico al *Cálculo de probabilidades* y al *cálculo de los límites* de las *integrales múltiples*. Mr. Johnson (de Cambridge) propuso una generalización de las *constituyentes* de Boole. El señor Poretsky (de Gorodnia, Rusia) expuso un cálculo lógico, procedente del cálculo lógico del Sr. Schröder, pero con un método original y una elección diferente de fórmulas fundamentales. El Sr. Schröder trató de la resolución de las ecuaciones lógicas. Después de haber recordado las propiedades características de la noción de orden simple (ó lineal), que le ha permitido formular el *Algebra de las relaciones* con cinco letras y dos cópulas, y expuso una *extensión de la idea de orden* que llama *gradación (Rangstufenfolge)*, que consiste en admitir varios elementos del *mismo rango*. El Sr. Peano expuso su *teoría de las definiciones matemáticas*, después de haber analizado, como ejemplo, las primeras definiciones de la Geometría de Legendre, el Sr. Burali-Forti expuso una teoría general de las definiciones matemáticas, el Sr. Padoa presentó un *Essai d'une théorie algébrique des nombres entiers*. El Sr. Pieri examinó la Geometría como un sistema puramente lógico. El Sr. Vailati trató de *las dificultades que se oponen á una clasificación racional de las ciencias*. El Sr. Vassilieff de «los principios del cálculo de probabilidades». Mr. Lechalas (de Ruan) de «la comparabilidad de las diversos espacios». Mr. Russel (de Cambridge) de «la idea de orden y de posición absolutos». M. Hadamard de «la inducción en matemáticas». M. Poincaré de «los principios de la Mecánica». M. Le Verrier (de París) acerca de «la génesis y alcance de los principios de la Termo-dinámica. (*).

También en el Congreso internacional de matemáticos se presentaron las tesis: Sobre los problemas futuros de las matemáticas por Herr Hilbert (de Gottinga); Nota sobre la critica matemálica por D. Zoel G. de Galdeano; sobre los postulados de la Geometría en la enseñanza por el Sr. Veronese (de Padua); sobre las operaciones fundamentales de la Aritmética por el Sr. Capelli, de carácter pedagógico.

Solo diremos que el Sr. Hilbert en su interesantísimo trabajo trató de las siguientes cuestiones: ¿Por qué signos podremos reconocer cuales son, de los problemas matemáticos, aquéllos más adecuados para hacer avanzar dicha ciencia? ¿De dónde nos vie-

(*) *L' Ensignement mathématique*. Resúmen de la relación hecha por M. Couturat (Paris).

nen los problemas matemáticos? ¿A qué exigencias debe satisfacer la solución de un problema matemático? ¿por qué métodos podemos atacarlos?

Examina después los problemas relativos á las nociones fundamentales que incluyen el problema de Cantor sobre la *potencia del continuo*, los axiomas de la Aritmética y de la Física; los problemas tomados de la Aritmética y el Algebra que comprende el problema de Riemann sobre los números primos, la trascendencia de ciertos números y acerca de la geometría de situación. Termina con los *problemas tomados de la teoría de las funciones*, tratando del «carácter de ciertas funciones que se encuentran en el cálculo de las variaciones, de las ecuaciones diferenciales lineales, que tienen un grupo dado», de «dos variables ligadas por una relación analitica cualquiera que pueden expresarse en función uniforme de un parámetro *z*».

Concluye el Sr. Hilbert observando que si la variedad creciente de las matemáticas no permite temer que esta ciencia se divida en varias ramas, sin ninguna relación entre sí, no cree ni puede esperar que así suceda, pues la *Matemática, al desarrollarse, lejos de perder su carácter de ciencia única, lo manifiesta cada dia con más claridad*, acarreando además cada progreso real el descubrimiento de métodos más incisivos y sencillos, que facilitan á cada geómetra un acceso relativamente fácil á todas las partes de la ciencia.

Vemos pues, aun en la circunscripción de la Matemática, cómo la ciencia ideal se aproxima á la ciencia real. Aquélla avanza lentameute, forma organismos cada vez más perfectos, durante las diversas épocas, rudimentarios al principio y con grandes limitaciones, después cada vez más amplios, desarrollados sobre bases más extensas. El Algebra anterior á Descartes rechazaba los números negativos, se limitaba á los números positivos.

La Geometría era puramente determinativa de relaciones individuales, no llegaba al sistema. La determinación de las funciones se limitaba al empleo de series, cuya convergencia comenzó á fijarse con más rigor desde la época de Cauchy. Posteriormente las investigaciones proseguidas, á partir de algunos perfeccionamientos debidos á Abel, y que luego tienen su punto de partida en los trabajos de M. Darboux sobre las funciones discontinuas y que se desarrollan ampliamente bajo la influencia de Wreierstrass y Cantor depuran los conceptos y edifican con más riqueza la ciencia, hasta llegar á la crítica, de la que hallamos una manifestación amplísima en la *Encyclopëdie der mathematische Wissenschaften*.

Pasando á los modos de determinación de las funciones, vemos que es fundamental el teorema de Cauchy respecto á la invariabilidad de la integral

$$\int f(z)\, dz$$

al deformarse el contorno de integración, mientras no pase éste por punto alguno en el que la función cese de ser sinéctica y se conserven los mismos extremos, como límites de la integral; y este teorema tiene su más amplia expresión con auxilio del importante concepto de *residuo*, llegando á las siguientes conclusiones:

El residuo integral de una función, relativo á un contorno cerrado simple dado, es la suma de los resíduos de esta función relativa á todos los infinitos situados en el interior del contorno, y la integral de una función monodroma y monógena tomada á lo largo de un contorno cerrado simple, es igual al resíduo integral de esta función, relativo á este contorno, ó igual á la suma de los residuos de esta función, relativos á cada uno de los infinitos contenidos en este contorno, multiplicada por $2\pi\sqrt{-1}$.

En cuanto á la expresión, una función sinéctica, se obtiene por medio de una serie convergente en el interrior de un círculo y recíprocamente (teorema de Cauchy), y aun se verifica esto en una corona circular (teorema de Laurent).

Ya en las páginas 71 y 72 vimos cómo la teoría de los índices de Cauchy condujo á la expresión de una función uniforme en todos los puntos de una área, con excepción de un punto que puede ser un cero ó un infinito, que la teoría de los ceros y de los polos se completa con la de los puntos singulares esenciales, y además que se puede formar una expresión cuyas raíces sean cantidades dadas

$$a_1 \ldots, a_n \qquad \text{tales que} \quad \lim_{n=\infty} \frac{1}{a_n} = 0$$

y la expresión de una función uniforme en todo el plano, con solo polos á distancia finita, mediante el cociente de dos funciones enteras. Añadiremos que la propiedad de tener una función sinéctica en el interior de un contorno todas sus derivadas nulas, la reduciría á una constante, que dicha función no podría ser constante en una parte finita interior también á dicho contorno, sin ser constante en toda el área contenida en el mismo, que en una área finita, una función sinéctica tiene un número limitado de raíces, que una función monodroma, monógena y bien determinada en el interior de una área finita, no puede tener una infinidad de ceros ó de infinitos, teoremas cuyo complemento se halla

en el teorema de Cauchy relativo á los ceros é infinitos contenidos en el interior de un contorno.

Los puntos en el infinito, que pueden considerarse como reunidos en uno solo, y su correspondencia recíproca con el cero, fijan ó determinan la naturaleza de las funciones. Así, *una función monodroma, monógena y bien determinada en toda la extensión del plano, aun en el infinito, que admite un número limitado de infinitos ó de ceros es racional, y si la función monodroma y monógena no tiene puntos esenciales, también es racional.*

A estos teoremas podemos agregar varios de Weierstrass acerca de los desarrollos en series de las funciones con puntos esenciales. Citaremos el siguiente: *Una función que solo tiene por punto esencial el del infinito, es el cociente de dos funciones que no tienen infinitos ni otros puntos esenciales más que el del infinito.*

El Sr. Mittag-Leffler, proponiéndose llevar la teoría de las funciones analíticas al grado de perfección alcanzado por la teoría de las funciones racionales, dió la expresión de una función, con una infinidad de puntos singulares

$$f(x) = \mathrm{F}(x) + \sum \mathrm{G}_i \left(\frac{1}{x - a_i} \right),$$

en la que $\mathrm{F}(x)$ expresa un polinomio y la función G_i una serie ordenada según las potencias de $\frac{1}{x - a_i}$, obteniendo una expresión analítica en la que *cada punto singular se pone en evidencia, así como la naturaleza de la singularidad de la función en este punto.*

Es oportuno observar ahora que una función analítica puede tener una infinidad de puntos críticos infinitamente próximos, formando una línea continua ó discontinua.

M. Painlevé ha desarrollado esta cuestión en su tesis: *Sur les lignes singulières des fonctions analytiques.*

Las líneas singulares ó cortaduras son artificiales ó esenciales. En el primer caso, dada una función puede existir otra que coincida con la primera en la proximidad de la cortadura L, *prolongándola* más allá sin discontinuidad. El círculo de convergencia de la serie de Maclaurin que desarrolla la función $\frac{1}{1 - z}$ es una cortadura artificial; la serie que representa en el círculo fundamental C una función fuchsiana, holomorfa y definida solamente en este círculo, admite á C como cortadura esencial.

M. Painlevé examina las disposiciones diversas de los puntos de una área en los que una función $\mathrm{P} + i\,\mathrm{Q}$ de z deja de ser holo-

morfa, á saber, que puedan estar contenidos en el interior de círculos que no tengan puntos comunes y cuyo radio sea tan pequeño como se quiera ó que formen un conjunto *puntual*, que se hallen en el interior de contornos, de manera que el área total encerrada sea tan pequeña como se quiera, en cuyo caso el conjunto de puntos será *lineal*, y que los puntos se hallen distribuídos en áreas finitas, de modo que una parte de estas áreas los contengan en número infinito, en cuyo caso el conjunto será *superficial*, en cada uno de los puntos singulares. Una al menos de las funciones P y Q, de la expresión $P(x, y) + i\,Q(x, y)$ será discontinua ó indeterminada, ó no admitirá á la vez derivada parcial con respecto á x é y, ó estas derivadas no verificarán las dos igualdades

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad -\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Si el conjunto es puntual, los puntos singulares pueden ser polos ó puntos esenciales; si es lineal, las cortaduras pueden ser asimiladas á límites de series de puntos esenciales ó de cortaduras; si el conjunto es superficial, la función puede presentar espacios lagunares. En estos espacios no tendrá sentido, ó será discontitinua ó no admitirá derivada, con respecto á z. En el caso de una función de tres variables $P(x, y, z)$, los puntos singulares serán las discontinuidades de P y de sus derivadas primeras y los puntos en que sus derivadas segundas no verifiquen la ecuación de Laplace $\Delta P = 0$, pudiendo estar distribuídos, no solo en conjuntos puntuales, lineales y superficiales, sino en volúmenes, y formar *un conjunto de tres dimensiones*.

Después de estudiar M. Painlevé una función en la proximidad de una línea singular ó cortadura, en la segunda parte de su obra trata del desarrollo en series de las funciones con singularidades cualesquiera, empleando la representación conforme.

Volviendo á la doctrina del Sr. Mittag-Leffler, que conduce á la determinación de una función dotada de singularidades dadas, podemos extractar algunas ideas expuestas en su notable memoria: *Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes*.

«Formando el conjunto de los puntos x, para los que $|x - x'| < R$, el *entorno* de un punto x' dado finito (representante de un valor finito) *correspondiente* á R, el conjunto de los puntos que satisfagan la condición

$$\left|\frac{1}{x}\right| < R$$

será el *entorno* del punto $x = \infty$ *correspondiente* á R.

Considerando un conjunto C de un número infinito de puntos, el entorno de un punto *pertenecerá* á C, si todo punto de este entorno pertenece á C.

Si cualquiera que sea el valor finito x'_0 perteneciente á C, se puede obtener una serie de puntos

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_\nu, x'_0$$

tales que para cada uno pueda definirse un entorno perteneciente totalmente á C y cada punto pertenezca al entorno precedente, el campo C constituye, según Weierstrass un *continuo compuesto de una sola pieza.*

Una función F (x) de x monógena y uniforme es regular en el *entorno de un punto* x', si

$$F(x) = A_0 + A_1 (x - x') + A_2 (x - x')^2 + \ldots\ldots$$

igualdad subsistente en toda la extensión del dominio de convergencia de la serie.

Además, siendo P un conjunto infinito que solo contiene una vez cada punto especial P', según Cantor, comprende todos los puntos tales, que estén contenidos infinitos puntos de P en un entorno tan pequeño como se quiera de P'; y si P' es el conjunto de todos los puntos singulares de F (x), que constituye además un conjunto infinito, P contendrá todos los puntos de P'. Pero puede suceder que P contenga puntos no comprendidos en P'; y si Q es el conjunto de estos puntos, á cada punto de Q pertenece siempre un entorno suficientemente pequeño, para que no se hallen en él puntos de Q, en cuyo caso dicho punto está *aislado*, hallándose constituído un *conjunto aislado* por puntos aislados, y los conjuntos Q y Q' no tendrán ningún punto común. Si S es el conjunto de todos los puntos contenidos en P, sin hallarse al mismo tiempo en Q ni en Q', resulta que $P = Q + Q' + S$.

Si ahora suponemos que P sea el conjunto de todos los puntos singulares de una función F (x), y consideramos F (x) en el entorno de un punto a de Q, esta función podrá tener en cierto entorno de a, la forma

$$G\left(\frac{1}{x-a}\right) + P(x-a)$$

desarrollada según la fórmula de Laurent.

Dado un continuo C perfectamente limitado por un conjunto aislado Q y el conjunto derivado Q', adjuntando á cada uno

de los puntos a que constituyen el conjunto Q, una función

$$G\left(\frac{1}{x-a}\right)+g(x-a),$$

siendo la primera parte una serie convergente según las potencias enteras y positivas de $\frac{1}{x-a}$ y que se anula cuando

$$\frac{1}{x-a}=0$$

y $g(x-a)$ una función entera del grado m en $(x-a)$, demuestra el Sr. Mittag-Leffler que es posible formar una expresión analítica correspondiente, que represente una función monógena y uniforme, y que para el entorno de $x=a$, puede ponerse bajo la forma

$$G\left(\frac{1}{x-a}\right)+g(x-a)+(x-a)^{m+1}P(x-a)$$

y resulte regular en el entorno de cada punto interior al continuo C, perfectamente limitado por el conjunto $Q+Q'$.

Citaremos, como complemento á estas indicaciones las dos memorias del Sr. Mittag-Leffler. *Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction* monogène publicadas en los tomos 23 y 24 de *Acta mathematica*, lo que realiza empleando un dominio tan vasto como sea posible que denomina *estrella*, que es un continuo de una sola pieza de conexión simple y empleando el procedimiento de la *prolongación analítica*.

Hemos recorrido várias ramas de la Matemática para ofrecer una reseña de los medios de determinación propios de cada una, y los de transformación que permiten estudiar unas entidades de ciertos sistemas por otras entidades, que son sus representaciones en sistemas distintos. Hemos reconocido cierta proyectividad, más general que la geométrica, entre objetos de distinta naturaleza, todos ellos rigurosamente definidos, así como las relaciones que los ligan con otros, y á través de estos encadenamientos vemos simplemente sustituciones que conservan unas veces la reciprocidad de los teoremas, ó que incluyen unas clases en otras ó unos principios en sus consecuencias.

En general hay que ver cuales son las condiciones simples equivalentes entre sí y reducir á éstas todas las demás. Las necesarias y suficientes que resuelven cada cuestión, las supera-

bundantes ó las que son insuficientes, que corresponden á la determinación, indeterminación é incompatibilidad ó absurdo; y hemos visto que el cambio de sistemas por adjunción de nuevos elementos, ó la limitación de sistemas generales que pasan á particularizarse, hacen desaparecer ciertas incompatibilidades, aumentando las soluciones posibles ó la realidad de los sistemas, en el primer caso, y las disminuyen en el segundo.

Así como en los juicios lógicos no puede darse mayor extensión al sujeto que al predicado, por deberse hallar aquél en la circunscripción de éste, la hipótesis, en los teoremas, no puede ser más general que la tésis. La relación racional entre las distancias de un punto de una curva á un punto del plano, corresponde al género, *cónica;* pero existiendo los tres casos de ser esta relación mayor, menor ó igual á la unidad, no puede afirmarse para la elipse, por ejemplo, que corresponde á uno solo de los tres casos, pudiéndose afirmar tan solo que dicha relación racional corresponderá, *ó á la elipse, ó á la hipérbola, ó á la parábola*, y será siempre cierta para un cónica, que comprende en su circunscripción más extensa dichas tres especies. El cociente de 7 por 5 no se hallará en la circunscripción de los números enteros; pero se hallará en la circunscripción de los números formados por unidades fraccionarias que comprende á los números enteros compuestos tan solo de múltiplos de cada unidad fraccionaria, en este caso de múltiplos de 5.

De análoga manera que la Astronomía, la Física y la Química se perfeccionan mediante la sustitución de las antiguas hipótesis por otras nuevas más conformes con la realidad, haciendo cada vez más íntimas las conexiones de la ciencia ideal con la ciencia real, aproximando el sistema de los conceptos al sistema de los hechos, también la Matemática se ha alterado á través de los tiempos, bien que siempre levantando las nuevas edificaciones sobre los antiguos cimientos que prevalecen siempre.

NOCIONES PEDAGÓGICAS

CAPÍTULO I

Generalidades acerca de la educación y la enseñanza.

La Pedagogía es la ciencia de la educación, comprende más bien que la enseñanza el perfeccionamiento de nuestras facultades por su acertado ejercicio. Se refiere, no sólo á la inteligencia, sino á las facultades morales. Estas son las propulsoras que conducen al perfeccionamiento.

El utilitarismo ha sido un mal para el desenvolvimiento de las ciencias en España. En nuestros científicos no han predominado los ideales, nuestros matemáticos del siglo XVI fueron náuticos, astrónomos, geógrafos, técnicos; por eso no crearon teorías, ni dejaron huellas en la historia de la Ciencia.

Actualmente seguimos el mismo derrotero, bien que con fines menos plausibles, puesto que estudiamos para el examen, por el diploma que acredite nuestras *aptitudes legales* para obtener cargos, para explotar inmediatamente nuestros conocimientos, para obtener el mayor lucro posible; pero no estudiamos en general, para ser más perfectos, para realizar el bien y para cumplir con los deberes y conformarnos con nuestro modo de ser.

Siguiendo la corriente del utilitarismo, hasta los estudios filosófico-literarios, que encierran en su esfera los ideales más puros de la humanidad, se convirtieron entre nosotros en fuente de beneficios, buscándose lo fastuoso, lo sujestivo, como medio de elevarse y de brillar en las altas regiones de la sociedad; lo que ha producido, al bastardearse los fines de estos importantes estudios, su decadencia natural. Y aun el Estado al considerar la enseñanza pública más bien como medio de lucro que como carga del

mismo, pero carga de las más reproductivas por los beneficios que á la larga consigue, ha contribuido á la decadencia general, favoreciendo los estudios conducentes á la burocracia y á la gran concurrencia; y si bien ha sostenido los estudios de carácter técnico, ha desatendido durante largos años los estudios de las Facultades de ciencias, de escasa concurrencia y costoso sostenimiento, que hubieran comunicado á estos últimos cierta idealidad, favorable á desarrollar el espíritu de investigación y á suplir en cierto modo los idealismos filosófico-literarios, cuya importancia ha decrecido en esta época, que puede denominarse *el siglo de las ciencias*.

Por estas tendencias, nuestros planes de enseñanza apenas se han modificado en la parte científica, mientras que en lo referente al personal, han sufrido constantes alteraciones, perturbadoras por su frecuencia y por las finalidades individualistas, pero pocas veces encaminadas al bien general.

Se podrían llenar algunos volúmenes resumiendo lo legislado acerca del personal docente; pero en muy pocas páginas se conseguiría incluir lo legislado en beneficio de la ciencia, en pró de la mejora de nuestros planes de enseñanza.

La instrucción pública entre nosotros no ha tenido otro objeto que el hacernos aptos para desempeñar algún cargo, empleo ó profesión. Aprender el libro, repetir lo que otros han dicho, ser ecos de lo enseñado por el maestro; pero no el aprender en la realidad de las cosas, ni ejercitar libremente nuestras facultades en investigaciones propias. En una palabra nuestra instrucción no ha sido *educativa*.

El profesorado no es para nosotros un sacerdocio, algo que se forma por vocación, que busca si es preciso el sacrificio por conseguir la realización de los dos ideales, la ciencia y el bien; y no es de extrañar que esto suceda, cuando nuestros planes de enseñanza nos lo vedan.

Las relaciones del profesor con los alumnos son puramente reglamentarias. No hay la colaboración que se observa en las universidades alemanas, que heredaron de la Suiza las enseñanzas que en Iverdun inauguró el ilustre Pestalozzi, creando la *ciencia de la educación*.

Nosotros seguimos aferrados al dogmatismo. Enseñar el libro, á lo más interpretarlo; pero no se estudia en la naturaleza.

Desde la enseñanza elemental se ejercita la memoria; pero no se despiertan otras facultades bajo la dirección de nuestra actividad, que luego se ha de convertir en nuestra voluntad.

En la segunda enseñanza prevalece el libro; y el alumno que

tiene una buena memoria, alcanza fácilmente el objeto que se propone.

Al comienzo predominan los estudios de memoria, el latín, la Geografía, la Retórica que hacen adquirir los resabios de la imitación, que se aplican á estudios racionales tales como las matemáticas y la filosofía.

La enseñanza, por el contrario, debe tener el carácter educativo. Tal cual se halla entre nosotros, su fin es aprender algunas generalidades acerca de todas las ciencias, mediante el procedimiento de la repetición, prepararse para el exámen, obtener la aprobación de los cursos para alcanzar un diploma, con objeto de disfrutar ciertos derechos que al agraciado le conceden las leyes. Esto lleva, pues, consigo el aumento de la burocracia y la disminución de las clases trabajadoras.

La enseñanza educativa tiene por objeto el desarrollar las facultades y aptitudes del individuo para que se baste á sí mismo, independientemente de la tutela del Estado, de la que solo pueden prescindir las naciones muy adelantadas, que se hallan en el pleno ejercicio de la explotación de sus riquezas materiales é intelectuales ó morales.

En la imposibilidad de seguir este extremo y las desventajas ruinosas que trae á la larga un plan puramente instructivo ó doctrinal, se debe buscar el mayor grado posible de carácter educativo, buscando en cierta medida el justificar la idoneidad de los indivíduos, lo que deben fijar las leyes más ó menos acertadas del Estado.

Aprender á medias ó rudimentariamente muchas cosas, tan solo por aprenderlas, vale menos que no aprender ninguna; el aprenderlas siquiera como ejercicio de nuestra actividad, vale cuanto, ha ganado nuestra cultura intelectual y nuestra aptitud para hacer algo por nosotros mismos. Una nación gana con tener inteligencias aptas para bien discurrir. Este es uno de los fines de la educación. Lo que aprende uno por sí es como algo propio, que puede reproducirse, poniendo en ejercicio nuestra inteligencia.

El libro es un auxiliar muy valioso, sirve para fijar los conocimientos; pero debe preferirse, en lo posible, el alcanzarlos por el estudio directo ó por nuestro trabajo y nuestras iniciativas. La del alumno obrará bajo la dirección del maestro.

El aprender un libro, tan solo para repetirlo en un exámen ó en unos ejercicios de oposición al profesorado, será provechoso para el indivíduo afortunado que haya conseguido cumplir ventajosamente con lo dispuesto por la ley; pero será ineficaz para el progreso de la sociedad.

Si de los fines á que se han encaminado nuestros planes de enseñanza pasamos á considerar los medios empleados para su realización, habremos de convenir en que aquéllos corresponden exactamente á la deficiencia de éstos.

Aquellos *jardines de la infancia* que constituyen una práctica educativa inspirada por los Pestalozzi, Basedow y Froebel no han tenido entre nosotros la realidad que en Suiza, Alemania y otras naciones. Siempre nos han faltado los medios á las iniciativas para basar en ellos la educación elemental, y al faltarnos éstos ó análogos procedimientos, siempre nos hemos visto precisados á suplirlos con el empleo del libro y el ejercicio de la memoria, para comunicar á los niños una instrucción prematura ó puramente artificiosa, mas bien que un desarrollo de las diversas aptitudes, gérmenes de las futuras facultades intelectuales y morales, que es en lo que consiste la enseñanza educativa.

El reducirse á la duración de la clase la influencia del profesor sobre el alumno en los centros de segunda enseñanza, da á ésta un carácter eminentemente teórico, por más que en la clase no falten los ejercicios prácticos. Algo se ha hecho en estos últimos tiempos por imitar las costumbres arraigadas en naciones como Inglaterra y Alemania, donde la educación física se combina con la educación intelectual; pero varias dificultades han impedido la realización de estos propósitos, así como la organización de la enseñanza cíclica, la mas conforme al desarrollo individual, muy diferente de estas ficticias simetrías, que en nuestros planes de enseñanza imponen un profesor para cada asignatura con la sola variación de poder ser diaria ó alterna, así como también se exige en todas ellas igual género de ejercicios; es decir, que sean exclusivamente teóricos, para prueba de cursos, como también igual género de pruebas para obtener puesto en el profesorado en enseñanzas, que por su calidad debieran exigirlas muy distintas, ya que las deficiencias de nuestros sistemas educativos no nos hayan permitido usar otros procedimientos.

Si consideramos, por fin, el grado superior de la enseñanza, vemos repetidos los defectos que hallamos en los grados inferiores; la misma reglamentación puramente formal, es decir, externa á la realidad y naturaleza de las cosas. Programas extensos concernientes á la parte teórica de la ciencia, libros también extensos, conferencias continuas por parte del profesor que reduce al alumno á la pasividad del mero oyente. Escasez de prácticas en las asignaturas, que por su carácter las exigen de continuo. El principal agente es la memoria, el resultado más visible y por desgracia de mayores éxitos, la repetición oral de lo que sin asi-

milárnoslo, hemos tenido que adquirir á costa del penoso ejercicio de la repetición, sin que de él haya resultado ningún perfeccionamiento en nuestros medios de discurrir, ni de emplear nuestra inteligencia, que solo aumenta su energía por el ejercicio metódico de la actividad.

Por el contrario, el convertir la enseñanza en animado coloquio entre el profesor y el discípulo, en el que ambos toman parte, sin que el interés decrezca, además de contribuir á que las relaciones sean más íntimas y familiares que las del disertante y el oyente, dá resultados positivos.

No es el profesor quien va á hacer alarde de sus conocimientos, á dar una conferencia irreprochable, que hayan de recoger con gran fatiga de atención pasiva los alumnos (lo que será conveniente solo en ciertas enseñanzas dogmáticas). Estos deben ser los protagonistas, el profesor la fuerza propulsora que los ha de guiar y encauzar en los razonamientos, manteniéndolos en el verdadero terreno de la investigación.

El trabajo individual continuado; este es el poder que ha producido las maravillas de la ciencia y los prodigiosos medios para su progreso, que admiramos en las naciones más adelantadas. Este trabajo ha formado las escuelas científicas. Monge reunió bajo su esfuerzo los de sus discípulos Dupin, Carnot, Brianchon y Poncelet. Cauchy fué seguido por Puiseux, Liouville, Hermite y, en una palabra, su inmensa labor fué secundada, desarrollada y perfeccionada por la serie de matemáticos franceses que han perpetuado aquellas enseñanzas por una sucesión continua de nuevos desarrollos de investigaciones. Gauss encontró un digno heredero en Riemann, que continuado por Neumann, Durège y otros, ha llegado hasta las admirables doctrinas de Weierstrass y otros matemáticos alemanes que mantienen la ciencia en un estado de creciente explendor.

Así la ciencia se hereda en cada periodo, á través de los siglos.

Esas edificaciones soberbias que constituyen las villas universitarias, conjuntos de construcciones graníticas, que desde hace siglos se han ido agrupando bajo la influencia de generosas iniciativas, se deben al amor á la ciencia que ha hecho surgir las universidades de Oxford y de Cambridge, donde tantos talentos se han sucedido, ejerciendo decisiva influencia en la vida y prosperidad de la nación que las ha sabido crear y sostener.

Alemania, á raíz de su desastre de Iena, fundó la universidad de Berlín, para la que cedió el rey de Prusia Federico-Guillermo uno de sus mejores palacios. El príncipe Alberto de Hohenzollern

creó la universidad de Koenigsberg, y el emperador Guillermo fundó por último la universidad de Strasburgo, ese prodigio de construcciones, que ha superado á las demás universidades del mundo y que hoy brilla por los programas de sus enseñanzas, al lado de las más renombradas universidades alemanas, donde en matemáticas, entre las enseñanzas ordinarias, se encuentran las teorías de las curvas alabeadas y de las superficies, teoría del potencial.—Ecuaciones de derivadas parciales de la física matemática.—Teoria de los grupos de transformaciones.—Teoría general de las funciones.—Las ecuaciones diferenciales tratadas desde el punto de vista de las funciones.—Funciones elípticas.—Funciones hiper-elípticas.- Funciones abelianas y funciones θ. - Teoría de los números.—Teoría de las invariantes.—Id. de los números algebráicos.—Id. de los grupos finitos. - Cálculo de probabilidades.—Historia de las matemáticas.

En Suiza, donde el problema de la educación está sobre los demás problemas, podríamos recorrer una serie ascendente y deliciosa desde el jardín froebeliano hasta la monumental escuela politécnica de Zurich y las universidades de Zurich y de Ginebra.

En los Estados Unidos la competencia entre unas y otras universidades, que tienen vida propia, por completo independientes del Estado, eleva naturalmente el nivel científico y estimula al propio enaltecimiento como resultado del trabajo y de los talentos individuales.

Las escuelas científicas, prosiguiendo su labor continua á través del tiempo, juntamente con los cuantiosos recursos acumulados en cada nación, han convertido la enseñanza en fuente de prosperidad, y los planes de enseñanza se forman atendiendo, no á las conveniencias individuales, sino á las de la nación.

Esto es lo que podemos presentar como un resúmen de lo que debe constituir las finalidades de la enseñanza educativa y los medios que ha de emplear.

El lujo de una nación debe consistir en poseer estos medios de cultura que trascienden á otros organismos y especialmente al acrecentamiento de recursos que brotan de la aplicación de la ciencia, y de la existencia de un orden moral que regule nuestras acciones dentro de la esfera en que cada uno deba vivir por sus aptitudes, por sus merecimientos, y sobre todo, por el trabajo que realice en su profesión ó estado.

Es preciso que el ambiente de la Escuela, del Instituto y de la Universidad se prolongue hasta acompañarnos, siquiera como grato recuerdo, en las varias circunstancias de la vida.

La enseñanza transformada en ejercicio agradable y fácil,

conducirá á un estado de perfección moral, que impidiendo las ambiciones desmedidas ó desproporcionadas á nuestro modo de ser, á nuestras aptitudes ó condiciones individuales, despierte y arraigue el espíritu de justicia. La ciencia nos parecerá siempre útil y agradable, y no hallaremos en los lábios, hasta de los que ostentan diplomas académicos, la constante pregunta ¿para qué sirve esto? ¿qué fin útil ó práctico tiene tal teoría? porque sabrán de antemano que todo en la ciencia es útil, por lo menos para la perfección espiritual, y que todo puede tener utilidad más ó menos remota.

CAPÍTULO II

Algunas indicaciones acerca de la enseñanza matemática

La Matemática, durante la segunda mitad de este siglo, en el que se ha enriquecido con nuevas ramas, se ha transformado, no solo en su parte objetiva, sino muy especialmente, en su parte formal ó subjetiva.

Esto es un hecho natural. La época de invención por la eficacia del genio se ha transformado en la época del progreso por la influencia del método. El encadenamiento de las ideas atrae á las unas, mediante las otras. (*)

Antes, el conjunto de conocimientos era poco considerable, entonces tan solo se imponía la profundidad del punto de vista, el análisis detallado; el espíritu penetraba con fuerza en terreno firme. Hoy la masa de los conocimientos no puede ser dominada en su conjunto. El artificio del método se ha hecho necesario, para suplir la deficiencia intelectual.

La instrucción, no solo comprende la adquisición de la ciencia, sino además la educación de las facultades intelectuales, con el fin de aumentar su potencia.

Con este objeto, creemos útil reunir algunos preceptos ó indicaciones.

El precepto cartesiano: *No aceptar jamás ninguna cosa como verdadera mientras no la conozcamos evidentemente coma tal*, en la enseñanza elemental se limita á mantener el predominio de la intuición en la adquisición de todo conocimiento. Las definicio-

(*) Para este capítulo nos han servido los apuntes conservados de la nota: *Quelques réflexions sur l'enseignement* presentada y leida en el Congreso de *l'Association françaire pour l'avancement des sciences.*

nes, divisiones ó variedades de objetos, las construcciones inmediatas de éstos según sus propiedades fundamentales, ejercitarán la actividad naciente del alumno.

Las cuestiones más sencillas, rodeadas de ciertos artificios pedagógicos fortaleceran lentamente, para asimilarlos después los hechos percibidos, que se transformarán en conceptos, ó adquirirán naturaleza intelectual.

Será preciso, al principio, aprender más en los objetos que en los libros; así como en las ciencias naturales, la experiencia y la observación de los hechos es el punto de partida, en la Matemática, los conceptos estarán tomados de los números, de las figuras, de los modelos, que serán objetos puestos á la intuición. Hechos tales como la superposición, la igualdad, la desigualdad, las sustituciones, la ordenación de objetos etc,, deben fijarse, para no preocupar ya en los grados superiores. Sobre todo, al principio, no será difícil dar á conocer, cómo ciertos datos bastan para traer consecuencias y cómo otros producen incompatibilidades ó superabundancia, lo que conducirá á conocer las dos partes que componen el teorema y á distinguirlas, y á comprender también cómo los teoremas se transforman entre sí mediante la sustitución en las hipótesis de ciertos elementos por otros. Se verá también cómo muchas cuestiones son casos particulares de una misma cuestión.

Todo esto se afianzará estudiando los teoremas desde el punto de vista de su reciprocidad. La Geometría, por la variedad de sus proposiciones y el carácter instructivo de las mismas es la rama de la Matemática más adecuada para aprender numerosos teoremas que ejercitarán al alumno en las proposiciones directas, contrarias y recíprocas, inmediatamente.

La Geometría debe preferirse también, en el primer grado de la enseñanza, agrupando al principio las proposiciones relativas á la igualdad y desigualdad, que son las más sencillas y las más fundamentales.

La Aritmética podrá estudiarse combinada con la Geometría. Los conceptos de asociación, conmutación, distribución y contenencia dominan en esta rama y pueden también preparar para la combinatoria.

Es una preocupación perjudical el subordinar el plan de la enseñanza á ciertos detalles, tales como el que exige hallar el número de coordinaciones, permutaciones y combinaciones, después de conocerse el binomio de Newton, en cuyo desarrollo se funda el conocimiento de dicho número; el considerar como precedente indispensable para el estudio de los polígonos regulares el

conocimiento del Algebra, el exigirse el del Algebra superior para emprender el estudio de la Geometría analítica, etc.

Las antiguas divisiones de la ciencia clásica no bastan hoy, cuando nuevas ramas se han creado y otras han sufrido ciertas disgregaciones, ya que es difícil señalar los límites de las unas y de las otras, cuya unión ó separación dependen del criterio de cada autor ó de las exigencias de ciertas instituciones en las que se modifica el concepto de la enseñanza, con arreglo á fines especiales.

Esta variabilidad manifiesta que la constitución de las antiguas ramas no es necesaria, y puede esperarse que las necesidades actuales y el alcance de las nuevas ideas originen otra clasificación del conjunto incluído actualmente en la ciencia matemática, según la importancia relativa de los principios ó conceptos fundamentales.

Por otra parte, el orden de la enseñanza no debe ser esencialmente sucesivo, porque no hay sucesión necesaria ó absoluta entre las diversas ramas.

La enseñanza impone tal ó cual orden, porque es preciso algunas veces subordinar la sucesión de las cuestiones á los medios intelectuales de los alumnos, á las deficiencias de las inteligencias juveniles; pero esto no es aplicable á la ciencia en su desarrollo lógico. Si el cálculo aritmético debe preceder al Algebra, esto depende de que debemos ofrecer hechos concretos á las inteligencias poco cultivadas; pero podría exponerse el conjunto de las leyes numéricas lo mismo que las que rigen á la Geometria, sin efectuar cálculos, ú obtener todo aquéllo cuya existencia se demuestra en una exposición *a priori* de la ciencia; porque las relaciones existen independientemente de los medios de que disponemos para su realización, que sale con frecuencia de la región abstracta de los conceptos.

La ciencia ha experimentado algunas veces los efectos de una insuficiencia en los medios de demostrar, que solamente afecta á su exterior; tal ha sido la necesidad del empleo de los números para demostrar teoremas geométricos, que hizo desaparecer Staudt con su método gráfico, lo que demuestra prácticamente la independencia de los dos órdenes de conceptos, que la inteligencia tuvo aptitud de prever, aunque no se hubiera conseguido la realización.

La ciencia, en su desarrollo lógico puramente deductivo, podría comenzar hasta por el Analisis infinitesimal, que envuelve en sus dominios las demás ramas; pero, *prácticamente,* se impone en la enseñanza una marcha ascendente que debe ser recíproca de

la exposición perfecta, según las solas necesidades de su constitución lógica.

La enseñanza, en vez de adoptar la sucesión lineal, debe adoptar la disposición cíclica, debe subordinar los detalles al conjunto; debe dividir, disgregar los sistemas clásicos, que solamente tienen una existencia provisional, ligada, desde sus orígenes, á deficiencias y faltas de recursos inherentes á su infancia.

Convienen pues las subdivisiones de las ramas ó materias de estudio con objeto de llegar más directamente al fin, evitando los rodeos.

En la enseñanza media es preciso destruir ciertos prejuicios, debidos á un espíritu exajerado de generalización, que más tarde cuesta trabajo destruir.

Es preciso anunciar previamente algunos defectos de la ciencia en lo que concierne á la parte constructiva, y algunas excelencias, en lo que se refiere á la variedad de sus conceptos.

Es preciso presentar las ecuaciones algebráicas como un dominio muy limitado, y la imposibilidad de resolver ciertas cuestiones, según condiciones incompatibles, nacidas de una ignorancia de la naturaleza de los objetos relacionados y de los resultados exigidos.

Es preciso, en esta parte de la enseñanza, hacer resúmenes y ensayos para practicar los diversos métodos.

La enseñanza superior debe reunir dos caracteres: firmeza y espiritualidad en los conocimientos.

Las Facultades de Ciencias deben proponerse dos fines, preparar para las aplicaciones y para el profesorado. El primero da firmeza á la inteligencia, su carácter debe ser práctico.

La sobriedad en los principios, la sencillez teórica para llegar fácilmente al objeto. Corto andamiaje de conceptos, rigor en las deducciones más directas, sin las sutilezas propias del espíritu filosófico. Esto permite la adquisición rápida de lo más necesario, para utilizarlo en las ciencias de aplicación y, al mismo tiempo, da los fundamentos para una nueva dirección hacia el profesorado y los superiores conceptos de la ciencia.

Las primeras ramas, acortadas, pueden comprender la parte clásica, como bosquejo de la ciencia en su perfeccionamiento actual.

Es preciso hoy agregar algunas ramas preferentemente teóricas para formar el profesor y el investigador.

La Historia, la Pedagogía y la Crítica matemática deben completar estos estudios.

Conviene en cada rama hacer breves resúmenes históricos en-

lazados con otros críticos que completen el estudio real del objeto con noticias sobre su generación y perfeccionamiento en las diversas épocas y también sobre la generación lógica de los conceptos, de una manera absoluta, según su valor en los dominios de la razón humana que los contiene á todos, conforme á cierto orden de subordinación y de coordinación.

No es suficiente el estudiar el objeto mediante un encadenamiento ó tejido de teoremas que forma la ciencia objetiva, ni el objeto como una emanación de nuestro raciocinio, sea *a priori*, sea después de haber tomado del mundo externo los primeros datos de los que nacen los primeros conceptos, definiciones, postulados ó principios que crean una ciencia real al lado de una ciencia ideal; es preciso también estudiar la correspondencia de los conceptos que constituyen nuestro ser espiritual y la ciencia *á priori* edificada por nuestra actividad sobre los conceptos de la razón con los objetos, tanto del mundo externo, como los debidos á la fuerza combinatoria de nuestra inteligencia.

Estas relaciones subjetivo-objetivas han dilatado el mundo matemático, mediante la adjunción de seres de razón, tales como el infinito, lo imaginario, el hiperespacio, etc.

Todas estas relaciones histórico-críticas pueden examinarse con oportunidad en cada curso especial, con el fin de complementar la parte puramente técnica; pero ha de concederse capital importancia á la formación del profesor, que debe conocer, no solo el objeto matemático, sino la inteligencia creadora de este objeto, en sus relaciones mútuas, y con el fin de la enseñanza, no de un modo absoluto, que nos haria pasar de la Matemática á la Metafísica, sino tan solo en las fronteras, para permanecer aquélla en su propia jurisdicción, iluminada por algunos resplandores de la madre de las ciencias.

No insistiremos en la necesidad de la *crítica matemática* como complemento de los estudios del profesorado, por haber ya insistido en diversas ocasiones acerca de este punto.

CAPÍTULO III

Los grados de la enseñanza

No es fácil alterar los tres grados que siempre se admiten en la enseñanza, pues tienen como base los tres periodos de desarrollo intelectual, bien que algo puede decirse respecto á lo más oportuno de realizar en cada uno de ellos.

El primero es el de las intuiciones empíricas, el de la receptividad intelectual, de la acción de la Naturaleza sobre el individuo. Los sentidos se ejercitan en su mayor estado de viveza, adecuado para obtener impresiones fuertes en el alma, que se modela según los objetos, como se modelaría la cera bajo la impresión de un sello.

Las definiciones, las divisiones naturales de los objetos, las operaciones mecánicas, siempre efectuadas con objetos materiales: el estudio directo de la Naturaleza, prescindiendo en todo lo posible de los libros, que han de ser reducidísimos; lo preciso para ejercitar la memoria, recurso natural en esta edad, en el que nada se conoce y todo se debe grabar, realzando los hechos por la imaginación.

El progreso del indivíduo debe imitar al progreso de la humanidad. El desarrollo simultáneo de la naturaleza debe ser imitado en el desarrollo simultáneo de las aptitudes inferiores. El orden cíclico es el más adecuado, bien que entre nosotros existen dificultades para su realización. La repetición amplificada gradualmente, poco detallada al principio, respetando tan solo aquéllo más interesante de cada asunto, facilitará el trabajo de asimilación intelectual, de grabar lo externo en las débiles representaciones intelectuales del niño.

La segunda enseñanza será la continuación natural de la primera. También se evitará el abuso de los libros que tienen el inconveniente de ejercitar con preferencia la memoria y de acostumbrar á aprender sin entender aquéllo que se aprende, muchas veces por desconocerse el significado de las palabras, lo que exige dar gran importancia al estudio del lenguaje.

En este periodo son perjudiciales ciertas preocupaciones, tales como la de subordinar el estudio de la Física al estudio de la Matemática, por exigirse en alguna teoría de aquélla ciertos conocimientos de ésta, ó en la Matemática misma, por ejemplo, subordinar el Algebra al estudio de los polígonos regulares.

Conviene dividir las asignaturas hoy adoptadas en los planes de enseñanza, desgraciadamente demasiado sobrecargadas por los autores de libros de texto, interesados en ello y aun suprimir las teorías ó parte de las mismas que impidan ó perjudiquen al fin educativo.

La ciencia no debe presentarse al principio como un conjunto simétrico y armónico, lo que sería hacer su síntesis. Al contrario, cierta irregularidad para elegir lo adaptable á la inteligencia en cada grado de desarrollo, es conforme con el predominio del análisis, que investiga, en medio de cierta obscuridad, respecto á los

fines mediatos ó remotos; pero conservando la claridad á distancias próximas del objeto ó en el objeto mismo.

Los estudios de segunda enseñanza debieran ser cíclicos. Si bien este procedimiento exige mucho interés y cuidado por parte del profesor. Es preciso enseñar, no cada asignatura en su totalidad, sino aquéllo que sea más indispensable.

Es un defecto de la enseñanza el subordinar nuestra acción, como hemos dicho, á ciertas simetrías que complican el trabajo del alumno, tan solo preparado ó con aptitudes para la parte más elemental ó asequible del sistema de conocimientos que se le ofrece.

No hay razón para exigirse, por ejemplo, á un alumno toda el Algebra en un primer estudio; sería más oportuno iniciarlo en los estudios matemáticos, por nociones simultáneas de Aritmética y de Geometría; especialmente ésta es muy adecuada para educar la inteligencia, por su carácter intuitivo, sin ser indispensable un estudio de la Geometría plana exclusivamente; pues, con auxilio de modelos, se puede hacer adquirir al alumno nociones de Geometría del espacio, derogándose en este estudio la arbitraria división de Geometría plana y del espacio, que no tiene razón de ser.

Asimismo pueden desde un principio enseñarse teoremas relativos á la combinatoria, pues dependen de un procedimiento muy natural, susceptible de practicarse con gran facilidad por el alumno y disponerle para aprender teorías que se consideraban en el plan antiguo poco menos que innaccesibles.

Tampoco hay que exigir demostración en todo. Entre las demostraciones deben elegirse las más naturales, aquéllas mas apropósito para que permanezcan en la inteligencia del alumno como norma ó regla de sus actos en la investigación de la verdad. Las verdades fecundas en consecuencias deben destacarse del fondo general, y para servirnos de ellas en las deducciones que ejerciten la actividad del alumno, enseñándole á servirse de su inteligencia.

A la teoría abstracta debe preferirse el problema, que sirve para formar la ciencia. Las verdades descubiertas mediante la resolución de los problemas quedan más permanentes en la inteligencia, pues, ésta se halla en posesión de los medios de obtenerla cuantas veces se borren de nuestra memoria.

No debiéndose presentar la ciencia como un conjunto simétrico, tal cual resulta en su último grado de perfeccionamiento, es preciso obligar al alumno á crear este sistema por su trabajo propio, por series de análisis que permitan llegar á la edificación mediante construcciones parciales. El final de su labor será la

síntesis. Entonces convendrá hacerle fijarse en la disposición total, en la importancia relativa de cada elemento que integra el conjunto.

No debe menospreciarse el pasado para solo vivir en el presente. Será de utilidad grande el presentar las teorías, según las alteraciones que han sufrido en su génesis histórica, hasta llegar al perfeccionamiento actual. Así éste se explica, y no aparece como producto arbitrario de ciertos convencionalismos. Convendrá citar, con motivo de los conocimientos que se vayan adquiriendo, los nombres ilustres á quienes se debe su orígen.

Debemos pues en la enseñanza educativa imitar la historia del progreso humano, en la que el análisis, este método de descubrimientos, prevalece sobre la síntesis, innecesaria cuando el conocimiento científico no se ha robustecido suficientemente para poder abordar el trabajo de la sistematización.

Es de gran importancia, en fin, el librar á los alumnos de ciertos prejuicios, á que naturalmente les conduce su tendencia á generalizar. Así, convendrá, por ejemplo, manifestarles que la resolución algebráica de las ecuaciones no es un problema general, que permita ascender de las ecuaciones de segundo grado á las ecuaciones de grados superiores, que la continuidad no es una ley general en todos los dominios de la Matemática, que muchas cuestiones sólo llegan á una resolución aproximada, como las de la trisección del arco y la cuadratura del círculo, anunciándoles previamente que la ciencia resuelve muchas cuestiones, pero que no las resuelve todas; que la Matemática no resuelve algunas por ser irresolubles en las condiciones dadas y que siempre avanza sin dejar de ser susceptible de nuevos adelantos.

La enseñanza superior reviste un nuevo caracter. Sin abandonarse la pauta general que prescribe la acción individual y por consiguiente la insistencia en la resolución de los problemas, que constituye un ensayo de invención ó de investigación en que la actividad é iniciativa propia se ejerce, hay que elevarse paulatinamente á los altos ideales, á los principios generales de influencia inmediata para las grandes síntesis.

Las obras que sucesivamente se han ido publicando en el trascurso de este siglo indican la metamórfosis sufrida por la enseñanza. El Algebra era la teoría de las ecuaciones numéricas, tal cual le edificaron los matemáticos desde Descartes hasta Sturm, especie de conglomerado de procedimientos parciales para ayudar á la obtención práctica de las raíces, fundados generalmente en el concepto de continuidad de la función algebráica. La geometría analítica se extendía tan sólo á las cónicas y á las superfi-

cies de segundo grado. El cálculo infinitesimal á los métodos de diferenciación é integración.

Lacroix, Legendre, Lefebure de Fourcy, Sonnet y Frontera, Cirodde, fueron los autores que mayor influencia tuvieron hasta hace unos treinta años, y entre nosotros Cortazar, el P. Feliú y Lista, que sucedieron al P. Tosca, á Bayls y Vallejo.

La creación de la cátedra de Geometría superior, en Francia, para Chasles, comenzó á ensanchar los horizontes. Este geómetra creó un nuevo sistema de Geometría analítica, que después se ha perfeccionado por los Sres. Fiedler y Ovidio, resultando una especie de traducción analítica de la Geometría de Staudt, si bien Chasles la formó como continuación y desarrollo de la obra de los porismas de Euclides, que había reconstituído, basándose en los vestigios que ofrecían los lemas de Pappus.

El profesor alemán Baltzer introdujo en la enseñanza clásica varias teorías modernas, especialmente la de las determinantes, en cuya obra trabajaron también Truddy y Brioschi. Pero la doctrina de Boole, desarrollada por Cayley, condujo á las obras de Salmon, quien amplificó la Geometría analítica hasta las curvas de tercero y cuarto grado y aun de órdenes superiores, llegándose también á la elegante síntesis realizada por Clebsch, en la que además de seguir los procesos de la Geometría sintética, donde domina el espíritu del método de Staudt, bien que con la forma del análisis, se desarrolla la Geometría como traducción natural del Algebra de las formas.

El Algebra ordinaria á su vez tiende hacia las teorías de Abel y de Galois, á la resolución algebráica, fundada en la teoría de las sustituciones, cuyo primer ensayo realizó Serret en su Algebra superior. A su vez la *Théorie des substitutions* de M. C. Jordan sirvió de fuente de conocimiento de estos estudios, en los que han trabajado recientemente los Sres, Petersen, Borel y Vogt, hasta que el profesor de la universidad de Strasburgo Sr. Weber ha realizado la más hermosa síntesis conocida del Algebra, y entre nosotros recientemente el Sr. Echegaray ha publicado su obra *Resolución de ecuaciones y teoría de Galois*, resúmen de sus lecciones dadas en el Ateneo de Madrid.

Por otra parte, las obras de cálculo diferencial é integral se han fundido con la teoría de las funciones en las modernas obras de Análisis, tales como las de los Sres. Laurent, Jordan, Gomes Teixeira, Picard y Forsyth.

La serie de estas obras expresa las alteraciones que han sufrido en las Facultades de Ciencias los estudios de las diversas teorías matemáticas.

Se ha verificado un descenso de las teorías superiores hacia los dominios inferiores de la ciencia. Los conceptos de ésta al enlazarse cada vez, por encadenamientos más densos de verdades, adquieren facilidades para la asimilación intelectual. El método interviene como auxiliar poderoso de la enseñanza.

Cada vez los métodos son más eficaces. El método proyectivo es de superior alcance al de los métodos de superposición, de semejanza de figuras, empleados por la Geometría elemental, el algoritmo infinitesimal es de mayor eficacia que los procedimientos del análisis algebráico.

Así pues, cada vez la inteligencia posee más poderosos recursos, que facilitan el poder abordar cada vez con mayor facilidad las teorías superiores.

Para conciliarse los dos caracteres, á saber, sobriedad y elevación que debe reunir la enseñanza matemática, convendrá acumular preferentemente en los primeros cursos los estudios clásicos, que conducen á los conocimientos de caracter práctico, los más útiles como ejercicios que fijan en la inteligencia las nociones fundamentales y que sirven para las carreras de aplicaciones.

Mas tarde llega el momento de bifurcación de los estudios; unos alumnos pasan á hacer aplicaciones de la Matemática á las ciencias técnicas, otros aspiran á elevarse hacia las ramas abstractas, al concepto puramente teórico y filosófico, que conduce al profesorado. En esta segunda etapa, ya la inteligencia busca nuevos procedimientos. No necesita acudir siempre á la intuición inmediata de la verdad, busca procesos lógicos, rápidos y eficaces para adquirir con facilidad. Esto conduce al simbolismo, á la creación de entidades ficticias que dilatan el dominio de las entidades reales con las de pura razón, formando sistemas mas amplios, completos y simétricos. Se camina hacia la unificación y sistematización de los conceptos, á adquirir la virtualidad de poseerlos en conjunto, á esquematizarlos y reducirlos al mínimo de contenido y al máximo de generalidad; se aspira á conocer cada vez por menor número de conceptos, de los que puede brotar toda la realidad mediante un descenso que haga aparecer las cualidades que fueron abstraidas de los objetos, que así van recobrando su individualidad.

Esta marcha ascendente en que lo objetivo se borra paulatinamente, conduce al dominio subjetivo, al predominio del sujeto, á la consideración predominante de la acción intelectual sobre el objeto, desapareciendo al mismo tiempo la reacción del objeto sobre nuestras facultades.

En este momento nos hallamos en el dominio de la *crítica ma-*

temática, rama la más superior de los estudios, que es una aplicación de la lógica á los estudios matemáticos.

La crítica matemática comprende: la lógica que da las leyes del razonamiento, la pedagogía matemática que aplica estas leyes al desarrollo y perfeccionamiento intelectual del alumno, por más que también debe propender al desarrollo moral, es decir, á la adquisición de las aptitudes científicas, tales como el amor por la ciencia, el gusto por la adquisición de la verdad, y el espíritu de sacrificio que impulsa á las investigaciones.

Los estudios históricos son un complemento del estudio dogmático, son auxiliares para la adquisición de la ciencia y forman un grado paralelo con el estudio doctrinal. El estudio histórico sigue á la ciencia en su formación natural, sorprende la acción gradual de la inteligencia en la conquista de la verdad. El estudio dogmático de la ciencia, ya formada por los procedimientos y métodos adquiridos y, á lo sumo, mediante los métodos de enseñanza y educativos, hace ostensibles los procesos de la adquisición de la ciencia por el trabajo propio de cada individuo.

Estas consideraciones manifiestan cuán importante es completar los estudios de la carrera del profesorado con este complemento de carácter filosófico que integra el estudio de la ciencia en sí, por el estudio de la Ciencia en su génesis ideológica.

FIN

ERRATAS

Pág.	Línea	Dice	Debe decir
6	17	matemáticos	filosófico-matemáticos
17	33	objetivo	subjetivo
35	14	en el	el

ÍNDICE

Págs.

INTRODUCCIÓN

§ 1.º Los conceptos fundamentales. 5
§ 2.º Los sistemas filosófico-matemáticos 6
§ 3.º Los críticos matemáticos 10
Cap. I. La ciencia real y la ciencia ideal 12
Cap. II. La formación de los objetos matemáticos. . . . 15
Cap. III. La enumeración de los conceptos 22
Cap. IV. Necesidad de la crítica matemática, su objeto. . 27
Cap. V. La crítica en la Aritmética 31
Cap. VI. La crítica en la Geometría. 35
Cap. VII. La crítica del Álgebra 41
Cap. VIII. El Álgebra de la Lógica 51
Cap. IX. La crítica en la Geometría analítica 58
Cap. X. Geometría numerativa. 62
Cap. XI. Crítica de la teoría de las funciones 65
Cap. XII. Geometría cinemática 80
Cap. XIII. Geometría diferencial. 81
Cap. XIV. La teoría de los grupos de transformaciones. . 88
Cap. XV. El concepto de imaginarismo 96
Cap. XVI. El infinito en la Matemática 102
Cap. XVII. La unificación de los conceptos 107
Cap. XVIII. Recapitulación. 121

NOCIONES PEDAGÓGICAS

Cap. I. Generalidades acerca de la educación y la enseñanza 135
Cap. II. Algunas indicaciones acerca de la enseñanza matemática 141
Cap. III. Los grados de la enseñanza 145

BIBLIOTECA PROVINCIAL LOGROÑO





R
16122
Gobierno de La Rioja
BIBLIOTECA CENTRAL
10000227484

Precio: 4 pesetas.

ÁTICA Y PEDAGOGÍA MATEMÁTICAS